

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ТРУДЫ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ
им. А. И. ВОЕЙКОВА

Выпуск

374

389993

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МЕТЕОРОЛОГИИ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук Л. С. ГАНДИНА
д-ра физ.-мат. наук Р. Л. КАГАНА



ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ
ЛЕНИНГРАД
1976

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д. 195196 Малосохтинский пр., 68

Сборник посвящен вопросам применения современных статистических методов в метеорологии и климатологии. Рассматриваются методы статистической теории выбросов и их приложения к анализу временных метеорологических рядов. Излагаются косвенные методы определения ряда климатических характеристик и результаты применения этих методов к построению полей указанных характеристик для территории СССР. При рассмотрении ряда вопросов используется метод статистического моделирования.

Сборник рассчитан на специалистов по метеорологии и смежным дисциплинам, а также на аспирантов и студентов соответствующих специальностей, интересующихся применением статистических методов в метеорологии.

The book is devoted to the problems of application of modern statistic methods to meteorology and climatology. Methods of statistical ejection theory and their application to the analysis of meteorological time series are considered. Indirect methods for determination of some climatic characteristics and the results of application of these methods to construction of the above characteristics are presented. The method of statistical modelling was used to solve some problems under consideration.

The book is intended for specialists in meteorology and related fields as well as for post-graduates and students specialized in appropriate fields and interested in application of statistical methods in meteorology.

НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫХ О ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ БАРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Известно, что макромасштабная статистическая структура барического поля является наиболее изученной по сравнению со структурой других метеорологических полей. Однако это относится главным образом к структуре пространственной, характеризующей синхронные связи поля давления в разных пунктах. Хуже исследована временная и особенно пространственно-временная статистическая структура. Так, в недавно опубликованном обзоре С. М. Олевской [15] упоминается около 40 работ, посвященных исследованию пространственной структуры поля давления, и лишь несколько работ [2, 7, 8, 13, 14], в которых изучалась его пространственно-временная структура. В этих работах, к которым можно добавить еще работу В. И. Мартемьянова [11], временная дискретность расчета корреляционных функций составляет одни сутки, что затрудняет статистическое описание изменений поля давления за меньшие интервалы времени.

С этой точки зрения представляют интерес полученные в [10] данные о пространственно-временной корреляции поля давления на уровне моря. Эти данные относятся только к сравнительно небольшой территории Скандинавии и Северо-Запада ЕТС и получены лишь по январским данным. Кроме того, при расчете пространственно-временной корреляционной функции в [10] предполагалась однородность и изотропия поля давления в пространстве и стационарность его во времени. Эти предположения, особенно первое, являются довольно грубыми (см., например, [7]). Представляется, однако, что на данном этапе такая схематизация оправдывается простотой и наглядностью полученных результатов.

В рамках сделанных допущений пространственно-временная корреляционная функция до расстояний примерно 1500 км и сдви-

гов времени около двух суток хорошо аппроксимируется формулой

$$r_p(\rho, \tau) = (1 + d) e^{-d}, \quad (1)$$

где

$$d = \sqrt{(\rho/1,05)^2 + (\tau/30)^2},$$

ρ — расстояние между пунктами в тыс. км; τ — сдвиг времени в часах.

Таким образом, выбирая масштабы так, чтобы одному часу сдвига во времени соответствовал интервал расстояния 35 км, можно говорить о пространственно-временной изотропии корреляционных связей приземного барического поля.

Заметим, что корреляционная функция (1), полученная для уровня моря, хорошо согласуется с корреляционной функцией поля геопотенциала поверхности 500 мб, полученной М. И. Юдиным [18], и при $\tau=0$ практически с ней совпадает. Это дает основание использовать ее и при описании структуры поля давления в свободной атмосфере.

Аппроксимация (1) была использована в [10] для некоторых оценок возможной точности пространственно-временной интерполяции поля давления. Ее можно использовать и для получения более тонких характеристик структуры поля давления. Покажем эти возможности на примерах оценки пространственной структуры полей барической тенденции и ошибок статистического прогноза поля давления. Эти примеры представляют и самостоятельный интерес. Существенно также, что они позволяют судить о надежности наших сведений о пространственно-временной структуре поля давления, о необходимой степени их детализации и о возможных способах их уточнения.

2. Рассмотрим изменения давления за интервал времени Δt в точках M и N :

$$\begin{aligned} \Delta p(M) &= p(M, t) - p(M, t - \Delta t); \\ \Delta p(N) &= p(N, t) - p(N, t - \Delta t). \end{aligned} \quad (2)$$

Их ковариационная функция $R_{\Delta p}$ выражается через пространственно-временную ковариационную функцию давления R_p с помощью следующей очевидной формулы:

$$\begin{aligned} R_{\Delta p}(M, N) &= R_p(M, N, t, t) + R_p(M, N, t - \Delta t, t - \Delta t) - \\ &- R_p(M, N, t, t - \Delta t) - R_p(M, N, t - \Delta t, t). \end{aligned} \quad (3)$$

В предположении пространственной однородности и изотропии и стационарности во времени имеем

$$\begin{aligned} R_{\Delta p}(\rho) &= 2R_p(\rho, 0) - 2R_p(\rho, \Delta t) = \\ &= 2\sigma_p^2 [r_p(\rho, 0) - r_p(\rho, \Delta t)], \end{aligned} \quad (4)$$

где σ_p^2 — дисперсия давления.

Отсюда получаем выражение для дисперсии изменений давления

$$\sigma_{\Delta p}^2 = R_{\Delta p}(0) = 2\sigma_p^2[1 - r_p(0, \Delta t)] \quad (5)$$

и для пространственной корреляционной функции изменений давления

$$r_{\Delta p}(\rho) = \frac{R_{\Delta p}(\rho)}{\sigma_{\Delta p}^2} = \frac{r_p(\rho, 0) - r_p(\rho, \Delta t)}{1 - r_p(0, \Delta t)}. \quad (6)$$

Из (6) следуют некоторые общие выводы о виде корреляционной функции $r_{\Delta p}(\rho)$. Прежде всего ясно, что для больших интервалов времени Δt , для которых корреляцией давления уже можно пренебречь (т. е. для интервалов времени, превышающих несколько суток), $r_{\Delta p}(\rho) \approx r_p(\rho, 0)$, т. е. пространственная корреляция изменений давления приближается к пространственной корреляции самого поля давления. Более того, эти корреляционные функции совпадали бы при любых Δt в случае правомерности представления пространственно-временной корреляционной функции давления в виде

$$r_p(\rho, \tau) = r_p(\rho, 0) \cdot r_p(0, \tau). \quad (7)$$

Заметим, что такая аппроксимация иногда используется при практических расчетах. Разумеется, это допустимо лишь в том случае, если ее применение не будет противоречить фактическим данным.

При малых интервалах времени корреляционная функция $r_{\Delta p}(\rho)$ должна быть близка к корреляционной функции производной от давления по времени. Последняя может быть получена путем двойного дифференцирования пространственно-временной корреляционной функции [16]

$$R_{\frac{\partial p}{\partial t}}(\rho) = - \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_p(\rho, \tau) \right]_{\tau=0} = - \sigma_p^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} r_p(\rho, \tau) \right]_{\tau=0}. \quad (8)$$

В нашем случае подстановка в (8) формулы (1) дает

$$R_{\frac{\partial p}{\partial t}}(\rho) = \frac{\sigma_p^2}{900} e^{-\rho/1,05}. \quad (9)$$

Из (9) следует выражение для корреляционной функции производной

$$r_{\frac{\partial p}{\partial t}}(\rho) = e^{-\rho/1,05}. \quad (10)$$

Учитывая, что $\sigma_p^2 = 200$ мб², получаем $\sigma_{\frac{\partial p}{\partial t}} = 0,47$ мбар/ч и для изменений за сравнительно небольшие интервалы времени

$$\sigma_{\Delta p}^2 = \sigma_{\frac{\partial p}{\partial t}}^2 (\Delta t)^2 = \frac{2}{9} (\Delta t)^2 \text{ мбар}^2. \quad (11)$$

В частности, для тенденций давления, определяемых для интервала времени $\Delta t = 3$ ч, получаем

$$\sigma_{\Delta p}^2 = 2 \text{ мбар}^2.$$

Таким образом, в зависимости от того, за какой интервал времени исследуются изменения давления, пространственная корреляция их может существенно изменяться. При этом масштаб корреляции для изменений за малые интервалы, как следует из формулы (10), гораздо меньше масштаба корреляции изменений за большие интервалы времени, сравнимого с масштабом пространственной корреляции самого поля давления.

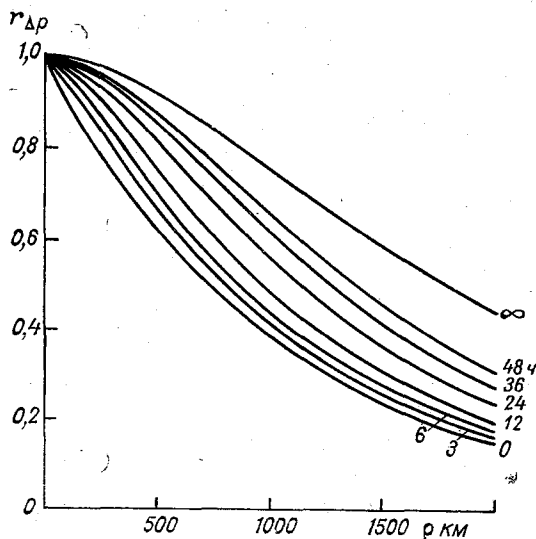


Рис. 1. Пространственные корреляционные функции изменений давления.
Цифры у кривых означают соответствующий интервал времени в часах.

Количественные различия в скорости убывания корреляционных функций для различных интервалов времени Δt хорошо видны на рис. 1, на котором представлены результаты расчетов по вытекающей из (6) и (1) формуле

$$r_{\Delta p}(\rho) = \frac{(1 + \rho/1,05) e^{-\rho/1,05} - [1 - \sqrt{(\rho/1,05)^2 + (\Delta t/30)^2}] e^{-\sqrt{(\rho/1,05)^2 + (\Delta t/30)^2}}}{1 - (1 + \Delta t/30) e^{-\Delta t/30}} \quad (12)$$

Из рис. 1 видно, что пространственная корреляционная функция тенденций давления ($\Delta t = 3$ ч) практически соответствует формуле (10). Пространственная корреляция изменений давления даже за двое суток затухает заметно быстрее корреляции самого

давления (верхняя кривая). Для больших интервалов времени Δt оценка корреляционной функции изменений давления вряд ли имеет смысл, поскольку неизвестно, в какой мере для столь больших сдвигов времени справедлива формула (1).

Представляет интерес сравнить полученные оценки характеристик структуры тенденций давления с экспериментальными данными об этих характеристиках. Такие данные приводятся в работах С. Л. Белоусова и Л. Н. Стрижевского [1] и Б. М. Ильина [9].

Таблица 1

Пространственная корреляция тенденции давления

Источник	Расстояние, км							
	100	300	500	700	900	1100	1300	1510
С. Л. Белоусов, Л. Н. Стрижевский [1]	0,90	0,87	0,61	0,44	0,28	0,19	0,12	0,07
Б. М. Ильин [9] (зима)	0,91	0,76	0,56	0,38	0,23	0,12	0,13	0,11
Формула (10)	0,91	0,75	0,63	0,51	0,42	0,35	0,29	0,24
Формула (10')	0,93	0,79	0,64	0,50	0,37	0,26	0,16	0,09
Корреляция давления по формуле (1)	0,99	0,96	0,91	0,86	0,79	0,72	0,65	0,58

В работе [1] дисперсия тенденции давления для зимнего сезона составляет около 1 мбар², что лишь по порядку величины согласуется с полученным нами значением 2 мбар². Возможно, это связано с тем, что в работе [1] использовались данные за весь холодный сезон, в течение которого дисперсия давления заметно изменяется. Так, по данным работы [9], дисперсия тенденции давления составляет 0,7 мбар² летом, 1,2 мбар² осенью и 2,4 мбар² зимой. Последняя цифра хорошо согласуется с нашей оценкой.

Из табл. 1, в которой помещены различные корреляционные функции тенденции давления, видно хорошее согласование экспериментальных данных, приведенных в работах [1, 9]. Заметим также, что близкие результаты получены и в недавно опубликованной работе [3].

Сопоставление этих данных с оценками по формуле (10) показывает хорошее согласование их до расстояний примерно 500 км. На больших расстояниях формула (10) завышает пространственную корреляцию тенденции давления. Возможно, что это завышение отражает реальное различие между корреляцией неприведенных и приведенных к уровню моря изменений давления. Не исключено, однако, что оно связано с тем, что формула (1) недостаточно точно описывает пространственную корреляцию для больших расстояний. В частности, в соответствии с этой формулой корреляция давления не может менять свой знак, хотя в действительности на расстояниях 2000—3000 км отрицательные корреляции реально наблюдаются.

В связи с этим заметим, что хорошую оценку для корреляционной функции тенденции барического поля можно получить на основе данных С. М. Олевской [13] о пространственно-временной корреляции геопотенциала поверхности 500 мбар, если воспользоваться интерполяционной формулой

$$r_p(\rho, \tau) = r_p(\rho) e^{-(0,30-0,12 \rho)\tau}, \quad (13)$$

где

$$r_p(\rho) = \frac{\sin(1,51 \rho)}{1,51 \rho} e^{-0,25 \rho},$$

а τ — сдвиг времени в сутках.

Подставляя (13) в (6), нетрудно получить для малых интервалов времени приближенную формулу

$$r_{\Delta p}(\rho) = (1 - 0,4 \rho) r_p(\rho), \quad (10')$$

которая, как видно из табл. 1, лучше описывает фактические данные, чем формула (10). В частности, она обеспечивает знакопеременность корреляционной функции на достаточно большом расстоянии.

К сожалению, оценки на основе формулы (13) дают нереально большие значения дисперсии тенденции давления. Это является естественным следствием аппроксимации корреляционной функции выражением, соответствующим отсутствию первой производной от давления по времени. Поэтому пока можно лишь предположить, что при дальнейших исследованиях пространственно-временной структуры поля давления может оказаться полезной аппроксимация его пространственной корреляционной функции знакопеременной аналитической формулой.

Во всяком случае, из табл. 1 следует, что как формула (10), так и формула (10') гораздо ближе к реальной корреляционной функции тенденции давления, чем пространственная корреляционная функция самого давления. Это является серьезным основанием для того, чтобы предпочесть аппроксимации пространственно-временной корреляционной функции (1) или (13) аппроксимациям типа (7).

3. В настоящее время значительное внимание уделяется разработке методов четырехмерного усвоения асинхронических данных (см., например, [5, 12]). В рамках этих методов представляется перспективным использование в качестве дополнительной информации данных численного прогноза погоды. Как показано в [6], эффективность использования этой информации существенно зависит от правильности учета ее специфики, в частности, от задания характеристик статистической структуры ошибок прогноза.

Данные такого рода в последние годы публиковались в ряде зарубежных работ [19, 20, 21, 22]. Приведенные в этих работах сведения о структуре прогностических полей относятся к различным прогностическим моделям; объем данных, по которым они получены, а также районы, для которых оценивались ошибки прог-

ноза, как и способы их оценки, обычно неизвестны. Между тем можно предполагать, что поле ошибок прогноза существенно зависит от особенностей прогностической модели. Кроме того, это поле должно быть заведомо неоднородным, поскольку например, в районах с редкой сетью станций, в частности на акваториях океанов, любые методы прогноза, конечно, обеспечивают меньшую точность описания барического поля, чем в хорошо освещенных континентальных районах.

Таблица 2

Пространственная корреляционная функция ошибок прогноза
геопотенциала на 12 ч

Источник	Уровень, мбар	Расстояние, км						
		200	400	600	800	1000	1200	1400
Бенгтссон и Густавссон [19]	500	0,89	0,70	0,51	0,40	0,28	0,20	0,13
Кругер [20]	500	0,87	0,61	0,37	0,23	0,14	0,07	0,04
Резерфорд [22] (зима)	500	0,79	0,61	0,41	0,30	0,19	0,08	0,04
	1000	0,84	0,71	0,54	0,40	0,27	0,18	0,12
Питерсен [21]								
Тихий океан	300	0,90	0,77	0,62	0,46	0,30	—	—
США	300	0,86	0,71	0,52	0,28	0,16	—	—

Так, по данным Д. Питерсена [21], дисперсия ошибок прогноза геопотенциала изобарической поверхности 300 мбар над Тихим океаном примерно вдвое больше, чем над территорией США. Соответственно сильно различаются и ковариационные функции полей ошибок прогноза для этих районов. Оказывается, однако, что применительно к корреляционным функциям эти различия сравнительно невелики, так что в первом приближении ими можно, по-видимому, пренебречь. Эти корреляционные функции для малых расстояний сравнительно мало зависят от направления, так что до расстояний 1000—1500 км может быть приближенно принято условие их изотропии.

Более того, сопоставление приведенных в упомянутых работах данных о корреляции ошибок прогноза показывает их неплохое согласование. Это следует, например, из табл. 2, в которой приводятся оценки пространственной корреляции ошибок прогноза поля геопотенциала на 12 ч по данным различных работ. Такое согласование является довольно неожиданным. Напомним, что в работе Х. Кругера [20] использована баротропная модель прогноза для уровня 500 мбар. В работе Я. Резерфорда [22] использованы результаты расчетов на уровнях 500 и 1000 мбар по оперативной четырехуровневой бароклинической модели Канадской службы прогнозов. В работе Л. Бенгтссона и Н. Густавссона [19] корреляционные функции ошибок прогноза относятся, по-видимому, к описанной

в этой работе баротропной модели, применяемой на уровне 500 мбар в зональном кольце, ограниченном 30 и 70° с. ш. Наконец, в работе Д. Питерсена [21] использованы результаты прогноза по многоуровневой модели Национального метеорологического центра США, основанной на полных уравнениях динамики атмосферы.

Сравнительно малые различия в статистической структуре ошибок прогноза на 12 ч для столь различных моделей дают основание надеяться, что и для прогнозов на другие сроки она также будет не очень сильно зависеть от выбора модели. Поэтому можно (до накопления соответствующих фактических данных) попытаться оценить структуру прогностических полей исходя из предположения, что статистическая структура ошибок численного прогноза не слишком отличается от структуры ошибок статистического прогноза, рассчитываемого по методу наименьших квадратов. Разумеется, это предположение является в достаточной мере произвольным. Однако такой подход имеет по крайней мере то достоинство, что позволяет априорно оценить структуру ошибок прогноза по данным о пространственно-временной структуре прогнозируемого поля. Можно надеяться, что на основе таких оценок удастся отвергнуть наиболее нереалистические схемы использования прогностических данных.

Рассмотрим сначала случай статистического одноточечного прогноза, когда давление в каждой точке на срок Δt вперед предсказывается по исходному давлению в этой же точке. При этом будем считать, что для прогноза используется корреляционная функция (1). Отсчитывая для простоты давление от нормы и пренебрегая влиянием случайных ошибок измерений, можно для точек M и N написать:

$$\begin{aligned}\bar{p}(M, t) &= p(M, t - \Delta t) r_p(0, \Delta t); \\ \bar{p}(N, t) &= p(N, t - \Delta t) r_p(0, \Delta t).\end{aligned}\quad (14)$$

где p представляют собой фактические, а $\bar{p}$ — прогностические значения давления.

Соответственно ошибки прогноза в точках M и N составят:

$$\begin{aligned}\delta p(M, \Delta t) &= \bar{p}(M, t) - p(M, t), \\ \delta p(N, \Delta t) &= \bar{p}(N, t) - p(N, t).\end{aligned}\quad (15)$$

Если обозначить через ρ расстояние между этими точками, то в предположении однородности и изотропии поля давления ковариация ошибок может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}R_{\delta p}(\rho, \Delta t) &= \sigma_p^2 \{ [1 + r_p^2(0, \Delta t)] r_p(\rho, 0) - \\ &\quad - 2r_p(\rho, \Delta t) r_p(0, \Delta t) \}.\end{aligned}\quad (16)$$

В частности, дисперсия ошибок прогноза

$$\sigma_{\delta p}^2(\Delta t) = R_{\delta p}(0, \Delta t) = \sigma_p^2 [1 - r_p^2(0, \Delta t)].\quad (17)$$

Соответственно корреляционная функция ошибок одноточечного прогноза имеет вид

$$r_{\delta p}(\rho, \Delta t) = \frac{[1 + r_p^2(0, \Delta t)] r_p(\rho, 0) - 2r_p(\rho, \Delta t) r_p(0, \Delta t)}{1 - r_p^2(0, \tau)}, \quad (18)$$

или после некоторых преобразований

$$r_{\delta p}(\rho, \Delta t) = r_p(\rho, 0) - 2r_p(0, \Delta t) \frac{r_p(0, \Delta t) r_p(\rho, 0) - r_p(\rho, \Delta t)}{1 - r_p^2(0, \Delta t)}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что при прогнозе на большой срок, когда временная корреляция близка к нулю, пространственная корреляция ошибок одноточечного прогноза близка к пространственной кор-

Таблица 3

Пространственная корреляционная функция ошибок одноточечного статистического прогноза давления

ρ км	Δt ч						$e^{-\rho/1,05}$	$r(\rho, 0)$
	3	6	12	24	36	48		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
200	0,87	0,90	0,94	0,96	0,97	0,98	0,83	0,98
400	0,73	0,76	0,82	0,88	0,90	0,92	0,68	0,94
600	0,60	0,64	0,69	0,77	0,82	0,85	0,56	0,89
800	0,50	0,53	0,58	0,67	0,73	0,76	0,47	0,82
1000	0,41	0,44	0,49	0,58	0,64	0,68	0,39	0,79
1200	0,34	0,36	0,41	0,49	0,56	0,60	0,32	0,68
1400	0,28	0,30	0,34	0,42	0,48	0,53	0,26	0,62
1600	0,23	0,25	0,28	0,35	0,41	0,46	0,22	0,55
1800	0,19	0,21	0,24	0,30	0,35	0,40	0,18	0,49
2000	0,16	0,17	0,20	0,25	0,30	0,34	0,15	0,43
ϵ	0,09	0,19	0,34	0,59	0,75	0,82	—	—

реляции поля давления. При сравнительно малых интервалах времени Δt , когда временной корреляцией пренебречь нельзя, функции $r_{\delta p}(\rho, \Delta t)$ и $r_p(\rho, 0)$ совпадают тогда и только тогда, когда пространственно-временная корреляция поля давления описывается формулой (7). Однако, как мы уже видели, применительно к полю давления такая аппроксимация противоречит фактическим данным о структуре поля барической тенденции.

При подстановке в (18) корреляционной функции (1) корреляция ошибок прогноза оказывается зависящей от интервала времени, на который дается прогноз. Представление об этой зависимости дает табл. 3.

Из табл. 3 видно, что масштаб корреляции ошибок прогноза уменьшается с уменьшением интервала времени Δt . При малых

интервалах времени, как и в случае тенденции давления, корреляция ошибок прогноза приближенно описывается формулой (10).

В табл. 3 приводятся также значения относительной средней квадратической ошибки прогноза $\varepsilon = \sigma_{\delta p} / \sigma_p$. Можно видеть, что корреляция ошибок прогноза близка к корреляции самого давления лишь при ε , близких к единице. Очевидно, ценность таких прогнозов невелика.

Что касается структуры прогностического поля, то в случае одноточечного статистического прогноза оно отличается от исходного на постоянный множитель $r_p(0, \Delta t)$, так что пространственная корреляция прогностического поля совпадает с корреляцией исходного поля. В этом случае как прогностическое поле, так и поле ошибок прогноза являются однородными и изотропными.

4. Независимо от того, какую практическую ценность мог бы иметь прогноз по одноточечной схеме, следует иметь в виду, что он возможен лишь в районах с густой сетью станций, в которых в окрестности каждого узла прогностической сетки можно подобрать близко расположенную станцию. В районах с редкой сетью станций разумно рассматривать прогноз по данным некоторого числа станций. В этом случае естественно в качестве прогностического поля рассматривать результаты оптимальной пространственно-временной экстраполяции давления.

Пусть в окрестности узла сетки M нами выбрано n_M станций, а в окрестности узла N выбрано n_N станций, расположенных в точках $r_1, r_2, \dots, r_{n_M}$ и $r_{n_M+1}, r_{n_M+2}, \dots, r_{n_M+n_N}$ соответственно.

Тогда прогностические значения в этих узлах определяются формулами:

$$\begin{aligned} \bar{p}(M, t) &= \sum_{i=1}^{n_M} a_i p(r_i, t - \Delta t), \\ \bar{p}(N, t) &= \sum_{i=n_M+1}^{n_M+n_N} a_i p(r_i, t - \Delta t), \end{aligned} \quad (20)$$

где a_i — обычные веса оптимальной интерполяции [4]. Эти веса получаются путем решения известных систем уравнений, которые мы здесь выписывать не будем. Напомним только, что в них входят лишь элементы корреляционной матрицы исходных данных, однозначно определяемые заданием корреляционной функции (1) и координат станций, используемых при прогнозе.

Учитывая (20) и (15), ковариацию ошибок прогноза в узлах M и N представим в виде

$$\begin{aligned} R_{\delta p}(M, N, \Delta t) &= \sum_{i=1}^{n_M} \sum_{k=n_M+1}^{n_M+n_N} a_i a_k R_p(p_{ik}, 0) + \\ &+ R_p(p_{NM}, 0) - \sum_{i=1}^{n_M} a_i R_p(p_{iN}, \Delta t) - \sum_{i=n_M+1}^{n_M+n_N} a_i R_p(p_{iM}, \Delta t). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\rho_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$ — расстояния между станциями с номерами i и k . Соответственно ρ_{iM} и ρ_{iN} — расстояния между станцией i и узлами M и N .

Дисперсия ошибок прогноза в узле M имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(M, \Delta t) &= R_{\delta p}(M, M, \Delta t) = \\ &= \sigma_p^2 + \sum_{i=1}^{n_M} \sum_{k=1}^{n_M} a_i a_k R_p(\rho_{ik}, 0) - 2 \sum_{i=1}^{n_M} R_p(\rho_{iM}, \Delta t). \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогичное выражение можно написать и для $\sigma_p^2(N, \Delta t) = R_{\delta p}(N, N, \Delta t)$.

В формулы (21) и (22) зависимость от интервала времени Δt , равно как и от точности исходных данных, входит в неявном виде, поскольку от них зависят весовые множители a_i .

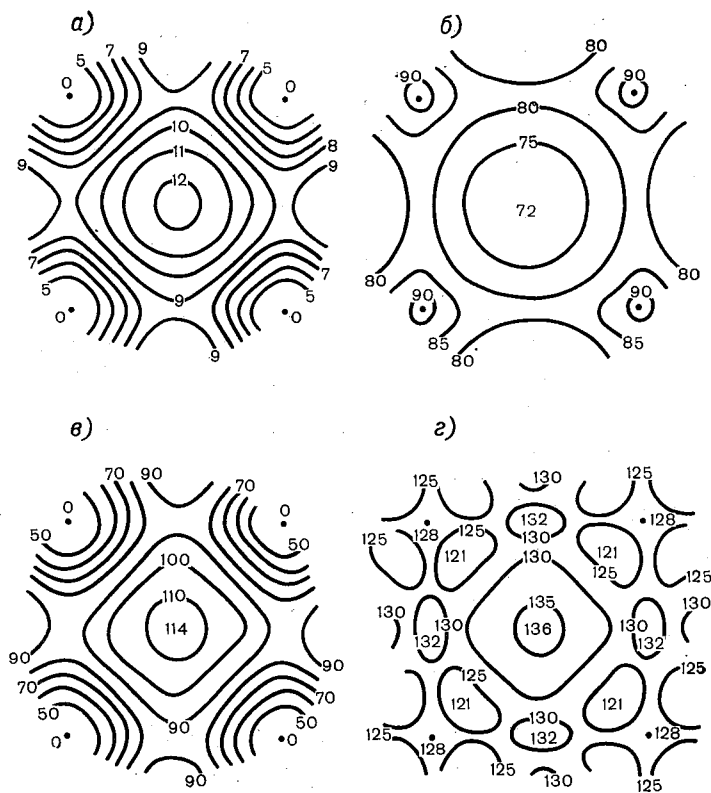


Рис. 2. Относительная средняя квадратическая ошибка интерполяции (ϵ — в тысячных долях единицы) по данным четырех станций.

Расстояние между станциями: а) 100 км, $\eta^2=0$; б) 500 км, $\eta^2=0,02$; в) 500 км, $\eta^2=0$; г) 500 км, $\eta^2=0,02$. Станции обозначены точками.

Корреляционная функция ошибок прогноза, очевидно, определяется формулой

$$r_{\delta p}(M, N, \Delta t) = \frac{R_{\delta p}(M, N, \Delta t)}{\sigma_{\delta p}(M, \Delta t) \sigma_{\delta p}(N, \Delta t)}. \quad (23)$$

В случае прогноза по многоточечной схеме как прогностическое поле, так и поле ошибок прогноза являются существенно неоднородными и неизотропными. Структура их оказывается зависящей от взаимного расположения станций и узлов сетки, расстояния между ними и от точности наблюдений на станциях, которая не очень существенна при прогнозе по одноточечной схеме.

Поясним сказанное на простейшем примере интерполяции синхронных данных (формально — прогноза на срок $\Delta t=0$) по данным наблюдений на четырех станциях, расположенных в виде квадрата. При этом имеется в виду, что для любых узлов сетки, расположенных в пределах этого квадрата, используются данные лишь этих четырех станций, при выходе же за его пределы используются данные четырех станций, соответствующие соседнему квадрату. Конечно, некоторые из этих станций могут совпадать.

Из рис. 2, на котором представлено распределение относительной ошибки интерполяции для различной густоты сети станций и различной точности исходных данных¹, следует, что оно характеризуется четко выраженной неоднородностью и анизотропией. Более того, сам характер распределения ошибок существенно различен для разных случаев. Так, при наличии погрешностей измерения поле ошибок интерполяции сглаживается по сравнению с идеальным случаем интерполяции точных данных. Для густой сети при наличии погрешностей измерения имеется минимум ошибки интерполяции для узлов, расположенных в центре квадрата, для редкой сети станций ошибки интерполяции в этой точке, наоборот, максимальны.

Нарушение однородности и изотропии характерно и для корреляционной функции поля ошибок интерполяции. Это хорошо видно на рис. 3, на котором приведены изокорреляты ошибок интерполяции для случая, когда один из узлов расположен в центре квадрата. Отметим также, что корреляция ошибок интерполяции для расстояний между узлами сетки порядка расстояний между станциями близка к нулю.

В связи со значительной зависимостью пространственной корреляции ошибок прогноза от структуры сети станций, числа станций, используемых при экстраполяции, и от точности исходных данных мы ограничимся рассмотрением сильно схематизированного случая, который тем не менее дает общее представление о характере интересующих нас связей.

¹ Последняя характеризуется мерой случайных ошибок данных измерений η^2 , представляющей собой отношение дисперсий этих ошибок к дисперсии давления σ_p^2 .

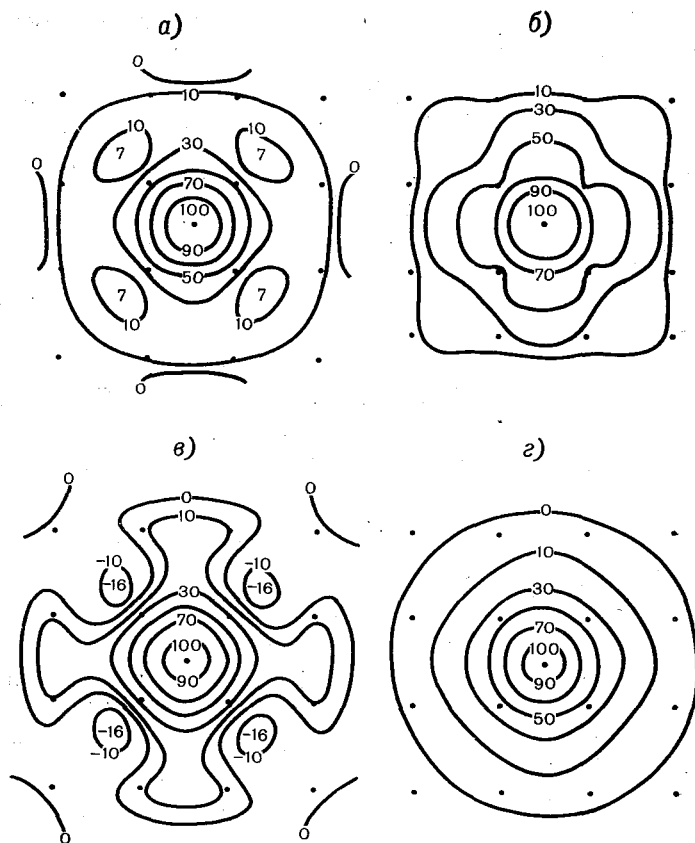


Рис. 3. Изолинии корреляции ошибок интерполяции давления (%) по данным четырех станций с ошибками интерполяции в центральной точке.

Расстояние между станциями: а) 100 км, $\eta^2=0$; б) 100 км, $\eta^2=0,02$; в) 500 км, $\eta^2=0,0$; г) 500 км, $\eta^2=0,02$. Станции обозначены точками.

Будем считать, что все узлы сетки расположены в центрах квадратов, которые образованы станциями, расположенными на одинаковом расстоянии h от узла сетки (соответственно расстояние между станциями составляет $\sqrt{2}h$), а расстояние между узлами сетки обозначим ρ . При этом будем рассматривать лишь такие пары узлов, которые расположены в направлении диагоналей квадратов (рис. 4). В данной схеме считается, что станции, используемые при интерполяции в узлах, непрерывно смещаются одни относительно других при изменении расстояния ρ . В действительности, как мы уже указывали, смена «влияющих» станций происходит лишь при переходе узла из квадрата в квадрат. Это, по-видимому, наиболее существенно при $\rho < h$, когда корреляция ошибок прогноза по принятой схеме заведомо занижается.

Некоторые результаты расчетов, выполненных при указанных предположениях, приводятся в табл. 4. Из этой таблицы и сравнения ее с табл. 3 видно, что переход от одноточечной к четырехточечной экстраполяции проявляется сколько-нибудь заметно лишь при сравнительно малых сроках прогноза, тем больших, чем больше расстояние между станциями. Ориентировочно можно считать, что при не очень редкой сети, такой что $h < 35 \Delta t$ (т. е. при расстоя-

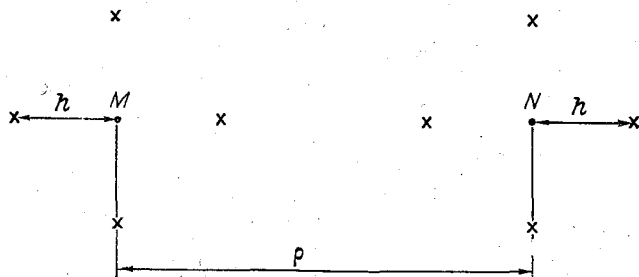


Рис. 4. Схема взаимного расположения узлов прогностической сетки (M и N) и точек задания исходных данных.

ниях между станциями меньше $35 \Delta t$ км), можно пренебречь этими различиями и оценивать пространственную корреляцию ошибок прогноза по данным табл. 3. При более редкой сети станций выбор схемы экстраполяции оказывается существенным.

Влияние ошибок в исходных данных, как мы уже указывали, велико для случая интерполяции ($\Delta t = 0$). Для экстраполяции оно существенно лишь при малых Δt и для густой сети станций. Для других случаев им можно пренебречь. Заметим, что при больших Δt оказывается малосущественной и анизотропия ошибок прогноза.

Что касается пространственной корреляции прогностического поля, то, как нетрудно показать, при принятой схеме экстраполяции она не зависит от срока прогноза, а определяется лишь густотой сети станций. Некоторые оценки ее приводятся в табл. 5, из которой видно, что корреляция прогностического поля затухает медленнее, чем корреляция исходного поля, причем различие тем больше, чем реже сеть станций. Это является естественным результатом сглаживания мелкомасштабных особенностей при статистическом прогнозе. Можно ожидать, что такой же, по крайней мере в качественном отношении, должна оказаться структура полей, полученных путем численного прогноза по любой разумной динамической модели.

5. Сравним полученные выше результаты для случая статистического прогноза с имеющимися фактическими данными о структуре ошибок прогноза. Сопоставление данных, приведенных в табл. 4 и 2, показывает, что для $\Delta t = 12$ ч фактическая корреля-

Таблица 4

Пространственная корреляционная функция ошибок четырехточечного статистического прогноза давления

Р км	Δt ч									
	0	6	12	24	48	0	6	12	24	48

При точных исходных данных ($\gamma=0$)

	$h=100$ км					$h=500$ км				
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
400	0,02	0,78	0,83	0,88	0,92	0,31	0,62	0,80	0,90	0,93
800	0,00	0,54	0,59	0,68	0,77	-0,08	0,31	0,55	0,69	0,78
1200	0,01	0,37	0,41	0,50	0,60	-0,05	0,22	0,39	0,51	0,61
1600	0,01	0,25	0,29	0,36	0,46	-0,01	0,16	0,27	0,37	0,46
2000	0,02	0,17	0,20	0,25	0,34	0,02	0,12	0,19	0,26	0,34
ϵ	0,006	0,18	0,34	0,59	0,85	0,17	0,23	0,35	0,57	0,84

	$h=1000$ км					$h=1500$ км				
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
400	0,68	0,72	0,78	0,87	0,92	0,79	0,82	0,82	0,88	0,92
800	0,14	0,24	0,41	0,64	0,77	0,42	0,44	0,50	0,63	0,76
1200	-0,17	-0,05	0,16	0,44	0,61	0,04	0,07	0,17	0,38	0,59
1600	-0,18	-0,10	0,07	0,30	0,46	-0,21	-0,17	-0,05	0,19	0,44
2000	-0,10	-0,05	0,06	0,22	0,34	-0,26	-0,22	-0,13	0,08	0,32
ϵ	0,38	0,40	0,46	0,61	0,84	0,57	0,58	0,61	0,69	0,86

При наличии ошибок в исходных данных ($\gamma^2=0,02$)

	$h=100$ км					$h=500$ км				
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
400	0,00	0,68	0,80	0,87	0,92	0,26	0,56	0,77	0,88	0,92
800	0,00	0,47	0,57	0,67	0,77	-0,07	0,28	0,53	0,69	0,77
1200	0,00	0,32	0,40	0,49	0,60	-0,05	0,19	0,37	0,51	0,61
1600	0,00	0,22	0,28	0,35	0,46	-0,01	0,14	0,26	0,36	0,46
2000	0,00	0,15	0,19	0,25	0,34	0,01	0,10	0,18	0,25	0,34
ϵ	0,07	0,20	0,35	0,59	0,85	0,18	0,24	0,36	0,58	0,84

ция ошибок прогноза затухает с расстоянием гораздо быстрее, чем полученные нами оценки для густой сети. Фактическая корреляция ошибок прогноза геопотенциала практически совпадает с полученной нами для давления при $h=1000$ км, т. е. при расстоянии между станциями примерно 1400 км. Заметим, что из приведенных в работах [19—22] данных следует, что относительная ошибка

$\varepsilon < 0,3$. При статистическом прогнозе такая точность не достигается даже при густой сети станций.

На рис. 5, на котором воспроизводятся корреляционные функции ошибок прогноза геопотенциала поверхности 500 мбар на 6, 12 и 24 ч, приведенные в работе [19], представлены также соответствующие корреляционные функции для ошибок статистического прогноза при $h=1000$ км. Согласование между этими данными

Таблица 5

Пространственная корреляционная функция прогностического поля при статистическом прогнозе по четырехточечной схеме

ρ км	$r(\rho, 0)$	h км					
		100	300	500	700	1000	1500
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
200	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
400	0,94	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97
600	0,89	0,89	0,91	0,93	0,94	0,95	0,95
800	0,82	0,83	0,85	0,88	0,89	0,91	0,91
1000	0,75	0,76	0,78	0,82	0,84	0,87	0,88
1200	0,68	0,69	0,72	0,75	0,79	0,82	0,84
1400	0,62	0,62	0,65	0,69	0,73	0,78	0,80
1600	0,55	0,55	0,58	0,62	0,67	0,72	0,76
1800	0,49	0,49	0,52	0,56	0,60	0,67	0,72
2000	0,43	0,44	0,46	0,50	0,54	0,62	0,68

оказывается в общем удовлетворительным, хотя зависимость корреляции ошибок статистического прогноза от срока прогноза Δt оказывается заметно большей, чем по данным работы [19].

Сведений о корреляции ошибок прогноза за большие сроки, насколько нам известно, пока не публиковалось. Мы располагаем лишь данными о корреляции ошибок прогноза геопотенциала изобарической поверхности 500 мбар на 48 ч. Они вычислены нами на основе любезно предоставленных автору Г. Д. Кудашкиным данных численного прогноза по баротропной модели И. Г. Ситникова [17] для 115 ситуаций, выбранных из зимних сезонов 1962/63 и 1963/64 гг. Для каждой ситуации задавались прогностические и фактические значения геопотенциала поверхности 500 мбар в 24 узлах сетки, размещенной на территории Северной Европы и Атлантики.

К сожалению, использованная в наших расчетах сеть данных очень редкая, так что ближайшие узлы находятся друг от друга на расстоянии, равном двум шагам прогностической сетки, что в среднем составляет 720 км.

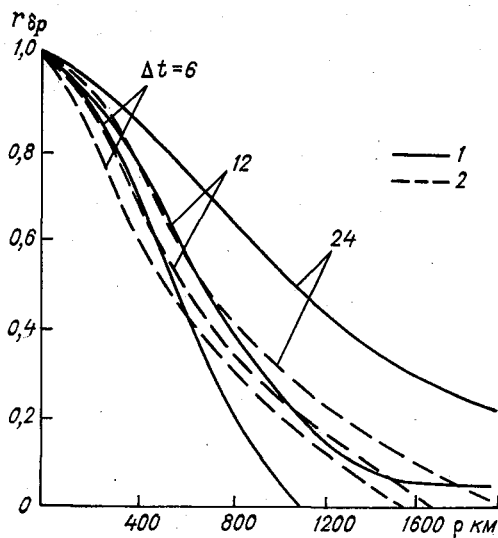


Рис. 5. Пространственная корреляция ошибок прогноза на 6, 12 и 24 ч по четырехточечной статистической схеме при $h=1000$ км (1) и по Бенгтссону и Густавссону [19] (2).

Полученные данные о структуре прогностических полей приводятся в табл. 6. Сравнение с соответствующими данными, полученными нами для четырехточечной схемы прогноза при $\Delta t=48$ ч и $h=1000$ км, также приведенными в табл. 5, показывает удовлетворительное согласование как для корреляции ошибок прогноза, так и для корреляционных функций прогностических полей (замечим, что для $h=500$ км согласование оказывается еще лучшим). Точность численного прогноза и в этом случае гораздо выше точности прогноза статистического.

Таблица 6

Пространственная корреляция прогностического поля ($r_{\sim}$) и ошибки прогноза ($r_{\delta p}$) на 48 ч

Способ прогноза	ε	Корреляционная функция	p км			
			0	720	1080	1440
Численный баротропный	0,66	$r_{\sim}$	1,00	0,88	0,76	0,65
		$r_{\delta p}$	1,00	0,71	0,51	0,38
Статистический $h=1000$ км	0,84	$r_{\sim}$	1,00	0,92	0,85	0,77
		$r_{\delta p}$	1,00	0,70	0,65	0,51

Таким образом, имеющиеся фактические данные о структуре прогностических полей не противоречат полученным нами оценкам и свидетельствуют о возможности использования этих оценок до накопления надежных экспериментальных данных. Это, конечно, не снимает задачи детального исследования статистической структуры прогностических полей, полученных при использовании конкретных моделей численного прогноза, тем более, что пространственно-временная корреляция барического поля, на основе которой получены указанные оценки, также изучена еще далеко не достаточно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов С. Л., Стрижевский Л. Н. Способ учета мелкомасштабных составляющих при объективном анализе полей барической тенденции и приземного давления.— «Метеорология и гидрология», 1969, № 5, с. 13—20.
2. Борисенков Е. П. Физико-статистические методы анализа и предвычисления метеорологических полей.— Труды ААНИИ, 1963, т. 263, 243 с.
3. Галахова Т. А., Алексеева-Обухова И. А. Применение гипотезы однородности и изотропии по отношению к полю барической тенденции.— «Тр. ГМЦ», 1974, вып. 129, с. 99—104.
4. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеиздат, 1963, 287 с.
5. Гандин Л. С. Проблемы четырехмерного усвоения данных метеорологических наблюдений.— «Метеорология и гидрология», 1971, № 3, с. 15—26.
6. Гандин Л. С., Каган Р. Л. О построении системы объективного анализа разнородных данных на основе метода оптимальной интерполяции и оптимального согласования.— «Метеорология и гидрология», 1974, № 5, с. 3—10.
7. Груза Г. В., Казначеева В. Д. Анизотропная пространственно-временная корреляционная функция барического поля.— «Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана», 1968, т. 4, № 7, с. 710—716.
8. Груза Г. В., Казначеева В. Д. Статистическая структура барического поля северного полушария.— «Тр. САНИГМИ», 1968, вып. 38(53). 133 с.
9. Ильин Б. М. Об одной схеме прогноза давления у поверхности земли.— «Тр. ГГО». 1968, вып. 226, с. 89—96.
10. Лугина К. М., Каган Р. Л. К вопросу о пространственно-временном анализе барического поля.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 336, с. 75—94.
11. Мартемьянов В. И. О пространственно-временной статистической структуре трехмерного поля давления.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 298, с. 54—62.
12. Машкович С. А. О четырехмерном анализе данных наблюдения.— «Метеорология и гидрология», 1971, № 11, с. 97—102.
13. Олевская С. М. Пространственно-временная структура поля геопотенциала H_{500} .— «Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана», 1966, т. 2, № 12, с. 1225—1239.
14. Олевская С. М. Пространственно-временная структура полей геопотенциала.— «Тр. ГМЦ», 1969, вып. 39, с. 59—66.
15. Олевская С. М. Статистическая структура поля геопотенциала (внетропические широты).— «Тр. ГМЦ», 1974, вып. 123, с. 81—110.
16. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962, с. 883.
17. Ситников И. Г. Опыт краткосрочного прогноза карт барической топографии для средней части тропосферы.— В кн.: Труды Всесоюзного научного метеорологического совещания. Том 2. Л., Гидрометеиздат, 1963, с. 37—44.
18. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала.— «Тр. ГГО», 1961, вып. 121, с. 3—18.
19. Bengtsson L., Gustavsson N. An experiment in the assimilation of data in dynamical analysis.— «Tellus», 1971, vol. 23, N 4—5, p. 328—336.

20. Kruger H. B. General and special approaches to the problem of objective analysis of meteorological variables.—„Quart. Journ. Meteorol. Roy. Soc.”, 1969, vol. 95, N 403, p. 21—39.
21. Petersen D. P. A comparison of the performance of quasi-optimal and conventional objective analysis schemes.—„Journ. Appl. Meteorol.”, 1973, vol. 12, N 7, p. 1093—1101.
22. Rutherford I. D. Data assimilation by statistical interpolation of forecast error fields.—„Journ. Atmos. Sci.”, 1971, vol. 29, N 5, p. 809—815.

ОБ ИЗМЕНЧИВОСТИ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕПЛОПОТЕРЬ ЗДАНИЙ

Определение резервных запасов топлива, необходимых в связи с возможными отклонениями метеорологических условий конкретного года от средних многолетних условий, является важнейшей народнохозяйственной задачей. В настоящее время эта задача становится все более актуальной в результате быстро увеличивающихся темпов жилищного строительства и перехода отопительных систем на жидкое и газообразное топливо, для хранения которого необходимы специальные емкости.

Задача об оптимальном планировании запасов топлива рассмотрена в работе [3], где показано, что выбор оптимального решения сводится к анализу функции, которая описывает потери потребителя в случае, если он ориентировался на одно значение метеорологического элемента, а в действительности было другое значение. В случае, когда функция потерь симметрична, оптимальной стратегией является ориентация на климатологическую норму. Практически же функции потерь почти никогда не бывают симметричными. При планировании запасов топлива занижение расчетной температуры воздуха приведет к созданию излишних запасов, а завышение этой температуры вызовет необходимость в аварийных перевозках топлива, а в отдельных случаях к нарушению нормальной работы промышленных предприятий. Оптимальные резервы топлива зависят от несимметричности функции потерь, т. е. от соотношения потерь, получающихся при недостаточной и чрезмерной величинах таких резервов. Однако сведения о функциях потерь практически отсутствуют. В качестве первого приближения можно считать, что резервные запасы топлива будут определяться изменчивостью эффективной температуры. Эффективная температура теплопотерь здания — это комплексный метеорологический параметр, являющийся функцией температуры наружного воздуха, скорости ветра и потока суммарной солнечной радиации, падающей на наружную поверхность ограждения. При отсутствии ветра и радиации эффективная температура совпадает с обычной температурой наружного воздуха.

Формула для расчета эффективной температуры теплопотерь здания предложена Л. С. Гандиным [1] и имеет вид

$$T_{эф} = \bar{T}_н - \frac{\tau R}{R_0} [A(\gamma \bar{v}) - 1] (T_v - \bar{T}_н) + R \tau \varepsilon I, \quad (1)$$

где $\bar{T}_н$ — температура наружного воздуха; T_v — температура внутреннего воздуха; τ — относительная площадь окон; γ — коэффициенты воздухопроницаемости остекленной части здания; ε — коэффициент пропускания суммарной солнечной радиации, падающей на остекленные части поверхности ограждения; R — суммарное термическое сопротивление; R_0 — термическое сопротивление окон; v — скорость ветра; I — поток суммарной радиации, падающей на остекленные части ограждения здания.

В формулу входят также значения функции $A(\gamma \bar{v})$, которая выражается интегралом

$$A(\gamma \bar{v}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \bar{v} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \operatorname{cth}(\gamma \bar{v} x) x dx. \quad (2)$$

Подробное описание эффективной температуры имеется в работе [1], там же приведены ее значения для различных пунктов Советского Союза. Введение эффективной температуры позволяет достаточно просто учитывать роль ветра и радиации при оценке теплопотерь зданий. Именно суммарные теплопотери пропорциональны разности между расчетной температурой внутреннего воздуха и эффективной температурой.

При планировании запасов топлива необходимы не только сведения о средних многолетних значениях дефицита тепла, но также его межгодовая изменчивость. Для расчета изменчивости эффективной температуры нужны сведения о температуре, ветре и суммарной солнечной радиации, падающей на вертикальную поверхность, за длинный ряд лет. Особую трудность представляют сведения о суммарной солнечной радиации, падающей на вертикальную поверхность, в связи с тем, что длинные ряды наблюдений за этим элементом имеются на очень ограниченном числе станций. В этой связи значительный интерес представляет предложенная Л. С. Гандиным [4] формула для расчета изменчивости эффективной температуры теплопотерь здания по данным об изменчивости температуры наружного воздуха, скорости ветра и лучистых потоков тепла и о коэффициентах корреляции между этими метеорологическими элементами. Эта формула имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{T_{эф}}^2 = & \left\{ 1 + \frac{\tau R}{R_0} [A(\gamma \bar{v}) - 1] \right\}^2 \sigma_{\bar{T}_н}^2 + \\ & + \left[\gamma \frac{\tau R}{R_0} A'(\gamma \bar{v}) (T_v - \bar{T}_н) \right]^2 \sigma_v^2 + (R \tau \varepsilon)^2 \sigma_I^2 - \\ & - 2 \gamma \frac{R^2 \tau^2 \varepsilon}{R_0} A'(\gamma \bar{v}) (T_v - \bar{T}_н) \sigma_v \sigma_I r_{v, I} + \end{aligned}$$

$$+ 2R\tau\varepsilon\left\{1 + \frac{\tau R}{R_0} [A(\gamma\bar{v}) - 1]\right\} \sigma_I \sigma_{T_H} r_{T_H} - \\ - 2\left\{1 + \frac{\tau R}{R_0} [A(\gamma\bar{v}) - 1]\right\} \gamma \frac{\tau R}{R_0} A'(\gamma\bar{v}) (T_b - \bar{T}_H) \sigma_{T_H} \sigma_v r_{T_H} v. \quad (3)$$

В формулу входят значения функции $A(\gamma\bar{v})$ и ее первой производной $A'(\gamma\bar{v})$. Эта функция выражается интегралом, не сводящимся к элементарным функциям, поэтому она и ее производная вычислялась на ЭВМ. В работе [4] приводятся значения функции $[A(\gamma\bar{v}) - 1]$ и ее первой производной в зависимости от аргумента $(\gamma\bar{v})$. Эти значения и были использованы нами для расчетов по формуле (1). Зная статистические характеристики метеорологических параметров, такие, как средняя скорость ветра и температура, средние квадратические отклонения скорости ветра, температуры и суммарной солнечной радиации, падающей на вертикальные стены, а также коэффициенты корреляции между ними, можно определить дисперсию эффективной температуры. Однако в настоящее время из необходимых для расчетов статистических характеристик хорошо изучены средние значения метеорологических параметров и изменчивость температуры. Сведений о межгодовой изменчивости скорости ветра и суммарной радиации, падающей на вертикальную поверхность, а также о коэффициентах корреляции между метеорологическими параметрами, насколько нам известно, нет.

В качестве теплотехнических параметров здания были приняты те же значения, что и в работе [4], а именно $T_b = 18^\circ\text{C}$; $\gamma = 0,2$ с/м; $R = 0,86$ м²·ч·°С/ккал; $R_0 = 58$ м²·ч·°С/ккал $\varepsilon = 0,67$; $\tau = 0,3$.

Первые попытки исследования изменчивости эффективной температуры были сделаны в работе [9], где рассчитывались характеристики статистической структуры экстремально низких значений эффективной температуры. При этом суммарная солнечная радиация, приходящая на вертикальные стены здания, во внимание не принималась. Обширные исследования межгодовой изменчивости эффективной температуры для всех месяцев отопительного сезона были проведены по заданию Главного управления в ГГО [2]. Выполненные для большого количества пунктов территории СССР эти расчеты дали возможность построить карты межгодовой изменчивости эффективной температуры для всех месяцев отопительного сезона. При этом предполагалось, что основной вклад в дисперсию эффективной температуры вносит изменчивость температуры наружного воздуха и поэтому все остальные слагаемые формулы (1) были отброшены. Для тех пунктов, где изменчивость ветра или приходящей радиации велика, это приведет к занижению дисперсии эффективной температуры, а в ряде случаев вследствие больших отрицательных вкладов, вызванных связностью метеорологических величин, может привести и к завышению $\sigma_{T_{\text{эф}}}$. Расчеты $\sigma_{T_{\text{эф}}}$ по полной формуле (1) были сделаны в работе Л. П. Клягиной и Н. В. Елисевой [6], где исследовалась межсуточная изменчивость эффективной температуры.

В данной работе сделана попытка исследовать межгодовую изменчивость эффективной температуры для ряда пунктов территории Советского Союза с учетом всех слагаемых формулы (1).

В качестве исходных данных использовались среднемесячные значения температуры и ветра, суммы за месяц рассеянной радиации, а также часовые суммы прямой солнечной радиации на перпендикулярную поверхность. Периоды наблюдений на станциях, используемые в расчетах, были различны и определялись продолжительностью наблюдений за прямой и рассеянной радиацией (табл. 1).

Таблица 1

Для определения радиации, приходящей на вертикальную поверхность, использовались часовые суммы прямой солнечной радиации на перпендикулярную поверхность. Эти значения пересчитывались по программе, любезно предоставленной нам Л. П. Клягиной, на часовые и суточные значения прямой радиации, падающей на различно ориентированные поверхности. Алгоритм программы изложен в работе [5]. Как видно из формулы (1), для

Периоды наблюдений за прямой и рассеянной радиацией, используемые в расчетах

Пункт	Период наблюдений
Воейково	1929—1940, 1952—1972
Одесса	1933—1940, 1948—1971
Тбилиси	1930—1940, 1954—1969
Якутск	1931—1940, 1950—1971
Свердловск	1935—1940, 1961—1969
Иркутск	1930—1940, 1955—1971
Ташкент	1930—1940, 1957—1970
Владивосток	1930—1940, 1951—1969

определения изменчивости эффективной температуры необходимы сведения об изменчивости температуры, ветра и солнечной радиации, а также коэффициенты корреляции между ними. Вычисление статистических характеристик осуществлялось на ЭВМ М-220 по обычным формулам.

В табл. 2 приводятся сведения о средних квадратических отклонениях температуры (σ_{T_H}), ветра (σ_v), прямой (σ_S) и суммарной (σ_I) радиации, падающей на различно ориентированные вертикальные поверхности.

Подробные сведения межгодовой изменчивости температуры, вычисленной по 60-летнему ряду наблюдений, содержатся в работе [7]. Полученные в настоящей работе данные рассчитаны по сравнительно небольшому ряду наблюдений. В основном они хорошо согласуются с данными, приведенными в работе [7], однако в нескольких случаях расхождения достигают 0,7—0,8°C.

Межгодовая изменчивость скорости ветра не превышает 1 м/с на станциях, где скорость ветра значительна, таких, как Владивосток, Одесса, Воейково. На остальных станциях изменчивость скорости ветра не превышает 0,5 м/с.

При определении суммарной радиации, падающей на различно ориентированные вертикальные поверхности, учитывалась как

Средние квадратические отклонения метеорологических параметров

Пункт	Месяц	$\sigma_{T_n}^{\circ C}$	σ_v м/с	$\sigma_{SЮ}$ кал/(см ² ·ч)	$\sigma_{SВ}$ кал/(см ² ·ч)	$\sigma_{Ю}$ кал/(см ² ·ч)	$\sigma_{В}$ кал/(см ² ·ч)	$\sigma_{С}$ кал/(см ² ·ч)
Воейково	XI	2,0	1,0	6,6	1,4	7,6	4,8	4,6
	XII	3,0	1,2	5,6	0,8	8,0	5,9	5,8
	I	4,4	1,2	8,0	1,4	8,0	2,2	1,4
	II	3,9	1,1	13,4	3,7	15,8	6,3	3,8
	III	2,9	0,9	22,4	8,5	25,4	12,2	6,5
Одесса	XI	2,2	1,0	14,9	4,7	17,0	7,8	6,0
	XII	2,4	1,0	11,2	2,4	13,7	5,0	2,9
	I	3,3	1,0	10,1	2,4	10,9	4,9	3,9
	II	3,1	1,2	13,6	4,4	14,5	6,8	3,7
	III	1,8	1,0	15,2	7,9	17,0	11,4	5,1
Тбилиси	XI	1,9	0,6	17,2	6,0			
	XII	1,6	0,6	16,3	5,1			
	I	2,3	0,7	14,3	3,6			
	II	2,0	0,8	15,8	5,6			
	III	1,5	0,6	16,4	8,1			
Якутск	XI	3,4	0,6	9,2	1,6	9,7	3,0	2,4
	XII	3,2	0,4	4,5	0,5	4,8	1,2	1,0
	I	3,3	0,3	7,1	1,2	4,6	2,1	1,7
	II	3,2	0,4	16,7	4,2	36,2	5,5	5,3
	III	2,4	0,4	22,4	10,0	23,5	10,8	4,5
Свердловск	XI	2,4	0,9	12,8	2,8			
	XII	4,5	0,7	14,4	2,4			
	I	3,9	0,7	14,1	2,6			
	II	3,2	0,9	20,0	6,2			
	III	2,8	0,8	19,1	8,8			
Иркутск	XI	2,8	0,5	18,8	4,2	9,8	4,4	2,4
	XII	3,1	0,4	11,1	1,8	8,8	3,5	3,1
	I	3,2	0,5	8,7	1,8	10,9	3,9	2,5
	II	3,4	0,5	14,5	2,2	12,1	8,1	3,0
	III	2,9	0,4	12,2	6,6	10,0	11,2	3,6
Ташкент	XI	2,3	0,2	16,3	5,7	16,7	6,2	2,0
	XII	2,2	0,3	19,4	5,1	19,9	6,9	2,5
	I	3,6	0,4	19,6	5,2	19,0	6,4	2,6
	II	4,0	0,3	16,2	6,8	18,6	9,2	5,6
	III	2,2	0,3	14,7	8,4	22,8	17,0	9,5
Владивосток	XI	2,0	0,7	15,6	5,6	18,4	8,0	3,7
	XII	2,6	1,0	10,9	2,9	13,0	7,2	5,6
	I	1,7	1,5	17,1	4,7	19,0	8,6	5,4
	II	2,1	1,4	27,9	10,1	32,9	13,3	4,4
	III	1,7	0,7	10,8	5,3	10,0	5,2	4,3

прямая солнечная радиация, так и рассеянная и отраженная. При этом учет рассеянной и отраженной радиации, приходящей на вертикальные поверхности в условиях городской застройки, проводился по методике, изложенной в работе [6]. Исключение было сделано для Тбилиси и Свердловска, где ряд наблюдений за рассеянной радиацией недостаточный. Однако, как показали результаты расчетов на других станциях, различие в значениях $\sigma_{T_{эф}}$ при

Таблица 3

Корреляционные связи между метеорологическими параметрами

Пункт	Месяц	$r_{T_H, v}$	$r_{T_H, Ю}$	$r_{v, Ю}$	$r_{T_H, IB}$	$r_{v, IB}$	$r_{T_H, IC}$	$r_{v, IC}$
Воейково	XI	0,49	-0,36	0,04	-0,11	0,00	0,00	0,00
	XII	0,52	0,05	0,28	0,42	0,30	0,47	0,28
	I	0,66	-0,56	-0,32	-0,65	-0,43	-0,71	-0,56
	II	0,48	-0,62	-0,25	-0,50	-0,16	-0,51	-0,13
	III	0,33	-0,70	-0,30	-0,65	-0,16	-0,63	-0,37
Одесса	XI	-0,09	0,03	-0,30	0,01	-0,21	-0,05	0,00
	XII	-0,14	-0,03	-0,49	-0,03	-0,43	-0,17	-0,30
	I	-0,39	-0,37	-0,18	-0,25	-0,25	-0,26	-0,16
	II	-0,69	-0,30	0,02	-0,18	-0,02	-0,14	-0,03
	III	0,00	0,16	0,44	0,21	0,42	0,06	0,44
Тбилиси	XI	-0,37	0,08	0,28	0,05	0,28		
	XII	-0,19	-0,18	0,66	-0,41	0,62		
	I	-0,24	-0,01	0,43	-0,13	0,48		
	II	-0,25	0,38	0,18	0,18	0,24		
	III	0,07	0,36	0,44	0,24	0,44		
Якутск	XI	0,36	-0,20	-0,08	-0,20	-0,19	-0,10	-0,18
	XII	0,40	0,20	0,13	0,24	-0,08	0,26	-0,15
	I	0,50	0,17	0,14	-0,02	0,08	-0,31	-0,03
	II	0,19	0,36	0,33	0,23	0,26	-0,06	0,02
	III	0,17	-0,41	0,09	-0,41	0,12	-0,25	-0,41
Свердловск	XI	0,05	-0,01	-0,72	-0,02	-0,73		
	XII	0,69	-0,56	-0,67	-0,52	-0,64		
	I	0,43	-0,17	-0,43	-0,13	-0,50		
	II	0,25	-0,06	-0,41	-0,06	-0,51		
	III	0,09	-0,27	-0,61	-0,47	-0,54		
Иркутск	XI	0,25	0,53	-0,04	0,38	-0,05	0,24	0,08
	XII	-0,16	0,33	0,04	0,03	-0,02	-0,23	0,22
	I	0,12	0,24	0,26	0,15	0,21	0,09	0,22
	II	0,38	0,40	0,03	0,43	0,15	0,08	0,44
	III	0,07	-0,03	0,11	-0,31	0,34	-0,22	0,41
Ташкент	XI	0,42	0,00	1,43	0,00	0,40	0,14	0,39
	XII	0,35	0,30	0,70	0,31	0,60	0,38	0,05
	I	0,59	0,49	0,46	0,26	0,23	-0,55	-0,63
	II	0,62	-0,05	-0,09	-0,17	-0,20	-0,37	-0,35
	III	-0,05	0,08	-0,18	0,10	-0,18	0,10	-0,27
Владивосток	XI	-0,23	-0,56	-0,02	-0,40	0,10	0,05	0,22
	XII	-0,37	-0,32	-0,03	-0,40	0,11	-0,42	0,17
	I	-0,55	-0,05	-0,20	-0,17	-0,03	-0,33	0,08
	II	-0,47	-0,07	-0,02	-0,10	-0,01	-0,16	0,16
	III	-0,86	-0,05	0,16	-0,07	0,06	-0,22	0,21

учете только прямой радиации и при учете всей приходящей радиации невелики.

В тех широтах, для которых производились расчеты, приход прямой солнечной радиации зимой отмечается только на поверхности восточной и южной ориентации, причем изменчивость прямой солнечной радиации на южную стену $\sigma_{\text{ю}}$ в несколько раз превосходит изменчивость прямой солнечной радиации на восточную стену $\sigma_{\text{в}}$. Максимум изменчивости суммарной радиации наблюдается на стенах южной ориентации ($\sigma_{\text{ю}}$), где основную роль играет прямая солнечная радиация. На южных станциях, таких, как Ташкент и Владивосток, $\sigma_{\text{ю}}$ составляет около 20 кал/(см²·ч). Очень велика изменчивость приходящей суммарной радиации в феврале в Якутске, что обусловлено большим притоком солнечной радиации в этот месяц. Изменчивость суммарной радиации на поверхности северной ориентации характеризует изменчивость рассеянной радиации, она меняется от 1 до 6 кал/(см²·ч).

В табл. 3 приведены коэффициенты корреляции между основными метеорологическими параметрами, определяющими тепловой режим зданий. Коэффициенты корреляции сравнительно невелики, и можно говорить только о качественной связи между рассматриваемыми элементами.

Связь между температурой и ветром хорошо выражена почти на всех станциях, исключение составляют Иркутск и Тбилиси. Довольно значительные положительные коэффициенты корреляции в Воейково между температурой и ветром можно объяснить частым прохождением в этом районе циклонов и связанным с этим усилением ветра и повышением температуры в холодное время года. Те же причины обусловили и отрицательную корреляцию между температурой и суммарной солнечной радиацией, так как с увеличением облачности при прохождении циклонов уменьшается приток прямой солнечной радиации. Положительная связь скорости ветра и температуры наблюдается также в Якутске и Свердловске, где зимой сохраняется устойчивая антициклоническая погода со слабыми ветрами и сильным радиационным выхолаживанием ночью. Довольно значительные отрицательные коэффициенты корреляции между температурой и ветром наблюдаются в Одессе и Владивостоке. В Одессе это можно объяснить преобладанием зимой северо-восточных ветров, приносящих холодный воздух с материка и вызывающих понижение температуры. Во Владивостоке северные и северо-западные ветры зимой приносят холодный воздух сибирского антициклона.

Связь между температурой и радиацией невелика, в большинстве пунктов она отрицательна, так как зимой при безоблачной погоде наблюдается сильное ночное выхолаживание, т. е. увеличение притока радиации связано с понижением температуры.

В большинстве пунктов связь между скоростью ветра и радиацией выражена слабо. Некоторое исключение составляют Тбилиси, где в течение всего отопительного периода наблюдается существенная положительная связь между скоростью ветра и радиацией,

и Свердловск, где усиление ветра связано с уменьшением притока солнечной радиации.

Представляется интересным оценить вклад каждого слагаемого в изменчивость эффективной температуры. Для удобства анализа представим формулу (1) в виде

$$\sigma_{T_{\text{эф}}}^2 = S_{T_{\text{н}}} + S_v + S_I + R_{v, I} + R_{T_{\text{н}}, I} + R_{T_{\text{н}}, v}, \quad (4)$$

где $S_{T_{\text{н}}}$, S_v , S_I — вклады в дисперсию эффективной температуры, обусловленные изменчивостью температуры, изменчивостью скорости ветра и изменчивостью солнечной радиации; $R_{v, I}$, $R_{T_{\text{н}}, I}$, $R_{T_{\text{н}}, v}$ — вклады, обусловленные корреляцией между скоростью ветра и суммарной радиацией, приходящей на стены здания, корреляцией между температурой наружного воздуха и приходящей радиацией, корреляцией между температурой воздуха и скоростью ветра.

В табл. 4 приведены значения дисперсии эффективной температуры для различно ориентированных поверхностей — южной, восточной и северной — для всех пяти месяцев отопительного сезона на восьми станциях Советского Союза. Как видно из таблицы, наибольшая изменчивость эффективной температуры отмечается для поверхности южной ориентации, что обусловлено большим вкладом солнечной радиации, падающей на стены. На некоторых станциях четко выражен годовой ход изменчивости эффективной температуры. Так, например, в Якутске, Свердловске, Иркутске и Владивостоке ярко выражен февральский максимум.

Анализируя таблицу, можно видеть, что в центральные месяцы отопительного сезона на всех станциях, кроме Владивостока, самый большой вклад в изменчивость эффективной температуры обусловлен изменчивостью температуры воздуха. В переходные месяцы сезона (октябрь и март) очень велика изменчивость суммарной радиации, приходящей на вертикальную поверхность. Вклад, обусловленный изменчивостью скорости ветра, почти всегда небольшой, исключение составляет Владивосток, где межгодовая изменчивость скорости ветра сравнительно велика.

Вклад, обусловленный изменчивостью приходящей радиации, сильно зависит от ориентации. Для южной ориентации этот вклад очень велик, большей частью он значительно превосходит вклад, обусловленный изменчивостью температуры. Поэтому при оценке изменчивости эффективной температуры для поверхности южной ориентации необходимо учитывать вклад, обусловленный изменчивостью приходящей радиации.

На северной ориентации основной вклад в изменчивость эффективной температуры вносит температура воздуха, вклад остальных слагаемых формулы (4) незначительный. Исключение составляет Владивосток, где вклад, обусловленный изменчивостью ветра, а также вклад за счет корреляции между ветром и температурой очень велики и в центральные месяцы отопительного сезона значительно превосходят вклад, вносимый температурой воздуха.

Таблица 4

Вклад различных факторов в изменчивость эффективной температуры

Пункт	Месяц	S_{T_H}	S_v	$R_{T_H, v}$	$S_{I/O}$	$R_{v, I/O}$	$R_{T_H, I/O}$	$a_{T_H}^2$ (Ю)	$S_{I/B}$	$R_{v, I/B}$	$R_{T_H, I/B}$	$a_{T_H}^2$ (В)	$S_{I/C}$	$R_{v, I/C}$	$R_{T_H, I/C}$	$a_{T_H}^2$ (С)
Воейково	XI	5,0	0,6	-1,8	1,7	-0,1	-2,1	3,4	0,7	0,0	-0,4	4,2	0,6	0,0	0,1	4,6
	XII	11,1	1,5	-4,2	1,9	-0,9	0,5	9,8	1,0	-0,7	2,8	11,4	1,0	-0,7	3,2	11,8
	I	25,2	2,0	-9,4	1,9	1,2	-7,8	13,1	0,2	0,5	-2,5	15,9	0,1	0,4	-1,7	16,5
	II	18,4	1,5	-5,0	7,4	1,6	-14,5	9,6	1,2	0,4	-4,7	11,8	0,4	0,2	-2,8	12,8
	III	10,3	0,7	-1,8	19,3	2,1	-19,6	11,0	4,4	0,6	-8,8	5,4	1,3	0,7	-4,6	6,6
	XI	7,1	0,4	0,3	8,6	1,1	0,5	17,9	1,8	0,3	0,1	10,0	1,1	0,0	-0,3	8,5
	XII	8,4	0,8	0,7	5,6	2,0	-0,4	17,2	0,8	0,7	-0,2	11,2	0,2	0,3	-0,5	10,0
	I	15,1	1,0	3,1	3,6	0,7	-5,4	18,1	0,7	0,4	-1,7	18,7	0,5	0,2	-1,4	18,5
	II	13,4	1,3	5,7	6,3	-0,1	-5,4	21,2	1,4	0,1	-1,6	20,3	0,4	0,0	-0,7	20,2
Тбилиси	III	4,3	0,7	0,0	8,6	-2,2	1,9	13,3	3,9	-1,4	1,7	9,2	0,8	-0,6	0,2	5,4
	XI	3,7	0,0	0,2	8,8	-0,2	1,0	13,5	1,1	-0,1	0,2	5,0				
	XII	2,6	0,0	0,1	7,9	-0,5	-1,6	8,5	0,8	-0,2	-1,2	2,1				
	I	5,5	0,1	0,3	6,2	-0,6	-0,1	11,4	0,4	-0,2	-0,4	5,8				
	II	4,1	0,1	0,3	7,4	-0,3	4,2	15,8	1,0	-0,1	0,7	6,0				
	III	2,3	0,0	0,0	8,0	-0,5	3,1	12,9	2,0	-0,2	1,0	5,1				
	XI	12,6	0,4	-1,6	2,8	0,2	-2,4	12,0	0,3	0,1	-0,7	11,1	0,2	0,1	-0,3	11,4
	XII	10,8	0,2	-1,0	0,7	-0,1	1,1	11,6	0,0	0,0	0,3	10,3	0,0	0,0	0,3	10,3
	I	11,4	0,1	-1,2	1,2	-0,1	1,2	12,7	0,1	0,0	-0,1	10,4	0,1	0,0	-0,6	9,8
Якутск	II	10,7	0,1	-0,5	6,2	-0,6	5,8	21,8	0,9	-0,2	1,4	12,5	0,8	0,0	-0,4	10,8
	III	6,4	0,2	-0,3	16,5	-0,3	-8,4	14,0	3,5	-0,2	-3,8	5,6	0,6	0,3	-1,0	6,1

Город	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Иркутск	XII	24,2	0,6	-5,3	6,2	2,6	-13,6	14,7	0,2	0,6	-0,1	7,9								
	I	17,2	0,6	-2,8	5,9	1,7	-3,5	19,1	0,2	0,4	-0,5	15,1								
	II	12,3	1,2	-1,9	11,9	3,0	-1,4	25,2	1,1	1,2	-0,4	13,5								
	III	9,4	0,5	-0,4	10,9	2,8	-5,5	17,6	2,3	1,1	-4,4	8,5								
	XI	8,5	0,1	-0,4	2,8	0,0	5,2	16,3	0,6	0,0	1,7	10,5	0,2	0,0	0,6	8,9				
	XII	9,7	0,1	0,4	2,3	0,0	3,1	15,5	0,4	0,0	0,1	10,6	0,3	-0,1	-0,8	9,6				
	I	10,8	0,2	-0,4	3,6	-0,4	3,0	16,8	0,4	-0,1	0,6	11,6	0,2	-0,1	0,3	11,0				
	II	12,3	0,2	-1,1	4,4	0,0	5,9	21,7	2,0	-0,2	4,3	17,4	0,3	-0,2	0,3	11,7				
	III	9,2	0,1	-0,1	3,0	-0,1	-0,4	11,7	3,8	-0,3	-3,6	9,0	0,4	-0,1	-0,8	8,6				
Ташкент	XI	5,4	0,0	-0,1	8,3	-0,1	0,0	13,4	1,2	0,0	0,1	6,4	0,1	0,0	0,2	5,6				
	XII	5,1	0,0	-0,1	11,8	-0,4	4,6	21,0	1,4	-0,1	1,7	8,0	0,2	0,0	0,7	5,9				
	I	13,4	0,0	-0,7	10,8	-0,5	11,8	34,8	1,2	-0,1	2,1	15,9	0,2	0,1	-1,8	11,2				
	II	17,4	0,0	-0,6	10,3	0,1	-1,4	25,8	2,5	0,1	-2,2	17,2	0,9	0,1	-3,0	14,8				
	III	5,0	0,0	0,0	15,6	0,1	1,4	22,1	8,6	0,1	1,2	15,0	2,7	0,1	0,7	8,5				
	XI	6,0	0,6	0,9	10,2	0,1	-8,6	9,1	1,9	-0,2	-2,7	6,5	0,4	-0,2	0,2	7,8				
	XII	10,3	2,3	3,6	5,1	0,2	-4,6	17,0	1,6	-0,4	-3,2	14,2	1,0	-0,5	-2,6	14,0				
	I	4,6	7,7	6,5	10,8	3,7	-0,6	32,6	2,2	0,2	-1,0	20,2	0,9	-0,4	-1,3	17,9				
	II	1,1	5,0	5,6	32,3	0,5	-2,0	42,4	5,3	0,1	-1,2	15,9	0,6	-0,6	-0,6	11,0				
III	4,1	0,5	2,4	3,0	-0,4	-0,4	9,2	0,8	-0,1	-0,3	7,5	0,6	-0,2	-0,7	6,7					
Владивосток	XI	6,0	0,6	0,9	10,2	0,1	-8,6	9,1	1,9	-0,2	-2,7	6,5	0,4	-0,2	0,2	7,8				
	XII	10,3	2,3	3,6	5,1	0,2	-4,6	17,0	1,6	-0,4	-3,2	14,2	1,0	-0,5	-2,6	14,0				
	I	4,6	7,7	6,5	10,8	3,7	-0,6	32,6	2,2	0,2	-1,0	20,2	0,9	-0,4	-1,3	17,9				
	II	1,1	5,0	5,6	32,3	0,5	-2,0	42,4	5,3	0,1	-1,2	15,9	0,6	-0,6	-0,6	11,0				
	III	4,1	0,5	2,4	3,0	-0,4	-0,4	9,2	0,8	-0,1	-0,3	7,5	0,6	-0,2	-0,7	6,7				

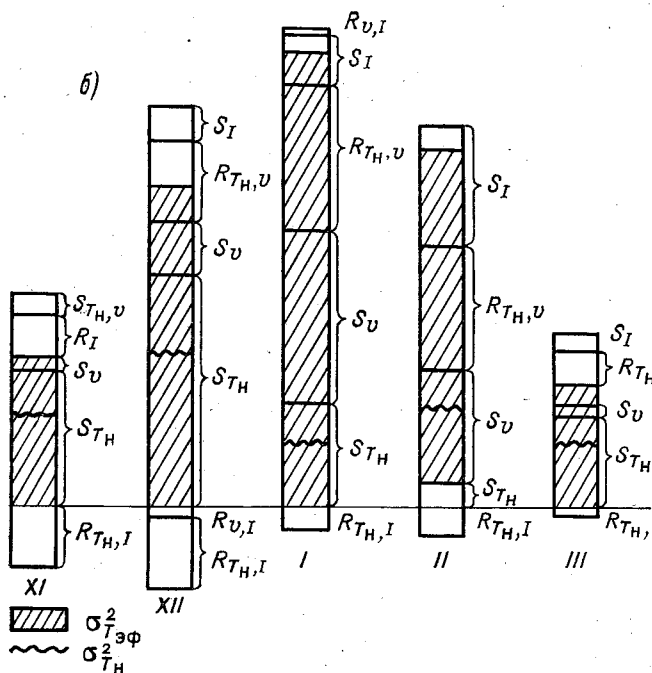
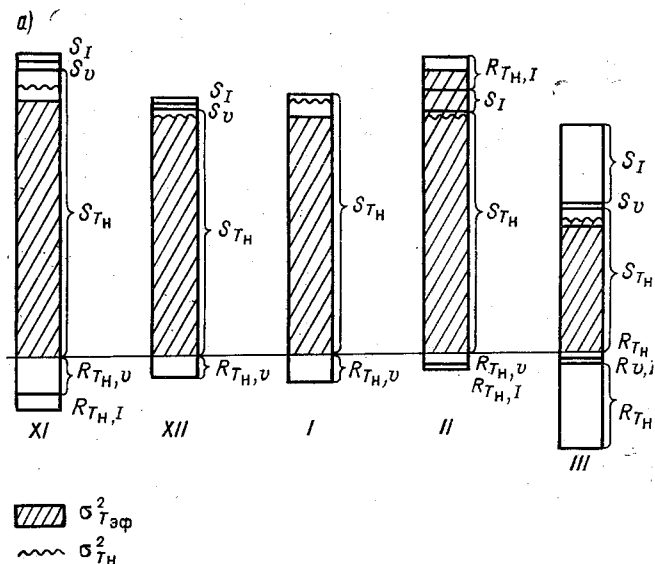
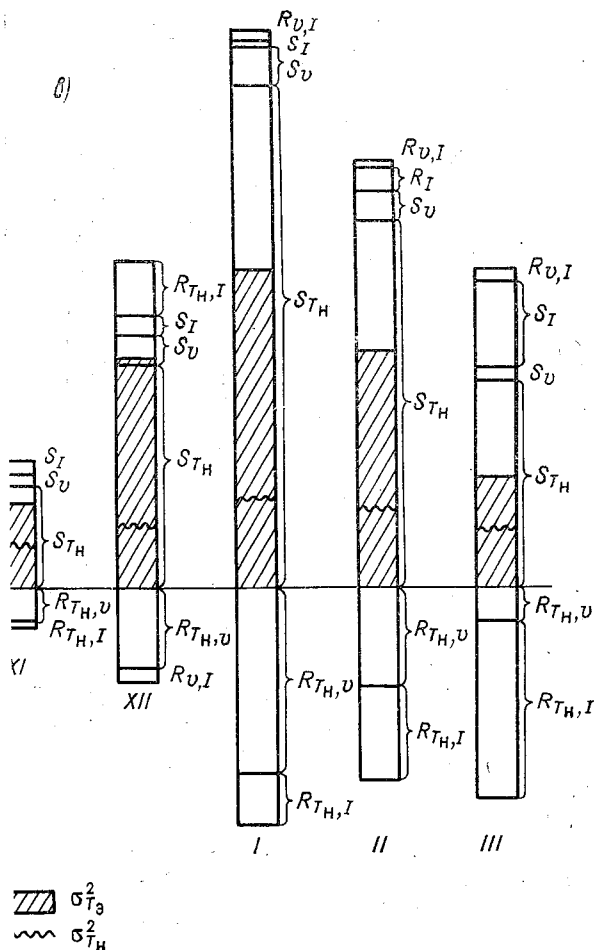


Рис. 1. Дисперсия эффективной температуры теплотехнических факторов для различных пунктов.
а — Якутск, б — Владивосток,

На основании данных табл. 4 было построено несколько рисунков-диаграмм. Методика построения таких диаграмм заимствована из работы [6]. Диаграммы строили следующим образом. Положительные значения слагаемых откладывали вверх от оси абсцисс, отрицательные — вниз. Часть диаграммы, соответствующую величине $\sigma_{T_{эф}}^2$, заштриховывали. На диаграммы наносили также значения дисперсии температуры наружного воздуха $\sigma_{T_H}^2$.

Все диаграммы (рис. 1) построены для поверхности восточной ориентации, которая характеризует средние условия теплового режима здания, для всех пяти месяцев отопительного сезона.

На рис. 1 а приведены значения дисперсии эффективной темпе-



зданий и вклады в нее различных метеорологических (Восточная ориентация.)

в — Воейково.

ратуры и вклады в нее различных метеорологических факторов для Якутска. Как видно из рисунка, изменчивость эффективной температуры целиком определяется $\sigma_{T_n}^2$. Что касается остальных

слагаемых формулы (4), то можно отметить довольно существенный в марте вклад за счет изменчивости суммарной радиации, приходящей на вертикальную стену σ_r , который компенсируется отрицательным вкладом, обусловленным корреляцией между температурой и суммарной радиацией. Аналогичная картина наблюдается в Свердловске. На этой станции для определения оптимальных запасов топлива достаточно знать дисперсию температуры наружного воздуха.

На рис. 1 б приводятся данные о дисперсии эффективной температуры во Владивостоке. Большие вклады в изменчивость эффективной температуры, обусловленные изменчивостью ветра и ра-

Таблица 5

Дисперсия эффективной температуры, рассчитанная с учетом параметров ограждения по СНиП

Пункт	Месяцы	R_c	R_o	$\sigma_{T_{эф}}^2$ (Б)
Воейково	XI	0,92	0,58	4,1
	XII			11,1
	I			16,1
	II			12,0
	III			5,3
Одесса	XI	0,78	0,58	8,6
	XII			9,9
	I			16,9
	II			17,9
	III			7,6
Якутск	XI	1,67	0,78	11,1
	XII			10,4
	I			10,4
	II			13,1
	III			6,3
Иркутск	XI	1,29	0,58	10,8
	XII			10,6
	I			11,8
	II			18,2
	III			11,2
Ташкент	XI	0,73	0,58	6,0
	XII			7,1
	I			15,0
	II			16,6
	III			11,3
Владивосток	XI	0,96	0,58	6,2
	XII			13,4
	I			18,3
	II			20,0
	III			7,1

диации, а также корреляцией между этими параметрами, привели к тому, что изменчивость эффективной температуры во много раз превосходит изменчивость температуры наружного воздуха. В этом случае при определении резервных запасов топлива нельзя учитывать только $\sigma_{T_n}^2$ или первое слагаемое формулы, необходимо учитывать все параметры.

На рис. 1 в приведены значения $\sigma_{T_{эф}}^2$ для Воейково, где вследствие больших отрицательных вкладов, вызванных корреляцией между температурой и ветром и между температурой наружного воздуха и приходящей радиацией, изменчивость эффективной температуры существенно меньше вклада, обусловленного изменчивостью фактической температуры. В этом случае оценка $\sigma_{T_{эф}}^2$ по первому слагаемому формулы (4) приведет к его завышению.

Выполненные оценки изменчивости эффективной температуры для некоторого «типового» набора теплотехнических параметров ограждения здания дали возможность количественно сопоставлять климатические факторы теплопотерь зданий в различных условиях. Представляет интерес оценить также влияние конструктивных параметров ограждения на изменчивость эффективной температуры. С этой целью проведены расчеты изменчивости эффективной температуры для ряда пунктов, для каждого из которых термическое сопротивление стены (R_c), световых проемов (R_o) выбиралось согласно СНиП [10, 11]. Расчеты выполнены для помещений восточной ориентации. Результаты расчетов приведены в табл. 5. Оказалось, что сколько-нибудь существенной разницы между полученными результатами и оценками изменчивости эффективной температуры, рассчитанными для «стандартного» набора теплотехнических параметров здания, нет.

Полученные данные о межгодовой изменчивости эффективной температуры были использованы в задаче об оптимальном планировании запасов топлива для отопления зданий, как это показано в [3].

Примем, что функция потерь линейно-разностная, несимметричная, причем несимметричность функции потерь характеризуется коэффициентом k . Расчеты выполнены для двух значений коэффициента ($k=2$ и $k=5$) для трех ориентаций. В табл. 6 для ряда пунктов приводятся данные об уменьшении расчетной (эффективной) температуры по сравнению с нормой при оптимальной стратегии и соответствующее относительное увеличение запасов топлива по сравнению с ориентацией на норму.

Как видно из этих оценок, при $k=2$ отличие расчетной среднемесячной температуры при оптимальной стратегии от нормы составляет 1,5—2°C, а при $k=5$ возрастает до 3—4°C. Особенно существенно это различие для Владивостока, где наблюдается большая изменчивость эффективной температуры. При этом относительное увеличение запасов топлива при $k=2$ составляет 5—6%, а при $k=5$ возрастает в 2 раза. Для таких городов, как Москва и Ленинград, стоимость 10—15% общих запасов топлива составляет миллионы

**Уменьшение расчетной среднемесячной температуры
по сравнению с многолетним средним значением**

Пункт	Месяц	k=2			k=5		
		север	восток	юг	север	восток	юг
Одесса	XI	1,2	1,4	1,9	2,4	2,7	3,5
	XII	1,4	1,4	1,9	2,7	2,7	3,4
	I	1,8	1,8	2,0	3,6	3,6	3,6
	II	1,9	1,9	2,1	3,7	3,7	3,8
	III	1,0	1,3	1,7	1,9	2,5	3,0
Ленинград	XI	0,9	0,9	0,9	1,7	1,7	1,5
	XII	1,5	1,5	1,4	2,8	2,8	2,6
	I	1,8	1,7	1,7	3,4	3,3	3,0
	II	1,6	1,5	1,4	3,0	2,8	2,6
	III	1,1	1,0	1,5	2,2	1,9	2,7
Иркутск	XI	1,3	1,4	1,8	2,5	2,7	3,3
	XII	1,3	1,4	1,8	2,6	2,7	3,2
	I	1,4	1,5	1,9	2,7	2,8	3,4
	II	1,5	1,8	2,2	2,8	3,5	3,9
	III	1,2	1,3	1,6	2,4	2,5	2,8
Якутск	XI	1,5	1,4	1,6	2,8	2,7	2,9
	XII	1,4	1,4	1,6	2,7	2,7	2,8
	I	1,3	1,4	1,7	2,6	2,7	3,0
	II	1,4	1,5	2,2	2,7	2,9	3,9
	III	1,1	1,0	1,7	2,1	2,0	3,1
Владивосток	XI	1,2	1,1	1,4	2,3	2,2	2,5
	XII	1,6	1,6	1,9	3,1	3,2	3,4
	I	1,8	1,9	2,6	3,5	3,7	4,7
	II	1,4	1,7	3,0	2,7	3,3	5,4
	III	1,1	1,2	1,4	2,2	2,2	2,5

**Относительное увеличение запасов топлива по сравнению
с ориентацией на многолетнее среднее значение (%)**

Одесса	XI	9	11	17	17	20	31
	XII	7	7	11	13	14	19
	I	8	8	10	18	16	18
	II	9	9	11	19	17	20
	III	6	10	16	17	18	28
Ленинград	XI	5	5	5	9	9	8
	XII	6	6	6	12	12	11
	I	7	6	6	13	12	11
	II	6	6	6	12	11	10
	III	6	6	9	13	11	15
Иркутск	XI	5	5	7	9	10	12
	XII	4	4	5	7	8	9
	I	4	4	5	7	8	9
	II	5	5	7	8	10	12
	III	5	6	7	11	11	13

Пункт	Месяц	$k=2$			$k=5$		
		север	восток	юг	север	восток	юг
Якутск	XI	3	3	4	6	6	6
	XII	2	2	3	5	5	5
	I	2	2	3	4	4	5
	II	3	3	4	5	6	8
	III	3	3	5	6	6	10
Владивосток	XI	6	6	7	12	11	13
	XII	5	5	6	10	10	11
	I	5	5	7	10	10	13
	II	5	6	10	9	11	19
	III	6	7	8	12	12	14

рублей. При использовании оптимальной стратегии, как показано в работе [3], можно снизить средние затраты на 9% в случае $k=2$ и на 37% в случае $k=5$. В настоящее время основная трудность при обосновании планирования запасов топлива заключается в незнании функции потерь. Для решения этого вопроса необходимы совместные усилия специалистов многих областей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анапольская Л. Е., Гандин Л. С. Метеорологические факторы теплового режима зданий. Л., Гидрометеиздат, 1973, 240 с.
2. Анапольская Л. Е., Гандин Л. С., Мандель Д. Г. Климатическая изменчивость месячных теплопотерь зданий и нормы отопления.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 337, с. 3—19.
3. Беленький Д. Х., Гандин Л. С., Жуковский Е. Е. Об использовании климатологической информации при принятии хозяйственных решений.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 337, с. 92—102.
4. Гандин Л. С. К вопросу о расчете норм теплопотерь по осредненным данным.— «Тр. ГГО», 1971, вып. 285, с. 17—23.
5. Клягина Л. П. Прямая солнечная радиация, поступающая на вертикальные стены при условии моделирования городской застройки.— «Тр. ГГО», 1973, вып. 305, с. 30—41.
6. Клягина Л. П., Елисеева Н. В. О вкладах различных факторов в изменчивость эффективной температуры теплопотерь зданий.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 337, с. 79—91.
7. Пивоварова З. И. Характеристика радиационного режима на территории СССР применительно к запросам строительства.— «Тр. ГГО», 1973, вып. 321, с. 20—33.
8. Рубинштейн Е. С. Межгодовая изменчивость средних месячных температур воздуха и ее зависимость от периода наблюдений.— «Метеорология и гидрология», 1968, № 10, с. 13—21.
9. Трифонова Л. И., Секерина Л. Ф. Статистические характеристики эффективной температуры воздуха на юго-востоке Западной Сибири.— В кн.: Применение статистических методов в метеорологии. СО АН СССР, Вычислительный центр, Новосибирск, 1971, с. 56—67.
10. Строительные нормы и правила. Часть II, раздел А. глава 7. Строительная теплотехника, нормы проектирования. СНиП II-A, 7-71. М., Госстройиздат, 1973.
11. Строительные нормы и правила. Часть II, раздел В. глава 6. Ограждающие конструкции, нормы проектирования. СНиП II-B, 6-62. М., Госстройиздат, 1973.

О ТОЧНОСТИ АНАЛИЗА ПОЛЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА В ЮЖНОМ ПОЛУШАРИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Для численных методов долгосрочных прогнозов необходима информация о состоянии атмосферы в планетарном масштабе. Между тем многие районы, особенно в южном полушарии, имеют очень редкую сеть станций, а для обширных районов океанов она вообще отсутствует. По состоянию на январь 1971 г. в южном полушарии насчитывается лишь 131 аэрологическая станция. Естественно, что анализ, базирующийся только на данных редкой сети, оказывается мало надежным. Для повышения точности объективного анализа в таких районах необходимо привлекать дополнительную информацию.

В ряде работ рассматривается привлечение спутниковой или прогностической информации для объективного анализа в районах с редкой сетью аэрологических станций северного полушария [2, 5, 6]. В настоящей работе рассматривается вопрос о повышении точности анализа поля геопотенциала путем использования данных численного прогноза в южном полушарии.

При включении дополнительной информации необходимо учитывать статистические свойства ее ошибок, иначе анализ может не улучшиться, а даже стать хуже [1].

Что касается статистических свойств ошибок численного прогноза, то предполагается, что такие ошибки не коррелируют с результатами прогноза и, следовательно, обладают отрицательной корреляцией с истинными значениями прогнозируемого метеоэлемента. Прогноз учитывается только в той точке, куда производится интерполяция [1]. В работе В. А. Шахмейстер [2] получена формула для средней квадратической ошибки интерполяции с привлечением прогноза

$$\epsilon^{*2} = 1 - \sum_{i=1}^n \mu_{0i} p_i - (1 - \eta_0^2) p_0,$$

где ϵ^{*2} — мера ошибки интерполяции при наличии прогноза, η_0^2 — мера ошибки прогноза, μ_{0i} — коэффициент корреляции между зна-

чениями элемента в i -той точке и в точке, куда производится интерполяция, $p_i (i=0, 1, \dots, n)$ — интерполяционные веса при наличии прогноза.

При отсутствии прогностической информации $p_0=0$ и формула для ошибки интерполяции принимает вид, соответствующий обычной оптимальной интерполяции

$$\varepsilon^2 = 1 - \sum_{i=1}^n p_0 p_i,$$

где ε^2 — мера ошибки интерполяции при отсутствии прогноза, $p_i (i=1, \dots, n)$ — соответствующие интерполяционные веса.

Для ε^{*2} в [2] получено простое выражение

$$\varepsilon^{*2} = \frac{\varepsilon^2 \eta_0^2}{\varepsilon^2 + \eta_0^2 - \varepsilon^2 \eta_0^2},$$

которое мы использовали при практических расчетах.

Для определения ошибок интерполяции геопотенциала в южном полушарии мы воспользовались программой В. А. Шахмейстер. Программа позволяет получать значения ε , ε^* , E , E^* (абсолютная ошибка интерполяции), а также $(\varepsilon - \varepsilon^*)/\varepsilon$ в узлах квадратной сетки, содержащей 29×29 точек на карте полярной стереографической проекции с главным масштабом на широте 60° , с шагом 600 км на этой же широте. Абсолютная средняя квадратическая ошибка интерполяции рассчитывалась по формуле

$$E = \sigma \varepsilon,$$

где σ^2 — дисперсия геопотенциала. При расчетах в узлах сетки меры ошибки измерения аэрологических наблюдений η_1^2 и прогностических данных η_0^2 учитывался широтный ход дисперсии σ^2 геопотенциала изобарической поверхности 500 мбар. Эти данные были любезно предоставлены Л. С. Гандину сотрудником Национального центра атмосферных исследований (США) Р. Дженни (R. L. Jenne). Распределение σ получено по результатам наблюдений всего за два месяца, причем в качестве норм (за неимением другой информации) принимались средние значения за эти два месяца. Естественно, изменчивость, полученная таким путем, должна отличаться от изменчивости, полученной по многолетним наблюдениям. По оценке Р. Дженни, эти данные занижены примерно на 40%. Ниже приводятся использованные нами значения σ , увеличенные по сравнению с оригинальными на 40%:

φ^0 ю. ш.	20	30	40	50	60	70	80	90
σ дам	4,2	7,7	14,0	17,5	18,2	17,5	18,9	15,4

В наших расчетах средняя квадратическая ошибка радиозондирования σ_1 принята равной 2 дам, а для средней квадратической ошибки прогноза σ_0 последовательно задавались значения 4, 6

и 8 дам. Прогностическая информация добавлялась только в тех точках, где $\eta_0 < 1$, так как это условие является необходимым и достаточным для выполнения неравенства $\varepsilon^* < \varepsilon$ [2]. Корреляционные функции геопотенциала и ошибок прогноза приняты такими же, как в работе [2].

Рассмотрим полученные результаты. На рис. 1 приведены аэрологическая сеть станций в южном полушарии и географическое



Рис. 1. Географическое распределение ε над южным полушарием.

распределение ε над ним. По сравнению с северным полушарием сеть аэрологических станций здесь примерно в 6 раз меньше и станции расположены крайне неравномерно. Естественно, что и точность анализа в южном полушарии существенно ниже. Здесь даже над континентами значения ε составляют 0,2—0,4, над обширными районами океанов значения ε существенно больше. В центральных частях Атлантического и Индийского океанов ε возрастает

до 0,6—0,7, в Тихом океане — до 0,8—0,9. Исключение составляют районы островов, где расположены отдельные аэрологические станции: здесь ϵ уменьшается до 0,3—0,4. Сравнение с распределением ϵ , приведенным в работе [3], показало, что увеличение числа станций от 110 до 132 почти не повышает точность анализа.

На рис. 2 приведено географическое распределение средней квадратической абсолютной ошибки интерполяции E . В отличие

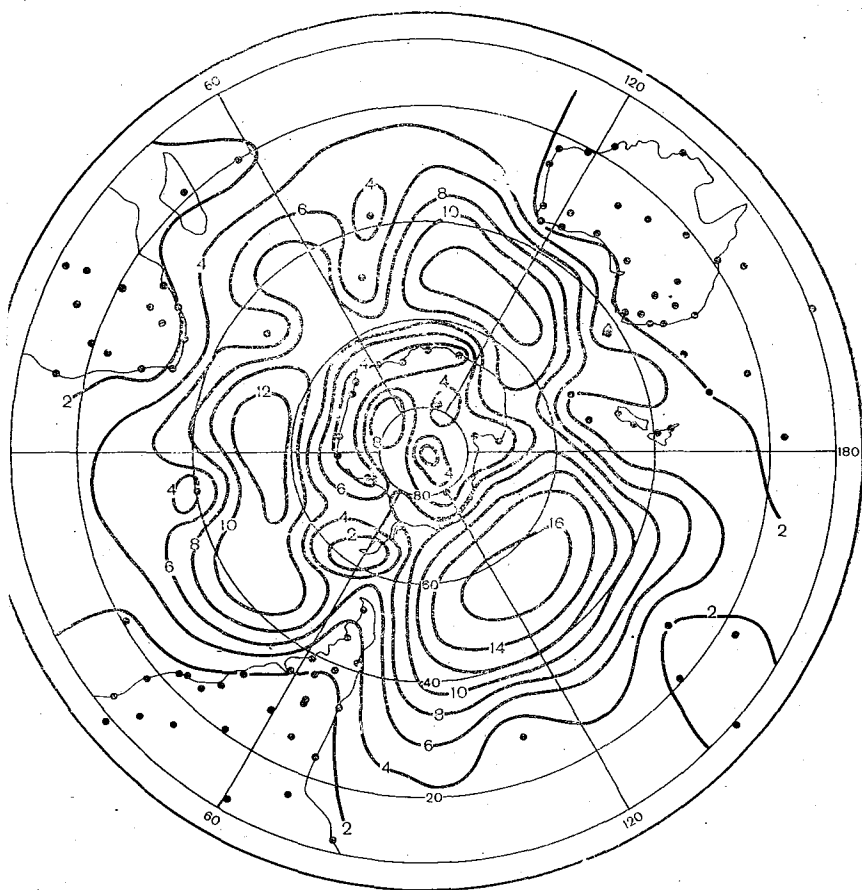


Рис. 2. Географическое распределение E над южным полушарием.

от ϵ распределение E зависит не только от густоты сети, но и от изменчивости самого метеоэлемента. Значения ϵ максимальны в районах, где сеть либо очень редка, либо вообще отсутствует (тропики, обширные районы океанов). Максимальные же значения E наблюдаются в умеренных широтах океанов, где изменчивость геопотенциала велика, а станций практически нет. В Индийском и Атлантическом океанах максимальные значения E составляют

12—13 дам, в Тихом — 15—16 дам. Эти значения почти в 3 раза больше значений E на тех же широтах океанов северного полушария [3, 4].

В табл. 1 дано расположение ϵ по площади для существующей аэрологической сети станций южного полушария, значение $\bar{\epsilon}$, осредненное по всему полушарию, а также распределение ϵ по площади в северном полушарии согласно работе [2]. Из таблицы видно, что

Таблица 1

Распределение градаций ϵ по площади (%)

Полушарие	$\bar{\epsilon}$	Градации ϵ				
		0—0,2	0,2—0,4	0,4—0,6	0,6—0,8	0,8—1,0
Южное	0,510	4,8	29,4	28,6	31,5	5,7
Северное	0,343	36,7	28,9	19,4	8,8	6,2

более 60% площади в южном полушарии занято ошибками, большими 0,4, а в северном полушарии примерно такая же доля площади занята ошибками, меньшими 0,4. Значение $\bar{\epsilon}$ над южным полушарием в 1,5 раза больше, чем над северным. Следует ожидать поэтому, что использование прогноза в южном полушарии наряду с данными аэрологической сети приведет к заметному уменьшению ошибки интерполяции. Это хорошо видно из рис. 3, на котором приводится географическое распределение относительного уменьшения ошибки интерполяции $(\epsilon - \epsilon^*)/\epsilon\%$ при различных зна-

Таблица 2

σ_0 дам	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\epsilon}^2$	$\frac{\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^*}{\bar{\epsilon}} \%$	$\bar{E}$ дам	$\bar{E}^*$ дам	$\frac{\bar{E} - \bar{E}^*}{\bar{E}} \%$
4	0,510	0,357	30,0	4,97	2,73	45,0
6	0,510	0,409	19,6	4,97	3,39	31,7
8	0,510	0,443	13,7	4,97	3,87	22,0

чениях ошибки прогноза. Даже при $\sigma_0 = 8$ дам уменьшение средней квадратической ошибки анализа в умеренных широтах океанов составляет 40—50%, а при $\sigma_0 = 6$ дам оно достигает 50—60%. В северном полушарии максимальное уменьшение ошибки анализа составляет, по данным работы [2], 20% при $\sigma_0 = 6$ дам. В тропиках уменьшения ошибки не происходит вследствие малой изменчивости поля геопотенциала, при этом чем больше значение σ_0 , тем больше зона, в которой использование данных прогноза не может приводить к улучшению анализа.

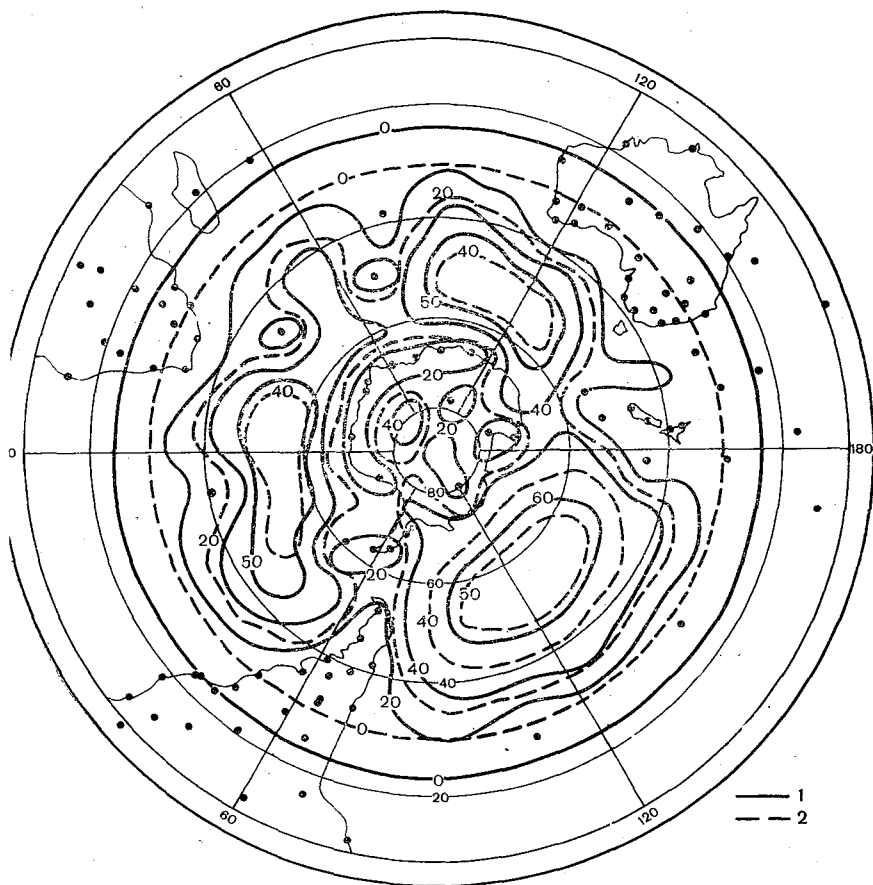


Рис. 3. Географическое распределение отношения $(\varepsilon - \varepsilon^*)/\varepsilon$ при $\sigma_0 = 6$ дам (1) и $\sigma_0 = 8$ дам (2).

Уменьшение ошибки объективного анализа при повышении точности прогноза иллюстрируется данными табл. 2. В этой таблице приведены значения относительного уменьшения средней по площади ошибки анализа при различных значениях σ_0 . Наибольшее относительное уменьшение ошибки анализа наблюдается, естественно, при наименьшей ошибке прогноза ($\sigma_0 = 4$ дам). Для относительной ошибки анализа это уменьшение составляет 30%, для абсолютной — 45% (для северного полушария эти значения составляют 9,3 и 13,3% соответственно, по данным работы [2]). Большее уменьшение E по сравнению с ε связано с тем, что наибольшие значения E приходятся на средние широты океанов, где использо-

вание данных прогноза приводит к заметному улучшению анализа.

Проведенные расчеты показывают, что для объективного анализа в южном полушарии прогноз может служить ценной дополнительной информацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Т. Гандин, Р. Л. Каган. О построении системы объективного анализа разнородных данных на основе метода оптимальной интерполяции и оптимального согласования.— «Метеорология и гидрология», 1974, № 5, с. 3—10.
2. В. А. Шахмейстер. О привлечении спутниковой и прогностической информации при объективном анализе.— «Метеорология и гидрология», 1975, № 3, с. 50—57.
3. Ю. М. Либерман. О точности анализа поля геопотенциала над северным и южным полушариями.— «Тр. ГГО», 1968, вып. 228, с. 41—48.
4. С. Л. Белоусов, Л. С. Гандин, С. А. Машкович. Обработка оперативной метеорологической информации с помощью электронных вычислительных машин. Л., Гидрометеониздат, 1968. 282 с.
5. С. А. Машкович, И. Г. Вейль. Численные эксперименты по четырехмерному объективному анализу на основе спектральной прогностической модели.— «Метеорология и гидрология», 1972, № 3, с. 3—15.
6. Ш. А. Мусаелян, А. Ф. Хорошилов. О пространственно-временном анализе асинхронных метеорологических данных.— «Метеорология и гидрология», 1973, № 2, с. 36—46.

ОБ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ МАССИВОВ ПИГАП

В Программе исследования глобальных атмосферных процессов (ПИГАП) предусмотрена специальная международная деятельность по информационному обеспечению численных экспериментов. Одна из такого рода подпрограмм — Основной ряд данных (ОРД), уже реализована [6]. Другая подпрограмма — Атлантический тропический эксперимент ПИГАП (АТЭП) — выполнена в июле — сентябре 1974 г., и соответствующие данные наблюдений в настоящее время обрабатываются [9]. Принципы сбора и обработки информации, реализованные в проектах ОРД и АТЭП, по-видимому, сохранятся и применительно к будущему Первому глобальному эксперименту, намеченному на 1977 г. [8]. В этой связи целесообразно изложить уже накопленный опыт обработки информации. Предварительно кратко опишем содержание и структуру данных ОРД и АТЭП.

Информация ОРД представляет максимально полные сведения о фактическом состоянии глобальной атмосферы в ноябре 1969 г. и июне 1970 г. Основу этой информации составляют наблюдения оперативной сети наземных и аэрологических станций Всемирной службы погоды. Однако данные этих наблюдений удовлетворительно описывают состояние атмосферы лишь над континентами севернее 30° с. ш. Поэтому они дополнены информацией, собранной по почте. Таким путем удалось получить большое число наблюдений, выполненных научно-исследовательскими, транспортными и пассажирскими судами и рейсовыми самолетами. В частности, для ноября 1969 г. общее число судовых наблюдений превышает 30 000, а объем авиационных данных близок к 1200 наблюдениям в сутки. В ОРД включены также данные метеорологических спутников (МС), дрейфующих баллонов постоянного уровня, океанических буев и других экспериментальных наблюдательных средств.

Информация ОРД предназначена для следующих целей:

- исследования относительного поведения моделей численного прогноза и общей циркуляции атмосферы;
- исследования свойств наблюдательных систем;

— испытания методов четырехмерного анализа метеорологических полей.

Данные Атлантического тропического эксперимента получены как результат специально организованных наблюдений. Они относятся к ограниченной географической области, а по разнообразию существенно превосходят данные ОРД. Помимо стандартных метеорологических, аэрологических, судовых и спутниковых наблюдений, в АТЭП включены:

- 1) радиационные измерения (в том числе судовые и самолетные);
- 2) самолетные измерения температуры, влажности, ветра, микрофизических параметров облачности и параметров атмосферной турбулентности;
- 3) данные сбрасываемых самолетных радиозондов;
- 4) данные о строении пограничных слоев атмосферы и океана;
- 5) радиолокационные наблюдения;
- 6) океанографические наблюдения (в том числе наблюдения над волнением);
- 7) специальные спутниковые данные.

Эта уникальная информация предназначена для обеспечения исследований по оценке воздействия маломасштабных тропических систем погоды на крупномасштабную циркуляцию, а также для усовершенствования методов численного моделирования и прогнозирования. Эти задачи составляют предмет Центральной программы АТЭП [7]. Наряду с Центральной программой будут выполняться исследования по планам пяти следующих подпрограмм АТЭП:

- радиация;
- пограничный слой;
- синоптические исследования;
- конвекция;
- океанографические исследования.

Информация АТЭП в полном объеме концентрируется в двух Мировых центрах (США — Эшвилл, СССР — Москва), которые предоставляют ее пользователям. При этом в качестве основного технического носителя избрана магнитная лента (МЛ), запись информации на которую должна осуществляться в двоичном коде. Дальнейшее изложение мы будем вести применительно к расширенному двоично-кодированному десятичному коду для обмена информацией EBCDIC (Expanded Binary Coded Decimal Interchange Code), поскольку этот код использован и для записи на МЛ информации ОРД.

Информация ОРД в целом занимает 39 лент. Ожидается, что полная информация АТЭП без учета радиолокационных данных займет около 600 лент.

При записи на МЛ данные группируются по видам и источникам. Перейдем к описанию применяемых форматов.

Информация ОРД хранится на МЛ в одном из четырех форматов.

Формат 1 предназначен для хранения следующих аэрологических данных:

- радиозондовых и радиоветровых наблюдений;
- сведений о ветре на изобарических поверхностях;
- профилей температуры, восстановленных по данным МС;
- оценок скорости и направления ветра по данным геостационарных и полярных МС;
- стандартных авиационных наблюдений.

В формате 2 хранятся приземные данные метеорологических станций, находящихся на суше, и судовых наблюдений. Форматы 3 и 4 содержат соответственно данные о ветре на основных геометрических высотах и нестандартные авиационные наблюдения. Подробное описание форматов можно найти в работе [6].

Используемый для хранения ОРД код EBCDIC предполагает запись информации в виде последовательности байтов, состоящих из восьми двоичных разрядов [5]. Байты на МЛ объединены в блоки длиной 24 200 или 27 300 единиц. Чтение данных с МЛ возможно только целыми блоками, но не частями блоков. Блоки состоят из унифицированных сообщений, имеющих законченное метеорологическое содержание. Длина сообщений в форматах 1 и 3 составляет 242 байта, в формате 2 91 байт, в формате 4 80 байтов. Запись на МЛ какой-либо информации типа наименований отдельных лент, файлов и блоков не предусмотрена.

В отличие от ОРД информация АТЭП занимает весьма большое число МЛ. Поэтому каждая МЛ, содержащая данные АТЭП, должна удовлетворять определенному стандарту. Этот стандарт предусматривает следующие правила.

1. Первая физическая запись на МЛ, состоящая из 1920 байтов, является идентификатором данной МЛ. Здесь, в частности, указывается страна и научное учреждение, где записана лента, дата записи и тип ЭВМ.

2. Каждый файл на МЛ также начинается заголовком, содержащим детализированные сведения о том, какие именно данные включены в этот файл и какова его длина. Заголовок состоит из двух физических записей по 1920 байтов.

3. В конце МЛ указывается идентификатор (название или номер) следующей МЛ, содержащей аналогичную информацию. Длина конечного идентификатора 800 байтов.

Файлы АТЭП не имеют фиксированной длины в отличие от блоков ОРД. Определено лишь, что файл состоит из целого числа физических записей по 1920 байтов. В каждой записи байты 1—20 являются служебными. Именно здесь указывается, сколько циклов содержится в последующих байтах 21—1920 и сколько таких циклов было от начала файла. Цикл представляет собой минимальную логическую запись о том или ином параметре (параметрах) атмосферы. Все сведения, необходимые для расшифровки цикла, приводятся в заголовке файла.

Существенно, что все процедуры записи информации АТЭП на МЛ приспособлены для последующей обработки этой информа-

ции на базе алгоритмического языка ФОРТРАН. В соответствии с требованиями ФОРТРАНа информация записывается в одном из трех форматов, а именно:

I — только для целых десятичных чисел (Integer);

F — для целых или дробных десятичных чисел (Floating Point);

A — для буквенной или буквенно-цифровой информации (Alphanumeric).

В пределах каждого файла встречаются все три указанных формата.

Вся метеорологическая информация ОРД и АТЭП хранится на МЛ в цифровой форме. Значения количественных параметров (давление, скорость и направление ветра, температура и т. п.) приведены в явном виде и не требуют дополнительной расшифровки. Качественные характеристики (погода, видимость, типы облаков, волнение моря и т. п.) зашифрованы в соответствии с международными метеорологическими кодами. Доля такой качественной информации в общем объеме данных невелика.

С 1974 г. в ГГО и ЛГМИ выполняется обработка информации ОРД на ЭВМ типа М-220. Ближайшая цель этой работы заключается в расшифровке данных, относящихся к ноябрю 1969 г., и формировании на их основе таких информационных макетов, которые были бы удобны для дальнейшего применения в различных целях. В настоящей статье описываются два начальных этапа обработки: перепись оригинальной информации в зоны МЛ и формирование аэрологических макетов.

Первичные блоки ОРД не имеют отличительных признаков: идентификатором каждого блока служит лишь его порядковый номер от начала ленты. Поэтому предварительная перепись блоков в зоны МЛ является обязательным условием дальнейшей обработки информации на отечественных ЭВМ типа М-220.

Сначала подлежащий переписи блок считывается в оперативную память машины, причем каждые 4 последовательных байта заносятся в одну ячейку и занимают в ней разряды 1—32. Таким образом, блок длиной 24 200 байтов занимает 6050 ячеек. Поскольку последнее число превышает емкость одного куба памяти (4096 ячеек), потребовалось создание специальной аппаратной приставки, допускающей объединение двух кубов памяти в процессе считывания информации с ленты. Такая приставка сконструирована и испытана сотрудниками ГГО Г. А. Абашевым, Б. С. Крупкиным и А. С. Луштаксом. Затем информация, находящаяся в оперативной памяти, записывается в пять зон МЛ по 1210 слов в каждую зону.

Информация ОРД предназначена для многократного и многоцелевого использования. Поэтому необходимо предотвратить искажающее влияние ошибок, неизбежно возникающих при длительном хранении информации на МЛ. Этому требованию удовлетворяет способ защитного помехоустойчивого кодирования [2], реализованного в виде стандартной программы [1]. Ее применению предшествует сплошной технический контроль путем поразрядного

сравнения всех слов оригинального блока ОРД и полученной зоны-копии. После устранения всех обнаруженных различий и выполнения защитного кодирования информация готова для дальнейшей обработки или для длительного хранения. На этой стадии в каждой зоне МЛ к информационному массиву, содержащему 1210 слов, присоединяется массив защиты данных, содержащий примерно 300 слов.

Программа переписи требует около 1 мин. для обработки одного блока, включая технический контроль и защитное кодирование. Разделение каждого блока на несколько зон и занесение на ленту дополнительных массивов защиты данных увеличивают расход технического носителя в 2—4 раза в зависимости от плотности записи.

Файлы данных АТЭП подобно блокам ОРД, как правило, превышают емкость одного куба памяти и не допускают чтения по частям. По этой причине, а также для обеспечения защиты информации перепись в зоны будет обязательна и для АТЭП — несмотря на то, что каждый файл АТЭП снабжен идентификатором.

Перейдем к описанию второго этапа обработки данных ОРД, именно к формированию макетов. В настоящее время составлена и используется программа формирования аэрологических макетов по информации ОРД, хранящейся в формате 1. Она позволяет обрабатывать радиозондовые, спутниковые и стандартные авиационные данные. В ближайшем будущем предполагается составление программы формирования приземных макетов по информации, хранящейся в формате 2.

Остановимся на содержании унифицированных сообщений ОРД. Как указывалось, каждое сообщение формата 1 ограничено 242 байтами. Первые 26 байтов образуют заголовок сообщения. Остальные байты составляют 9 групп по 24 байта в каждой. Эти группы содержат информации о давлении, геопотенциале, температуре, точке росы, скорости и направлении ветра на 9 уровнях, совпадающих с уровнями особых точек или со стандартными изобарическими поверхностями. Заметим, что такой характер записи данных ОРД соответствует циклической записи информации АТЭП в пределах файла. Обычно аэрологическая информация ОРД для одного географического пункта не ограничивается девятью уровнями. В таком случае одному пункту отвечают несколько последовательных сообщений, число которых указывается в заголовке каждого сообщения. В заголовке указываются также:

- тип информации (радиозонд, судно, самолет, МС);
- число уровней, для которых имеются данные (не более девяти уровней);
- синоптический индекс станции, позывные судна, номер авиарейса или номер орбиты МС;
- год, месяц, число месяца и час наблюдения;
- квадрант земного шара;

— широта и долгота в градусах с точностью до десятых долей.

В основной части сообщения давление указывается четырьмя знаками в миллибарах, геопотенциал — пятью знаками в геопотенциальных метрах, температура и точка росы — тремя знаками в градусах Цельсия с точностью до десятых долей, скорость ветра — тремя знаками в узлах, направление ветра — двумя знаками в десятках градусов. Признаки отрицательности температуры и точки росы заносятся в отдельные байты. Отсутствие данных обозначается цифрой 9 в соответствующих байтах.

Непосредственно после считывания зоны МЛ в оперативную память выполняется декодирование информации. Эта процедура, по смыслу обратная процедуре защитного кодирования, восстанавливает начальное содержание всех 1210 слов зоны, а при необходимости исправляет возникшие при хранении искажения. Затем производится уплотнение данных путем выделения из каждого байта лишь четырех младших разрядов и последующего сжатия информации. Это возможно благодаря тому, что вся информация, содержащаяся в сообщении, является цифровой. Как известно, цифровые восьмиразрядные байты всегда содержат в старших четырех разрядах единицы. Очевидно, удаление такой тетрады единиц из памяти не связано с потерей информации. В результате массив данных зоны уменьшается до 605 слов.

После сжатия информации начинается попарная обработка сообщений. Прочитанная зона содержала 20 сообщений, причем каждые 2 последовательных сообщения, т. е. 484 байта, занимали полностью 121 слово. Эти сообщения размещаются теперь индивидуально. Для записи одного сообщения требуется 31 слово: 30 слов содержат по 8 «усеченных» четырехразрядных байтов в разрядах 1—32; а последнее слово содержит два таких байта в разрядах 25—32. Следовательно, для размещения всех 20 сообщений достаточно 620 слов.

На следующей стадии становится возможной индивидуальная обработка каждого сообщения. Она начинается с анализа заголовка. Таким путем сообщения сортируются по типу информации и сроку наблюдений. Отобранные сообщения служат материалом для формирования окончательных макетов. Сообщение относится к тому или иному макету в зависимости от совпадения его географических координат с координатами очередного формируемого макета. При отсутствии координат в сообщении они предварительно восстанавливаются по синоптическому индексу. Для этого в памяти хранится список станций обоих полушарий с их координатами.

Сформированные в результате работы программы макеты записываются на ленту. Каждый макет занимает 17 ячеек. Информация заносится в ячейки в двоично-кодированном десятичном виде. Схема макета показана на рис. 1. Первые две ячейки образуют заголовок макета, остальные ячейки содержат сведения о метеорологических элементах на каждой из 15 изобарических поверхностей. Поясним смысл условных обозначений:

та hhh указывается не в декаметрах, а в метрах (тысячи метров опускаются).

Частичное отсутствие данных на каком-либо уровне обозначается тетрадами единиц в соответствующих разрядах. Строка нулей говорит о полном отсутствии данных.

Готовый макет близок по структуре к макету, принятому в оперативной практике [3].

Макеты, записанные на ленту, легко поддаются визуальному прочтению при выдаче их на десятичную печать. Ниже показано, как выглядит отпечатанный таким образом макет.

Приведенный пример соответствует радиозондовому наблюдению за 00 ч. 15 ноября 1969 г., выполненному на станции с координатами 60,7° с. ш., 60,4° в. д.; индекс станции 23921. Таблица 1 содержит результаты расшифровки макета (единицы измерения ТТ, DD, dd и ff указаны выше).

Выборка заданных сведений из предварительно сформированных макетов всегда может быть осуществлена по сравнительно несложным программам. В необходимых случаях программы должны предусматривать восстановление значений элементов, например, расчет пятизначного значения геопотенциальной высоты поверхности 30 мбар в декаметрах по трем занесенным в макет знакам: второму, третьему и четвертому. Возможный алгоритм восстановления описан в работе [3]. Мы не будем останавливаться на этом этапе.

Машинное время, потребное для формирования макетов, определяется в первую очередь числом обрабатываемых зон ленты. Обработка одной зоны продолжается от 18 до 23 с в зависимости от характера записанных в этой зоне данных. Формирование радиозондовых макетов для полушария за один срок требует 35—40 мин (около 600 макетов). Спутниковые макеты одного срока формируются примерно за 1 мин, поскольку их число не превышает 20 для каждого часа суток.

Опыт обработки информации ОРД показал следующее.

Данные радиозондирования относятся к 00 и 12 ч каждых суток (гринвичское время). Эти данные для одного срока по обоим полушариям занимают от 15 до 20 оригинальных блоков, т. е. 75—100 зон ленты после переписи. На их основе удастся сформировать от 580 до 630 макетов для северного полушария и от 40 до 80 — для южного. Из этого числа судовым радиозондовым наблюдениям отвечают 15—20 макетов; практически все они относятся к северному полушарию. Фактическое число наблюдений существенно убывает с высотой.

+++	15	006	070	604
+++	23	921	000	024
+++	21	001	060	918
++-	11	200	122	125
-++	05	107	021	224
-+-	16	023	022	325
+-	32	034	021	927
---	11	551	023	828
+++	00	000	000	000
-++	16	865	02	
-++	34	462	02	
-+-	19	363	02	
---	01	462	02	
-++	02	164	03	
+++	00	000	000	000
+++	00	000	000	000
+++	00	000	000	000

Таблица 1

Результаты расшифровки макета

Уровень, мбар	Единицы измерения высоты hhh	Значения элементов				
		hhh	ТТ	DD	dd	ff
1000	Метр	210	1	6	9	18
850	"	1512	0	12	21	25
700	"	3051	—7	2	12	24
500	Декаметр	560	—23	2	23	25
400	"	720	—34	2	19	27
300	"	915	—51	2	38	28
250	"	Данные отсутствуют				
200	"	1168	—65	2	—	—
150	"	1344	—62	2	—	—
100	"	1593	—63	2	—	—
70	"	1814	—62	2	—	—
50	"	2021	—64	3	—	—
30	"	Данные отсутствуют				
20	"	Данные отсутствуют				
10	"	Данные отсутствуют				

Спутниковые данные представлены вертикальными профилями температуры. Эти профили построены регрессионным методом [10] по результатам инфракрасного зондирования атмосферы спутниками типа «Нимбус-3» над океаническими областями между параллелью 18° с. ш. и побережьем Антарктиды. Значения температуры рассчитаны для всех изобарических поверхностей, за исключением 70 и 20 мбар. Таким образом, каждому географическому пункту спутниковых наблюдений соответствуют два последовательных сообщения ОРД: первое содержит значения ТТ для девяти нижних поверхностей, второе — для четырех верхних. Эти сообщения в результате обработки дают один макет (рис. 1), в котором заполнены лишь разряды ТТ для 13 уровней. Поскольку информация ОРД относится к 1969—1970 гг., т. е. к начальному периоду эксплуатации спутниковых метеорологических систем, надежность восстановленных температурных профилей невелика, а профили геопотенциала отсутствуют. Тем не менее сведения о градиентах температуры по спутниковым данным определяются достаточно точно и могут с успехом использоваться для анализа. Для каждого часа суток на лентах ОРД имеются профили примерно для 10 географических пунктов. Для некоторых часов профилей нет вовсе, но тогда соответственно увеличивается их число для предшествующего или последующего часа. Пространственное разрешение профилей колеблется по широте и долготе от 0,5 до 10,0°.

Как выяснилось, информация ОРД содержит заметное число

ошибок и по качеству не превосходит обычную оперативную информацию службы погоды. Первичный ее контроль при записи на ленты ограничивался устранением дублирующих сообщений. Разработка методов более полного контроля и его осуществление возлагаются на пользователей. Дело осложняется отсутствием на лентах каких-либо указаний на достоверность, сомнительность или ошибочность данных ОРД. Здесь уместно отметить, что для информации АТЭП в заголовках каждого файла предусмотрены указания такого рода в виде условных цифр от 1 до 9. Эти указания приблизительно отвечают на следующие вопросы:

1) какая доля информации файла содержит ошибки, т. е. дефектна (менее 10, 10—50, 50—80, 80—100%)?

2) доступна ли дефектная информация для использования?

3) сосредоточены ли ошибки в определенной секции файла или распределены по всему файлу?

4) относятся ли ошибки к информации о всех метеорологических параметрах или только о некоторых из них?

Предусмотрена возможность аналогичных оценок качества не только для файла, но и для отдельных параметров. Предусмотрены также отметки надежности информации минимальных логических записей (циклов) по трем градациям: 1) вероятно, верно, 2) сомнительно, 3) степень надежности неизвестна.

Несомненно, описанные возможности должны быть включены в процедуру контроля данных АТЭП. Однако разработка методов контроля информации ОРД и АТЭП остается насущной задачей. При этом нужно иметь в виду, что даже упомянутые выше приблизительные указания качества данных не являются обязательными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абашев Г. А., Луштак А. С., Мясников Г. Н. Алгоритмы и программы кодирования и декодирования четырехмерной кодовой матрицы.— «Тр. ГГО», 1975, вып. 347, с. 68—77.
2. Афиногенов Л. П. Можно ли длительно хранить информацию на магнитных лентах? — «Метеорология и гидрология», 1974, № 11, с. 104—108.
3. Белоусов С. Л., Гандин Л. С., Машкович С. А. Обработка оперативной метеорологической информации с помощью электронных вычислительных машин. Л., Гидрометеоиздат, 1968. 282 с.
4. Гандин Л. С., Тарасюк В. В. О комплексном контроле аэрологической информации.— «Метеорология и гидрология», 1971, № 5, с. 3—9.
5. Джермейн К. Программирование на IBM/360. Пер. с англ., М., «Мир», 1971. 870 с.
6. The Basic Data Set Project. GARP Publications Series. N 9. By T. Thompson. December 1972. p. 90.
7. The Central Programme for the GARP Atlantic Tropical Experiment. GATE Report, N 3, January 1974. p. 35.
8. The First GARP Global Experiment. Objectives and plans. GARP Publications Series, N 11. March 1973, p. 107.
9. The International Data Management Plan (part I) for the GARP Atlantic Tropical Experiment. GATE Report, N 13. April 1974, p. 224.
10. Smith W. L., Wolf H. M., Jacob W. J. A regression method for obtaining real-time temperature and geopotential weight profiles from satellite spectrometer measurements and its application to Nimbus-3 SJRS observations. Monthly Weather Review, vol 98, N 8, 1970, p. 582—603.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОБЪЕКТИВНОГО АНАЛИЗА

В последнее время в метеорологии широкое развитие получили численные методы восстановления полей по данным наблюдений или объективный анализ метеорологических полей [1]. Аналогичные задачи развиваются по отношению к полям геохимических, геологических, гидрофизических элементов. В работах [2, 3] рассмотрены примеры объективного анализа некоторых океанографических полей. Основным этапом объективного анализа является оптимальная интерполяция исследуемого элемента в узлы регулярной сетки, использующая предварительные сведения о статистической структуре полей.

В тех случаях, когда имеются данные лишь одной реализации исследуемого элемента (данные, полученные в условиях дорогостоящих научно-исследовательских экспедиций) или когда количество и качество имеющейся информации не позволяют получить надежных и точных представлений о статистической структуре элемента, может быть применен стохастический метод объективного анализа.

В настоящей работе сделана попытка использования вероятностного моделирования для объективного анализа различных полей. Стохастический принцип интерполяции разработан с использованием метода статистических испытаний и теории поглощающих марковских цепей [7, 8, 11].

Как известно, метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) в настоящее время является мощным вычислительным средством, применяемым для решения исключительно сложных задач в теории управления, в области ядерной физики, при решении дифференциальных уравнений в частных производных и т. д. Сущность метода состоит в построении некоторого искусственного случайного процесса, характеристики которого, получаемые экспериментально, являются решением исходной задачи. Метод Монте-Карло приспособлен к решению многомерных задач, устойчив к случайным сбоям ЭВМ, для него не характерно накопление ошибок округления, он не критичен к размерам и форме исследуемых областей. Этот метод позволяет проводить полные исследования

разнообразных процессов независимо от физической природы явлений данного процесса.

Вероятностная модель объективного анализа может быть построена с использованием статистической структуры исследуемых полей — вероятностный аналог оптимальной интерполяции, или в предположении о том, что поле анализируемого элемента может быть описано уравнением эллиптического типа.

В данной работе рассмотрено применение стохастического метода для восстановления таких полей, которые удовлетворяют уравнениям эллиптического типа общего вида. К таким полям можно отнести поля геопотенциала [4], температуры, поля нефтяного давления [5], некоторые поля скоростей течения [6], распределения химических и радиоактивных элементов и т. д.

Суть метода заключается в следующем. Исследуемая область с имеющимися данными наблюдений покрывается аппроксимирующей сеткой, узлы которой совпадают с максимально возможным количеством станций. Значения элемента восстанавливаются в узлах полученной сеточной области. При необходимости сетка может измельчаться. Рассматривается изолированная область, т. е. на границе ставится условие

$$U_{n/r} = 0,$$

где U_n — нормальная составляющая анализируемого элемента.

Если известны значения элемента в n точках и нужно определить значение в узле $S_{i,j}$, то составляется линейная комбинация известных значений

$$U_{S_{i,j}} = \sum_{i=1}^n P_{S_i} Q_i, \quad (1)$$

где P_{S_i} — весовые коэффициенты.

Пусть $P(S_{i,j}, Q_v)$ — вероятность того, что траектория частицы, совершающей случайные и независимые переходы по узлам решетки, вышедшей из узла, в который производится интерполяция, закончится на станции Q_v . отождествим станции с поглощающими состояниями марковской цепи, описывающей процесс переходов по полученной сеточной области [9]. Так как блуждание неизбежно заканчивается при первом достижении поглощающего состояния, то

$$\sum_{v=1}^v P(S, Q_v) = 1,$$

где суммирование распространяется на все станции, причем

$$P(Q_v, Q_v) = 1; \quad P(Q_v, Q_\mu) = 0, \quad v \neq \mu. \quad (2)$$

Составим сумму

$$U_{S_{i,j}} = \sum_{v=1}^v P(S_{i,j}, Q_v) \cdot f(Q_v). \quad (3)$$

Если функцию $f(Q_v)$ рассматривать как случайную величину, принимающую заданные известные значения на станциях, то сумма (3) представляет собой математическое ожидание функции $f(Q_v)$ для траекторий, начинающихся в точке $S_{i,j}$. Если для простоты записи рассматривать переходы по четырем направлениям, то после одного перехода по формуле полной вероятности [10] имеем

$$P(S_{i,j}, Q_v) = \frac{h_2 h_3 h_4 (h_3 + h_4) P(S_{i+h_1, j}, Q_v) + h_4 h_3 h_1 (h_1 + h_4) P(S_{i, j+h_2}, Q_v)}{(h_1 + h_2) (h_3 + h_4) (h_1 h_2 + h_3 h_4)} + \\ + \frac{h_1 h_2 h_4 (h_1 + h_2) P(S_{i-h_3, j}, Q_v) + h_1 h_2 h_3 P(S_{i, j-h_4}, Q_v)}{(h_1 + h_2) (h_3 + h_4) (h_1 h_2 + h_3 h_4)}, \quad (4)$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 — шаги сетки по четырем направлениям. Умножая обе части равенства (4) на значения на станциях и суммируя по всем v с учетом (2, 3), получим

$$U_{S_{i,j}} = P_1 U_{i+h_1, j} + P_2 U_{i, j+h_2} + P_3 U_{i-h_3, j} + P_4 U_{i, j-h_4}. \quad (5)$$

Кроме того, в силу (2) имеем

$$U(Q_v) = f(Q_v). \quad (6)$$

Если для каждого анализированного узла записать равенство вида (5), то для всей области получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$Au = F. \quad (7)$$

В работах [7, 11] показано, что для нахождения корней системы (7) может быть построена дискретная марковская цепь с матрицей переходов

$$C_{i,j} = |b_{i,j}| \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ C = \begin{bmatrix} B & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = E - A; \quad 0 \leq b_{i,j} \leq 1; \\ \beta_i = 1 - \sum_{j=1}^n |b_{i,j}|$$

с последующим определением в результате статистического моделирования среднего арифметического случайной величины ξ_i , принимающей заданные значения f_i при попадании марковской системы в j -тое состояние, если система вышла из i -того состояния. Для восстановления поля в заданной точке пространства S_0 этот узел выбирается в качестве начального и моделируется блуждание частицы по узлам сеточной области в соответствии с вероятностным графом переходов для каждого из узлов сетки до попадания в поглощающие состояния (матрица C). После требуемого числа блужданий среднее арифметическое значение поглощающих состояний и будет решением в узле S_0 . Результаты, полученные методом статистического моделирования, неизбежно носят случайный характер. Для обеспечения статистической устойчивости их соответствующие оценки вычисляются как средние значения по большому

числу испытаний. Выбор числа реализаций для получения необходимой точности с заданной надежностью определяется выражением

$$N = \frac{t_{\beta}^2 \cdot D(x)}{\delta^2} = \frac{t_{\beta}^2 \cdot D(x)}{\Delta^2 \cdot m_x^2}, \quad (8)$$

где N — требуемое число испытаний для получения с вероятностью β точности, равной δ (абсолютная погрешность) или Δ (относительная погрешность). Оценка погрешности имеет вероятностный характер. При этом методе нельзя утверждать заранее, что ошибка не превысит какого-либо значения. Можно только указать границы, за которые ошибка не выйдет с заданной вероятностью.

При необходимости определения весов станций на анализируемые узлы в выражении (1) матрица переходов C представляется в канонической форме

$$C = \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline R & Q \end{array} \right].$$

Здесь квадратная подматрица Q описывает поведение процесса до выхода из множества невозвратных состояний (рассматриваемых узлов), подматрица R отвечает переходом в поглощающие состояния (пункты наблюдений). Это прямоугольная матрица, число строк в которой равно числу анализируемых узлов, а число столбцов — количеству станций. Для определения весов в выражении (1) необходимо знать вероятности достижения поглощающих состояний из узлов, в которые производится интерполяция. Эти вероятности вычисляются из матрицы

$$P = NR, \quad (9)$$

где $N = (E - Q)^{-1}$.

Метод статистических испытаний успешно применяется для обращения матриц высоких порядков [11]. Искомые веса определяются моделированием N испытаний из очередного узла до попадания в станцию

$$P_i = \frac{m_i}{N}, \quad (10)$$

где m_i — число попаданий в станцию S_i .

Предлагаемый способ интерполяции обладает следующими основными свойствами.

1. Если узел, в который производится интерполяция, совпадает с одной из станций, в которой имеются точные данные наблюдений, то вес этой станции равен единице, а все остальные веса равны нулю. Действительно, если станция совпадает с рассматриваемым узлом, то в матрице переходов по узлам сетки соответствующий диагональный элемент равен единице, а остальные нулю. В обратной матрице появится единица в соответствующей строке,

а в матрице переходов в поглощающие состояния элемент $r_{n,n}$ (n — номер узла) также равен единице. Умножая строку обратной матрицы на столбец матрицы поглощения, получим вес, равный единице.

2. Если пункты наблюдений расположены от анализируемого узла на очень большом расстоянии, то результатом интерполяции в этом узле будет значение нормы. В этом случае все интерполяционные веса будут равны между собой и суммарный вклад отклонений значений элемента от нормы будет равен нулю.

3. Если имеется n пунктов с данными наблюдений, n_1 точек, в которых нет данных, и узел S_c , в котором необходимо определить значение элемента, то, если вначале выполнить интерполяцию из n точек в точки n_1 , а затем по данным в узлах n , n_1 получить значение в S_c , результат будет таким же, как если бы просто произвели интерполяцию из точек n в узел S_c . Определим значение элемента в узле S_c по данным в n станциях

$$U_{S_c} = P_{c1}f_1 + P_{c2}f_2 + \dots + P_{cn}f_n$$

и в точке S_D по тем же данным

$$U_{S_D} = P_{D1}f_1 + P_{D2}f_2 + \dots + P_{Dn}f_n = f_D.$$

Включим узел S_D в состав станций и определим значение элемента S_c по данным в $(n+1)$ узлах

$$U_{S_c} = P_{c1}^*f_1 + P_{c2}^*f_2 + \dots + P_{cn}^*f_n + P_{cD}^*f_D.$$

Подставим вместо f_D его значение

$$\begin{aligned} U_{S_c} &= P_{c1}^*f_1 + P_{c2}^*f_2 + \dots + P_{cn}^*f_n + \\ &+ P_{cD}(P_{D1}f_1 + P_{D2}f_2 + \dots + P_{Dn}f_n) = \\ &= (P_{c1}^* + P_{cD}P_{D1})f_1 + \dots + (P_{cn}^* + P_{cD}P_{Dn})f_n; \\ P_{c1}^* + P_{cD}P_{D1} &= P_{c1}; \dots; P_{cn}^* + P_{cD}P_{Dn} = P_{cn}. \end{aligned}$$

При включении узла S_D в состав имеющихся данных вероятность перехода в узел S_1 складывается из непосредственного перехода в S_1 и из совместного наступления двух событий — перехода из S_c в S_D и из S_D в S_1 . Результаты интерполяции в узел S_c совпадают.

4. При наличии ошибок наблюдений привлечение данных во всех пунктах приводит к уточнению результата в точке, совпадающей со станцией. Элементы соответствующей строки обратной матрицы показывают веса исходной и остальных станций при интерполяции с них на данную. Вес исходной станции будет максимальным (диагональное преобладание элементов обратной матрицы), веса остальных станций определяются расстоянием от исходной и их взаиморасположением.

Важное практическое применение при стохастическом способе интерполяции нашел вывод Л. С. Гандина о том, что включение проинтерполированных значений в состав станций не приводит к изменению результатов дальнейшей интерполяции [1]. В настоящей работе для ускорения сходимости решения используется последовательное сокращение размерности исходной системы уравнений за счет введения проинтерполированных значений в состав исходных данных. В работах [11, 13] приведены оценки сокращения общего времени решения и привносимой дисперсии.

Для проверки предложенного способа интерполяции были проведены контрольные просчеты для некоторых полей температуры и концентрации стронция-90, которые в [2] восстановлены оптимальной интерполяцией. Результаты, полученные стохастическим методом, дали поля, в большей мере соответствующие реальным данным. Относительная ошибка восстановления температуры в контрольных точках составила 1—4% при заданной надежности 0,97.

Для сопоставления результатов были подсчитаны для различных участков полей средние абсолютные и относительные ошибки восстановления, дисперсии и средние квадратические отклонения исходных полей, полей, восстановленных оптимальной и стохастической интерполяцией. Полученные результаты свидетельствуют о возможности применения стохастического метода для восстановления полей по имеющимся данным наблюдений.

Были проведены также следующие численные эксперименты. Согласно рекомендациям работ [12, 15], было получено поле с корреляционной функцией

$$r(\rho) = k_0 \rho \cdot K_1(k_0 \rho), \quad (11)$$

где K_1 — функция Макдональда, k_0 — постоянная. Для этой цели было решено уравнение Гельмгольца

$$\Delta P(\rho) - k_0^2 P(\rho) = \varphi(\rho).$$

В качестве правой части использовалось поле с некоррелированными значениями, граничные условия принимались равными нулю, размер сеточной области 25×12 .

Для решения данного уравнения была составлена вероятностная модель [11, 14]. Поле с корреляционной функцией вида (11) было получено методом статистических испытаний. В настоящей работе мы не будем останавливаться на анализе полученных коэффициентов корреляции. Часть данных моделируемых полей (58%) считалась неизвестной и была восстановлена методом стохастической интерполяции. Для оценки влияния погрешностей, возникающих при наложении оператора эллиптического типа на статистические свойства исходных полей, проведено сравнение корреляционных функций промоделированных и восстановленных полей. Отклонения корреляционных функций восстановленных полей от исходных (функция Макдональда) не превышают заданные пределы.

Это свидетельствует о том, что при стохастической интерполяции статистические свойства исходных полей не меняются.

В работе [15] рассматривается моделирование полей с заданными статистическими свойствами путем получения n -мерного случайного вектора. Этим способом промоделировано поле с корреляционной функцией

$$r(\rho) = e^{-\alpha \rho} \cdot \cos \beta \rho, \quad (12)$$

где $\alpha = 0,019$; $\beta = 0,01$.

Как и в предыдущем случае проведено сопоставление полученных стохастическим моделированием корреляционных функций с исходной. С требуемой вероятностью погрешность не превысила заданных в процессе моделирования величин.

С помощью стохастического алгоритма по экспериментальным данным восстановлены некоторые поля температуры, геопотенциала, радиоактивности и др.

Таким образом, проведенные расчеты подтвердили применимость стохастической интерполяции для построения карт полей различных элементов по имеющимся данным наблюдений и позволили сделать следующие выводы.

1. При интерполяции стохастическим методом используется информация всех станций с вероятностями, зависящими от расстояния и взаимоположения узлов, что в конечном счете повышает точность интерполяции.

2. При объективном анализе применение стохастического алгоритма полностью исключает элемент субъективности при выборе станций, влияющих на анализируемый узел.

3. Метод стохастического моделирования позволяет заранее указать пределы, за которые ошибка интерполяции не выйдет с заданной вероятностью.

4. С помощью стохастической интерполяции многомерные поля могут быть восстановлены без существенного увеличения машинного времени по сравнению со временем, потребным для восстановления двумерных полей.

5. При обращении матриц высоких порядков методом статистических испытаний не характерно накопление ошибок округления, процесс быстро сходится вследствие применения принципа сокращения размерности системы.

6. Вопрос об обусловленности систем линейных алгебраических уравнений при стохастическом моделировании не возникает, так как матрицы коэффициентов при неизвестных всегда имеют диагональное преобладание.

7. Предложенный способ интерполяции может быть использован для восстановления неізотропных и неоднородных полей за счет изменения коэффициентов переходов по узлам сетки. Для неізотропных полей эти коэффициенты не одинаковы по всем направлениям, но постоянны для всего поля, для неоднородных полей — они существенно переменны.

8. Стохастический метод объективного анализа не критичен к форме, размерам, многосвязности областей. При анализе этим методом эффективно используется имеющаяся память ЭВМ. Для практических задач часть памяти необходимо задействовать для программы и констант, весь оставшийся объем определяет предельный порядок матрицы, которая может быть обращена методом статистических испытаний. Этот порядок можно увеличить, используя специализированные приставки к ЭВМ для выработки случайных чисел и определения направлений переходов. Кроме того, применение стохастического метода позволяет освободить ЭВМ от анализа и использовать ее для решения других задач в режиме с разделением времени, а восстанавливать поля на специализированных вычислительных вероятностных устройствах, посылая восстановленное поле для дальнейшего анализа в ЭВМ [11, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеиздат, 1963. 286 с.
2. Беляев В. И. Обработка и теоретический анализ океанографических наблюдений. Киев, «Наукова думка», 1973. 284 с.
3. Вазов В., Форсайт Д. Т. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд. иностр. лит., 1963. 455 с.
4. Фукс-Рабинович М. С. О повышении качества анализа поля геопотенциала над районами, малоосвещенными исходной информацией.— «Метеорология и гидрология», 1964, № 5, с. 28—35.
5. Волынский В. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960. 121 с.
6. Саркисян А. С. Основы теории и расчета океанических течений. Л., Гидрометеиздат, 1966. 118 с.
7. Бучленко И. П., Шрейдер Ю. П. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1961. 221 с.
8. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., «Наука», 1967. 360 с.
9. Дж. Кемене, Дж. Снелл. Конечные цепи Маркова. М., «Наука», 1973. 270 с.
10. Вентцель Е. С. Теория вероятностей, изд. 2-е, М., Физматгиз, 1962. 366 с.
11. Гладкий В. С. Вероятностные вычислительные модели. М., «Наука», 1973. 299 с.
12. Глуховский А. Б. О статистическом моделировании метеорологических полей.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1969, т. 5, № 7, с. 724—729.
13. Гладкий В. С., Урикова Н. В. Выбор оптимального набора операций при решении задач гидрофизики на цифро-вероятностном вычислительном комплексе.— В кн.: Морские гидрофизические исследования, № 8, Севастополь, МГИ АН УССР, 1972, с. 62—71.
14. Гладкий В. С. и др. Моделирование гидрофизических полей на цифро-вероятностном вычислительном комплексе.— В кн.: Автоматизация научных исследований морей и океанов. Ч. 2. Севастополь, МГИ АН УССР, 1971, с. 252—258.
15. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. К вопросу о статистическом моделировании метеорологических полей.— «Тр. ГГО», 1973, вып. 308, с. 20—26.

ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

При изучении реальных физических объектов методами теории случайных функций предположение о неизменности во времени исследуемых статистических характеристик не всегда соответствует действительности. Анализируемые процессы часто имеют очевидные свойства, которые приводят к невыполнению условий стационарности. Например, временные ряды среднемесячных значений метеорологических элементов содержат очевидные нестационарные составляющие (годовой ход). Еще более сложную структуру имеют процессы, у которых переменными во времени являются ковариационные функции и спектральные плотности.

Общей теории анализа нестационарных процессов в настоящее время не создано. При теоретическом и практическом изучении обычно ограничиваются частными случаями.

Применяемые для оценивания характеристик нестационарных процессов различные численные схемы (4, 5, 6) являются эмпирическими еще в большей степени, чем в случае стационарных процессов (в том смысле, что эти схемы иногда не имеют теоретических аналогов).

Наиболее часто используемые приемы изучения нестационарных процессов заключаются в том, что получаемые реализации подвергаются некоторым преобразованиям, которые делают возможным дальнейший анализ в рамках стационарной теории.

Основными статистическими характеристиками нестационарного случайного процесса $Y(t)$, которые будут рассматриваться, являются среднее значение $C(t)$ и ковариационная функция $M(t, \theta)$, определяемые равенствами

$$C(t) = E[Y(t)] : \quad (1)$$

$$M(t, \theta) = E[(Y(t) - C(t))(Y(\theta) - C(\theta))] \quad (2)$$

$$(t, \theta \in (-\infty, \infty)),$$

где E — знак математического ожидания.

При $t = \theta$

$$M(t, t) = \sigma^2(t) \quad (3)$$

представляет собой переменную во времени дисперсию процесса.

Нестационарный процесс в общем случае не имеет спектральной плотности. Наиболее широкий класс случайных функций, имеющих спектральную плотность, будет рассмотрен в конце статьи.

$M(t, \theta)$ есть функция двух аргументов и ее оценивание проводится с помощью ансамбля реализаций.

Прежде чем переходить к изложению численных схем оценивания $M(t, \theta)$, рассмотрим различные приемы изучения нестационарных процессов при наличии только одной реализации.

Будем предполагать, что в результате эксперимента получен ряд наблюдений

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1} \quad (4)$$

в моменты времени

$$t_0, t_1, \dots, t_{k-1} \quad (5)$$

$$(\Delta t = t_{i+1} - t_i = \text{const}).$$

Введем обозначение

$$Y = \{Y_i\}_{i=0}^{k-1}. \quad (6)$$

Ковариационная матрица M вектора Y равна

$$M = \{M_{ij}\}_{i,j=0}^{k-1}, \quad (7)$$

где $M_{ij} = M(t_i, t_j)$.

1. Оценивание изменяющегося во времени среднего значения. Не приводя подробных численных алгоритмов, укажем лишь на возможность применения формульных схем, рассмотренных в [5], и перечислим некоторые их особенности.

а. При медленном изменении во времени среднего значения, когда закономерность такого изменения недостаточно ясна, используется следующий простой прием. Реализация (4) разбивается на отдельные участки, на каждом из которых $C(t)$ предполагается постоянным. Дальнейшее оценивание производится с помощью данных этих участков по обычной схеме, применяемой в теории стационарных случайных процессов.

б. Сглаживающие цифровые фильтры при подходящем подборе их параметров могут быть наиболее простыми и удобными схемами оценивания среднего значения [5].

в. При наличии периодического тренда обычно используется алгоритм, данный в § 4.6 книги [5]. Там же произведен гармонический анализ этой схемы, показывающий, каким преобразованиям подвергается частотный состав анализируемой реализации.

г. Пусть среднее значение является некоторой функцией, которую можно представить в виде ряда

$$C(t) = \sum_{j=0}^m \beta_j x_j(t), \quad (8)$$

где β_j — неизвестные параметры, подлежащие оцениванию: $x_j(t)$ ($j=0, 1, \dots, m$) — некоторая заданная система функций.

Часто предполагают [1], что

$$C(t) = \beta_0 + \beta_1 t, \quad (9)$$

однако мы будем рассматривать общий случай (8).

Параметры β_j обычно определяются по способу наименьших квадратов, согласно требованию

$$(Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \rightarrow \min_{\beta}, \quad (10)$$

где

$$\beta = \{\beta_j\}_{j=0}^m; \quad (11)$$

$$X = \{x_{ij}\}_{i,j=0}^{k-1,m}; \quad (12)$$

$$x_{ij} = x_j(t_i) \quad (13)$$

$$(i = 0, 1, \dots, k-1).$$

Как показано в [5], получаемые оценки $\bar{\beta}$ в общем случае не являются оптимальными, т. е. им не соответствует минимальная дисперсия, поскольку матрица (7) неизвестна и не может быть использована при построении оценок.

Во всех рассмотренных случаях дальнейшему статистическому анализу подвергаются невязки

$$Y'_i = Y_i - \bar{C}(t_i) \quad (14)$$

$$(i = 0, 1, \dots, k-1),$$

где $\bar{C}(t)$ — найденная оценка среднего значения.

При любых схемах оценивания переменного среднего статистические структуры рядов Y_i и Y'_i различны. Это различие зависит как от вида ковариационной матрицы M , так и от вида преобразований, которые проводятся с целью оценивания среднего.

Иллюстрацией сказанного может служить выражение для ковариационной матрицы невязок (14) в случае вычисления $\bar{C}(t)$ по способу наименьших квадратов.

Эти невязки являются элементами вектора [5]

$$Y - X\bar{\beta} = Y^T(I - X(X^T X)^{-1} X^T), \quad (15)$$

ковариационная матрица M' которого равна

$$M' = (I - X(X^T X)^{-1} X^T) M (I - X^T (X^T X)^{-1} X). \quad (16)$$

Ясно, что матрицы M' и M могут значительно отличаться друг от друга.

Даже в случае белого шума и марковской случайной функции корреляционная структура процесса, представленного невязками $(Y - X\bar{\beta})$, значительно отличается от $Y(t)$ [5].

Несмотря на то что вывод матричных выражений достаточно прост, практические аспекты анализа и осмысливания близости матриц M' и M представляют значительные трудности.

Таким образом, оценивая каким-либо способом вторые моменты с помощью невязок $Y - X\bar{\beta}$ мы получаем оценки элементов матрицы M' , а не M .

Отсюда следует, что схему оценивания, описанную в п. «г», нужно применять очень осторожно и в основном тогда, когда наибольший интерес представляет среднее, а последующий анализ вторых моментов не имеет большого значения.

Если параметры β_j оцениваются не по способу наименьших квадратов, а каким-либо иным образом, корреляционная структура вектора невязок будет отличаться от (16).

В общем случае вывод выражения для ковариационной матрицы невязок формально не представляет больших трудностей только при линейных схемах оценивания среднего.

2. Оценивание изменяющейся во времени дисперсии процесса.

а. Для оценивания дисперсии при медленном ее изменении обычно используют прием, аналогичный применяемому при оценивании среднего значения. Реализация разбивается на отдельные участки, на каждом из которых оценивание дисперсии производится по схеме, применяемой в стационарной теории.

Иногда участки выбираются перекрывающимися, а дисперсии определяются только для одной или нескольких центральных точек.

б. Предположим, что дисперсия $\sigma^2(t)$ (3) представляет собой периодическую функцию с известным периодом, на который приходится T отсчетов, и пусть

$$T = k/m, \quad (17)$$

где m — целое число.

Предположим также, что среднее значение процесса равно нулю. Оценивание дисперсии $\sigma^2(t)$ ($t=0, 1, \dots, T-1$) осуществляется с помощью формулы

$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} Y_{Tj+t}^2 \quad (18)$$

$$(t = 0, 1, \dots, T-1).$$

3. Изменение во времени средних и дисперсий. Рассмотрим один из видов случайных функций, имеющих переменные во времени средние и дисперсии.

Модель такого процесса запишем в виде

$$Y(t) = C(t) + \sigma(t) Y^0(t), \quad (19)$$

где $C(t)$ и $\sigma(t)$ — детерминированные функции, представляющие среднее значение и стандарт соответственно; $Y^0(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним и единичной дисперсией.

Если с помощью имеющейся записи $Y(t)$ оказалось возможным найти оценки $\bar{C}(t)$ и $\bar{\sigma}(t)$, то, вычисляя для каждого t величины

$$\bar{Y}^0(t) = \frac{Y(t) - \bar{C}(t)}{\bar{\sigma}(t)}, \quad (20)$$

получаем реализацию случайного процесса, который можно считать приближенно стационарным.

Гармонический анализ этой реализации проводится методами, рассмотренными в [5].

4. Скользящий гармонический анализ. Следующий вид случайных функций, эмпирический анализ которых возможен методами стационарной теории, это процессы, корреляционные функции и спектральные плотности которых медленно изменяются во времени. Причем это изменение таково, что на отдельных ограниченных временных интервалах случайный процесс можно считать приближенно стационарным. Если имеется достаточно продолжительная реализация такого процесса, то, разбивая ее на отдельные, возможно перекрывающиеся участки, и проводя их гармонический анализ методами стационарной теории, можно получить ряд полезных результатов. Рассчитанные оценки периодограмм, корреляционных функций и спектральных плотностей, соответствующие этим участкам, называются локальными [6]. Их последовательный анализ показывает передачу мощности от одних частот к другим, процесс формирования особенностей спектров, локализацию во времени отдельных колебаний, изменение доли белого шума. Оценки спектральных плотностей в этом случае удобно представлять в виде функции двух координат: частоты и номера участка. Примеры такого анализа даны в [7].

Этот алгоритм в некотором смысле является обобщением схемы скользящего сглаживания, поскольку на каждом участке помимо оценок среднего вычисляются и другие статистические характеристики.

5. Средний спектр и средняя ковариационная функция. В этом разделе будет рассмотрен один из возможных эмпирических подходов к анализу нестационарного процесса с помощью ансамбля реализаций.

Введем понятия среднего спектра и средней ковариационной функции. Они определяются путем осреднения по ансамблю соответствующих спектральных и ковариационных оценок, вычисленных с помощью отдельных реализаций в рамках стационарной теории [6].

Осреднение по ансамблю найденных оценок спектральных плотностей и ковариационных функций полезно также и тогда, когда имеется несколько реализаций стационарного процесса. В этом случае осреднение представляет собой вполне определенное спектральное окно [2] и может значительно увеличить точность получаемых оценок. (Если реализации статистически независимы.)

6. Гармонизируемые случайные процессы. Наиболее общий класс нестационарных случайных функций, имеющих спектральное представление, определен в книге Лозва [3] и назван гармонизируемыми процессами. Не останавливаясь на этом определении, отметим, что практический спектральный анализ гармонизируемого процесса возможен, если для его ковариационной функции существует разложение Фурье:

$$M(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega, \omega) e^{i(\Omega \theta + \omega t)} dt d\theta, \quad (21)$$

где

$$S(\Omega, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(t, \theta) e^{-i(\Omega \theta + \omega t)} dt d\theta. \quad (22)$$

Функцию $S(\Omega, \omega)$ аргументов Ω и ω будем называть двойной по частоте спектральной плотностью нестационарного случайного процесса $Y(t)$.

Оценивание функций $M(t, \theta)$ и $S(\Omega, \omega)$ осуществляется с помощью ансамбля реализаций.

Будем считать заданными n реализаций гармонизируемого случайного процесса по k наблюдений в каждой. Эти наблюдения получены в одинаковые моменты времени и их можно записать в виде матрицы

$$\{Y_{jq}\}_{j=1}^n \quad k-1 \quad q=0. \quad (23)$$

Предположим, что среднее значение случайного процесса равно нулю.

Оценка $R_{t\theta}$ ковариационной функции $M(t, \theta)$ вычисляется по формуле

$$R_{t\theta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{jt} Y_{j\theta} \quad (24)$$

$$(t = 0, 1, \dots, k-1; \quad \theta = 0, 1, \dots, k-1).$$

По аналогии с определением двойного по частоте спектра (22) запишем формулу нахождения оценки $H_{pq} = H(\Omega_p, \omega_q)$ значения $S(\Omega_p, \omega_q)$

$$H_{pq} = \frac{1}{k^2} \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{\theta=0}^{k-1} R_{t\theta} e^{-i(\Omega_p t + \omega_q \theta)}, \quad (25)$$

$$\left(\Omega_p = \frac{2\pi}{k} p, \quad \omega_q = \frac{2\pi}{k} q \right).$$

Подставляя (24) в (25), имеем

$$H_{pq} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} Y_{jt} e^{-i \omega_p t} \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{\theta=0}^{k-1} Y_{j\theta} e^{-i \omega_q \theta} \right). \quad (26)$$

Равенства (24—26) показывают возможность вычисления величин H_{pq} двумя способами:

- 1) нахождением преобразования Фурье оценок $R_{\theta t}$ (25);
- 2) нахождением преобразований Фурье отдельных реализаций и последующим осреднением по формуле (26).

При втором способе оценивание ковариационной функции производится по формуле

$$R_{t\theta} = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{k-1} H_{pq} e^{i(\omega_p t + \omega_q \theta)}. \quad (27)$$

Для нахождения окончательной оценки двойного по частоте спектра поле величин H_{pq} необходимо сгладить с помощью какого-либо двумерного фильтра [8]. Полученные при этом сглаженные значения H_{pq} можно использовать в формуле (27) для нахождения окончательной оценки ковариационной функции.

Мы рассмотрели формальный численный аппарат нахождения оценок двойного по частоте спектра гармонизируемого случайного процесса. Этот аппарат не содержит принципиально новых вычислительных схем. Однако физическое осмысливание получаемых результатов представляет значительные трудности, и этим, по-видимому, объясняется сравнительно малое число работ, где такие оценки приводятся.

Заметим далее, что обобщение рассмотренной численной схемы на взаимный анализ нестационарных случайных процессов не представляет больших трудностей. В настоящей статье это не сделано, чтобы не загромождать работу и наглядно показать достаточно прозрачные и однотипные идеи, лежащие в основе алгоритмов нахождения требуемых оценок.

В заключение отметим, что число публикаций, посвященных различным аспектам численного анализа нестационарных процессов, непрерывно растет. Обзор некоторых из них дан в [4]. Прикладные схемы оценивания с помощью создания соответствующей аппаратуры приведены в книге Цветкова [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендат Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., «Мир», 1974.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 1 и 2. М., «Мир», 1971—1972.
3. Лоев М. Теория вероятностей. М., Изд. иностр. лит. 1962.
4. Рожков В. А. и др. Приложения методов теории нестационарных вероятностных процессов к анализу структуры и динамики океанологических процессов. Обзор. Обнинск, изд. Информационного центра, 1972.

5. Поляк И. И. Численные методы анализа наблюдений. Л., Гидрометеиздат, 1975.
6. Цветков Э. И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. М., «Энергия», 1973.
7. Гриб Н. К., Поляк И. И. Временная изменчивость среднегодовых значений температуры воздуха. См. наст. сборник.
8. Поляк И. И. Об одном классе двумерных фильтров.— «Тр. ГГО», 1975, вып. 364, с. 56—59.

ВРЕМЕННАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ СРЕДНЕГОДОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА

Существующие временные ряды метеонаблюдений сравнительно невелики. Они несколько короче периода инструментальных измерений параметров атмосферы, в начале которого измерения производились несистематически, отдельными наблюдателями.

Сбор всех имеющихся данных, их восстановление, обработка и формирование временных рядов представляют собой сложную, но очень важную задачу.

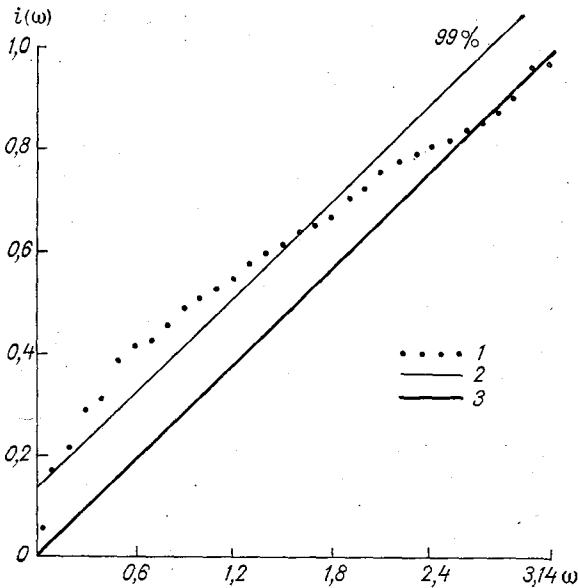


Рис. 1. Спектральная функция (1), вычисленная по данным наблюдений за температурой воздуха в Центральной Англии, и 99%-ные доверительные интервалы (2) для белого шума (3).

Примером могут служить работы Менлиа [2, 3], который сформировал наиболее продолжительный (с 1659 по 1973 г.) из известных временной ряд среднемесячных наблюдений за температурой воздуха в Центральной Англии. В работе [1] приводятся результаты анализа части этого ряда, составляющей 260 лет (с 1698 по 1957 г.). В статье [3] продолжительность этого ряда увеличена до 315 лет, кроме того, уточнены многие значения.

Ряд, несомненно, является уникальным; тем более интересны его спектральные характеристики.

На рис. 1 приведена спектральная функция $i(\omega)$, вычисленная с помощью данных этого ряда, и 99%-ные доверительные границы

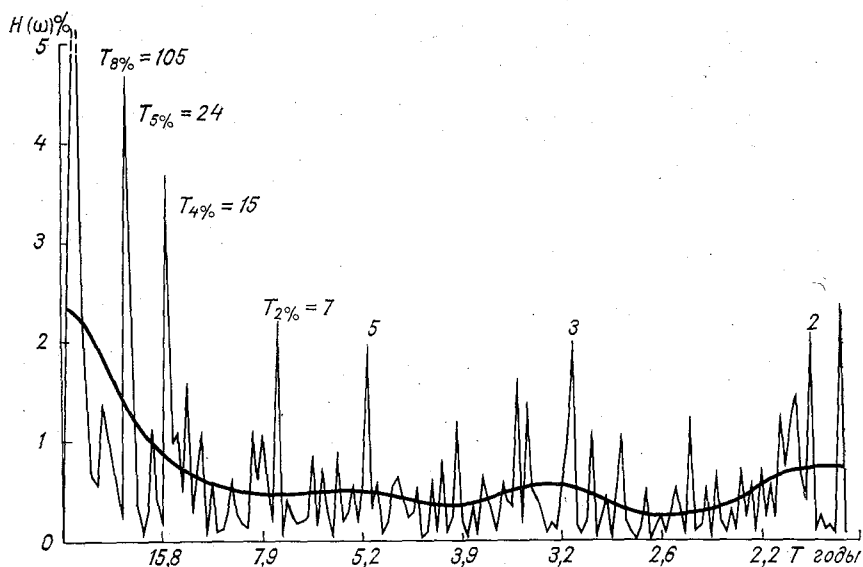


Рис. 2. Периодограмма и оценки спектральной плотности.

для белого шума. Результаты показывают, что рассчитанные величины выходят за указанные границы.

На рис. 2 изображены периодограмма и оценки спектральной плотности, полученные сглаживанием периодограммы с помощью цифрового фильтра [1] с $m=3$ и шириной, равной 35 точкам. На этом рисунке для отдельных значительных всплесков, имеющих на периодограмме, отмечены периоды, им соответствующие, и доля дисперсии в процентах, приходящаяся на каждое из этих колебаний. Наиболее мощные из них имеют периоды порядка 105 лет (8%), 24 лет (5%) и 15 лет (4%).

Проведем более подробный анализ данных наблюдений и выявим хотя бы приближенно временные интервалы, на которых отмеченные колебания проявляются наиболее заметно.

Существуют и другие причины, указывающие на необходимость анализа этих данных не только целиком, но и на отдельных участках и, в частности, на необходимость скользящего спектрального анализа, проведенного в настоящей работе. Среди этих причин укажем на следующие.

1. Наблюдения, относящиеся к 1600-м и 1700-м годам, значительно менее точны, чем те, которые получены в XIX и XX столетиях. До начала 1700-х годов значения температуры в [3] часто приводятся с точностью только до целых градуса. Обработка неравноточных данных может исказить достоверную информацию, даваемую более точными наблюдениями.

2. Анализ периодограмм, соответствующих отдельным интервалам временного ряда, позволяет выявить те колебания, на которые приходится основная доля изменчивости, и возможную передачу мощности от одних частот к другим.

3. Скользящие спектральные оценки, получаемые сглаживанием периодограмм, необходимы для доказательства стационарности, что является основой возможности применения теории стационарных случайных процессов.

4. В случае принятия гипотезы о нестационарности оценки спектров отдельных участков временного ряда дадут представление об изменении во времени спектра процесса.

Были оценены спектральные характеристики на участках продолжительностью 128 лет, путем сдвига их последовательно относительно друг друга на 5 лет. Результаты оценивания приведены в табл. 1 и 2 в процентах от оценок дисперсий, вычисленных по данным каждого из участков. Сумма значений на отдельных участках должна быть равна 100%. Однако из-за погрешностей округления она несколько отличается от 100%.

В табл. 1 помещены периодограммы, соответствующие отдельным интервалам временного ряда среднегодовых наблюдений за температурой воздуха, т. е. столбцы таблицы представляют собой изменяющуюся во времени периодограмму.

Результаты первых шести-семи столбцов показывают, что наибольшая мощность (до 12—13% дисперсии) соответствует первым двум точкам периодограммы. Эта особенность обусловлена длиннопериодным колебанием продолжительностью сто лет и более, точное значение частоты которого определить невозможно. На низкие частоты (с периодами более 40 лет) приходится 20—22% дисперсии (первые семь периодограмм). Это наибольшее значение, которое было получено для Центральной Англии. Одна из причин, обуславливающих этот максимум, заключается в больших систематических ошибках в данных, соответствующих 1600-м годам. Характерно, что в 1700-х годах эта особенность исчезает и появляется максимум с периодом около 15 лет, составляющий от 8 до 14% дисперсии. Он играет наибольшее значение в изменчивости данных наблюдений до середины 1700-х годов, после чего распределение дисперсии по оси частот становится сравнительно равномерным. Заметно лишь увеличение доли дисперсии, приходящейся

e	1659—1786	1664—1791	1669—1796	1674—1801	1679—1806	1684—1811	1689—1816	1694—1821	1699—1826	1704—1831	1709—1836	1714—1841	1719—1846	1724—1851	1729—1856	1734—1861	1739—1866	1744—1871	1749—1876
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	13	12	12	11	7	6	8	5	3	3	4	2	2	2	1	0	0	1	1
0,10	8	9	10	10	11	10	12	8	2	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
0,15	0	0	0	0	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	3
0,20	1	1	1	1	3	3	4	2	4	5	6	7	7	7	5	3	2	3	2
0,25	6	6	6	6	8	8	8	5	3	4	5	6	6	6	4	3	5	3	3
0,29	5	5	5	5	2	2	2	4	4	3	2	2	1	2	2	2	1	3	3
0,34	4	4	4	4	2	2	1	1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	4	3
0,39	4	4	4	3	2	2	2	1	4	4	3	2	2	2	2	1	1	1	2
0,44	4	4	5	5	8	7	8	12	10	8	9	11	11	12	14	11	10	7	7
0,49	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
0,54	1	1	1	1	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0,59	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	2	2	1	3	3	4	4
0,64	1	1	1	1	0	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2
0,69	2	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0
0,74	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,79	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	2	3
0,83	2	2	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	8	7	4	4
0,88	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0,93	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0,98	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	3	2	2	1	2	3	3	2	2
1,03	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	3	3	2	1	1
1,08	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1,13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1,18	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0	0	1	1
1,23	3	2	3	2	2	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	2	3	3
1,28	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	1
1,33	2	2	2	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
1,37	1	1	1	1	1	2	2	2	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1,42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1,47	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,52	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	0	1	1	1	1
1,57	1	2	2	1	2	2	1	1	3	3	3	2	2	2	1	2	2	1	1
1,62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1,67	2	2	2	3	3	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,72	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 1

1754—1881	1759—1886	1764—1891	1769—1896	1774—1901	1779—1906	1784—1911	1789—1916	1794—1921	1799—1926	1804—1901	1809—1936	1814—1941	1819—1946	1824—1951	1829—1956	1834—1961	1839—1966	1844—1971	Период (годы)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	2	1	0	0	1	0	0	0	0	1	2	5	8	6	9	8	10	128,00
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	3	2	2	1	64,00
3	2	6	5	4	4	3	7	6	6	5	4	2	4	7	6	6	6	4	42,67
3	2	2	3	5	5	5	2	3	3	4	4	4	1	0	1	1	1	2	32,00
2	2	6	5	7	6	5	3	3	3	4	4	2	1	1	1	1	1	2	25,60
4	4	1	1	0	1	1	4	3	3	3	4	5	3	2	1	2	1	0	21,33
4	5	3	2	2	2	2	1	1	1	0	1	2	1	0	0	1	0	0	18,29
3	3	1	0	1	1	1	3	2	3	3	3	1	3	4	5	6	4	2	16,00
7	5	3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	14,22
0	0	2	3	3	4	4	4	5	4	4	6	6	3	5	8	8	5	3	12,80
0	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	2	11,64
3	2	1	1	2	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10,67
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	0	0	9,85
0	0	0	1	0	0	1	1	2	1	1	0	1	0	0	0	1	3	4	9,14
0	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	4	2	3	2	1	2	8,53
3	4	5	4	6	7	5	6	7	6	6	4	6	5	4	4	2	1	1	8,00
3	2	2	3	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	7,53
1	1	1	1	1	1	3	4	3	4	5	6	5	3	5	4	3	1	1	7,11
2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	6,74
2	3	2	2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	2	1	6,40
1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	3	3	2	2	1	1	6,10
1	0	0	0	1	1	3	1	2	1	2	2	2	2	2	1	2	0	1	5,82
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	5,57
0	0	1	1	0	1	2	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	5,33
3	4	3	3	5	4	3	5	3	4	3	4	3	5	4	4	3	5	5	5,12
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	4,92
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4,74
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	2	3	4,57
1	0	1	1	2	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	4,41
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	4,27
1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	4,13
1	0	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	4,00
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	3,88
1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	3,76
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	3,66

ε	1659—1786	1684—1791	1689—1796	1674—1801	1679—1806	1684—1811	1689—1816	1694—1821	1699—1826	1704—1831	1709—1836	1714—1841	1719—1846	1724—1851	1729—1856	1734—1861	1739—1866	1744—1871	1749—1876
1,77	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
1,82	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	3	2	2
1,87	1	2	2	3	2	3	2	2	2	3	3	3	2	2	2	1	2	3	3
1,91	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
1,96	1	1	1	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2,01	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	6	6
2,06	1	1	1	0	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1
2,11	1	1	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	2	3	3	2	2	2	2
2,16	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,21	1	1	1	2	2	1	2	3	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1
2,26	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
2,31	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2,36	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2,41	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
2,45	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	2	3	2	2	1
2,50	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1
2,55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
2,60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
2,65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
2,70	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1
2,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
2,80	1	1	1	0	1	1	1	1	3	3	3	3	4	4	3	3	2	1	1
2,85	4	4	3	4	3	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
2,90	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	6	9
2,95	3	3	2	3	3	3	5	5	7	6	6	7	5	5	6	5	4	3	2
2,99	3	3	2	3	4	3	4	5	4	4	3	2	3	4	4	4	6	4	4
3,04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3,09	2	2	2	2	3	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1
3,14	0	1	1	1	0	1	1	2	1	1	1	2	1	1	0	1	2	0	0

на низкие частоты (с периодами более 16 лет), которым соответствует до 25—28% дисперсии. Максимумам с периодом около 24—25 лет соответствует до 6—8% дисперсии, однако на последних кадрах это значение понижается до 1—2%.

Кроме рассмотренных особенностей, на отдельных кадрах имеются всплески до 8—9% дисперсии, приходящиеся на период 2,17 года, и до 5—6% — на периоды 3, 5 и 7—8 лет.

1754—1881	1759—1886	1764—1891	1769—1896	1774—1901	1779—1906	1784—1911	1789—1916	1794—1921	1799—1926	1804—1931	1809—1936	1814—1941	1819—1946	1824—1951	1829—1956	1834—1961	1839—1966	1844—1971	Период (годы)
1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	2	3,56
2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3	2	1	1	3,46
2	2	3	2	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3,37
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	3,28
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	3,20
5	6	5	6	6	5	4	4	5	4	6	6	6	5	4	4	3	2	2	3,12
1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	1	2	1	3,05
1	2	1	2	2	2	4	4	3	3	2	1	2	2	1	1	0	0	1	2,98
2	1	2	1	1	1	0	0	1	1	2	2	2	3	2	2	1	1	1	2,91
2	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2,86
1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	2,78
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,72
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	2,67
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	2,61
2	2	1	1	1	1	3	2	3	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2,56
1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	1	1	2	1	1	2	2	2,51
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	2	3	3	2	3	4	2	2	2,46
2	2	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	2,42
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2,37
1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	0	1	1	2	1	1	1	2	2	2,33
1	2	2	2	3	3	1	1	2	2	3	2	2	1	1	2	3	3	4	2,29
1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	2,25
1	1	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	2,21
8	8	7	8	8	9	9	7	6	6	6	6	5	4	3	2	2	1	1	2,17
1	1	2	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	2	3	3	3	2,13
4	5	6	5	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2,10
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2,06
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2,03
0	0	0	0	0	0	2	3	3	2	3	2	2	3	2	1	0	1	0	2,00

Итак, отмеченные на периодограмме (рис. 2) наиболее мощные колебания проявляются лишь на отдельных временных интервалах и не соответствуют всему ряду наблюдений в целом.

Чем объяснить эти особенности и их трансформацию: нестационарностью или выборочной изменчивостью данных отдельных интервалов? На этот вопрос позволяют ответить результаты

ε	1659—1786	1664—1791	1669—1796	1674—1801	1679—1806	1684—1811	1689—1816	1694—1821	1699—1826	1704—1831	1709—1836	1714—1841	1719—1846	1724—1851	1729—1856	1734—1861	1739—1866	1744—1871	1749—1876
0,00	3	3	3	3	3	3	4	2	1	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0
0,05	6	6	6	6	5	5	6	3	2	2	2	2	2	2	1	0	1	1	1
0,10	6	6	6	6	5	5	6	4	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2
0,15	6	6	6	5	5	5	5	4	3	3	3	3	3	2	2	1	1	2	2
0,20	6	6	6	5	5	5	5	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2
0,25	5	5	5	5	5	5	5	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2
0,29	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3
0,34	3	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3
0,39	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	3
0,44	2	2	2	2	2	3	2	3	3	3	2	3	3	3	3	2	2	3	3
0,49	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	3	3	3	3	2	3	3
0,54	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	3	3	2	3	2
0,59	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,64	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,69	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,74	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
0,79	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
0,83	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
0,88	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2
0,93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0,98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1
1,03	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1
1,08	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1,13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1,18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,42	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,52	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,57	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,62	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1,67	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,72	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 2

1754—1881	1789—1886	1764—1891	1769—1896	1774—1901	1779—1906	1784—1911	1789—1916	1794—1921	1799—1926	1804—1931	1809—1936	1814—1941	1819—1946	1824—1951	1829—1956	1834—1961	1839—1966	1844—1971	Период (годы)
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	128,00
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	4	4	4	4	4	64,00
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	4	3	4	4	3	42,67
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	32,00
3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	3	3	3	3	2	25,60
3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	2	2	3	3	2	2	21,33
3	3	3	2	3	3	2	3	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	1	18,29
3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	16,00
3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	14,22
3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	12,80
2	2	1	2	2	2	1	1	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	2	11,64
2	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	10,67
2	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	9,85
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	9,14
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	8,53
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	8,00
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	7,53
2	2	2	2	1	1	1	2	2	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2	7,11
2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6,74
1	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6,40
2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6,10
1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	5,82
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	5,57
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	5,33
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	5,12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	4,92
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	4,74
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	4,57
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,41
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,27
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,00
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	3,88
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,76
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,66

ε	1659—1786	1664—1791	1669—1796	1674—1801	1679—1806	1684—1811	1689—1816	1694—1821	1699—1826	1704—1831	1709—1836	1714—1841	1719—1846	1724—1851	1729—1856	1734—1861	1739—1866	1744—1871	1749—1876
1,77	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1,82	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2
1,87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1,91	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	2
1,96	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2
2,01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2
2,11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2
2,16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
2,21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,36	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
2,45	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,50	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
2,55	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2,60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
2,65	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1
2,70	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
2,75	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,80	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,85	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,90	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,95	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,99	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3,04	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2
3,09	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2
3,14	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	1	1

оценивания спектральных плотностей, представленные в табл. 2. Эти оценки были получены путем сглаживания периодограмм, приведенных в табл. 1, с помощью цифровых фильтров с $m=3$ и шириной, равной 17 точкам. Они показывают, что основная особенность спектра — это повышенная доля дисперсии, приходящаяся на низкие частоты с периодами более 16—18 лет, которым соответствует около 20% дисперсии (превышение над уровнем белого шума

1754—1881	1759—1886	1764—1891	1769—1896	1774—1901	1779—1906	1784—1911	1789—1916	1794—1921	1799—1926	1804—1931	1809—1936	1814—1941	1819—1946	1824—1951	1829—1956	1834—1961	1839—1966	1844—1971	Период (годы)
1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,56
2	2	1	2	1	1	2	2	2	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	3,46
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	3,37
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	3,28
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	3,20
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	3,12
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	3,05
2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2,98
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,91
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,84
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,78
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,72
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,67
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,61
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,56
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2,51
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,46
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,42
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2,37
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2,33
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2,29
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2,25
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2,21
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	2,17
2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2,13
2	2	2	2	2	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2,10
2	2	3	3	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2,06
2	3	3	3	2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2,03
1	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2,00

примерно 8%). Иногда она достигает 45% (на первых шести-семи кадрах), однако, как уже было отмечено, наблюдения в этом случае не являются надежными.

Спектры, вычисленные с помощью данных середины 1700-х — конца 1800-х годов, имеют широкий размытый максимум с центром в точке с периодом около 14 лет, вызванный особенностью, отмеченной на периодограммах.

e	1752—1879	1755—1882	1758—1885	1761—1888	1764—1891	1767—1894	1770—1897	1773—1900	1776—1903	1779—1906	1782—1909	1785—1912	1788—1915	1791—1918	1794—1921	1797—1924
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,10	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2
0,15	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0,20	5	5	5	6	7	5	6	5	6	5	6	5	5	5	5	5
0,25	6	5	6	5	4	5	5	7	6	6	6	5	3	3	3	3
0,29	4	4	3	4	4	5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3
0,34	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0,39	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
0,44	2	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,49	3	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,54	3	3	3	2	2	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1
0,59	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0,64	3	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2
0,69	2	1	2	2	2	3	4	4	5	5	4	3	3	3	3	3
0,74	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,79	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	2	2	3	2
0,83	1	1	1	2	1	2	2	2	1	1	2	3	2	2	1	2
0,88	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0,93	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,98	2	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	4	2	2	2	2
1,03	1	1	1	0	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1,08	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0	1
1,13	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	0	1	1	1	1
1,18	3	2	2	2	2	3	4	4	3	4	3	3	3	3	2	2
1,23	5	6	6	5	4	4	3	4	4	4	5	6	6	7	7	8
1,28	0	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	3	2	2	3	3
1,33	8	9	10	9	8	6	7	6	5	5	4	5	3	4	5	5
1,37	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	3	3	2	2
1,42	2	1	1	2	2	3	2	3	4	3	3	2	3	2	2	2
1,47	1	1	1	2	2	3	2	3	3	2	2	1	1	1	2	2
1,52	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1,57	3	3	4	5	5	6	5	5	4	4	4	6	7	6	5	4
1,62	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1,67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1,72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Таблица 3

1800—1827	1803—1830	1806—1833	1809—1836	1812—1839	1815—1842	1818—1845	1821—1848	1824—1851	1827—1854	1830—1857	1833—1860	1836—1863	1839—1866	1842—1869	1845—1872	Период (годы)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	5	4	5	5	6	5	5	6	6	6	7	7	128,00
1	1	0	0	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	64,00
1	0	0	1	4	3	4	4	4	5	5	3	2	2	2	2	47,67
5	5	5	3	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	1	32,00
4	5	6	5	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	2	1	25,60
3	4	5	4	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	21,33
0	0	1	1	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	1	18,29
0	0	0	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	16,00
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14,22
1	0	1	2	3	3	2	3	3	4	4	5	6	6	5	6	12,80
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	11,64
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	10,67
1	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9,85
3	2	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9,14
0	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	0	1	1	0	1	8,53
2	3	2	2	5	6	7	6	5	5	4	4	5	5	6	4	8,00
2	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7,53
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	7,11
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	6,74
2	2	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	6,40
1	1	2	1	2	2	2	2	2	3	3	2	3	3	3	2	6,10
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	2	5,82
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1	5,57
2	2	3	2	5	5	6	7	8	7	6	8	6	6	4	3	5,33
8	8	6	7	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	5,12
3	3	2	3	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	4,92
5	5	3	4	2	3	3	4	5	4	5	5	5	5	7	8	4,74
2	2	3	2	4	3	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	4,57
2	2	1	1	1	1	2	2	2	3	4	3	4	4	3	2	4,41
2	2	3	2	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	4,27
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,13
3	3	2	2	4	3	2	2	2	1	2	1	2	2	1	1	4,00
1	1	2	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	3,88
2	2	2	3	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	3,76
2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3,66

с	1752—1879	1755—1882	1758—1885	1761—1888	1764—1891	1767—1894	1770—1897	1773—1906	1776—1903	1779—1906	1782—1909	1785—1912	1788—1915	1791—1918	1794—1921	1797—1924
1,77	3	3	4	5	5	5	5	5	6	5	4	4	3	3	2	1
1,82	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1,87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1,91	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1,96	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,01	1	2	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	3	2	2
2,06	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	2	1	2	1	1
2,11	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	2	2	2	1
2,16	3	2	2	3	3	2	2	1	2	2	2	2	1	2	1	2
2,21	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
2,26	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1
2,31	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1
2,36	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	3	2	2	2	1	1
2,41	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1
2,45	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0
2,50	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	4	2	3
2,55	2	2	2	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2,60	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
2,65	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	1	1	2	1
2,70	1	1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	2	1	2	1
2,75	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
2,80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
2,85	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3
2,90	6	6	6	5	5	5	5	5	4	3	4	3	3	2	3	3
2,95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
2,99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	4
3,04	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	2	1	1
3,09	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
3,14	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

На отдельных спектрах существуют незначительные широкие максимумы с периодами 2, 3, 5 и 9—12 лет.

На наш взгляд, основным достоверным фактом, выявленным с помощью приведенных таблиц спектральных оценок, оказалась повышенная доля дисперсии, приходящаяся на низкие частоты с периодами более 16—18 лет. Причем заметно смещение максимума, соответствующего колебаниям в сотни лет в 1600—1700-е годы,

1800—1927	1803—1930	1806—1933	1809—1936	1812—1939	1815—1942	1818—1945	1821—1948	1824—1951	1827—1954	1830—1957	1833—1960	1836—1963	1839—1966	1842—1969	1845—1972	Период (годы)
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	3,56
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	3,46
2	3	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	3	2	3,37
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	3,28
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	3,20
1	1	2	1	2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	3,12
2	2	1	2	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	3	3,05
1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2,98
2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2,91
0	0	0	0	0	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	1	2,84
1	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,78
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,72
2	2	2	1	2	1	2	2	3	3	3	3	3	3	4	5	2,67
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2,61
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	2,56
2	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2,51
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2,46
1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2,42
2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	2	3	3	5	2,37
2	1	1	2	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2,33
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2,29
0	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2,25
4	3	3	5	4	4	4	3	4	4	3	3	3	3	3	2	2,21
2	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2,17
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2,13
4	4	3	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2,10
1	1	2	3	2	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	2	2,06
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2,03
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2,00

затем периодам полтора-два десятилетия в 1800-е годы и, наконец, снова колебаниям около сотни лет в XX столетии.

Особенности других частотных интервалов незначительны и их вариации являются результатом выборочной изменчивости.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий изменение во времени спектральных оценок, и сделаем некоторые замечания. Рассмотрим временной ряд наблюдений среднегодовых значений

e	1752-1879	1755-1882	1758-1885	1761-1888	1764-1891	1767-1894	1770-1897	1773-1910	1776-1903	1779-1906	1782-1909	1786-1912	1788-1915	1791-1918	1794-1921	1797-1924
0,00	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
0,05	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2
0,10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,15	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,20	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2
0,25	3	2	2	3	3	3	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2
0,29	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2
0,34	3	3	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2
0,39	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
0,44	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
0,49	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
0,54	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1
0,59	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,64	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,69	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,74	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
0,79	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,83	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,88	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,93	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,98	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2
1,03	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2
1,08	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2
1,13	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2	3	3	3
1,18	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	3
1,23	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1,28	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1,33	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1,37	2	3	3	3	3	3	2	3	2	2	2	3	3	3	3	3
1,42	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	3	3	3	3	3
1,47	2	2	2	3	3	3	2	3	2	2	2	3	3	3	3	3
1,52	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2
1,57	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1,62	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1
1,67	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1,72	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 4

1800—1927	1803—1930	1806—1933	1809—1936	1812—1939	1815—1942	1818—1945	1821—1948	1824—1951	1827—1954	1830—1957	1833—1960	1836—1963	1839—1966	1842—1969	1845—1972	Период (годы)
1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	188,00
2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	64,00
2	2	1	1	3	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	42,67
2	2	2	1	3	2	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	32,00
2	2	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	25,60
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	21,33
2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	18,29
2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16,00
1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14,22
1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	12,80
1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	11,64
1	0	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	10,67
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	9,85
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	9,14
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	8,53
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8,00
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	7,53
1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	7,11
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	6,74
2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6,40
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6,10
2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	5,82
3	3	2	3	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	2	2	5,57
3	3	2	3	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	5,33
3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	5,12
3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	4,92
3	3	3	3	2	2	2	3	3	3	2	3	2	2	2	2	4,74
3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4,57
3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4,41
3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4,27
2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	1	2	2	2	2	4,13
2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	4,00
1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,88
1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,76
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,66

ε	1752—1879	1755—1882	1758—1885	1761—1888	1764—1891	1767—1894	1770—1897	1773—1900	1776—1903	1779—1906	1782—1909	1786—1912	1788—1915	1791—1918	1794—1921	1797—1924
1,77	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,82	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,91	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,96	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
2,11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1
2,26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1
2,31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,45	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,55	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,60	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,65	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,70	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
2,80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2
2,85	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
2,90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,95	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	2	2
2,99	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1
3,04	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1
3,09	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2
3,14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1

температуры воздуха в Ленинграде с 1752 по 1972 г. В табл. 3 даны периодограммы, рассчитанные на отдельных интервалах по 128 лет каждый, сдвинутых относительно друг друга на 3 года.

Распределение дисперсии на этих периодограммах значительно более равномерное, чем для Центральной Англии. Нет точек, которым бы соответствовало более 10% дисперсии.

1800—1927	1803—1930	1806—1933	1809—1936	1812—1939	1815—1942	1818—1945	1821—1948	1824—1951	1827—1954	1830—1957	1833—1960	1836—1963	1839—1966	1842—1969	1845—1972	Период (годы)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,56
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,46
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,37
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3,28
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,05
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,98
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,91
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,84
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,78
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,72
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,67
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,61
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,56
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,51
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,46
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,42
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,37
2	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,33
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,29
2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2,25
2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2,21
2	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2,17
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2,13
2	1	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	2,10
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2,06
2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	2	2	2,03
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	2,00

На периодограммах, вычисленных по данным XVIII—XIX столетий, имеется широкий максимум, соответствующий периоду примерно 27 лет. Заметим, что в предыдущем примере для этих данных был отмечен отдельный всплеск с периодом около 14 лет.

Далее имеются небольшие максимумы в различных частотных интервалах (2, 3, 5 и 12 лет).

При анализе данных наблюдений XX столетия для Ленинграда, как и для Центральной Англии, обнаружена основная особенность в низких частотах: на периоды более 40 лет приходится примерно 10% дисперсии.

Сглаживание периодограмм с помощью цифровых фильтров с $m=3$ и шириной, равной 17 точкам, приводит к получению оценок спектральных плотностей (табл. 3), которые близки как между собой, так и к значениям, найденным с помощью временного ряда температуры Центральной Англии. Доля дисперсии, соответствующая периодам более 20 лет, составляет около 16—20% (превышение над уровнем белого шума около 10—12%).

Аналогичные результаты были получены и с помощью данных других станций, анализ которых проводился в книге [1].

Для большинства из них характерно наличие длиннопериодного колебания (от 12—15 до 25—30 лет), существовавшего в 1700-х—1800-х годах и полностью распавшегося в наше время. Основная особенность временных рядов температуры за последние 100 лет — это значительная доля дисперсии, приходящаяся на первые две-три точки периодограммы.

Максимумы, заметные в других интервалах частот, на наш взгляд, не имеют большого значения при формировании спектральных оценок, так как им соответствует сравнительно небольшая доля изменчивости (до 5—6%).

Приведенные оценки спектров (табл. 2 и 4) стабильны и устойчивы во времени, что указывает на их стационарность.

Несмотря на отмеченные особенности, оценки спектральных плотностей временных рядов наблюдений за температурой воздуха близки между собой как во времени, так и в пространстве.

Приведенные выше результаты показывают, что выявленные на периодограммах колебания различной длительности неустойчивы во времени и им соответствует доля дисперсии, как правило, менее 10%.

Наряду с оценками статистических характеристик временных метеорологических рядов, рассмотренными в настоящей работе, проводился анализ и многих других аналогичных результатов. Так, скользящие периодограммы и оценки спектральных плотностей были найдены для всех 18 временных рядов, рассмотренных в [1]; проводилось оценивание спектральных плотностей с помощью временных рядов числа дней свободных ото льда на р. Неве, осадков, температуры воздуха на больших высотах.

Привести все эти оценки в статье не представляется возможным. Следует отметить лишь то, к чему неизбежно приводит анализ метеорологических наблюдений методами теории стационарных случайных процессов, — это значительная доля белого шума, формирующая временные флуктуации метеорологических наблюдений. Авторы далеки от того, чтобы абсолютизировать эти методы и отвергать возможность получения более полезной и содержательной информации. Однако для этого придется переходить к другим методам описания метеорологических процессов, к использованию

оценок моментов более высокого порядка, к дальнейшему исследованию возможностей анализа методами теории нестационарных случайных процессов. При этом во много раз возрастают трудности, вызываемые ограниченной продолжительностью имеющихся записей наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк И. И. Численные методы анализа наблюдений. Л., Гидрометеиздат, 1975, 212 с.
2. Manley G. Temperature Trends in England 1698—1957,—„Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie”. Serie B, Bd 9, 3—4, Heft, 1959, p. 413—433.
3. Manley G. Central England Temperatures: Monthly means 1659 to 1973.—„Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society”, vol. 100, July 1974, N 425, p. 389—405.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ИНСОЛЯЦИИ, РАССЧИТАННЫХ С ПОМОЩЬЮ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ КЛИМАТА

В настоящее время наиболее обоснованной теорией, объясняющей изменения климата Земли, является астрономическая теория колебаний климата. Эта теория была развита Миланковичем и впоследствии уточнялась рядом авторов.

Согласно теории Миланковича, характеристики климатических колебаний определяются изменениями параметров орбиты Земли.

Математические выражения для определения этих характеристик имеют очень сложный аналитический вид, и поэтому их непосредственный анализ затруднителен.

Значительно проще рассчитать соответствующие числовые ряды и провести их гармонический анализ путем аппроксимации отрезками рядов Фурье.

В настоящей статье приведены результаты гармонического анализа рядов вековых изменений сумм радиации, получаемой единицей площади земной поверхности на широтах 65° за калорические полугодия и в течение года. Эти ряды, рассчитанные на 30 млн. лет назад от 1950 г. с шагом по времени 5 тыс. лет, помещены в работе [1] в виде таблиц.

При анализе определялись значения амплитуд гармонических колебаний, составляющих данный ряд Фурье на рассматриваемом интервале времени. Эти значения представлялись в процентах от величины дисперсии, определяемой суммой квадратов отклонений рядов изменений инсоляции от среднего. Результаты расчетов представлены в табл. 1, где указаны только колебания, на которые приходится более 1% общей дисперсии.

В этой таблице использовались следующие обозначения:

ΔQ_s , ΔQ_w — ряды изменений инсоляции за летние (s) и зимние (w) калорические полугодия в северном полушарии,

$\Delta \bar{Q}_s$, $\Delta \bar{Q}_w$ — ряды изменений инсоляции за летние и зимние полугодия в южном полушарии,

ΔQ_{s+w} , $\Delta \bar{Q}_{s+w}$ — ряды изменений инсоляции за год в северном и южном полушариях соответственно.

Из приведенных результатов следует, что рассматриваемые временные ряды относятся к классу почти периодических процессов и имеют линейчатые спектры. В спектрах рядов инсоляций за калорические полугодия имеется пять основных линий с периодами около 52,1, 40,9, 23,7, 22,5 и 19,0 тыс. лет.

Таблица 1

Доля дисперсии (%), приходящаяся на колебания с различными периодами

Периоды (в тыс. лет)	Ряды					
	ΔQ_s	$\Delta \bar{Q}_s$	ΔQ_w	$\Delta \bar{Q}_w$	ΔQ_{s+w}	$\Delta \bar{Q}_{s+w}$
52,1	1,2	1,2	—	—	2,1	1,8
{ 40,9	50,0	49,3	12,5	12,0	88,4	81,5
{ 39,2	—	—	—	—	1,2	1,4
23,7	16,6	16,0	31,0	32,0	—	—
{ 22,6	1,2	1,3	2,2	2,2	—	—
{ 22,4	9,6	9,1	18,0	18,6	—	—
{ 19,1	5,3	5,1	10,2	10,0	—	—
{ 19,0	7,8	7,3	14,7	14,4	—	—
{ 18,9	1,3	1,5	2,8	2,7	—	—
Сумма	93,0	90,8	91,4	91,9	91,7	84,7

В табл. 1 фигурными скобками отмечены периоды, идущие подряд в ряду Фурье, которые мы считаем за одну линию в спектре. (Вследствие того что период не кратен длине ряда, для описания этих колебаний необходимо несколько гармоник) [2]. На отмеченные пять линий спектра приходится более 90% дисперсии ряда. Оставшаяся доля дисперсии (порядка 10%) распределяется сравнительно равномерно по оси частот и, по-видимому, является шумом, в значительной степени обусловленным погрешностями вычислений.

В спектрах рядов инсоляций за год имеется всего две линии с периодами около 40,9 и 52,1 тыс. лет.

Наиболее значительная доля дисперсии соответствует колебанию с периодом 40,9 тыс. лет, которое является следствием периодических изменений угла наклона эклиптики к экватору [1].

Относительно других периодов, обнаруженных в рядах изменений инсоляции за калорические полугодия, можно заметить следующее. Обнаруженное существенное различие между частотными составами годовых и полугодичных временных рядов инсоляции может иметь очень большое физическое значение. Однако оно

может быть также и следствием весьма условного определения понятия калорического полугодия [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш а р а ф Ш. Г. и Б у д н и к о в а Н. А. Вековые изменения элементов орбиты Земли и астрономическая теория климата.— «Тр. Института теоретической астрономии», 1969, вып. 14, с. 48—85.
2. П о л я к И. И. Численные методы анализа наблюдений. Л., Гидрометеониздат, 1975. 209 с.

К. Я. ВИННИКОВ

**СПЕКТР ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ
ОСРЕДНЕННОЙ ПО ШИРОТНЫМ КРУГАМ
СРЕДНЕЙ МЕСЯЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА
СЕВЕРНОГО ПОЛУШАРИЯ ЗА ПЕРИОД 1881—1969 гг.**

1. Характеристика исходных данных. Результатом климатологического обобщения данных о температуре воздуха северного полушария за 1881—1960 гг., т. е. за большую часть периода существования глобальных инструментальных метеорологических измерений, явилось издание карт средних месячных аномалий температуры воздуха у земной поверхности [6].

По этим материалам Л. П. Спириной [11] были получены ряды средних месячных аномалий осредненной по 14 широтным кругам $\varphi_k = 20, 25, 30, \dots, 85^\circ$ с. ш. ($k=1, 2, 3, \dots, m; m=14$) приземной температуры воздуха. В дальнейшем при использовании экушей метеорологической информации эти ряды были продлены Л. П. Спириной до 1969 г. Анализируемые величины были получены путем осреднения значений, снятых с карт при шаге по долоте, равном 10° . Поскольку данные о температуре воздуха над квадрантами океанов имеют меньшую точность по сравнению с данными над континентами, примененная методика осреднения является оптимальной в смысле минимизации дисперсии случайных ошибок. Однако, эта методика существенно уменьшает систематические ошибки, которые неизбежно возникают, если осреднение осуществляется формально, без учета распределения континентов и океанов на каждой широте.

Использование составленных вручную карт, субъективная интерполяция, ручной счет — все это является источником случайных ошибок. Количество метеорологических станций, данные которых анализируются, за 89-летний период увеличилось от нескольких сот до более тысячи. Следовательно, полученные данные не являются равноточными. Учитывая реальную плотность мировой сети станций, можно предполагать, что данные, относящиеся к каждой из широт φ_k , по сути, являются средними значениями по широтным зонам $\varphi_k \pm \sim 10^\circ$ ш. Все перечисленное неизбежно приводит к фильтрации мелкомасштабных пространственных флуктуаций,

высокому уровню белого шума в спектре временных флуктуаций и другим искажениям результатов оценивания спектров пространственно-временного поля температуры воздуха.

Указанные ряды исходных данных потребовали коррекции смысла которой заключался в приведении всего ряда к периоду 1881—1969 гг., так как в соответствующих изданиях карт аномалии температуры для периодов 1881—1940 и 1961—1969 гг. определены относительно средних за 1881—1935 (1940) гг., а аномалии для периода 1941—1960 гг. вычислены относительно средних за

Таблица

Стандартная изменчивость осредненной по широте средней месячной температуры воздуха

σ_k — для отклонений от нормы

σ_k^* — для нормы (изменяющейся в годовом ходе)

	φ_k° с. ш.													
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
$\sigma_k^\circ \text{ C} \dots$	0,22	0,24	0,29	0,34	0,41	0,56	0,69	0,74	0,86	1,07	1,21	1,38	1,66	1,8
$\sigma_k^* \text{ C} \dots$	2,2	3,3	4,5	5,4	6,4	7,4	8,2	8,6	10,1	12,1	11,7	10,8	11,4	11,9

1881—1960 гг. Методика коррекции изложена в работе И. И. Борзенковой и автора [1]. Там же даны стандартные отклонения осредненной по широтным кругам φ_k температуры воздуха для каждого из 12 месяцев года.

Для того чтобы к рядам температуры воздуха можно было более строго применять методы анализа стационарных случайных функций, периодические компоненты, связанные с годовым ходом нормы и дисперсии, исключались для данных, относящихся к каждой широте φ_k . С этой целью вычислялись нормированные аномалии. Нормировка производилась на стандартные отклонения для каждого месяца. Затем нормированные аномалии умножались на стандартные отклонения σ_k , определенные по данным за все 12 месяцев года. Значения σ_k представлены в табл. 1.

В работе [1] показано, что такое исключение годового хода дисперсии существенно снижает уровень белого шума в спектрах рядов осредненной по широте средней месячной температуры воздуха.

Полученные указанным способом ряды величин t_{jk} ($j=1, 2, \dots, n$; $n=1068$; $k=1, 2, \dots, m$; $m=14$; j — номер месяца; k — номер широтного круга; $\bar{t}_{jk}=0$; $\bar{t}_{jk}^2 = \sigma_k^2$; черта сверху означает временное осреднение по индексу j) зависят от номера месяца j и номер широтного круга k и приближенно могут рассматриваться как стационарные случайные последовательности.

Помимо величин t_{jk} , будем рассматривать образованные из них величины T_{jk} и τ_{jk} :

$$T_{jk} = t_{jk} \cos \varphi_k$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m; \bar{T}_{jk} = 0;$$

$$\bar{T}_{jk}^2 = \sigma_k^2 \cos^2 \varphi_k),$$

где введены множители $\cos \varphi_k$, пропорциональные длинам окружностей широтных кругов φ_k и, следовательно, площадям широтных поясов, средними по которым являются величины t_{jk} ;

$$\tau_{jk} = t_{jk} / \sigma_k$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m; \bar{\tau}_{jk} = 0; \bar{\tau}_{jk}^2 = 1)$$

представляют собой нормированные отклонения осредненной по широте средней месячной температуры воздуха.

Хотя величины t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} получены по одним и тем же данным, выбирая ту или иную из них, мы выбираем соответствующую метрику пространства (по оси широт), оставляя неизменной метрику по временной координате.

Выбор метрики определяется постановкой физической задачи, в рамках которой используются результаты статистического анализа. Например, величины T_{jk} приблизительно пропорциональны теплосодержанию приземного слоя воздуха и тем самым имеют энергетический смысл. Поэтому, если имеет место автоколебательный характер вариаций меридионального профиля осредненной по широте температуры воздуха, он скорее всего должен проявиться в результатах анализа поля величин T_{jk} .

Данные о пространственно-временном спектре величин T_{jk} могут быть использованы в задаче фильтрации исходных данных при изучении так называемого векового хода температуры воздуха северного полушария. Если необходимо осуществить фильтрацию данных для оценки среднего меридионального градиента температуры $\left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)$, целесообразно работать в метрике величин t_{jk} . Поскольку

дисперсия $(\bar{\tau}_{jk})^2$ для поля величин τ_{jk} не зависит от широты φ_k , работая в этой метрике, мы имеем наилучшее приближение к одно-родному случайному процессу по пространственной координате.

Необходимо заметить, что физическая интерпретация результатов спектрального разложения дисперсии температуры воздуха затруднена. Мы не можем написать уравнение баланса дисперсии температуры воздуха, как, например, это делается при анализе спектров скорости ветра, где дисперсия скорости ветра имеет смысл кинетической энергии.

В таблице 1 помещены значения средних квадратических отклонений σ_k^* связанных с годовым ходом норм, оцененные по данным Л. П. Спириной [12]. Сравнение значений σ_k со значениями σ_k^* показывает, что изменчивость аномалий средней месячной температуры воздуха, которую мы анализируем, очень мала по сравне-

[illegible]

нию с детерминированными изменениями нормы в годовом ходе.

2. Выбор систем базисных функций для спектрального разложения дисперсий полей величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} по пространственной координате (широте). Рассмотрим пространственные ковариационные матрицы изучаемых полей, элементами которых являются:

$$\overline{t_{jk}t_{jl}} = \sigma_k B_{kl} \sigma_l; \quad (1)$$

$$\overline{T_{jk}T_{jl}} = \sigma_k \cos \varphi_k B_{kl} \sigma_l \cos \varphi_l; \quad (2)$$

$$\overline{\tau_{jk}\tau_{jl}} = B_{kl} \quad (3)$$

$$(k, l = 1, 2, \dots, m; \quad m = 14).$$

Матрица коэффициентов корреляции величин τ_{jk} (3), представленная в табл. 2, не является тёплицевой, так как элементы этой матрицы зависят не только от разности индексов $|k-l|$. Тем более не являются тёплицевыми матрицы (1) и (2). Причем можно показать, что точность оценивания коэффициентов корреляции достаточно высока, и отмеченное обстоятельство не является случайным результатом выборочной изменчивости оценок. Поэтому поля величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} нельзя считать однородными по широте и для их спектрального разложения по пространственной координате в качестве базисных систем ортогональных функций вместо гармонических систем функций необходимо использовать собственные векторы ковариационных матриц (1), (2), (3), иногда называемые эмпирическими ортогональными функциями. Задача представления метеорологических полей в виде разложений по статистически-ортогональным системам функций, их физической интерпретации и практического применения наиболее полно рассмотрена в работе [2] и монографии [8].

Обычно собственные векторы располагают и нумеруют в порядке убывания собственных чисел ковариационной матрицы. Во многих случаях оказывается, что упорядоченные по этому принципу собственные векторы характеризуются последовательно возрастающим числом перемен знаков своих элементов. Мы будем упорядочивать собственные векторы, пытаясь по возможности не использовать порядок убывания собственных чисел, нумеруя их в порядке, соответствующем увеличению числа перемен знака. При этом номера собственных векторов будем рассматривать в качестве характеристики масштаба описываемых ими пространственных возмущений. Первым собственным векторам, порядок которых устанавливается однозначно, соответствуют наиболее крупномасштабные пространственные возмущения изучаемых полей.

Пусть f_{jk} означает одну из рассматриваемых величин t_{jk} , T_{jk} либо τ_{jk} .

Представим f_{jk} в виде разложения

$$f_{jk} = \sum_{p=1}^m C_{jp} x_{pk} \quad (p = 1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

Здесь x_{pk} — собственные векторы ковариационной матрицы

$$M_{kl} = \overline{f_{jk} f_{jl}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{jk} f_{jl}, \quad (5)$$

для которых справедливо

$$\sum_{p=1}^m x_{pk}^2 = 1; \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^m x_{pk} x_{rk} = \begin{cases} 1 & \text{при } p = r; \\ 0 & \text{при } p \neq r; \end{cases} \quad (7)$$

C_{jp} — коэффициенты разложения, зависящие от времени (индекс j):

$$C_{jp} = \sum_{k=1}^m f_{jk} x_{pk}; \quad (8)$$

$$\overline{C_{jp} C_{jr}} = \begin{cases} \lambda_p & \text{при } p = r; \\ 0 & \text{при } p \neq r, \end{cases} \quad (9)$$

где λ_p — собственные числа ковариационной матрицы (5).

Величину $\sum_{k=1}^m M_{kk}$ в метеорологической литературе обычно называют суммарной дисперсией. Спектральное разложение суммарной дисперсии по пространственной координате определяется выражением

$$\sum_{k=1}^m M_{kk} = \sum_{p=1}^m \lambda_p. \quad (10)$$

Для удобства анализа мы будем пользоваться нормированными собственными числами

$$\sum_{p=1}^m \lambda'_p = 1; \quad \lambda'_p = \lambda_p / \sum_{k=1}^m M_{kk} = \lambda_p / \sum_{r=1}^m \lambda_r \quad (11)$$

и аналогом спектральной функции

$$\sum_{r=1}^p \lambda'_r, \quad (12)$$

показывающими, какая часть суммарной дисперсии описывается коэффициентами разложения при p -том собственном векторе или при первых p собственных векторах.

На рис. 1 представлены системы собственных векторов, соответствующие ковариационным матрицам (1), (2), (3). Причем для каждой из них изображено только по 8 первых векторов, упорядоченных, как это указывалось выше, в соответствии с масштабом описываемых ими пространственных возмущений полей величин t_{jk} , T_{jk} , τ_{jk} . Последующим векторам, не изображенным на рис 1,

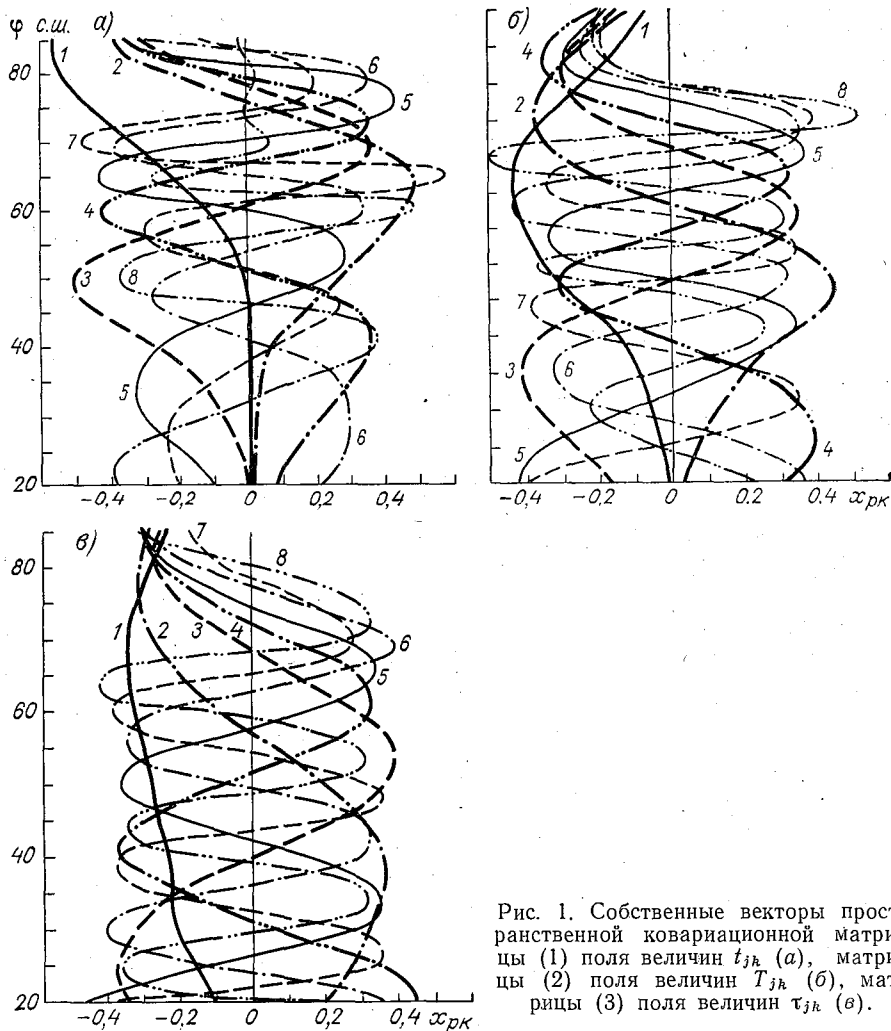


Рис. 1. Собственные векторы пространственной ковариационной матрицы (1) поля величин t_{jk} (а), матрицы (2) поля величин T_{jk} (б), матрицы (3) поля величин τ_{jk} (в).

описывающим мелкомасштабные возмущения, как будет показано далее, соответствуют относительно малые собственные числа и поэтому их анализ не представляется важным. Более сложная форма описываемых ими возмущений не всегда позволяет однозначно упорядочить их в соответствии с выбранным принципом.

Система собственных векторов матрицы B_{kl} наиболее близка к гармонической системе ортогональных функций. При введении в матрицу B_{kl} весов, что соответствует преобразованию метрики пространства, системы собственных векторов существенно изменяются. Физическая интерпретация вида собственных векторов обычно затруднена. Хорошо известно только, что обычно первый собст-

венный вектор имеет элементы, примерно пропорциональные дисперсиям измерений. Вопрос о влиянии ограниченности области, в которой осуществляются наблюдения, на спектр собственных чисел и собственные векторы однородного случайного процесса подробно рассмотрен в работе М. И. Фортус [13]. Ниже мы ограничимся небольшой иллюстрацией. При этом убедимся, что интерпретация формы собственных векторов и спектров собственных чисел ковариационной матрицы наблюдений существенно зависит от того, содержит ли изучаемый процесс движущиеся волны.

Рассмотрим простейшую модель процесса $f(y, \theta)$, который представляет собой бегущую волну,

$$f(y, \theta) = A \cos(\omega \theta + 2\pi y/L). \quad (13)$$

где θ — время, y — пространственная координата, ω — частота, L — длина волны.

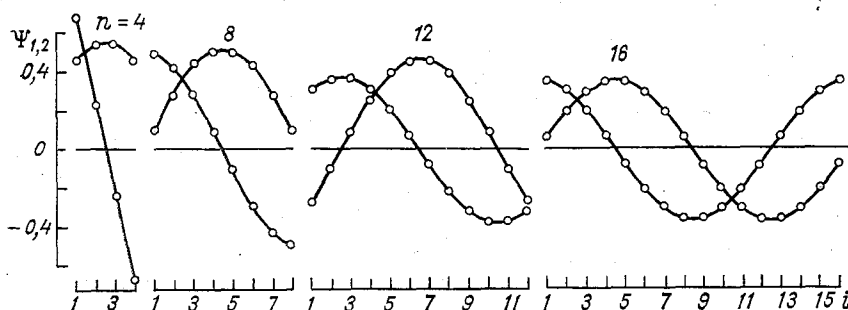


Рис. 2. Собственные векторы $\psi_{1,2}$ ковариационной матрицы (14) при $L = 16 \Delta y$; $n = 4, 8, 12, 16$; i — номер точки.

Произведем достаточно длительные измерения в n равноотстоящих (шаг — Δy) точках $i = 1, 2, \dots, n$ на оси y . На рис. 2 и 3 показано, как изменяются собственные векторы и собственные числа ковариационной матрицы

$$\overline{f(y_0 + i \Delta y, \theta) f(y_0 + j \Delta y, \theta)} = \frac{A^2}{2} \cos \frac{2\pi \Delta y (i - j)}{L} \quad (14)$$

при изменении соотношения между длиной волны L и размером области $L_0 = n \Delta y$, в которой производится измерения.

На рис. 2 безразмерный параметр L_0/L принимает значения $4/16, 8/16, 12/16, 16/16$. В пределе при $(L_0/L) \rightarrow \infty$ собственные векторы приближаются по форме к гармоническим функциям вида:

$$\sin(2\pi y/L + \nu) \text{ и } \cos(2\pi y/L + \nu),$$

где ν — любое число.

Если $L_0/L < 1$, форма собственных функций существенно искажается и уже не позволяет правильно оценить масштаб описываемого

мых ими возмущений. Если формально разделить собственные функции на нечетную и четную, полагая, например, $v=0$, то соответствующие им собственные числа λ_1 и λ_2 равны $\lambda_1=\lambda_2$, если L_0 целочисленнократно $L/2$ или $L_0 \gg L$. При $L_0 < L/2$ основная часть дисперсии процесса описывается четным собственным вектором $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2) < 0,5$ (см. рис. 3).

Ковариационная матрица для бегущей волны имеет два собственных вектора с ненулевыми собственными числами.

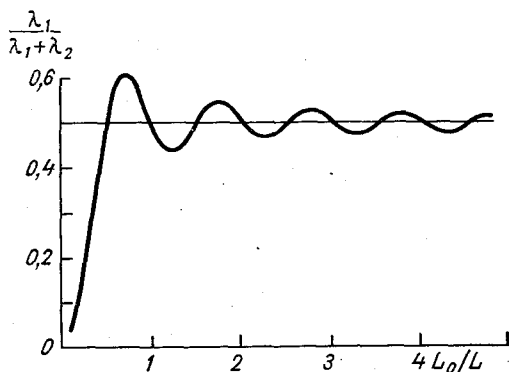


Рис. 3. Соотношение между собственными числами, соответствующими нечетному (λ_1) и четному (λ_2) собственным векторам ковариационной матрицы (14) в зависимости от L_0/L ; $L = 16 \Delta y$; $L_0 = n \Delta y$.

Для процесса типа единичной стоячей волны в аналогичном случае имеем только один собственный вектор. Однако, в то время как собственные векторы бегущей волны при $L_0 \gg L$ имеют произвольную фазу (v), собственный вектор стоячей волны несет информацию о положении узлов и пучностей на оси y .

Поскольку анализируемые данные о температуре воздуха осреднены по широтным кругам, что ограничивает возможность возникновения для полей величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} бегущих пространственных волн, положению пучностей и узлов собственных векторов, представленных на рис. 1, можно давать определенную физическую интерпретацию.

Существует основанное на эмпирическом опыте убеждение, что основная информация об изменчивости метеорологических полей заключена в небольшом числе собственных векторов ковариационных матриц, соответствующих нескольким наибольшим собственным числам. Однако подобный результат лишь в небольшой степени является следствием использования статистически-ортogonalных функций, а главным образом отражает тот факт, что основная часть дисперсии метеорологических полей оказывается сосредоточенной в сравнительно небольшом интервале масштабов возмущений.

Нетрудно убедиться, что собственные числа матрицы

$$\{B_{kl} + \delta_{kl} C\}, \quad \text{где } \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l; \\ 0 & \text{при } k \neq l, \end{cases}$$

равны $(\lambda_i + C)$, где λ_i — собственные числа матрицы $\{B_{kl}\}$. Причем собственные векторы обеих матриц идентичны. Следовательно, если изучаемый процесс содержит «белый шум» физической природы или, например, измерения сопровождаются случайными некоррелированными ошибками с одинаковыми дисперсиями, это не вызывает искажения собственных векторов, а приводит к тому, что спектр собственных чисел ковариационной матрицы будет содержать «белый шум» в виде постоянной составляющей для всех масштабов возмущений, описываемых собственными векторами. Таким образом, использование систем статистически ортогональных (эмпирических функций) не приводит к маскировке шумового характера спектра, если он таким является.

Хотя рассмотренные выше вопросы несколько выходят за рамки предмета исследования, обсуждение их полезно для правильной интерпретации результатов спектрального оценивания.

Для проверки устойчивости систем естественных ортогональных функций были построены пространственные ковариационные матрицы полей величин t_{jk} , T_{jk} , τ_{jk} для месяцев холодного полугодия (октябрь — март) и теплого полугодия (апрель — сентябрь). Расчеты показали, что существенные изменения спектров собственных чисел при переходе от одного полугодия к другому не сопровождаются заметным изменением систем первых восьми собственных векторов. Поэтому мы выбираем в качестве базисных систем ортогональных функций для спектрального разложения по пространственной координате полей t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} собственные векторы матриц (1) — (3), представленные на рис. 1, и в дальнейшем рассматриваем их как детерминированные системы функций. При этом необходимо иметь в виду, что, хотя годовой ход дисперсии величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} отсутствует, дисперсии коэффициентов C_{jp} для всех трех величин могут иметь годовой ход, исключать который нецелесообразно, так как это приводит к получению трудно интерпретируемых результатов.

3. Спектры собственных чисел пространственных ковариационных матриц (1) — (3) полей величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} . Спектры нормированных собственных чисел λ^p матриц (1) — (3) и аналоги спектральных функций $\sum_{r=1}^p \lambda'_r$ для полей величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} представ-

лены в табл. 3.

Обращают на себя внимание следующие особенности пространственных спектров:

1) основная часть дисперсии полей приходится на крупномасштабные пространственные возмущения, 3—5 первых векторов описывают около 90% дисперсии для всех трех полей;

2) в пространственных спектрах практически отсутствует белый

Таблица 3

Спектры нормированных собственных чисел пространственных ковариационных матриц полей величин t_{jk} , T_{jk} , τ_{jk}

		p						
		1	2	3	4	5	6	7
t_{jk}	λ'_p	0,653	0,181	0,071	0,033	0,018	0,012	0,009
T_{jk}	λ'_p	0,440	0,244	0,131	0,068	0,037	0,023	0,013
τ_{jk}	λ'_p	0,336	0,249	0,175	0,098	0,051	0,027	0,017
t_{jk}	$\sum_{r=1}^p \lambda'_r$	0,653	0,834	0,905	0,938	0,956	0,968	0,977
T_{jk}	$\sum_{r=1}^p \lambda'_r$	0,440	0,684	0,815	0,883	0,920	0,943	0,956
τ_{jk}	$\sum_{r=1}^p \lambda'_r$	0,336	0,585	0,760	0,858	0,909	0,936	0,953

		p						
		8	9	10	11	12	13	14
t_{jk}	λ'_p	0,006	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001
T_{jk}	λ'_p	0,012	0,009	0,008	0,005	0,004	0,004	0,002
τ_{jk}	λ'_p	0,011	0,010	0,008	0,006	0,006	0,004	0,002
t_{jk}	$\sum_{r=1}^p \lambda'_r$	0,983	0,989	0,993	0,996	0,998	0,999	1,000
T_{jk}	$\sum_{r=1}^p \lambda'_r$	0,968	0,977	0,985	0,990	0,994	0,998	1,000
τ_{jk}	$\sum_{r=1}^p \lambda'_r$	0,964	0,974	0,982	0,988	0,994	0,998	1,000

шум, собственные числа монотонно убывают при уменьшении масштаба возмущения.

Прямое сравнение пространственных спектров полей t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} невозможно, так как при изменении метрики одним и тем же номерам собственных векторов соответствуют различные масштабы возмущений. При этом масштаб возмущений, описываемый собственными векторами, последовательно увеличивается при переходе от поля t_{jk} к полю T_{jk} и далее к полю τ_{jk} .

Это приводит к тому, что скорость сходимости разложения (4), о которой мы можем судить, анализируя аналоги пространственных спектральных функций $\left(\sum_{r=1}^p \lambda'_r\right)$, оказывается наименьшей для поля τ_{jk} и наибольшей для поля t_{jk} .

Таблица 4

Оценки $P_{k\mu}$ меры точности аппроксимации полей величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} первыми μ ($\mu = 1, 2, 3, 4, 8$) членами разложения по собственным векторам пространственных ковариационных матриц

$\varphi_{k \text{ с. III}}$	μ																
	1	2	3	4	8	1	2	3	4	8	1	2	3	4	8		
	t_{jk}						T_{jk}						τ_{jk}				
85	0,84	0,94	0,97	0,98	1,00	0,12	0,35	0,54	0,73	0,89	0,26	0,55	0,72	0,86	0,98		
80	0,94	0,97	0,97	0,98	0,99	0,19	0,52	0,72	0,88	0,89	0,37	0,69	0,85	0,94	0,98		
75	0,91	0,91	0,93	0,96	0,98	0,34	0,72	0,87	0,95	0,97	0,48	0,83	0,92	0,93	0,96		
70	0,64	0,84	0,92	0,95	1,00	0,54	0,86	0,90	0,91	0,99	0,56	0,81	0,82	0,84	0,97		
65	0,36	0,86	0,91	0,92	1,00	0,68	0,86	0,86	0,91	0,99	0,55	0,69	0,72	0,84	0,96		
60	0,17	0,82	0,82	0,93	0,99	0,74	0,76	0,87	0,92	0,97	0,50	0,54	0,74	0,89	0,96		
55	0,04	0,63	0,86	0,90	0,96	0,68	0,78	0,91	0,91	0,97	0,44	0,45	0,83	0,87	0,96		
50	0,01	0,38	0,89	0,89	0,97	0,50	0,86	0,88	0,92	0,98	0,36	0,51	0,83	0,83	0,96		
45	0,00	0,19	0,74	0,88	0,95	0,32	0,81	0,85	0,91	0,97	0,32	0,62	0,76	0,88	0,96		
40	0,00	0,05	0,43	0,76	0,93	0,14	0,56	0,84	0,84	0,95	0,26	0,70	0,70	0,88	0,96		
35	0,01	0,03	0,19	0,54	0,89	0,09	0,29	0,79	0,86	0,95	0,25	0,68	0,78	0,83	0,96		
30	0,01	0,01	0,08	0,32	0,86	0,05	0,14	0,61	0,84	0,92	0,20	0,57	0,81	0,81	0,95		
25	0,00	0,00	0,02	0,16	0,86	0,02	0,04	0,36	0,70	0,92	0,11	0,37	0,71	0,89	0,95		
20	0,00	0,00	0,00	0,06	0,64	0,00	0,00	0,15	0,42	0,93	0,05	0,18	0,46	0,74	0,99		

Выше указывалось, что вследствие относительно небольшой плотности станций на северном полушарии осреднение данных по широтным кругам φ_k неизбежно сопровождается осреднением по широтным поясам размером до 20° с. ш. Это осреднение, естественно, приводит к фильтрации мелкомасштабных пространственных возмущений, особенно существенной для собственных векторов с номерами $p \gg 8$. Поскольку масштаб пространственного осреднения невозможно установить точно, невозможно однозначно устранить влияние этой фильтрации. Можно думать, что теоретические пространственные спектры осредненной по широтным кругам температуры воздуха содержат белый шум, уровень которого существенно превышает уровень белого шума в спектрах, представленных в табл. 3.

Быстрая сходимость разложения (4) позволяет осуществлять малопараметрическое описание меридионального профиля аномалий осредненной по широте температуры воздуха.

Ограничимся в (4) первыми $\mu \leq m$ членами разложения

$$f_{jk} \approx f_{jk}^\mu = \sum_{p=1}^{\mu \leq m} C_{jp} x_{pk}. \quad (15)$$

Введем дисперсию ошибки аппроксимации

$$d_{k\mu}^2 = \overline{(f_{jk} - f_{jk}^\mu)^2}. \quad (16)$$

В качестве меры точности аппроксимации можно использовать величину

$$P_{k\mu} = \frac{M_{kk} - d_{k\mu}^2}{M_{kk}} = \sum_{p=1}^{\mu \leq m} \lambda_p x_{pk}^2 / M_{kk}, \quad (17)$$

показывающую, какая доля дисперсии k -той компоненты анализируемого поля f_{jk} описывается первыми μ собственными векторами. Естественно, что при $\mu = m$ $P_{km} = 1$. Для значений $\mu = 1, 2, 3, 4$ и 8 оценки $P_{k\mu}$ для полей величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} представлены в табл. 4. Данные этой таблицы показывают, что точность аппроксимации (15) при использовании небольшого числа первых членов разложения тем выше, чем больший вес мы приписываем измерениям на данной широте φ_k , преобразуя метрику пространства. Для величин t_{jk} в первую очередь обеспечивается удовлетворительная точность аппроксимации для высоких широт, где дисперсия σ_k^2 почти на 2 порядка больше дисперсии в низких широтах. Для величин T_{jk} в соответствии с распределением введенных весов уже при малых μ достигается удовлетворительная точность описания поля температуры в средних широтах. При относительно большом значении μ (равном 8) во всех трех случаях отмечается удовлетворительная точность аппроксимации практически для всех широт. Для величин τ_{jk} , пространственной ковариационной матрицей которого является корреляционная матрица, мы имеем практически одинаково высокую точность аппроксимации на всех широ-

тах φ_k при $\mu=4$, за исключением 20° с. ш., который находится на границе области. Поэтому изменения температуры на этой широте в меньшей степени связаны с изменениями температуры на других широтах.

Вследствие того что пространственные возмущения полей величин t_{jk} , T_{jk} , τ_{jk} , имеющие масштаб менее $15\text{--}20^\circ$ широты, подавлены пространственным осреднением при получении исходных данных, в дальнейшем мы будем рассматривать только возмущения, описываемые первыми восемью векторами, на которые приходится 96—98% дисперсии изучаемых полей.

4. Спектры временных рядов осредненной по широте температуры воздуха северного полушария. Так как температура соседних широтных кругов коррелирована, мы будем анализировать ряды температуры широтных поясов $20\text{--}35$, $40\text{--}55$, $60\text{--}70$, $75\text{--}85$ и $20\text{--}85^\circ\text{C}$.

Осреднение по широтным поясам осуществлялось по формуле

$$t_{jk_1, k_2} = \sum_{k=k_1}^{k_2} T_{jk} / \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \varphi_k. \quad (18)$$

Указанным широтным поясам соответствуют следующие значения стандартов температуры: 0,23, 0,51, 0,93, 1,50 и $0,33^\circ\text{C}$. К этим рядам были добавлены ряды оценок аномалий среднего меридионального градиента средней месячной температуры воздуха в зоне $25\text{--}75^\circ$ с. ш. Оценки аномалий градиента γ_1 и γ_2 были получены при аппроксимации меридионального профиля аномалий температуры воздуха в окрестности широтного круга $\varphi=50^\circ$ с. ш. полиномами первой (γ_1) и третьей (γ_2) степеней при использовании метода наименьших квадратов. В рядах аномалий среднего градиента также исключен годовой ход дисперсии, что позволяет анализировать их в предположении стационарности.

Формулы численного дифференцирования можно найти в книге И. И. Поляка [9]. Стандарты оценок аномалий средних меридиональных градиентов γ_1 и γ_2 соответственно равны 0,28 и $0,47^\circ\text{C}/10^\circ$ широты при среднем значении градиента средней годовой температуры воздуха, равном $7,5^\circ\text{C}/10^\circ$ широты.

Результаты оценки нормированной спектральной плотности

$S(\omega)$ (ω — частота, $\int_{-\omega_0}^{\omega_0} S(\omega) d\omega = 1$, ω_0 — граничная частота) представлены на рис. 4. Оценки произведены по методике Блекмана — Тьюки. Реализация алгоритма описана в работе [5]. Параметры оценивания: длина рядов — 1068 месяцев, шаг — 1 месяц; применено корреляционное окно Тьюки, максимальный сдвиг, до которого вычислялись корреляционные функции — 60 месяцев. Основные выводы, которые можно сделать на основании этих оценок, следующие:

1) имеется очень высокий уровень белого шума во всех рядах, причем естественный белый шум не отличим от компоненты, связанной со случайными ошибками анализируемых величин;



Рис. 4. Оценки нормированной спектральной плотности $S(\omega)$ рядов аномалий средней месячной температуры воздуха, осредненной по широтным зонам 20—85, 20—35, 40—55, 60—70, 75—85° с. ш., и рядов аномалий среднего меридионального градиента γ_1 и γ_2 (k — номер точки, $T=120/k$ — период в месяцах).

точке усечения корреляционной функции 12 месяцев), получаем, что около 40—45% дисперсии оценок аномалий градиента γ_1 и температуры широтных зон 20—35, 40—55, 60—70 и 75—85° с. и примерно 30% дисперсии температуры зоны 20—85° с. ш. приходится на некоррелированную компоненту (белый шум).

Для временного ряда оценок аномалий градиента γ_2 около 50% дисперсии приходится на белый шум.

Заметим, что использование в качестве исходных данных средних месячных значений температуры с шагом, равным одному месяцу, эквивалентно применению к ряду четырехсрочных измерений процедуры фильтрации, частотная характеристика которой изображена на рис. 5. Необходимо иметь в виду, что после исключения

белого шума, связанного со случайными ошибками членов анализируемых рядов, оценки спектральной плотности необходимо разделить на частотную характеристику этого фильтра, чтобы исключить влияние месячного осреднения данных. Мы этого не сделали так как не можем точно указать, какая часть белого шума связана со случайными ошибками, а какая часть характеризует реальный процесс. Более того, на рис. 5 видно, что указанный фильтр не полностью подавляет возмущения с периодом менее 2 месяцев, соответствующим граничной частоте ω_0 . Это приводит к фиктивному

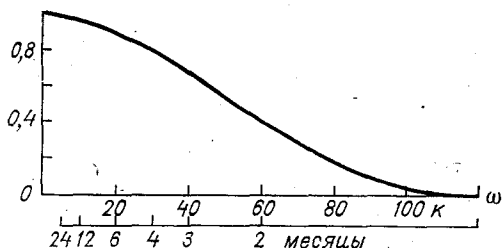


Рис. 5. Частотная характеристика фильтрации, осуществляемой при использовании средних месячных величин (k — номер точки на оси частот; $T=120/k$ — период в месяцах).

переносу энергии из высоко-частотной области спектра $|\omega| > \omega_0$ в анализируемый частотный интервал $|\omega| \leq \omega_0$. Хотя вероятные искажения оценок спектра рядов температуры и градиента температуры воздуха, связанные с этой причиной, по видимому, не очень значительны, для тех метеорологических элементов, спектр которых носит высокочастотный характер, система накопления климатологической информации в виде ря-

дов средних месячных величин со сдвигом, равным одному месяцу, может оказаться неудачной.

Во многих случаях, например, если речь идет о задаче анализа изменений климата, особенный интерес представляет спектральный состав изучаемых реализаций процесса в низкочастотной области спектра. Увеличивая разрешение по частоте в области низких частот, мы не получаем статистически значимых оценок спектра предполагаемой генеральной совокупности, но, учитывая уровень белого шума и его вероятные флуктуации, можем выделить те области спектра, где существенная часть дисперсии не является результатом флуктуаций шумовой компоненты.

Представим временной ряд $\psi_j (j=1, 2, \dots, n; n\text{—четное; } \bar{\psi}_j=0)$ в виде ряда Фурье

$$\psi_j = \sum_{q=1}^n s_q e^{i\omega_q j}, \quad (19)$$

где $\omega_q = 2\pi q/n$ — гармонические частоты,

$$s_q = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi_j e^{-i\omega_q j} \quad (20)$$

— комплексные коэффициенты Фурье.

Разложение дисперсии ряда $\overline{\psi_j^2}$ определяется равенством Парзевала

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi_j^2 = \overline{\psi_j^2} = \sum_{q=1}^n |s_q|^2. \quad (21)$$

Перейдем к нормированным величинам Φ_q и F_{q_1, q_2} , показывающим, какая часть дисперсии $\overline{\psi_j^2}$ приходится на q -тую гармонику или сумму гармоник с номерами от q_1 до q_2

$$\sum_{q=1}^{n/2} \Phi_q = 1; \quad \Phi_q = \frac{a|s_q|^2}{\overline{\psi_j^2}}; \quad a = \begin{cases} 2 & \text{при } q \neq n/2; \\ 1 & \text{при } q = n/2; \end{cases} \quad (22)$$

$$F_{q_1, q_2} = \sum_{q=q_1}^{q_2} \Phi_q. \quad (23)$$

При этом нужно иметь в виду, что дисперсию, приходящуюся на q -тую гармонику, принято считать равномерно распределенной по интервалу частот

$$\left(\omega_{q-\frac{1}{2}}, \omega_{q+\frac{1}{2}} \right),$$

поэтому в (23) предполагается осреднение по интервалу частот $\omega_{q_1-\frac{1}{2}}, \omega_{q_2+\frac{1}{2}}$, которому соответствует интервал периодов $(n\Delta/(q_1-0,5), n\Delta/(q_2+0,5))$, где Δ — шаг по времени.

Если обозначить через I долю дисперсии $\overline{\psi_j^2}$, приходящуюся на белый шум, то в интервале спектра $(\omega_{q_1-0,5}, \omega_{q_2+0,5})$ мощность шума, выраженная в долях дисперсии $\overline{\psi_j^2}$, равна

$$F_{q_1, q_2}^{\text{ш}} = \frac{\nu I}{n-1},$$

где $\nu = 2(q_2 - q_1 + 1) - b$ — число степеней свободы, понимаемое в статистическом смысле, $b = \begin{cases} 0 & \text{при } q_2 \neq n/2 \\ 1 & \text{при } q_2 = n/2 \end{cases}$.

Пользуясь радиотехнической терминологией, оценим среднее значение отношения $\omega = (\text{сигнал} + \text{шум}) / (\text{шум})$

$$W = \frac{(n-1) F_{q_1, q_2}}{\nu I}. \quad (24)$$

При малом ν величина $F_{q_1, q_2}^{\text{ш}}$ может претерпевать большие флуктуации, вероятность которых оценивается с помощью χ^2 распределения. При $\nu \geq 30$ эта величина имеет приблизительно нормальное распределение с относительным средним квадратическим отклонением, равным $\sqrt{2/\nu}$ [7].

В табл. 5 представлены величины F_{q_1, q_2} , W и ν для анализируемых рядов при неравномерном спектральном разрешении, увеличивающемся в направлении низких частот. Анализ таблицы позволяет сделать следующие выводы:

1) от 10 до 20% дисперсии аномалий средней месячной температуры воздуха отдельных широтных зон и градиента γ_1 описывается первой гармоникой ряда Фурье, спектральное окно которой включает периоды примерно от 60 до 180 лет. Эта гармоника для средних месячных аномалий температуры воздуха, осредненной по всей внетропической зоне северного полушария ($20-85^\circ$), описывает более 30% дисперсии;

2) в интервале периодов 8—15 лет, на который приходится 11-летняя периодичность солнечной активности, заключена относительно небольшая часть дисперсии. Независимо от того, являются

Таблица 5

Спектральное разложение выборочной дисперсии временных рядов месячных аномалий температуры воздуха, осредненной по широтным зонам, и оценок аномалий меридионального градиента температуры γ_1 и γ_2 . Величины F_{q_1, q_2} даны в % от дисперсии

		Периоды (годы)					Периоды (месяцы)			
		180—60	60—15	15—8	8—4	4—1,5	18—8	8—5	5—3	3—2
		ν								
		2	10	10	22	74	148	162	284	358
$t_{(20-85^\circ)}$	F	34	6	4	5	8	13	8	11	10
	W	600	21	16	8	4	3	2	1	1
$t_{(20-35^\circ)}$	F	21	6	4	6	10	12	10	14	15
	W	280	16	11	8	4	2	2	1	1
$t_{(40-55^\circ)}$	F	14	4	3	6	9	21	12	16	14
	W	180	9	8	6	3	4	2	1	1
$t_{(60-70^\circ)}$	F	18	5	2	5	9	18	13	14	16
	W	220	13	6	5	3	3	2	1	1
$t_{(75-85^\circ)}$	F	12	6	2	8	11	14	15	18	17
	W	140	14	5	8	3	2	2	1	1
γ_1	F	10	6	2	5	11	17	15	16	17
	W	120	14	5	6	4	3	2	1	1
γ_2	F	3	4	2	5	10	20	15	20	21
	W	30	9	3	5	3	3	2	1	1

ли вариации солнечной активности источником части дисперсии зональной температуры в этой области спектра, вся дисперсия, сосредоточенная в этом спектральном интервале, слишком мала для того, чтобы нужно было искать какие-либо прогностические связи зональной температуры с параметрами солнечной активности;

3) для периодов, превышающих 8—15 лет, выполняется условие $\omega \gg 1$, и поэтому изменения, относящиеся к этой области спектра, могут быть реально выделены на фоне белого шума.

Материалы табл. 5 можно использовать для выбора параметров фильтров для выделения временных изменений температуры воз-

духа, представляющих интерес с точки зрения изучения изменений климата;

4) оценки аномалий среднего меридионального градиента γ_2 несут меньше информации об изменениях в низкочастотной области спектра по сравнению с оценками γ_1 .

По-видимому, в настоящее время невозможно отличить низкочастотные компоненты изучаемых рядов от нестационарных компонент, связанных с изменениями математического ожидания, т. е. с изменениями климата. Однако это различие не принципиально,

Таблица 6

Оценки уровня белого шума (в % от дисперсии) в спектрах рядов коэффициентов C_{jp} ($p = 1, 2, \dots, 8$) разложения (4) полей величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk}

Оценки округлены до 5%

	p							
	1	2	3	4	5	6	7	8
t_{jk}	45	45	60	60	70	70	80	60
T_{jk}	35	55	45	65	65	65	75	65
τ_{jk}	30	50	45	55	65	75	60	85

так как, если удастся выделить на фоне естественного и искусственно внесенного в ряды (в процессе изменений и обработки) шума достаточно большие медленные изменения температуры и градиента температуры воздуха целого полушария, этим изменениям, очевидно, должны соответствовать изменения физических параметров, определяющих глобальный термический режим атмосферы. Анализ механизмов, вызывавших медленные изменения глобального термического режима северного полушария в течение периода инструментальных измерений, осуществлен в работах [3, 4, 14] и др.

5. Пространственно-временной спектр дисперсии полей t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} . Разложив поля величин t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} по собственным векторам пространственных автоковариационных матриц (1), (2), (3), мы получили временные ряды коэффициентов C_{jp} ($j=1, 2, \dots, n$; $p=1, 2, \dots, m$).

На рис. 6 даны оценки нормированной спектральной плотности коэффициентов C_{jp} . Оценивание осуществлено по методике Блекмана — Тьюки с теми же параметрами, что и в предыдущем разделе. Можно видеть, что практически все спектры на этих рисунках характеризуются очень высоким уровнем белого шума, а некоторые из рядов коэффициентов C_{jp} имеют значимые максимумы спектральной плотности в низкочастотной области. Оценки уровня белого шума, полученные по методике, изложенной в предыдущем разделе, приведены в табл. 6. Данные этой таблицы показывают, что от 30 до более 80% дисперсии рядов коэффициентов C_{jp} приходится на некоррелированную во времени случайную компоненту.

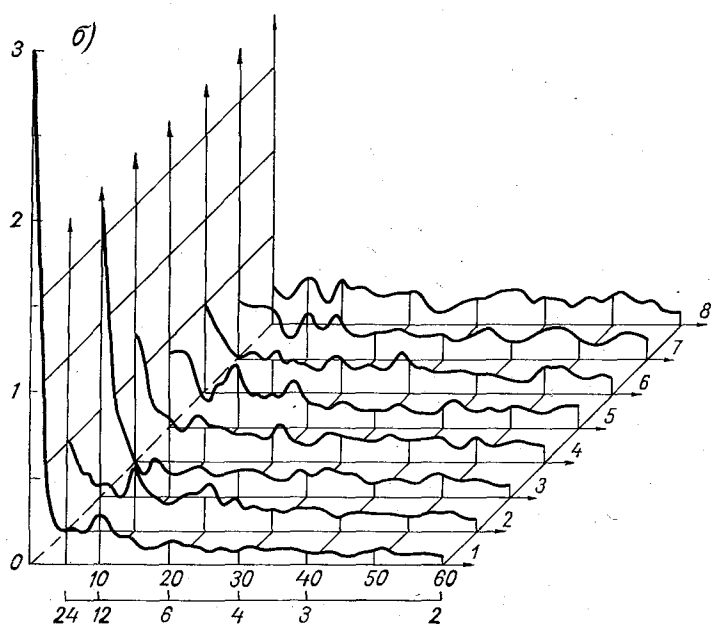
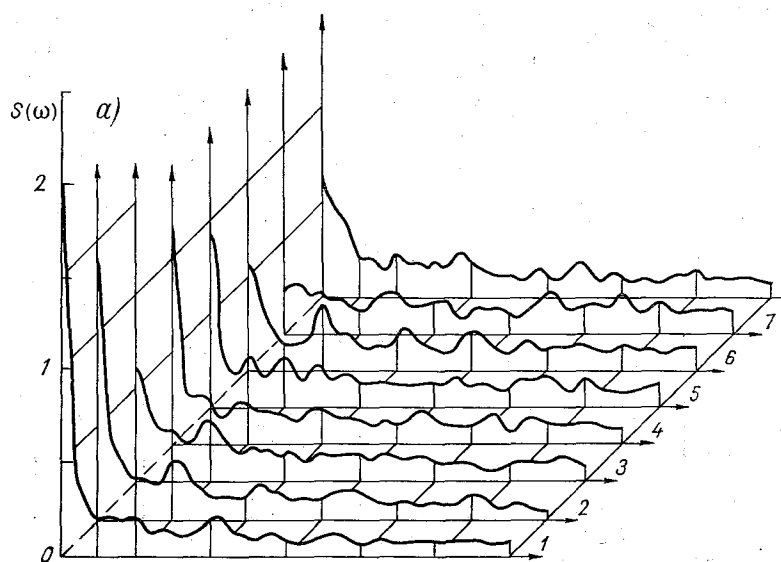


Рис. 6. Оценки нормированной спектральной плотности
 а — поля величин t_{jk} , б — поля

Значимые максимумы спектральной плотности в области низких частот для поля t_{jk} имеют спектры рядов коэффициентов C_{j1} , C_{j2} , C_{j4} , C_{j5} ; для поля T_{jk} — ряды коэффициентов C_{j1} и C_{j3} ; для поля τ_{jk} — очень резкий максимум имеется в спектре ряда C_{j1} .

На некоторых из представленных спектров заметны размытые максимумы вблизи периода, равного одному году. Одной из вероятных причин этих максимумов является годовой ход дисперсий коэффициентов C_{jk} .

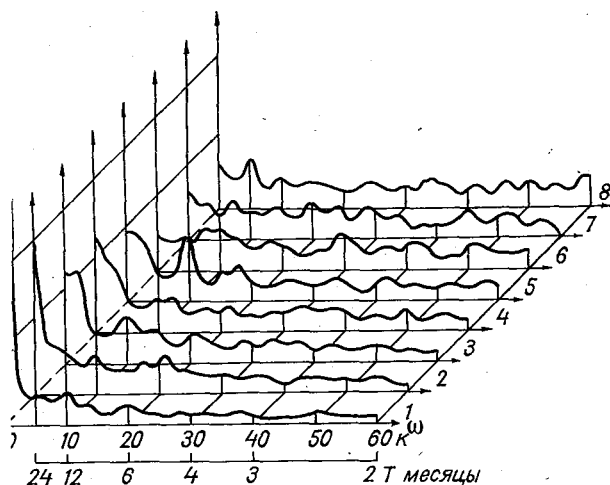
Используя выражения (4), (5), (8), (10), (19) — (21), получаем пространственно-временное разложение дисперсии поля f_{jk} ($j=1, 2, \dots, n$; n — четное; $k=1, 2, \dots, m$; $\bar{f}_{jk}=0$):

$$f_{jk} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n s_{qp} \bar{x}_{pk} e^{i\omega_q j}; \quad (25)$$

$$s_{pq} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f_{jk} x_{pk} e^{-i\omega_q j}; \quad (26)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f_{jk}^2 = \sum_{k=1}^m M_{kk} = \sum_{p=1}^m \lambda_p = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n |s_{qp}|^2. \quad (27)$$

6)



рядов коэффициентов C_{jp} ($p=1, 2, \dots, 8$).
величин T_{jk}, θ — поля величин τ_{jk} .

Поскольку величина, стоящая в левой части (27), представляющая собой суммарную дисперсию поля, зависит от m , перейдем к нормированным величинам. Вместо разложения (27) запишем по аналогии с (11) и (22)

$$\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^{n/2} \Phi_{qp} = 1, \quad (28)$$

где

$$\Phi_{qp} = \frac{a |s_{qp}|^2}{\sum_{k=1}^m M_{kk}}; \quad a = \begin{cases} 2 & \text{при } q \neq n/2; \\ 1 & \text{при } q = n/2. \end{cases} \quad (29)$$

Величина Φ_{qp} показывает, какая часть выборочной дисперсии реализации поля f_{jk} приходится на p -тый пространственный вектор и q -тую временную гармонику.

Сумма

$$F_{p_1, p_2, q_1, q_2} = \sum_{p=p_1}^{p_2} \sum_{q=q_1}^{q_2} \Phi_{qp} \quad (30)$$

показывает, какая часть дисперсии реализации поля f_{jk} заключена в соответствующем интервале пространственно-временного спектра. Оценки величин F_{p_1, p_2, q_1, q_2} характеризуются $v(p_2 - p_1 + 1)$ степенями свободы.

Результаты двумерного спектрального разложения выборочных дисперсий пространственно-временных полей t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} даны в табл. 7. Для первых четырех собственных векторов $p=1, 2, 3, 4$ в табл. 7 даны также оценки w , отношения (сигнал+шум)/(шум), вычисленные согласно (24) при использовании материалов табл. 6.

Заметим также, что величина

$$F_{p_1, p_2, q_1, q_2} / (p_2 - p_1 + 1)^v \quad (31)$$

пропорциональна пространственно-временной спектральной плотности.

Анализируя данные табл. 7, можно сделать следующие выводы.

1. Для всех трех полей на интервал периодов от 15 до 180 лет и интервал масштабов пространственных возмущений, описываемых векторами с номерами $p=1$ и 2, приходится около 15% дисперсий полей. Эта область, составляющая только 0,16% всей двумерной пространственно-временной частотной области, по которой производится разложение дисперсии, характеризуется большими значениями отношения (сигнал+шум)/(шум). Высокая концентрация дисперсии полей в этой области спектра с вероятностью, близкой к единице, не является случайной флуктуацией белого шума.

2. Значения спектральной плотности анализируемых полей в среднем увеличиваются при увеличении масштабов простран-

Таблица 7

Пространственно-временное спектральное разложение выборочной
дисперсии полей величин t_{jk} , T_{jk} , τ_{jk}

Значения $F_{p_1 p_2 q_1 q_2}$ выражены в процентах от дисперсии

p_1, p_2	Периоды (годы)					Периоды (месяцы)			
	180—60	60—15	15—8	8—4	4—1,5	18—8	8—5	5—3	3—2
	ν								
	2	10	10	22	74	148	162	284	355

 t_{jk}

1	1	F	9,1	3,9	1,5	3,4	7,1	9,5	9,4	10,9	10,4
		W	170	14	6	6	4	3	2	1	1
2	2	F	1,5	0,8	0,4	1,0	1,8	3,4	2,3	3,6	3,3
		W	100	10	5	6	3	3	2	2	1
3	3	F	0,2	0,1	0,2	0,3	0,8	1,4	1,0	1,6	1,4
		W	24	4	6	4	3	2	2	1	1
4	4	F	0,3	0,1	0	0,1	0,3	0,5	0,5	0,6	0,8
		W	80	5	—	3	2	2	2	1	1
5	5	F	0,1	0,1	0	0	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5
6	6	F	0	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3
7	7	F	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3
8	8	F	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
1	8	F	11,2	5,0	2,1	4,8	10,5	15,4	13,9	17,7	17,1
1	8	F					98,3				
9	14	F					1,7				

 T_{jk}

1	1	F	10,6	2,6	1,4	2,8	3,7	7,7	4,4	5,5	5,4
		W	390	19	10	9	4	4	2	2	1
2	2	F	0,3	0,8	0,6	1,0	2,9	4,8	4,5	4,9	4,6
		W	14	6	5	4	3	3	2	1	1
3	3	F	1,7	0,5	0,3	0,8	1,4	1,8	1,6	2,6	2,4
		W	160	10	5	7	3	2	2	2	1
4	4	F	0,2	0,3	0,2	0,4	0,7	1,2	0,9	1,5	1,5
		W	18	7	5	4	2	2	1	1	1
5	5	F	0	0,1	0	0,3	0,4	0,8	0,6	0,6	0,9
6	6	F	0	0,1	0	0,1	0,2	0,4	0,4	0,6	0,5
7	7	F	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
8	8	F	0	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3
1	8	F	12,8	4,4	2,5	5,4	9,6	17,1	12,8	16,3	15,9
1	8	F					96,8				
9	14	F					3,2				

$P_1 P_2$	Периоды (годы)					Периоды (месяцы)			
	180—60	60—15	15—8	8—4	4—1,5	18—8	8—5	5—3	3—2
	ν								
	2	10	10	22	74	148	162	284	355

		τ_{jk}									
1	1	F	11,0	2,1	1,4	1,8	2,8	4,6	2,9	3,4	3,5
		W	590	22	15	9	4	3	2	1	1
2	2	F	1,1	1,3	0,6	1,1	2,9	4,1	4,3	4,7	4,7
		W	45	11	6	4	3	2	2	1	1
3	3	F	0,5	0,6	0,2	1,5	1,9	3,7	2,5	3,5	3,2
		W	33	9	2	10	4	4	2	2	1
4	4	F	0	0,5	0,3	0,6	1,2	1,6	1,3	2,2	2,1
		W	—	9	5	5	3	2	1	1	1
5	5	F	0,1	0,2	0,4	0,1	0,5	1,0	0,8	1,0	1,2
6	6	F	0	0	0,1	0	0,3	0,5	0,4	0,7	0,7
7	7	F	0	0	0	0	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4
8	8	F	0	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4
1	8.	F	12,7	4,7	2,6	5,5	9,9	16,0	12,7	16,2	16,2
1	8	F					96,4				
9	14	F					3,6				

венных и временных флуктуаций. В определенной мере это связано с влиянием пространственного и временного осреднения исходных данных.

3. Спектр поля величин T_{jk} имеет особенность — максимум пространственно-временной спектральной плотности при $p=3$ в интервале периодов 60—180 лет. На этот максимум приходится только около 2% дисперсии поля, поэтому связанные с ним физические процессы не могут представить существенный интерес.

4. Спектр дисперсии поля величин τ_{jk} имеет максимум в области периодов от 2 до 8 месяцев при $p=2$. Поскольку пространственная метрика поля τ_{jk} является искусственной, физическая интерпретация этой особенности затруднена. Нужно отметить, что, так как система пространственных базисных функций (рис. 1 в) поля τ_{jk} мало отличается от системы гармонических функций, анализ этого поля в предположении его однородности при использовании методов и численных схем анализа однородных двумерных полей [10] не может привести к получению результатов, существенно отличающихся от представленных в табл. 7.

5. Отсутствие максимумов спектральной плотности в области периодов от 8 до 15 лет для всех масштабов пространственных возмущений свидетельствует об отсутствии вынужденных колебаний меридионального профиля осредненных по широте характери-

стик температуры воздуха, связанных с 11-летней периодичностью параметров солнечной активности.

Можно было бы предположить, что некоторым из пространственных возмущений, описываемых собственными векторами пространственных автоковариационных матриц полей t_{jk} , T_{jk} и τ_{jk} , соответствуют физические автоколебательные системы с определенными периодами колебаний. Внутри изученной области спектра, охватывающей пространственные возмущения масштабом примерно от 10 до 70° по широте и временные возмущения с периодом от 2 месяцев до десятков лет, таких автоколебательных систем не обнаружено.

В целом материалы разделов 4 и 5 показывают, что на фоне шумов различной природы может быть надежно выделена низкочастотная компонента крупномасштабных изменений температуры воздуха на большей части северного полушария. Независимо от того, является ли эта компонента выбросом случайного стационарного процесса или следствием нестационарности процесса, возможность надежного выделения этой компоненты представляется существенным результатом анализа.

На различных этапах работы автор пользовался советами и критикой И. И. Поляка и Е. Л. Гениховича и помощью И. И. Борзенковой. Автор выражает им сердечную признательность. Автор глубоко благодарен Л. П. Спириной и Э. И. Гирской за предоставленный числовой материал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борзенкова И. И., Винников К. Я. Пространственная и временная изменчивость осредненной по широте средней месячной температуры воздуха северного полушария.— «Тр. ГГО», 1975, вып. 364, с. 163—177.
2. Багров Н. А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих.— «Тр. ЦИП», 1959, вып. 74, с. 3—24.
3. Будыко М. И. Изменения климата. Л., Гидрометеиздат, 1974. 280 с.
4. Будыко М. И., Винников К. Я. Современные изменения климата.— «Метеорология и гидрология», 1973, № 9, с. 3—13.
5. Винников К. Я., Гринб Н. К., Поляк И. И. Методика расчета корреляционных функций и спектров временных метеорологических рядов.— «Тр. ГГО», 1973, вып. 308, с. 27—46.
6. Карты отклонений температуры воздуха от многолетних средних северного полушария. Вып. 1, 2, 3, 4. Л., Изд. ГГО, 1960—1967.
7. Коняев К. В. Спектральный анализ случайных процессов и полей. М., «Наука», 1973. 168 с.
8. Мещерская А. В. и др. Естественные составляющие метеорологических полей. Л., Гидрометеиздат, 1970. 199 с.
9. Поляк И. И. Численные методы анализа наблюдений. Л., Гидрометеиздат, 1975. 211 с.
10. Поляк И. И. Оценивание спектральных плотностей и ковариационных функций, двумерных случайных полей.— «Тр. ГГО», 1975, вып. 364, с. 45—50.
11. Спирина Л. П. О вековом ходе средней температуры воздуха северного полушария.— «Метеорология и гидрология», 1969, № 1, с. 85—89.
12. Спирина Л. П. Широтные нормы атмосферного давления и температуры воздуха северного полушария.— «Тр. ГГО», 1970, вып. 258, с. 119—123.

13. Фортус М. И. Статистически ортогональные функции для конечных отрезков случайного процесса.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1973, т. 9, № 1, с. 34—46.
14. Oliver R. C. On the response of mean temperature to stratospheric dust. An empirical approach. Review draft. From paper presented at Fourth Conference on the Climatic Impact Assessment Program, 4—7 February 1975, Cambridge, Mass., 12 p.

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОСТИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

1. Вопрос о выборе разумной дискретности данных является очень важным как при разработке методики метеорологических наблюдений, так и при составлении алгоритмов обработки данных. При его решении приходится учитывать противоречивые требования. С одной стороны, желательно использование возможно более точных исходных данных, чтобы не допустить потери информации при обработке. С другой стороны, использование данных большой детальности (если они имеются, что далеко не всегда обеспечено) предъявляет большие требования к объему памяти вычислительных машин и к необходимому для обработки машинному времени. Поэтому на практике часто приходится прибегать к компромиссу и использовать данные не слишком детальные, но все же достаточно полные, чтобы можно было интересующие нас параметры получить с нужной точностью.

Существует, однако, класс задач, для которых использование данных большой детальности не только неэкономично, но и принципиально нежелательно, поскольку может привести к искажению рассчитываемых характеристик. К числу таких задач относится численное дифференцирование данных дискретных наблюдений. Поскольку в реальных условиях в этих данных всегда имеются шумы, то при очень малом шаге дифференцирования конечные значения определяются главным образом ошибками, а не фактическими значениями искомой производной. На это обстоятельство, также на возможность постановки задачи об оптимальном выборе шага дифференцирования было указано еще в классической работе Н. Винера [9]. Решение этой задачи и некоторые результаты для метеорологических полей с определенным образом заданными статистическими свойствами даны в работах [1, 5].

Аналогичная ситуация наблюдается при расчете числа выбросов метеорологического элемента через тот или иной уровень. Увеличение интервала времени между отсчетами, используемыми при обработке, приводит к пропуску некоторых из фактически имеющих место выбросов. При уменьшении же этого интервала увели-

чивается вероятность фиксации ложных выбросов за счет ошибок наблюдений. В этом случае, как показано в [3], также может быть установлена оптимальная дискретность выбора данных. В результате оказывается, что возможно получать оценки выбросов с максимальной точностью, обрабатывая не слишком большие объемы данных.

Указанная аналогия имеет не только качественный характер. Мы покажем ниже, что упомянутые две задачи в определенном смысле эквивалентны, так что оптимальная с точки зрения численного дифференцирования дискретность отсчетов обеспечивает одно временно и максимальную точность оценки числа выбросов. Так по крайней мере, обстоит дело, если исходить из условия отсутствия систематических ошибок в искомыми величинах (т. е. в производных и числе выбросов). Естественно ожидать, что подобное же соответствие отмечается и при минимизации случайных ошибок. Это позволяет свести сложную задачу оптимального выбора дискретности отсчетов для расчета характеристик выбросов при этом условии к сравнительно простой задаче выбора оптимального шага численного дифференцирования.

2. Рассмотрим нормальный стационарный процесс $f(t)$. Среднее число выбросов такого процесса на интервале времени Δ определяется [8] формулой

$$\overline{N}(c) = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{\sigma_{f'}}{\sigma_f} e^{-c^2/2}. \quad (1)$$

Здесь c — относительный уровень, через который оценивается число выбросов, определяемый как отклонение абсолютного значения уровня от математического ожидания величины f , нормированное на ее среднее квадратическое отклонение σ_f ; $\sigma_{f'}^2$ — дисперсия производной величины f по времени (имеется в виду, естественно, что производная существует).

В общем случае ни математическое ожидание, ни дисперсия процесса заранее точно не известны. Будем полагать, однако, для простоты, что они нам известны. Это предположение является оправданным при достаточно больших объемах выборки и не должно существенно сказаться на точности формул первого приближения, которыми мы здесь ограничимся. В этом случае оценка среднего числа выбросов по той или иной выборке, согласно (1), эквивалентна оценке дисперсии производной по этой выборке.

При дискретных измерениях мы можем как сами производные, так и их статистические характеристики определить лишь приближенно. Степень приближения зависит от шага дифференцирования и от выбора конечно-разностной формулы, в частности, от выбора числа ординат, используемых при конечно-разностном дифференцировании. В нашем случае мы должны исходить из того, что при определении наличия или отсутствия выброса на интервале между двумя измерениями принято пользоваться данными лишь этих измерений (см., например, [7]). Соответственно и дисперсию при

изводной для подстановки в (1) естественно оценивать по двух-точечной конечно-разностной формуле вида

$$(\bar{f}'(t)) = \frac{\bar{f}(t + \Delta) - \bar{f}(t)}{\Delta}. \quad (2)$$

Здесь $\bar{f} = f + \delta_f$ — результат отсчета величины f , содержащий также ошибку измерений. Статистические свойства этих ошибок могут быть различными. Мы ограничимся далее наиболее простым и практически важным случаем, когда эти ошибки в разные моменты времени не зависят ни друг от друга, ни от значений измеряемой величины. В этом случае для большинства оценок достаточно задать меру ошибок наблюдений $\eta^2 = \sigma_\delta^2 / \sigma_f^2$.

Дисперсия конечно-разностного аналога (2) первой производной определяется формулой

$$\sigma_{f'}^2 = \frac{2\sigma_f^2}{\Delta^2} [1 + \eta^2 - r(\Delta)], \quad (3)$$

где $r(\Delta)$ — коэффициент корреляции значений процесса f , соответствующий сдвигу времени Δ .

Подстановка (3) в (1) дает

$$\bar{N}(c) \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{2[1 + \eta^2 - r(\Delta)]} e^{-c^2/2}. \quad (4)$$

Заметим, что формула (4) при $\eta=0$ совпадает с полученной в [4] формулой первого приближения для определения среднего числа выбросов стационарной нормальной последовательности. Важно иметь в виду, что последняя была выведена путем разложения в ряд двумерной плотности распределения для двух членов последовательности и никаких предположений относительно производных величины f при этом не делалось¹.

Очевидно, интервал времени Δ , при котором отсутствует систематическая погрешность в определении числа выбросов, должен быть таким, при котором дисперсия (3) конечно-разностного аналога производной совпадала бы с дисперсией самой производной². Этот интервал, который мы обозначим Δ_0 , может быть определен из уравнения

$$\Delta_0^2 r''(0) = -2[1 + \eta^2 - r(\Delta)], \quad (5)$$

которое получается из (3), если учесть, что для случайной функции f , имеющей первую производную, дисперсия последней определяется значением второй производной от корреляционной функции f при нулевом значении аргумента

$$\sigma_{f'}^2 = -\sigma_f^2 r''(0). \quad (6)$$

¹ Аналогичная приближенная формула была получена автором в [2] для определения среднего числа выбросов стационарной релевской последовательности.

² Применительно к оценке производной такой выбор шага был предложен С. Панчевым [6].

Оптимальный интервал Δ_0 оказывается различным для процессов, характеризующихся различными корреляционными функциями $r(\tau)$.

Представим корреляционную функцию дифференцируемого процесса при малых значениях сдвига времени τ в виде разложения

$$r(\tau) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{T_f} \right)^2 + a \left(\frac{\tau}{T_f} \right)^3 + b \left(\frac{\tau}{T_f} \right)^4 + \dots, \quad (7)$$

где T_f — интервал корреляции, a и b — некоторые коэффициенты.

Подстановка (7) в (5) дает формулу для оценки оптимального интервала Δ_0 между отсчетами

$$\eta^2 = a \left(\frac{\Delta_0}{T_f} \right)^3 + b \left(\frac{\Delta_0}{T_f} \right)^4 + \dots \quad (8)$$

Эта формула совпадает с полученной ранее в работе [3].

3. Отсутствие систематических погрешностей в определении числа выбросов на реализации, разумеется, не гарантирует не только отсутствия случайных погрешностей оценки этой характеристики, но даже и минимума их. Число выбросов на каждой реализации может, согласно сказанному выше, определяться по конечно-разностной оценке производной на этой реализации. Последняя на каждой реализации, вообще говоря, определяется с некоторой погрешностью. Поэтому минимизация случайной ошибки определения числа выбросов может быть сведена к минимизации ошибки конечно-разностного определения производной.

Эта задача решалась в уже упоминавшихся работах [1, 5], в которых отыскивалось оптимальное в смысле метода наименьших квадратов значение шага дифференцирования: Однако в этих работах основное внимание уделялось случаям фиксированного расположения моментов, в которых определяется производная, относительно моментов задания величины f . Между тем может понадобиться определять производную в любой момент интервала между измерениями, что соответствовало бы возможности выброса в этот момент времени.

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть мы используем данные наблюдений в моменты t и $t + \Delta$ для определения производной в промежуточный момент времени $t + x$ по формуле (2).

Погрешность определения производной при этом составит

$$\delta_{f'}(x, t, \Delta) = \frac{1}{\Delta} [\bar{f}(t + \Delta) - \bar{f}(t)] - \left(\frac{df}{dt} \right)_{|t+x}. \quad (9)$$

Зная корреляционную функцию процесса $r(\tau)$, нетрудно оценить дисперсию этой погрешности.

Для меры ошибок определения производной

$$\varepsilon^2(x, \Delta) = \frac{\sigma_{\delta_{f'}}^2}{\sigma_f^2}$$

можно получить формулу

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(x, \Delta) = & -r''(0) + \frac{2}{\Delta^2} [1 + \eta^2 - r(\Delta)] + \\ & + \frac{2}{\Delta} [r'(x) + r'(\Delta - x)].\end{aligned}\quad (10)$$

Зависимость от t в (10) отсутствует в силу стационарности процесса.

Поскольку выброс может с равной вероятностью произойти в любой момент интервала Δ , оценим среднюю по интервалу дисперсию ошибки определения производной

$$\overline{\varepsilon^2}(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \varepsilon^2(x, \Delta) dx. \quad (11)$$

Подставляя в (11) выражение (10), получаем

$$\overline{\varepsilon^2}(\Delta) = -r''(0) + \frac{2\eta^2}{\Delta^2} - \frac{2}{\Delta^2} [(1 - r(\Delta))]. \quad (12)$$

Дифференцируя это выражение по Δ и приравнявая производную нулю, находим условие для нахождения интервала времени Δ_1 , для которого средняя дисперсия ошибки численного дифференцирования минимальна

$$\eta^2 = 1 - r(\Delta_1) + \frac{1}{2} r'(\Delta_1) \Delta_1. \quad (13)$$

При отсутствии ошибок наблюдений $\eta=0$ и $\Delta_1=0$, так что в этом случае оптимума нет и погрешность определения производной (и числа выбросов) минимальна при непрерывных отсчетах. При наличии ошибок минимум имеет место. Конкретный характер зависимости $\Delta_1(\eta)$ определяется видом корреляционной функции, процесса, однако ясно, что для достаточно малых η оптимальный интервал Δ_1 должен монотонно возрастать с увеличением η . Пользуясь разложением (7), можно получить

$$\eta^2 = \frac{a}{2} \left(\frac{\Delta_1}{T_f} \right)^3 + b \left(\frac{\Delta_1}{T_f} \right)^4 + \dots \quad (14)$$

Сравнение (14) с (8) показывает, что в случае корреляционных функций, в разложении которых имеется член с τ^3 , при не очень больших погрешностях измерения должно иметь место приближенное соотношение

$$\Delta_1 = \sqrt[3]{2} \Delta_0 = 1,26 \Delta_0. \quad (15)$$

Напомним, что такие корреляционные функции соответствуют процессам, имеющим лишь первую производную. Для процессов,

имеющих также и вторую производную $a=0$, $b \neq 0$ и из (8) и (14) следует

$$\Delta_1 \approx \Delta_0. \quad (15')$$

Оптимальному шагу дифференцирования Δ_1 соответствует минимальное значение меры ошибки дифференцирования

$$\overline{\varepsilon}_{\min}^2 = -r''(0) + \frac{r'(\Delta_1)}{\Delta_1}. \quad (16)$$

Подстановка в (16) разложения (7) дает формулу

$$\overline{\varepsilon}_{\min}^2 = \frac{1}{T_f^2} \left\{ 3a \left(\frac{\Delta_1}{T_f} \right) + 4b \left(\frac{\Delta_1}{T_f} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (17)$$

4. При использовании аналогии между оценками числа выбросов и производных по дискретным данным необходимо иметь в виду, что принятая нами конечно-разностная аппроксимация производной (2) не является единственно возможной. Как показано в [1], при заданном числе ординат и при заданном шаге дифференцирования могут быть построены более точные конечно-разностные формулы. Для этих формул ошибка аппроксимации может быть минимальной при другом шаге дифференцирования, не совпадающем с полученным нами выше. В свете этого вопрос об оптимальном выборе шага дифференцирования приобретает известную неопределенность и становится неясной сама возможность использования данной аналогии. В связи с этим рассмотрим, насколько могут измениться оценки оптимального шага дифференцирования при использовании других конечно-разностных формул.

Если исходить из условия минимума средней по интервалу ошибки, абсолютные значения весовых множителей, с которыми данные наблюдений входят в конечно-разностную формулу, аппроксимирующую производную, должны быть из соображений симметрии равными. В общем случае это дает вместо формулы (2), которую мы впредь будем называть стандартной, формулу

$$\left(\frac{d\bar{f}}{dt} \right) = p[\bar{f}(t + \Delta) - \bar{f}(t)]. \quad (18)$$

При заданном шаге дифференцирования весовой множитель p может варьироваться. При выборе его могут использоваться различные критерии. Если, например, исходить из условия отсутствия систематической погрешности в определении производной, то множитель p определяется условием равенства дисперсий искомой производной и конечной разности (18)

$$\sigma_f^2 r''(0) = 2p^2 \sigma_f^2 [1 + \eta^2 - r(\Delta)] \quad (19)$$

или

$$p^2 = - \frac{r''(0)}{2[1 + \eta^2 - r(\Delta)]}. \quad (20)$$

Подстановка в (20) разложения (7) дает

$$p = \frac{1}{\Delta \sqrt{1 + 2 \left[\eta^2 \left(\frac{T_f}{\Delta} \right)^2 - a \left(\frac{\Delta}{T_f} \right) - b \left(\frac{\Delta}{T_f} \right)^2 \right]}}. \quad (21)$$

Если учесть (8), то при $\Delta = \Delta_0$ это условие дает $p = 1/\Delta$, т. е. приходим к стандартной конечно-разностной формуле (2). При $\Delta < \Delta_0$ веса оказываются меньше стандартных, что компенсирует авышение дисперсии за счет ошибок наблюдений, а при $\Delta > \Delta_0$ они больше стандартных для компенсации чрезмерного сглаживания практической изменчивости.

Дисперсия погрешности конечно-разностного представления (18) производной аналогично (12) имеет вид

$$\overline{\varepsilon^2}(\Delta) = -r''(0) - \frac{4p}{\Delta} [1 - r(\Delta)] + 2p^2 [1 + \eta^2 - r(\Delta)]. \quad (22)$$

При фиксированном шаге дифференцирования вес p может быть выбран из условия минимума $\overline{\varepsilon^2}$, которое дает

$$p = \frac{1}{\Delta} \frac{1 - r(\Delta)}{1 + \eta^2 - r(\Delta)}. \quad (23)$$

При отсутствии ошибок наблюдения $\eta = 0$ и оптимальным оказывается выбор стандартной формулы (2). При наличии ошибок наблюдений оптимальные веса мало отличаются от стандартных при больших шагах дифференцирования Δ . При малых же Δ из (23) и из условия дифференцируемости функции ($\lim_{\Delta \rightarrow 0} [1 - r(\Delta)] \sim \sim \Delta^2$) следует, что вес p также должен браться близким к нулю.

Отметим, что для оптимального выбора весов достаточно иметь оценки самой корреляционной функции. При оптимизации конечно-разностных формул не для всего интервала, а для фиксированных моментов, рассмотренной в [1], необходимы также сведения о производных от корреляционной функции, надежное получение которых нередко является затруднительным.

При выборе весов в соответствии с формулой (23) выражение для меры ошибки определения производной принимает вид

$$\overline{\varepsilon^2}(\Delta) = -r''(0) - \frac{2[1 - r(\Delta)]^2}{\Delta^2 [1 + \eta^2 - r(\Delta)]}. \quad (24)$$

Сравнение (24) с (12) показывает, что при достаточно больших шагах дифференцирования Δ , таких, что $2\eta^2/\Delta^2$ мало, определяемые этими формулами погрешности мало отличаются друг от друга. При малых же шагах различие может оказаться значительным. Достаточно указать, что при выборе весов согласно формуле (23) дисперсия погрешности определения производной не превышает дисперсии последней, а в стандартном варианте она близка к $2\eta^2/\Delta^2$ и может быть очень большой.

В качестве примера в табл. 1 приводятся оценки погрешности стандартного и оптимального конечно-разностного представления

производных при разных шагах дифференцирования для корреляционной функции вида

$$r(\tau) = \left(1 + \frac{\tau}{T_f}\right) e^{-\tau/T_f}. \quad (25)$$

Для наших целей наиболее важно выяснить, как сказывается переход от аппроксимации (2) к аппроксимации (18) на оптимальном шаге дифференцирования. Для оценки оптимального шага Δ применительно к аппроксимации (18) имеем получающееся из (24) условие

$$\eta^2 = [1 - r(\Delta_2)] \left\{ \frac{r'(\Delta_2)\Delta_2}{2[1 - r(\Delta_2) + r'(\Delta_2)\Delta_2]} - 1 \right\}. \quad (26)$$

Непосредственное сравнение этого выражения с условием (13) получающимся в стандартном варианте, затруднительно. Если

Таблица 1

Мера ошибки $\bar{\varepsilon}^2$ (Δ) определения производной по формулам (2) и (18)

$\frac{\Delta}{T_f}$	$\eta^2=0$	$\eta^2=0,01$		$\frac{\Delta}{T_f}$	$\eta^2=0$	$\eta^2=0,01$	
		по формуле (2)	по формуле (18)			по формуле (2)	по формуле (18)
0	0	∞	1,00	0,60	0,32	0,38	0,37
0,05	0,03	8,03	0,90	0,70	0,36	0,40	0,40
0,10	0,06	2,06	0,70	0,80	0,40	0,43	0,43
0,15	0,10	0,99	0,54	0,90	0,44	0,46	0,46
0,20	0,12	0,62	0,44	1,00	0,47	0,49	0,49
0,25	0,15	0,47	0,38	1,20	0,53	0,54	0,54
0,30	0,18	0,40	0,35	1,40	0,58	0,59	0,59
0,35	0,20	0,37	0,34	1,60	0,63	0,64	0,64
0,40	0,23	0,35	0,34	1,80	0,67	0,67	0,67
0,45	0,25	0,35	0,34	2,00	0,70	0,71	0,71
0,50	0,28	0,36	0,35				

однако, как и ранее, ограничиться случаем сравнительно малых ошибок наблюдения и соответственно малых значений шага Δ_2 , то нетрудно получить после подстановки в (26) разложения (7)

$$\eta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2}{T_f} \right)^3 \left[a + 2(b + a^2) \left(\frac{\Delta_2}{T_f} \right) + \dots \right]. \quad (27)$$

Сравнение (28) с (14) показывает, что главные члены этих выражений совпадают, так что оптимальный шаг дифференцирования при небольших значениях ошибки наблюдений должен мало отличаться от соответствующего оптимального шага Δ_1 для стандартной формулы (2).

В качестве примера в табл. 2 приведены оценки оптимального шага дифференцирования при обоих вариантах аппроксимации для корреляционной функции (25). Там же даны соответствующие этим шагам значения меры ошибки дифференцирования.

Из табл. 2 видно, что до значений $\eta^2=0,01$ оптимальные шаги Δ_1 и Δ_2 практически совпадают, сколько-нибудь значительные расхождения имеют место лишь при больших значениях меры ошибки, т. е. при уровне шумов, превышающем 10% изменчивости дифференцируемой величины.

Таблица 2

Зависимость оптимального шага дифференцирования и меры ошибки аппроксимации первой производной от точности исходных данных

η^2	Стандартный вариант		Оптимальный вариант	
	$\frac{\Delta_1}{T_f}$	$\overline{\varepsilon^2}_{\min}$	$\frac{\Delta_2}{T_f}$	$\overline{\varepsilon^2}_{\min}$
0,0001	0,08	0,08	0,08	0,08
0,0002	0,11	0,10	0,10	0,10
0,0005	0,15	0,14	0,14	0,13
0,001	0,19	0,18	0,18	0,17
0,002	0,24	0,22	0,23	0,20
0,005	0,34	0,29	0,32	0,28
0,01	0,44	0,35	0,39	0,33
0,02	0,58	0,44	0,48	0,40
0,05	0,81	0,55	0,68	0,53
0,1	1,08	0,66	0,83	0,60
0,2	1,53	0,79	0,99	0,69

Таким образом, при не очень больших ошибках наблюдений неоднозначность возможного выбора конечно-разностных формул мало сказывается на значениях оптимального шага дифференцирования. Представляется поэтому, что использование полученных нами выше оценок первого приближения для определения интервала между отсчетами, при котором окажется минимальной случайная ошибка определения числа выбросов, также является вполне оправданным.

Дополнительным подтверждением сказанного является удовлетворительное согласование приведенных оценок оптимального шага с полученными ранее в [3] методом статистического моделирования. Применительно к корреляционной функции (25) для $\eta^2=0,001$ в [3] была получена оценка $\Delta_1/T_f=0,20$, что близко к приведенному в табл. 2 значению 0,19. Для $\eta^2=0,01$ в табл. 2 имеем $\Delta_1/T_f=0,44$, а в [3] был сделан вывод о том, что $\Delta_1/T_f > 0,5$. Это связано с тем, что расчет числа выбросов производился лишь при интер-

валах $\Delta = 0,50 T_f$ со сравнительно небольшой дискретностью. Более детальный расчет дает результаты, близкие к полученным в табл. 2.

Аналогичный подход может быть использован и при решении некоторых других задач. Так, например, при оценке числа максимумов стационарного нормального случайного процесса на интервале Δ можно воспользоваться формулой [8]

$$\bar{N}_{\max} = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{\sigma_{f''}}{\sigma_{f'}}, \quad (28)$$

где, как и ранее, $\sigma_{f'}^2 = -\sigma_f^2 r''(0)$ — дисперсия первой, а $\sigma_{f''}^2 = \sigma_f^2 r^{IV}(0)$ — дисперсия второй производной от случайной функции f .

При дискретных наблюдениях значения производных заменяются конечными разностями. Если заменить первую производную конечно-разностным аналогом (2), а вторую производную — разностью

$$(\bar{f}''(t) = \frac{1}{\Delta^2} [\bar{f}(t - \Delta) - 2\bar{f}(t) + \bar{f}(t + \Delta)]], \quad (29)$$

дисперсия которой составляет

$$\sigma_{f''}^2 = 2 \frac{\sigma_f^2}{\Delta^4} [3 + 3\eta^2 - 4r(\Delta) + r(2\Delta)], \quad (30)$$

то, с учетом (3) получаем оценку $\bar{N}_{\max}^{\approx}$ среднего числа максимумов по дискретным отсчетам

$$\bar{N}_{\max}^{\approx} = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{\sigma_{f''}^{\approx}}{\sigma_{f'}^{\approx}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 + 3\eta^2 - 4r(\Delta) + r(2\Delta)}{1 + \eta^2 - r(\Delta)}}. \quad (31)$$

Из (28) и (31) следует условие отсутствия систематических ошибок в определении числа максимумов

$$\frac{r^{IV}(0)}{r''(0)} = -\frac{1}{\Delta^2} \frac{3 + \eta^2 - 4r(\Delta) + r(2\Delta)}{1 + \eta^2 - r(\Delta)}. \quad (32)$$

Для заданной корреляционной функции процесса, решая уравнение (35), можно аналогично тому, как мы это делали раньше, найти зависимость оптимального интервала между отсчетами применительно к данной задаче от меры ошибок наблюдений η^2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каган Р. Л. О построении оптимальных конечно-разностных и квадратурных формул для однородных и изотропных случайных полей. — «Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана», 1967, т. 3, № 6, с. 592—601.
2. Каган Р. Л. О расчете вероятности выброса стационарной релеевской последовательности. См. наст. сборник.
3. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. О влиянии дискретности измерений на точность определения числа выбросов случайного процесса. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 348, с. 78—98.
4. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. К расчету вероятности выброса нормальной последовательности. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 348, с. 69—77.

5. Каган Р. Л., Хатамкулов Г. Х. О точности конечно-разностного представления производных.— «Тр. ГГО», 1968, вып. 228, с. 49—86.
6. Панчев С. О выборе «шага» при конечно-разностном дифференцировании некоторых метеорологических элементов.— «Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана», 1965, т. 1, № 7, с. 157—159.
7. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968. 463 с.
8. Тихонов В. Н. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970. 392 с.
9. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, London, 1950. 163 p.

К ВОПРОСУ О СМЕЩЕННОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ЭКСЦЕССА

В работе автора [1] был рассмотрен вопрос о влиянии связности метеорологических рядов на точность моментных характеристик до четвертого порядка включительно. Наряду с дисперсиями выборочных характеристик были получены значения среднего квадрата ошибки их определения, которые могут быть гораздо больше дисперсий вследствие смещенности оценок. В частности, были предложены приближенные формулы для учета влияния смещенности на точность выборочного коэффициента эксцесса в предположении, что основным фактором, влияющим на смещенность коэффициента эксцесса, является смещенность оценок моментов второго и четвертого порядков. Однако, как будет показано ниже, влияния смещенности этих оценок в значительной мере взаимно компенсируются, а наиболее существенный вклад в смещенность оценки коэффициента эксцесса вносят дисперсия и ковариация второго и четвертого выборочных моментов.

Пусть для определения коэффициента эксцесса по выборке $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ используется оценка

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2} - 3, \quad (1)$$

где $\hat{\mu}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(f_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j \right)^k$ — оценка для центрального момента k -того порядка.

Предположим, что $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ — выборка значений гауссовской случайной функции с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, представляющая собой t независимых реализаций длины n .

Введем обозначения:

$R_n = (r_{ik})$ — корреляционная матрица значений внутри реализации,

$\varepsilon_k = \frac{\hat{\mu}_k}{\mu_k} - 1$ — относительная ошибка определения μ_k .

Тогда

$$\hat{E} = 3 \sqrt{[(1 + \varepsilon_4)(1 + \varepsilon_2)^{-2} - 1]}. \quad (2)$$

Полагая, что ε_2 и ε_4 малы, получаем

$$\bar{\varepsilon} \approx 3\bar{\varepsilon}_4 - 6\bar{\varepsilon}_2 + 9\bar{\varepsilon}_2^2 - 6\bar{\varepsilon}_2\varepsilon_4. \quad (3)$$

Так как

$$\bar{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{n_2 t} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_4 = & -\frac{2}{n^2 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik} + \frac{4}{n^3 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n r_{ik} r_{is} - \\ & - \frac{3}{n^4 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{st}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_2^2 = & \frac{2}{n^2 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}^2 - \frac{4}{n^3 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n r_{ik} r_{is} + \\ & + \frac{3}{n^4 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{st}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_4 = & \frac{4}{n^2 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}^2 - \frac{8}{n^3 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n r_{ik} r_{is} + \\ & + \frac{6}{n^4 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{st} - \frac{8}{n^3 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n r_{ik}^2 r_{is} + \\ & + \frac{4}{n^4 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik}^2 r_{st} + \frac{16}{n^4 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{is} r_{kt} - \\ & - \frac{36}{n^5 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^n r_{ik} r_{is} r_{tl} + \frac{8}{n^4 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{is} r_{it} + \\ & + \frac{15}{n^6 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n r_{ik} r_{st} r_{lm}, \end{aligned} \quad (7)$$

то первые два члена в (3), обусловленные влиянием смещенности μ_2 и μ_4 , в значительной мере компенсируют друг друга.

Подставляя (4)–(7) в (3), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = & -\frac{6}{n^2 t} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}^2 + \frac{24}{n^3 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n r_{ik} r_{is} - \\ & - \frac{18}{n^4 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{st} + \frac{48}{n^3 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n r_{ik}^2 r_{is} - \end{aligned}$$

Зависимость значения C_4 от связности ряда и объема выборки

n	$10^4 \Delta E(0)$	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95

t = 1												
4	28 213	1,00	0,96	0,97	1,04	1,17	1,39	1,78	2,45	3,73	6,44	8,92
8	19 868	1,00	0,91	0,83	0,76	0,73	0,75	0,88	1,24	2,17	5,01	8,89
10	17 427	1,00	0,92	0,84	0,77	0,72	0,71	0,77	1,03	1,79	4,46	8,65
24	8882	1,00	0,96	0,93	0,89	0,85	0,82	0,82	0,86	1,12	2,74	7,11
30	7292	1,00	0,97	0,94	0,91	0,89	0,87	0,88	0,92	1,12	2,44	6,53
90	2591	1,00	0,99	0,98	0,98	0,99	1,04	1,13	1,31	1,64	2,35	4,19

t = 2												
4	19 868	1,00	0,92	0,86	0,80	0,77	0,79	0,89	1,15	1,72	2,93	3,99
8	12 443	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,77	0,78	0,88	1,26	2,65	4,57
10	10 377	1,00	0,96	0,92	0,88	0,84	0,81	0,81	0,88	1,19	2,54	4,73
24	4728	1,00	0,98	0,97	0,95	0,95	0,97	1,02	1,12	1,33	2,17	4,62
30	3827	1,00	0,99	0,97	0,96	0,97	1,00	1,06	1,19	1,44	2,21	4,46
90	1315	1,00	1,00	0,99	1,00	1,02	1,09	1,21	1,47	1,98	3,21	4,85

t = 5												
4	10 377	1,00	0,97	0,94	0,91	0,89	0,88	0,91	0,99	1,18	1,57	1,90
8	5606	1,00	0,98	0,96	0,95	0,94	0,96	1,01	1,13	1,39	2,07	2,84
10	4550	1,00	0,98	0,97	0,96	0,96	0,98	1,05	1,18	1,48	2,23	3,19
24	1958	1,00	0,99	0,99	0,99	1,01	1,06	1,17	1,39	1,83	2,95	4,63
30	1573	1,00	0,99	0,99	1,00	1,02	1,08	1,20	1,43	1,91	3,15	5,01
90	530	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,26	1,56	2,21	4,05	7,03

t = 10												
4	5606	1,00	0,98	0,97	0,96	0,96	0,99	1,06	1,20	1,48	2,02	2,47
8	2904	1,00	0,99	0,98	0,98	0,99	1,04	1,13	1,32	1,72	2,71	3,82
10	2339	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,05	1,15	1,36	1,80	2,92	4,30
24	989	1,00	1,00	1,00	1,00	1,03	1,10	1,23	1,49	2,05	3,61	6,09
30	793	1,00	1,00	1,00	1,01	1,03	1,10	1,24	1,52	2,11	3,76	6,48
90	266	1,00	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,28	1,59	2,28	4,37	8,10

t = 20												
4	2904	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,04	1,14	1,31	1,65	2,30	2,83
8	1476	1,00	1,00	0,99	1,00	1,02	1,08	1,19	1,42	1,91	3,10	4,43
10	1185	1,00	1,00	0,99	1,00	1,03	1,09	1,21	1,45	1,97	3,32	4,99
24	497	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,26	1,55	2,17	3,98	6,95
30	398	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,12	1,26	1,56	2,21	4,10	7,34
90	133	1,00	1,00	1,00	1,01	1,05	1,13	1,29	1,61	2,32	4,53	8,67

$$\begin{aligned}
& - \frac{24}{n^4 t^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik}^2 r_{st} - \frac{96}{n^4 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{is} r_{kt} + \\
& + \frac{216}{n^5 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^n r_{ik} r_{is} r_{tl} - \frac{48}{n^4 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n r_{ik} r_{is} r_{it} - \\
& - \frac{90}{n^6 t^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n r_{ik} r_{st} r_{lm}. \quad (8)
\end{aligned}$$

При достаточно больших объемах выборки для определения $\overline{\hat{E}}$ можно пользоваться приближенной формулой

$$\overline{\hat{E}} \approx - \frac{6}{n^2 t} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}^2. \quad (9)$$

В случае, когда

$$r_{ik} = q^{|i-k|}, \quad (10)$$

имеем

$$\overline{\hat{E}} = - \frac{6}{nt} \frac{1+q^2}{1-q^2} + O((nt)^{-1}). \quad (11)$$

Используя (8) и формулу для дисперсии $D\hat{E}$ коэффициента эксцесса, приведенную в [1], можно получить выражение для среднего квадрата ошибки определения коэффициента эксцесса

$$\Delta \hat{E} = D\hat{E} + \left(\overline{\hat{E}} \right)^2.$$

Количественные оценки $\Delta \hat{E}$ произведены нами для экспоненциальной корреляционной функции (10). В табл. 1 для некоторых значений длины реализации n и их числа t приведена зависимость от связности ряда величины $C_4(q) = \Delta \hat{E}(q) / \Delta \hat{E}(0)$. При больших объемах выборки величина $C_4(q)$ практически равна величине $B_4(q) = D\hat{E}(q) / D\hat{E}(0)$, для определения которой можно пользоваться таблицами, приведенными в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорченко Е. И. О влиянии связности метеорологических рядов на точность выборочных моментов. — «Тр. ГГО», 1974, вып. 336, с. 25—47.

О РАСЧЕТЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫБРОСА СТАЦИОНАРНОЙ РЕЛЕЕВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Одной из важных статистических характеристик временных рядов является вероятность выброса их через тот или иной фиксированный уровень. Знание этой характеристики позволяет оценить среднее число и среднюю продолжительность периодов, в течение которых рассматриваемая величина превышает этот уровень. Более того, в случае марковских процессов вероятность выброса однозначно определяет распределения числа и продолжительности этих периодов и тем самым обеспечивает их исчерпывающее статистическое описание.

До сих пор наиболее полно исследованы в этом отношении гауссовские ряды. Известно, однако, что распределение многих метеорологических элементов не описывается нормальным распределением Гаусса. Поэтому представляет практический интерес рассмотрение способов оценки вероятности выброса для рядов, распределение которых отличается от нормального.

Как известно (см., например, [8]), вероятность $p(C)$ выброса вверх случайной последовательности f на промежутке $[t_1, t_2]$ может быть найдена по формуле

$$p(C) = \int_{-\infty}^C \int_C^{\infty} w(x, y) dx dy, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ — совместная плотность распределения значений последовательности f в моменты времени t_1 и t_2 .

При наличии таблиц соответствующих двумерных интегральных функций распределения вероятность $p(C)$ определяется вполне элементарно. К сожалению, для большинства распределений, представляющих практический интерес для метеорологов, такие таблицы отсутствуют, что осложняет соответствующие расчеты.

В статье [10] предложен способ приближенной оценки вероятности выброса негауссовской последовательности, основанный на представлении функции $w(x, y)$ в виде разложения в двумерный ряд Грама — Шарлье по моментам последовательности. В [10] показано, что такое разложение дает удовлетворительные резуль-

гаты для рядов, распределение которых близко к нормальному. Вместе с тем ясно, что для рядов, распределение которых существенно отличается от него, возможность использования такого разложения является сомнительной и желательно применение других подходов.

Одним из распределений, важным для метеорологических приложений, является распределение Релея¹, одномерная плотность которого имеет вид

$$w(x, m) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0; \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{mx}{\sigma^2}\right) & \text{при } 0 \leq x < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

где σ и m — параметры распределения, I_0 — функция Бесселя много аргумента.

Такое распределение имеет модуль двумерного вектора, составляющие которого распределены нормально с одинаковой дисперсией и притом являются независимыми друг от друга. В этом случае параметр σ представляет собой среднее квадратическое отклонение составляющей, а параметр m есть модуль математического ожидания вектора. В работах [3, 6] показано, что это распределение хорошо описывает статистические свойства поля ветра в свободной атмосфере, и предложены способы использования его при климатологической обработке этих данных. В работе А. С. Марченко [7] рассмотрен вопрос об аналитическом описании двумерной плотности релеевского распределения и при некоторых, не очень ограничительных с практической точки зрения, предположениях получены соответствующие формулы. Эти формулы, однако, являются очень громоздкими, и даже при использовании ЭВМ расчет вероятности выбросов по ним оказался бы чрезмерно трудоемким.

В связи с этим при получении приближенных оценок вероятности выброса стационарной релеевской последовательности будем использовать другие методы. Для случая последовательности со сравнительно высокой корреляцией между смежными членами, которая практически представляет наибольший интерес, могут быть получены легко реализуемые аналитические формулы. Эти формулы, однако, обеспечивают достаточную точность в сравнительно ограниченном диапазоне изменений параметров распределения. Для оценки вероятности выброса за пределами этого диапазона, а также для оценки точности приближенных формул и определения некоторых статистических характеристик релеевского распределения используется метод статистического моделирования.

2. Пусть интервал времени между членами последовательности мал, так что число выбросов последовательности мало отличается

¹ В литературе оно часто называется распределением Релея — Райса, обобщенным распределением Релея или двумерным распределением Максвелла. Мы будем впредь для краткости называть его просто релеевским.

от числа выбросов непрерывного процесса. В этом случае естественно исходить из формул, определяющих число выбросов процесса. Для стационарного релеевского процесса соответствующая формула имеет вид (см., например, [9])

$$N(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma'}{\sigma} w(\tilde{c}, a), \quad (3)$$

где $N(C)$ — среднее число выбросов процесса вверх (вниз) через уровень C за единицу времени, σ' — среднее квадратическое отклонение производной по времени составляющей вектора, w — одномерная плотность распределения (2), $\tilde{c} = C/\sigma$ — нормированное значение уровня, $a = m/\sigma$ — нормированное на среднее квадратическое отклонение составляющих значение модуля среднего вектора.

Формула (3) аналогична соответствующей формуле для стационарного гауссовского процесса, последняя отличается лишь тем, что в нее входит плотность одномерного гауссовского распределения. Поэтому представляется целесообразным, аналогично тому как это делается в [4] для гауссовского процесса, воспользоваться ею для небольших интервалов времени τ между членами последовательности, когда дисперсию производной можно приближенно заменить дисперсией соответствующей разделенной разности.

В этом случае, полагая

$$u'(t) \approx \frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau}, \quad (4)$$

имеем

$$\sigma' \approx \frac{\sigma}{\tau} \sqrt{2(1 - q)}, \quad (5)$$

где q — коэффициент корреляции между одноименными составляющими для смежных членов последовательности.

Подстановка (5) в (3) дает приближенную формулу для оценки вероятности выброса вверх (или вниз) на интервале между двумя членами стационарной релеевской последовательности

$$p(C) = \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} \tilde{c} e^{-\frac{\tilde{c}^2 + a^2}{2}} I_0(a\tilde{c}). \quad (6)$$

Расчет вероятности выброса по формуле (6) существенно упрощается при использовании таблиц плотности релеевского распределения. Таблица этой функции для некоторых значений параметров a и $\tilde{c}$ приводится в Приложении 1.

В табл. 1 представлена зависимость от параметра a значений математического ожидания $\bar{f}$, среднего квадратического отклонения σ_f , коэффициента асимметрии A и коэффициента эксцесса E для распределения Релея. Из этой таблицы видно, что при больших a значение σ_f близко к значению σ , а коэффициенты A и E близки к нулю. Это связано с приближением распределения Релея к нор-

мальному. Применительно к ветру в свободной атмосфере такие условия могут иметь место в зонах струйных течений.

Для расчетов по формуле (5) необходимо задание коэффициента корреляции ρ между составляющими векторов для смежных членов последовательности. Фактически, однако, такие сведения могут отсутствовать, и вместо них могут иметься данные о корреляции между значениями модуля вектора. В связи с этим важно иметь представление о том, как связаны между собой эти корреляционные функции.

Таблица 1

Параметры распределения Релея

	a					
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$\bar{f}/\sigma$	1,253	1,330	1,549	1,875	2,272	2,711
σ_f/σ	0,655	0,693	0,776	0,857	0,914	0,948
A	0,631	0,618	0,517	0,355	0,210	0,113
E	0,245	0,210	0,153	-0,157	-0,185	-0,132

	a				
	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\bar{f}/\sigma$	3,173	3,646	4,127	4,613	5,101
σ_f/σ	0,967	0,977	0,983	0,987	0,989
A	0,059	0,033	0,020	0,013	0,009
E	-0,073	-0,036	-0,018	-0,010	-0,006

Задача о расчете корреляционных функций модуля скорости ветра по заданным корреляционным функциям ее составляющих решена в общем виде в уже упоминавшейся работе А. С. Марченко [7]. Однако сравнительно простые формулы для такого расчета получены лишь для случая $a=0$.

Простая приближенная формула была получена Д. И. Казакевичем [5] для значений $a > 2$. Однако в этом случае, как уже указывалось, распределение близко к нормальному и соответственно корреляционная функция модуля очень близка к корреляционной функции составляющей скорости в направлении среднего ветра.

В наиболее практически интересном интервале $0 < a < 2$ подходящих аппроксимационных формул для описания связи этих корреляционных функций предложено не было. Некоторые оценки для этого интервала будут описаны нами ниже.

3. С целью получения некоторых статистических характеристик для стационарной релеевской последовательности выбросов через различные уровни были выполнены эксперименты по статистическому моделированию таких последовательностей.

В ходе этих экспериментов моделировались пары значений величины f , распределенной по закону Релея:

$$f_1 = \sqrt{(a + u_1)^2 + v_1^2}; \quad f_2 = \sqrt{(a + u_2)^2 + v_2^2}. \quad (7)$$

При этом

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1; & v_1 &= x_2; \\ u_2 &= qu_1 + \sqrt{1 - q^2} x_3; & v_2 &= qv_1 + \sqrt{1 - q^2} x_4. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь x_1, x_2, x_3, x_4 — псевдослучайные числа, распределенные нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица. Величины $a + u_1$ и $a + u_2$ моделируют нормированные на σ составляющие вектора $\mathbf{f}$ в два момента времени в направлении среднего вектора. Их математическое ожидание равно a , дисперсия равна единице, а коэффициент корреляции между ними равен q . Соответственно величины v_1 и v_2 моделируют нормированные на σ составляющие вектора в направлении, перпендикулярном среднему вектору. Их математическое ожидание равно нулю, дисперсия равна единице, коэффициент корреляции между ними также равен q , а корреляция между ними и величинами u_1 и u_2 отсутствует.

Для каждой пары значений f_1 и f_2 определялось наличие выброса вверх или вниз через ряд уровней C_i . Эти значения использовались также для накопления сумм, необходимых для расчетов моментов распределения. Путем многократного повторения этой процедуры определялись среднее число выбросов через уровни значения одноточечных моментов распределения f и коэффициенты корреляции r между f_1 и f_2 , соответствующие заданным значениям параметров a и q . Число пар значений f_1 и f_2 , использованных при расчетах, в различных экспериментах варьировалось, однако в большинстве случаев оно составляло 10 000.

При расчетах для различных значений параметров использовались различные выборки псевдослучайных чисел x_i . Это осложняло анализ полученных результатов, поскольку приводило к их дополнительному случайному разбросу, что особенно существенно на концах распределения. Такой подход имеет, однако, то преимущество, что позволяет в принципе исключить систематическое искажение результатов, возможное при использовании одной выборки.

В табл. 2 приводятся полученные в результате эксперимента значения коэффициентов корреляции r для модулей при различных значениях параметра a и коэффициента корреляции q между составляющими вектора. Там же приводятся значения σ_q , характеризующие среднюю квадратическую погрешность определения коэффициента корреляции по выборке из 10 000 пар f . Эти значения показывают, что погрешность определения r может составить несколько тысячных при больших q и несколько сотых при малых q . Последнее, впрочем, хорошо видно и по ходу $r(a)$ для малых q .

Таблица 2

Зависимость коэффициента корреляции модуля вектора от корреляции составляющих q по данным статистического моделирования 10 000 пар случайных чисел, распределенных по закону Релея

q	a							σ_q
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	
0,98	0,954	0,959	0,967	—	0,976	0,978	0,979	0,0004
0,95	0,889	0,903	0,920	0,933	0,940	0,945	0,950	0,001
0,90	0,787	0,807	0,844	0,872	0,883	0,890	0,898	0,002
0,85	0,698	0,726	0,778	0,808	0,831	0,836	0,846	0,003
0,80	0,624	0,645	0,711	0,748	0,769	0,778	0,791	0,004
0,75	0,540	0,578	0,637	0,691	0,714	0,724	0,734	0,004
0,70	0,462	0,495	0,574	0,636	0,672	0,678	0,679	0,005
0,65	0,386	0,447	0,526	0,581	0,618	0,635	0,636	0,006
0,60	0,328	0,379	0,465	0,528	0,558	0,574	—	0,006
0,55	0,285	0,342	0,424	0,468	0,509	0,527	0,553	0,007
0,50	0,226	0,274	0,372	0,437	0,454	0,480	0,473	0,008
0,45	0,193	0,231	0,324	0,379	0,422	0,419	0,439	0,008
0,40	0,166	0,203	0,283	0,331	0,355	0,363	0,394	0,008
0,35	0,115	0,160	0,225	0,289	0,306	0,321	0,329	0,009
0,30	0,081	0,125	0,201	0,230	0,273	0,284	0,309	0,009
0,25	0,048	0,090	0,166	0,207	0,210	0,238	0,232	0,009
0,20	0,048	0,059	0,117	0,161	0,191	0,174	0,191	0,010
0,15	0,032	0,054	0,096	0,116	0,124	0,124	0,154	0,010
0,10	0,011	0,023	0,050	0,084	0,078	0,087	0,087	0,010
0,05	0,005	0,019	0,036	—	—	—	—	0,010
α	2,15	1,86	1,42	1,20	1,11	1,06	1,04	—

Из табл. 2 видно, что с увеличением a коэффициенты корреляции увеличиваются, приближаясь к q , а при $a > 2$ практически уже мало отличаются от q .

Если учитывать, что при всех a $r|_{q=0} = 0$ и $r|_{q=1} = 1$, то представляется естественным рассмотреть возможность использования аппроксимации вида

$$r = q^a. \quad (9)$$

Из рис. 1, на котором зависимость $r(q)$ представлена в логарифмических координатах, видно, что такая аппроксимация не является точной. При $q > 0,5$ она несколько завышает, а при $q < 0,5$ занижает r , причем расхождения могут достигать 0,01—0,02. В области малых q эти расхождения сопоставимы с возможными

погрешностями коэффициентов корреляции, в области больших q они существенно больше последних. Представляется, однако, что при решении большинства практических задач этими расхождениями можно пренебречь ради удобства пользования простой аппроксимационной формулой (9). Значения параметра α также приводятся в табл. 2. Заметим, что при $\alpha=0$ аппроксимация $r=q^{2,1}$

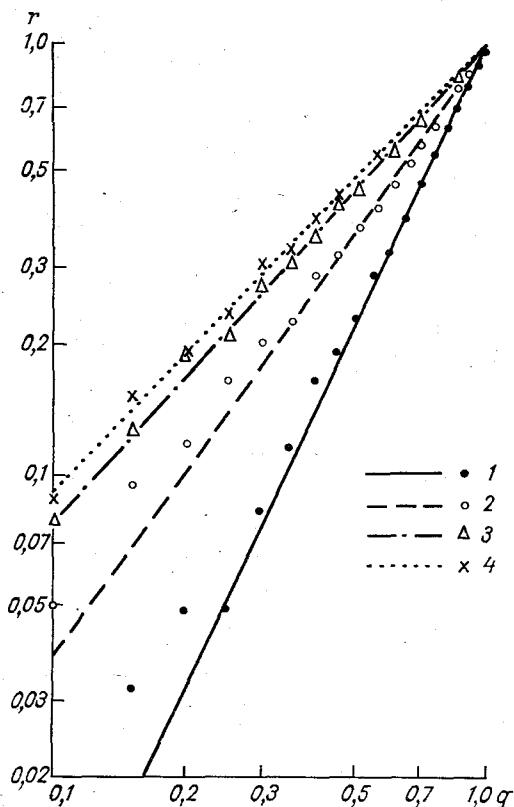


Рис. 1. Связь между корреляцией составляющих и корреляцией модуля вектора.
1) $\alpha=0$, 2) $\alpha=1$, 3) $\alpha=2$, 4) $\alpha=3$.

заметно точнее описывает зависимость r от q , чем рекомендуемая, например, в [2], аппроксимация $r=q^2$.

4. В приложении 2 приводятся полученные методом статистического моделирования вероятности выброса релеевской последовательности для различных значений параметров α , q и $\tilde{c}$.

При расчете этих величин была использована стационарность последовательности, вследствие которой вероятности выброса вверх и вниз через фиксированные уровни являются одинаковыми. Это позволило определять эмпирическую вероятность выброса как от-

отношение сумм числа выбросов вверх и числа выбросов вниз к удвоенному числу моделированных пар N . Поскольку выбросы вверх и вниз для каждой пары взаимно исключают друг друга, оценка погрешности эмпирической вероятности числа выбросов по N независимым парам значений может производиться по формуле

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-2p)}{2N}}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что объединение числа выбросов вверх и числа выбросов вниз при малых вероятностях выброса эквивалентно удвоению объема выборки. При больших вероятностях ($p \geq 0,1$) эффективность этого приема еще выше.

Таблица 3

Средняя квадратическая погрешность σ_p определения вероятности выброса стационарной последовательности по данным 10 000 пар величин f

p	$10^4 \sigma_p$	$\sigma_p/p \%$	p	$10^4 \sigma_p$	$\sigma_p/p \%$
0,0001	0,7	71	0,02	10	5
0,0002	1,0	50	0,03	12	4
0,0003	1,2	41	0,05	15	3
0,0005	1,6	32	0,07	17	2,4
0,0007	1,9	27	0,10	20	2,0
0,0010	2,2	22	0,15	23	1,5
0,0015	2,7	18	0,20	25	1,2
0,002	3,2	16	0,25	25	1,0
0,003	3,9	13	0,30	25	0,8
0,005	5,0	10	0,35	23	0,7
0,007	5,9	8	0,40	20	0,5
0,010	7,0	7	0,45	15	0,3
0,015	8,6	6	0,50	0	0

Из табл. 3, в которой приводятся значения σ_p для случая $N = 10\,000$, видно, что при $p < 0,001$ мы не можем ручаться даже за первую значащую цифру. При $p > 0,02$ средняя квадратическая погрешность превышает 0,001. При построении таблиц приложения 2 экспериментально полученные значения вероятностей выброса были подвергнуты дополнительному графическому сглаживанию, что позволило заметно уменьшить выборочные погрешности в этом диапазоне. Максимальные значения их могут достигать 0,001—0,002, соответствующие же относительные погрешности составляют лишь несколько процентов, что, по-видимому, является допустимым.

В приложении 2, помимо значений $\bar{c}$, приводятся также значения нормированных уклонов уровня от математического ожидания

$$c = \frac{C - \bar{f}}{\sigma_f} = \bar{c} / \left(\frac{\sigma_f}{\sigma} \right) - \frac{\bar{f}}{\sigma_f}. \quad (11)$$

Сравнение фактических значений вероятности выброса релейской последовательности со значениями, получаемыми по прибли-

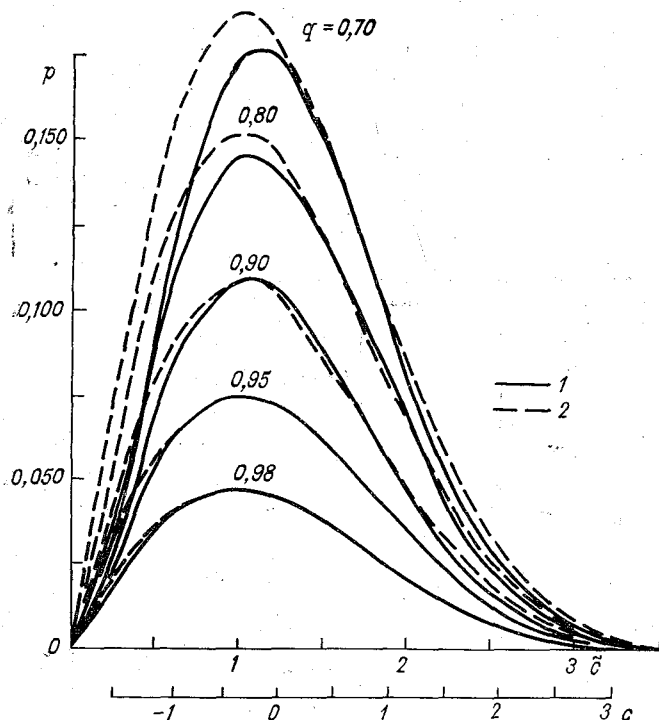


Рис. 2. Вероятность выброса релейской последовательности для случая $a=0$.

1) фактические значения, 2) аппроксимационная формула (6).

женной формуле (6), показывает, что при высокой связности ряда ($q \geq 0,98$) формула (6) дает хорошее приближение во всем диапазоне изменений величины f . Для уровней, близких к среднему значению ($c \approx 0$), формула (6) дает достаточную точность во всем диапазоне изменений коэффициента корреляции q . Однако для уровней, далеких от среднего значения, и при уменьшении связности ряда, использование формулы (6) может приводить к значительным ошибкам.

Так, из рис. 2, относящегося к случаю $a=0$, видно, что уже при $q \approx 0,9$ формула (6) дает относительную погрешность, не превы-

шающую 5%, лишь для $-1,0 \leq \bar{c} \leq 2,0$. Для случая $q=0,7$ относительные погрешности для значений $\bar{c}$ в этих пределах не превышают 10%. При больших отклонениях от среднего значения формула (6) существенно завышает вероятность выброса по сравнению с фактической. Особенно велико это завышение при малых значениях $\bar{f}$. Это связано с тем, что выбросы величины $\bar{f}$ через уровни, удаленные от среднего значения, являются редкими событиями, почти независимыми друг от друга, так что вероятность их

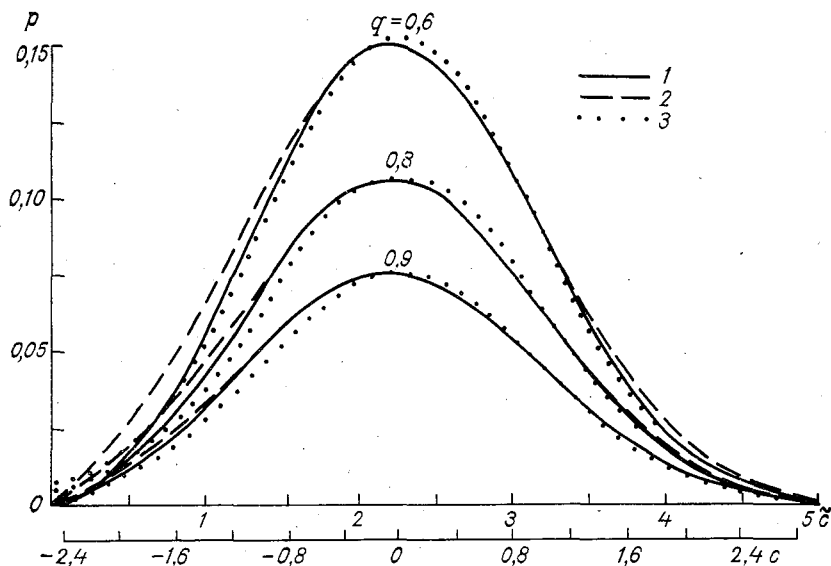


Рис. 3. Вероятность выброса релейской последовательности для случая $a=2$.

1) фактические значения, 2) аппроксимационная формула (6), 3) вероятность выброса гауссовской последовательности.

асимптотически приближается к вероятности выброса для бессвязного ряда. Последняя, как известно, определяется по формуле

$$p|_{q=0} = W(\bar{c}) [1 - W(\bar{c})], \quad (12)$$

где $W(\bar{c})$ — функция распределения Релея для относительного уровня $\bar{c}$, таблицы которой приводятся, например, в [1].

При $q < 0,7$ и $\bar{c} < -1,0$ для приближенной оценки вероятности выброса предпочтительно пользоваться этой формулой.

При больших значениях среднего модуля, т. е. при больших значениях параметра a , релейское распределение приближается к гауссовскому и вероятность выброса релейской последовательности должна приближаться к соответствующей вероятности для гауссовской последовательности. Так, из рис. 3 для случая $a=2$ видно, что для больших положительных отклонений от средних

значений использование вероятности выброса для гауссовской последовательности со значениями параметров s и r обеспечивает большую точность, чем формула (6). Для уровней, меньших среднего значения, оценки по формулам для гауссовского распределения дают худший результат, особенно для малых q , поскольку формулы не учитывают асимметричности распределения, наиболее существенной для этих уровней. Представляется, однако, что эти формулами вполне можно пользоваться при $a > 2$ для достаточно связанных рядов ($q \geq 0,7$). При меньшей связности ряда можно использовать формулу (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барк Л. С. и др. Таблицы распределения Релея — Райса. М., ВЦ АН СССР, 1964. 246 с.
2. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — «Советское Радио», М., 1971. 326 с.
3. Гутерман И. Г. Статистика ветра. — «Тр. НИИАК», 1961, вып. 14.
4. Каган Р. Л. О выборе оптимальной дискретности отсчетов при обработке данных наблюдений. См. наст. сб.
5. Казакевич Д. И. Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии. Л., Гидрометеониздат, 1971. 267 с.
6. Марченко А. Г. Определение некоторых климатических характеристик ветра расчетным путем. — «Метеорология и гидрология», 1962, № 4, с. 34—39.
7. Марченко А. С. Корреляционные функции $|\vartheta|$ процессов и $|\vartheta|$ полей. — «Тр. НФ НИИАК», 1965, вып. 1, с. 104—117.
8. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968, 463 с.
9. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970. 392 с.
10. Федорченко Е. И. Об учете отклонений распределения от нормального при расчете вероятности выброса случайной последовательности. См. наст. сб.

Значения функции $\tilde{c} e^{-\frac{c^2 + a^2}{2}} I_0(a \tilde{c})$

$\tilde{c}$ c	a										
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0,196	0,173	0,120	0,065	0,028	0,009	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
0,4	0,369	0,329	0,233	0,131	0,058	0,020	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000
0,6	0,501	0,452	0,332	0,197	0,094	0,036	0,011	0,003	0,001	0,000	0,000
0,8	0,581	0,533	0,411	0,263	0,138	0,058	0,020	0,005	0,001	0,000	0,000
1,0	0,606	0,569	0,466	0,324	0,187	0,088	0,033	0,010	0,002	0,000	0,000
1,2	0,584	0,563	0,494	0,377	0,241	0,125	0,052	0,017	0,004	0,001	0,000
1,4	0,525	0,522	0,495	0,417	0,296	0,170	0,078	0,029	0,008	0,002	0,000
1,6	0,445	0,458	0,472	0,440	0,346	0,291	0,113	0,046	0,014	0,004	0,001
1,8	0,356	0,381	0,430	0,443	0,387	0,274	0,154	0,069	0,024	0,007	0,002
2,0	0,271	0,302	0,374	0,429	0,414	0,324	0,202	0,100	0,039	0,012	0,003
2,2	0,196	0,229	0,312	0,397	0,424	0,367	0,253	0,138	0,059	0,020	0,005
2,4	0,135	0,166	0,249	0,351	0,416	0,398	0,304	0,183	0,087	0,032	0,010
2,6	0,088	0,115	0,191	0,298	0,390	0,413	0,349	0,233	0,122	0,050	0,016
2,8	0,056	0,076	0,140	0,242	0,351	0,412	0,384	0,283	0,164	0,075	0,027
3,0	0,033	0,048	0,099	0,189	0,303	0,393	0,405	0,330	0,212	0,107	0,042
3,2	0,019	0,029	0,067	0,142	0,251	0,359	0,410	0,369	0,262	0,146	0,064
3,4	0,010	0,017	0,043	0,102	0,199	0,315	0,397	0,396	0,310	0,191	0,092
3,6	0,006	0,010	0,027	0,070	0,152	0,265	0,370	0,407	0,352	0,240	0,128
3,8	0,003	0,005	0,016	0,046	0,111	0,214	0,330	0,401	0,384	0,289	0,170
4,0	0,001	0,003	0,009	0,029	0,078	0,166	0,282	0,380	0,402	0,334	0,218
4,2	0,001	0,001	0,005	0,018	0,052	0,123	0,232	0,345	0,404	0,371	0,267
4,4	0,000	0,001	0,003	0,010	0,034	0,088	0,183	0,301	0,389	0,395	0,314
4,6	0,000	0,000	0,001	0,006	0,021	0,060	0,139	0,252	0,360	0,404	0,355
4,8	0,000	0,000	0,001	0,003	0,012	0,040	0,101	0,202	0,320	0,396	0,385
5,0	0,000	0,000	0,000	0,002	0,007	0,025	0,070	0,156	0,272	0,373	0,401
5,2	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,015	0,047	0,115	0,223	0,338	0,401
5,4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,009	0,030	0,082	0,175	0,293	0,384
5,6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,005	0,019	0,056	0,132	0,244	0,354
5,8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,011	0,037	0,096	0,196	0,313
6,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,006	0,023	0,066	0,150	0,266
6,2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,014	0,044	0,111	0,217
6,4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,008	0,028	0,079	0,170
6,6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,018	0,054	0,128
6,8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,010	0,035	0,092
7,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,006	0,022	0,064

Вероятность выброса релеевской последовательности

z	c	q															
		0,98	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00
$a = 0$																	
0,0	-1,91	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	-1,61	0,013	0,016	0,018	0,018	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
0,4	-1,30	0,028	0,041	0,051	0,059	0,063	0,066	0,067	0,068	0,069	0,069	0,070	0,070	0,070	0,070	0,071	0,071
0,6	-1,00	0,040	0,062	0,085	0,097	0,107	0,114	0,118	0,122	0,126	0,128	0,130	0,133	0,135	0,136	0,137	0,138
0,8	-0,69	0,045	0,072	0,100	0,119	0,134	0,145	0,155	0,164	0,171	0,177	0,183	0,188	0,193	0,195	0,197	0,198
1,0	-0,39	0,048	0,075	0,110	0,128	0,146	0,161	0,175	0,187	0,197	0,205	0,211	0,221	0,228	0,233	0,237	0,239
1,2	-0,08	0,046	0,073	0,108	0,124	0,141	0,160	0,175	0,188	0,200	0,210	0,219	0,228	0,237	0,243	0,247	0,250
1,4	0,22	0,042	0,067	0,093	0,112	0,121	0,147	0,160	0,171	0,181	0,191	0,200	0,212	0,221	0,228	0,234	0,234
1,6	0,53	0,036	0,057	0,081	0,098	0,111	0,123	0,135	0,145	0,153	0,161	0,168	0,180	0,189	0,196	0,199	0,201
1,8	0,84	0,028	0,044	0,063	0,078	0,090	0,100	0,108	0,116	0,123	0,129	0,134	0,142	0,149	0,153	0,157	0,159
2,0	1,14	0,021	0,035	0,047	0,059	0,067	0,073	0,079	0,084	0,089	0,094	0,099	0,104	0,109	0,113	0,116	0,117
2,2	1,44	0,016	0,026	0,034	0,042	0,047	0,051	0,055	0,058	0,062	0,064	0,067	0,071	0,074	0,077	0,079	0,081
2,4	1,75	0,011	0,016	0,022	0,027	0,031	0,034	0,037	0,040	0,042	0,044	0,046	0,048	0,050	0,051	0,052	0,053
2,6	2,06	0,007	0,010	0,015	0,017	0,020	0,022	0,024	0,025	0,026	0,027	0,028	0,030	0,031	0,032	0,032	0,033
2,8	2,36	0,004	0,006	0,009	0,011	0,012	0,012	0,013	0,014	0,014	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	0,020
3,0	2,67	0,003	0,004	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010	0,010	0,011	0,011
3,2	2,97	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,006
3,4	3,28	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
3,6	3,58	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
3,8	3,89	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
4,0	4,19	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$a = 0,5$																	
0,0	-1,92	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	-1,63	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,016	0,016	0,017	0,017	0,017	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018
0,4	-1,34	0,025	0,038	0,047	0,053	0,057	0,059	0,060	0,061	0,061	0,061	0,062	0,062	0,062	0,063	0,063	0,063

0.6	-1.05	0.035	0.056	0.079	0.088	0.097	0.105	0.109	0.112	0.114	0.116	0.118	0.121	0.123	0.124	0.125
0.8	-0.76	0.042	0.067	0.094	0.113	0.125	0.137	0.146	0.153	0.159	0.163	0.167	0.171	0.176	0.180	0.185
1.0	-0.48	0.045	0.070	0.100	0.122	0.139	0.155	0.167	0.177	0.189	0.193	0.199	0.210	0.218	0.224	0.227
1.2	-0.19	0.044	0.069	0.100	0.123	0.140	0.156	0.171	0.182	0.191	0.199	0.207	0.221	0.234	0.243	0.249
1.4	0.10	0.042	0.063	0.092	0.113	0.130	0.143	0.156	0.169	0.180	0.190	0.199	0.214	0.227	0.236	0.241
1.6	0.39	0.037	0.055	0.080	0.099	0.114	0.127	0.139	0.150	0.158	0.166	0.174	0.188	0.200	0.209	0.215
1.8	0.68	0.031	0.048	0.069	0.082	0.094	0.105	0.115	0.124	0.132	0.138	0.145	0.155	0.164	0.172	0.177
2.0	0.97	0.025	0.037	0.054	0.065	0.074	0.082	0.089	0.095	0.101	0.106	0.111	0.119	0.126	0.131	0.136
2.2	1.26	0.018	0.028	0.040	0.048	0.055	0.061	0.066	0.071	0.075	0.078	0.081	0.086	0.091	0.096	0.100
2.4	1.54	0.012	0.019	0.028	0.034	0.039	0.043	0.047	0.050	0.053	0.056	0.058	0.062	0.065	0.068	0.070
2.6	1.83	0.010	0.015	0.020	0.023	0.026	0.029	0.031	0.034	0.036	0.037	0.038	0.040	0.042	0.044	0.046
2.8	2.12	0.006	0.010	0.013	0.016	0.018	0.019	0.020	0.021	0.022	0.023	0.024	0.026	0.027	0.028	0.029
3.0	2.41	0.003	0.006	0.008	0.010	0.011	0.012	0.012	0.013	0.014	0.014	0.015	0.016	0.016	0.017	0.018
3.2	2.70	0.002	0.004	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009	0.010
3.4	2.99	0.001	0.002	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006
3.6	3.28	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
3.8	3.56	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
4.0	3.85	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001

$a = 1.0$

0.0	-2.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	-1.74	0.008	0.011	0.011	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012
0.4	-1.48	0.018	0.026	0.035	0.039	0.041	0.042	0.042	0.043	0.043	0.044	0.044	0.045	0.045	0.046	0.046
0.6	-1.22	0.026	0.041	0.057	0.065	0.071	0.075	0.078	0.080	0.082	0.084	0.085	0.087	0.089	0.091	0.093
0.8	-0.96	0.032	0.051	0.073	0.085	0.095	0.103	0.110	0.116	0.121	0.125	0.128	0.134	0.138	0.142	0.147
1.0	-0.71	0.037	0.059	0.081	0.100	0.113	0.124	0.135	0.144	0.151	0.157	0.162	0.170	0.178	0.184	0.190
1.2	-0.45	0.040	0.065	0.086	0.105	0.122	0.137	0.148	0.160	0.169	0.177	0.184	0.198	0.210	0.218	0.225
1.4	-0.19	0.040	0.065	0.087	0.107	0.125	0.139	0.152	0.165	0.175	0.185	0.192	0.206	0.220	0.231	0.241
1.6	0.07	0.038	0.058	0.083	0.102	0.119	0.133	0.145	0.155	0.166	0.177	0.185	0.202	0.214	0.224	0.230
1.8	0.32	0.034	0.054	0.077	0.094	0.109	0.121	0.132	0.143	0.152	0.160	0.168	0.184	0.197	0.207	0.214
2.0	0.58	0.030	0.047	0.067	0.082	0.094	0.106	0.114	0.122	0.131	0.139	0.147	0.162	0.173	0.183	0.190
2.2	0.84	0.025	0.039	0.056	0.068	0.078	0.087	0.094	0.101	0.107	0.114	0.120	0.131	0.140	0.148	0.155
2.4	1.10	0.020	0.030	0.044	0.054	0.062	0.068	0.073	0.079	0.084	0.089	0.094	0.101	0.107	0.114	0.119
2.6	1.35	0.015	0.024	0.034	0.042	0.048	0.053	0.057	0.061	0.065	0.068	0.071	0.075	0.080	0.085	0.088
2.8	1.61	0.011	0.018	0.024	0.030	0.034	0.037	0.041	0.044	0.046	0.049	0.051	0.054	0.056	0.059	0.063

$\sim$ c	c	q															
		0,98	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00
3,0	1,87	0,008	0,012	0,018	0,021	0,024	0,027	0,029	0,031	0,032	0,033	0,034	0,036	0,038	0,040	0,041	0,042
3,2	2,13	0,005	0,008	0,011	0,014	0,016	0,018	0,020	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	0,025	0,026	0,026	0,027
3,4	2,39	0,003	0,005	0,007	0,009	0,010	0,011	0,011	0,012	0,012	0,013	0,014	0,014	0,015	0,016	0,016	0,016
3,6	2,64	0,002	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010
3,8	2,90	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005
4,0	3,16	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003
$a = 1,5$																	
0,0	-2,19	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	-1,96	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
0,4	-1,72	0,010	0,014	0,019	0,021	0,022	0,022	0,022	0,023	0,023	0,024	0,024	0,024	0,025	0,025	0,025	0,025
0,6	-1,49	0,015	0,024	0,033	0,039	0,042	0,045	0,047	0,049	0,050	0,050	0,051	0,052	0,053	0,054	0,054	0,055
0,8	-1,25	0,022	0,034	0,045	0,053	0,060	0,066	0,071	0,075	0,077	0,080	0,082	0,086	0,089	0,091	0,093	0,094
1,0	-1,02	0,027	0,041	0,056	0,068	0,077	0,085	0,092	0,098	0,103	0,108	0,112	0,119	0,125	0,131	0,135	0,137
1,2	-0,79	0,030	0,048	0,067	0,081	0,094	0,105	0,115	0,122	0,129	0,135	0,140	0,150	0,159	0,167	0,173	0,179
1,4	-0,55	0,033	0,053	0,074	0,091	0,105	0,118	0,128	0,138	0,147	0,155	0,162	0,175	0,187	0,197	0,206	0,215
1,6	-0,32	0,035	0,056	0,079	0,096	0,111	0,124	0,136	0,147	0,157	0,168	0,177	0,192	0,205	0,218	0,229	0,240
1,8	-0,09	0,036	0,056	0,079	0,097	0,113	0,125	0,137	0,148	0,159	0,168	0,177	0,194	0,209	0,223	0,227	0,250
2,0	0,15	0,034	0,054	0,077	0,094	0,108	0,122	0,133	0,143	0,152	0,163	0,171	0,187	0,203	0,217	0,231	0,244
2,2	0,38	0,032	0,050	0,071	0,086	0,100	0,112	0,123	0,132	0,142	0,150	0,159	0,174	0,189	0,202	0,214	0,225
2,4	0,61	0,028	0,044	0,063	0,077	0,088	0,099	0,108	0,117	0,125	0,132	0,140	0,153	0,166	0,176	0,186	0,195
2,6	0,85	0,024	0,038	0,053	0,065	0,075	0,084	0,091	0,098	0,104	0,109	0,115	0,126	0,137	0,145	0,153	0,161
2,8	1,08	0,020	0,031	0,043	0,053	0,061	0,068	0,074	0,079	0,084	0,088	0,093	0,102	0,110	0,116	0,121	0,125
3,0	1,31	0,015	0,024	0,033	0,041	0,046	0,052	0,057	0,061	0,064	0,067	0,070	0,076	0,082	0,088	0,091	0,093
3,2	1,55	0,011	0,018	0,025	0,031	0,035	0,039	0,042	0,044	0,047	0,049	0,051	0,055	0,059	0,063	0,065	0,066
3,4	1,78	0,008	0,013	0,018	0,022	0,026	0,029	0,031	0,032	0,034	0,035	0,036	0,038	0,040	0,042	0,044	0,045
3,6	2,01	0,006	0,009	-0,012	0,015	0,017	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024	0,025	0,026	0,027	0,028	0,029
3,8	2,25	0,004	0,006	0,008	0,010	0,011	0,012	0,013	0,013	0,014	0,015	0,015	0,016	0,017	0,017	0,018	0,018
4,0	2,48	0,002	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,011
$a = 2,0$																	
0,0	-2,49	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	-2,27	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003

[illegible]
$$a = 2,5$$
[illegible]

$\sim$ c	c	q															
		0,98	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00
1,6	-1,17	0,018	0,028	0,039	0,048	0,056	0,061	0,066	0,070	0,074	0,077	0,082	0,089	0,094	0,099	0,104	0,108
1,8	-0,96	0,022	0,035	0,049	0,060	0,068	0,075	0,082	0,088	0,093	0,099	0,104	0,114	0,123	0,131	0,137	0,143
2,0	-0,75	0,026	0,041	0,058	0,071	0,082	0,091	0,100	0,108	0,115	0,123	0,129	0,141	0,151	0,161	0,170	0,178
2,2	-0,54	0,029	0,046	0,065	0,080	0,093	0,104	0,113	0,123	0,131	0,140	0,148	0,162	0,176	0,189	0,200	0,211
2,4	-0,33	0,031	0,049	0,071	0,088	0,102	0,115	0,127	0,138	0,147	0,155	0,163	0,180	0,194	0,209	0,223	0,235
2,6	-0,12	0,032	0,052	0,074	0,091	0,106	0,119	0,131	0,141	0,151	0,160	0,168	0,186	0,202	0,219	0,234	0,248
2,8	0,10	0,032	0,052	0,073	0,091	0,106	0,119	0,130	0,140	0,150	0,159	0,168	0,186	0,201	0,218	0,234	0,248
3,0	0,31	0,031	0,050	0,070	0,085	0,099	0,111	0,122	0,131	0,140	0,150	0,159	0,177	0,193	0,208	0,222	0,235
3,2	0,52	0,028	0,045	0,064	0,078	0,091	0,101	0,112	0,121	0,130	0,138	0,146	0,162	0,175	0,188	0,200	0,211
3,4	0,73	0,025	0,040	0,056	0,069	0,079	0,089	0,097	0,105	0,113	0,120	0,126	0,140	0,151	0,161	0,170	0,179
3,6	0,94	0,021	0,033	0,047	0,058	0,067	0,075	0,082	0,089	0,095	0,101	0,106	0,115	0,123	0,131	0,138	0,145
3,8	1,15	0,017	0,027	0,038	0,047	0,054	0,060	0,065	0,070	0,075	0,079	0,083	0,090	0,096	0,102	0,107	0,112
4,0	1,36	0,013	0,022	0,031	0,035	0,042	0,046	0,050	0,053	0,057	0,060	0,063	0,067	0,071	0,075	0,079	0,082
4,2	1,57	0,010	0,016	0,022	0,026	0,030	0,033	0,036	0,039	0,041	0,043	0,045	0,048	0,051	0,054	0,056	0,058
4,4	1,78	0,007	0,011	0,016	0,019	0,021	0,023	0,025	0,027	0,029	0,030	0,031	0,033	0,034	0,036	0,037	0,038
4,6	1,99	0,005	0,007	0,011	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024	0,025
4,8	2,20	0,003	0,005	0,006	0,008	0,009	0,010	0,010	0,011	0,011	0,012	0,012	0,013	0,014	0,014	0,015	0,015
5,0	2,42	0,002	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,007	0,007	0,008	0,008	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009

$$a = 3,0$$
[illegible]

ОБ УЧЕТЕ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫБРОСА СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В связи с практической важностью характеристик непрерывной продолжительности пребывания метеорологических элементов выше или ниже заданных уровней (выбросов метеорологических элементов) их расчету уделяется большое внимание. Существует ряд работ в области метеорологии (см., например, [1, 2, 3]), в которых эти характеристики получены с помощью методов теории случайных функций в предположении стационарности или гауссовости рассматриваемых процессов. Однако методика расчета характеристик выбросов с одновременным учетом таких особенностей метеорологических рядов, как их нестационарность и негауссовость распределения, еще нуждается в разработке.

В настоящей работе рассматривается вопрос о расчете вероятностей выбросов негауссовских последовательностей в случае сравнительно малых отклонений распределения от гауссовского.

Вероятность выброса вверх случайной последовательности $f(t)$ через уровень C (вероятность пересечения уровня снизу вверх) на промежутке времени (t_1, t_2) между соседними ее членами определяется по формуле

$$p(C) = \int_{-\infty}^C \int_C^{\infty} \varphi(u, v) du dv, \quad (1)$$

где $\varphi(u, v)$ — совместная плотность распределения $f(t_1)$ и $f(t_2)$.

Если известно, что $f(t)$ — гауссовская последовательность, то тем самым задается вид $\varphi(x, y)$, в этом случае формулу (1) удастся привести к виду, пригодному для непосредственного использования.

При вычислении на практике вероятности выброса последовательности, отличной от гауссовской, возникают трудности, связанные как с заданием φ , так и с интегрированием по формуле (1).

Будем предполагать, что в каждый момент времени распределение $f(t)$ отклоняется от гауссовского, но незначительно, так что данную плотность можно представить в виде ряда по производным от нормальной плотности, ограничиваясь учетом асимметрии и эксцесса распределения. В непрерывном случае формула для расчета среднего числа выбросов, учитывающая асимметрию распределения, выводится в [4].

Пусть $m(t)$, $\sigma^2(t)$, $A(t)$ и $E(t)$ — соответственно среднее, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса распределения $f(t)$. Представим двумерную плотность распределения $h(x, y)$ величины $(f(t) - m(t))/\sigma(t)$ в последовательные моменты времени t_1 и t_2 в виде ряда по производным от нормальной плотности (двумерный аналог ряда Грама — Шарлье [5]):

$$h(x, y) = g(x, y) + \sum_{m+l \geq 3} (-1)^{m+l} \frac{b_{ml}}{m! l!} \frac{\partial^{m+l} g(x, y)}{\partial x^m \partial y^l}, \quad (2)$$

где

$$b_{ml} = \frac{\mu_{ml} - \mu_{ml}^{(\Gamma)}}{\sigma^m(t_1) \sigma^l(t_2)},$$

$$\mu_{ml} = M(f(t_1) - m(t_1))^m (f(t_2) - m(t_2))^l;$$

$$\mu_{ml}^{(\Gamma)} = M(f_0(t_1) - m(t_1))^m (f_0(t_2) - m(t_2))^l;$$

M — символ математического ожидания; $f_0(t)$ — гауссовская последовательность, у которой моменты 1-го и 2-го порядков (среднее, дисперсия, коэффициент корреляции) совпадают с соответствующими моментами рассматриваемой последовательности $f(t)$;

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2rxy + y^2}{1-r^2}\right\}$$

— плотность нормального двумерного распределения с нулевым средним, единичной дисперсией и коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\mu_{11}}{\sigma(t_1) \sigma(t_2)}.$$

Вероятность выброса последовательности $f(t)$ с совместной плотностью распределения смежных членов $f(t_1)$ и $f(t_2)$

$$\varphi(u, v) = h\left(\frac{u - m(t_1)}{\sigma(t_1)}, \frac{v - m(t_2)}{\sigma(t_2)}\right)$$

имеет вид

$$p(C) = \int_{-\infty}^{c_1} \int_{c_2}^{\infty} g(x, y) dx dy + \sum_{m+l \geq 3} (-1)^{m+l} \frac{b_{ml}}{m! l!} \int_{-\infty}^{c_1} \int_{c_2}^{\infty} \frac{\partial^{m+l} g(x, y)}{\partial x^m \partial y^l} dx dy, \quad (3)$$

где $c_1 = (C - m(t_1))/\sigma(t_1)$; $c_2 = (C - m(t_2))/\sigma(t_2)$.

При выполнении интегрирования в (3) ограничимся учетом отклонений моментов 3-го и 4-го порядков рассматриваемого распределения от соответствующих значений гауссовского распределения. Для последовательностей со сравнительно мало изменчивыми асимметрией и эксцессом естественно предположить, что $b_{03}=b_{30}$, $b_{04}=b_{40}$ (т. е. что $A(t_1)=A(t_2)=A$, $E(t_1)=E(t_2)=E$), а также что $b_{12}=b_{21}$, $b_{13}=b_{31}$.

Тогда (3) примет вид

$$p(C) = p_{\Gamma}(C) \cdot [1 + b_{30} \psi_{30}(c_1, c_2, r) + b_{21} \psi_{21}(c_1, c_2, r) + b_{40} \psi_{40}(c_1, c_2, r) + b_{31} \psi_{31}(c_1, c_2, r) + b_{22} \psi_{22}(c_1, c_2, r)], \quad (4)$$

где

$$p_{\Gamma}(C) = \int_{-\infty}^{c_1} \int_{c_2}^{\infty} g(x, y) dx dy;$$

$$\psi_{30}(c_1, c_2, r) = \frac{1}{p_{\Gamma}(C)} \left\{ g(c_1, c_2) \frac{(r^2 + 2r)(c_1 + c_2)}{6(1+r)} - \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \left[e^{-\frac{c_1^2}{2}} (c_1^2 - 1) \left(1 - \Phi\left(\frac{c_2 - rc_1}{\sqrt{1-r^2}}\right) \right) - e^{-\frac{c_2^2}{2}} (c_2^2 - 1) \Phi\left(\frac{c_1 - rc_2}{\sqrt{1-r^2}}\right) \right] \right\}; \quad (5)$$

$$\psi_{21}(c_1, c_2, r) = - \frac{g(c_1, c_2)}{p_{\Gamma}(C)} \frac{c_1 + c_2}{2(1+r)}; \quad (6)$$

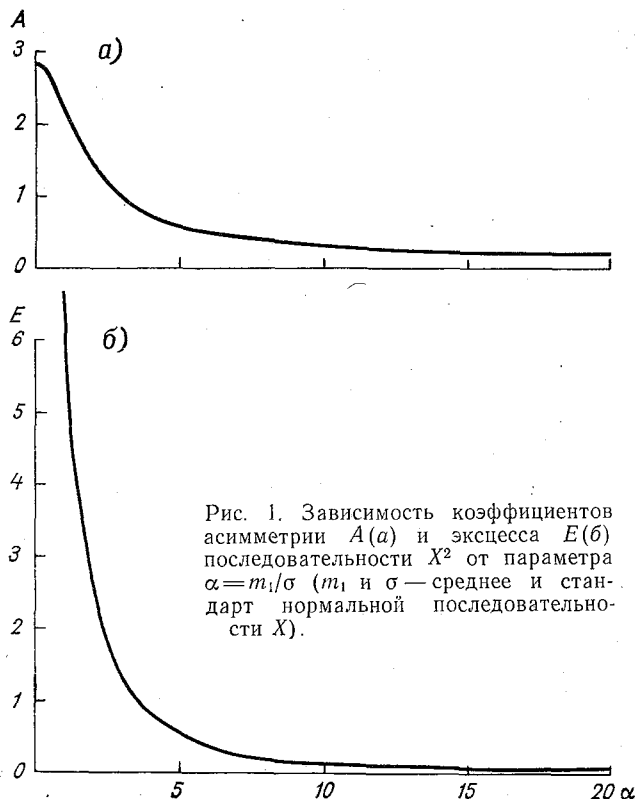
$$\psi_{40}(c_1, c_2, r) = \frac{1}{p_{\Gamma}(C)} \left\{ \frac{g(c_1, c_2)}{24(1-r^2)} \left[r^3(c_1^2 + c_2^2) \frac{1+r^2}{1-r^2} - \frac{4r^4 c_1 c_2}{1-r^2} + 4r^3 + 3r(c_1^2 + c_2^2) - 6r^2 c_1 c_2 - 6r \right] + \frac{1}{24\sqrt{2}\pi} \times \right. \\ \left. \times \left[e^{-\frac{c_1^2}{2}} (c_1^3 - 3c_1) \left(1 - \Phi\left(\frac{c_2 - rc_1}{\sqrt{1-r^2}}\right) \right) - e^{-\frac{c_2^2}{2}} (c_2^3 - 3c_2) \Phi\left(\frac{c_1 - rc_2}{\sqrt{1-r^2}}\right) \right] \right\}; \quad (7)$$

$$\psi_{31}(c_1, c_2, r) = \frac{g(c_1, c_2)}{p_{\Gamma}(C)} \frac{1}{6(1-r^2)} \left[\frac{4rc_1 c_2}{1-r^2} + 2 - (c_1^2 + c_2^2) \frac{1+r^2}{1-r^2} \right]; \quad (8)$$

$$\psi_{22}(c_1, c_2, r) = \frac{g(c_1, c_2)}{p_{\Gamma}(C)} \frac{1}{4(1-r^2)} \left[(c_1^2 + c_2^2) \frac{r}{1-r^2} - c_1 c_2 \frac{1+r^2}{1-r^2} - r \right]. \quad (9)$$

Таким образом, по формуле (4), зная коэффициенты асимметрии, эксцесса и отклонения двумерных смешанных моментов рассматриваемого распределения от гауссовского, можно найти приближенные значения вероятности выброса.

В приложении приводятся зависимости от относительного уровня c и связности ряда r величин $\psi_{ik}(c, c, r)$ ($i+k=3,4$) позволяющие судить о вкладе различных слагаемых в (4) при вычислении вероятности выброса стационарной гауссовской последовательности. При использовании этих таблиц следует иметь в виду, что $\psi_{30}(-c, -c, r) = -\psi_{30}(c, c, r)$; $\psi_{21}(-c, -c, r) = -\psi_{21}(c, c, r)$; $\psi_{40}(-c,$



$-c, r) = \psi_{40}(c, c, r)$; $\psi_{31}(-c, -c, r) = \psi_{31}(c, c, r)$; $\psi_{22}(-c, -c, r) = \psi_{22}(c, c, r)$.

Проиллюстрируем на конкретном примере, в какой мере учет отклонений моментов до 4-го порядка включительно позволяет уточнить значения вероятностей выбросов.

Пусть X — стационарная нормальная последовательность со средним значением m_1 , средним квадратическим отклонением $\sigma = m_1/\alpha$ (α — величина, обратная коэффициенту вариации) и коэффициентом корреляции ρ между соседними членами. Рассмотрим последовательность X^2 . Среднее, дисперсия, коэффициенты асим-

метрии и эксцесса этой последовательности выражаются через параметры последовательности X с помощью формул:

$$\theta(\alpha) = \sigma^2(1 + \alpha^2); \quad (10)$$

$$\sigma_2^2(\alpha) = 2\sigma^4(1 + 2\alpha^2); \quad (11)$$

$$A(\alpha) = \sqrt{8} \frac{1 + 3\alpha^2}{(1 + 2\alpha^2)^{3/2}}; \quad (12)$$

$$E(\alpha) = 12 \frac{1 + 4\alpha^2}{(1 + 2\alpha^2)^2}. \quad (13)$$

Зависимости A и E от параметра α представлены на рис. 1.

Формулы для коэффициента корреляции r и отклонений нормированных смешанных моментов двумерного распределения от гауссовских моментов имеют вид:

$$r = \frac{\rho^2 + 2\rho\alpha^2}{1 + 2\alpha^2}, \quad (14)$$

$$b_{21} = \sqrt{8} \frac{\rho^2 + 2\rho\alpha^2 + \rho^2\alpha^2}{(1 + 2\alpha^2)^{3/2}}; \quad (15)$$

$$b_{31} = 12 \frac{\rho^2 + 2\rho\alpha^2 + 2\rho^2\alpha^2}{(1 + 2\alpha^2)^2}; \quad (16)$$

$$b_{22} = 4 \frac{2\rho^2 + \rho^4 + 4\alpha^2(\rho + \rho^2 + \rho^3)}{(1 + 2\alpha^2)^2}. \quad (17)$$

При заданном α подстановка (12)–(17) в (4) дает приближенное значение вероятности выброса X^2 .

Точное значение вероятности выброса последовательности X^2 через некоторый уровень $C = c\sigma_2(\alpha) + 0(\alpha)$ можно найти по формуле

$$p_0(C) = \int_{-\infty}^{-c-\alpha} \int_{-c-\alpha}^{\infty} g(x, y) dx dy - 2 \int_{-\infty}^{-c-\alpha} \int_{c-\alpha}^{\infty} g(x, y) dx dy + \\ + \int_{-\infty}^{c-\alpha} \int_{c-\alpha}^{\infty} g(x, y) dx dy, \quad (18)$$

где $g(x, y)$ — плотность двумерного нормального распределения с коэффициентом корреляции ρ .

На рис. 2 a в качестве примера для $\alpha=5$ ($A=0,59$, $E=0,47$) и $r=0,7$ представлена зависимость от относительного уровня $c = (C - 0(\alpha))/\sigma_2(\alpha)$ значений вероятности выброса последовательности X^2 , полученных по точной формуле, по формуле для гауссовских последовательностей, а также по формуле (4) с учетом асимметричности распределения (отклонения μ_{40} , μ_{31} и μ_{22} от гауссовских моментов полагались равными нулю) и с учетом отклонений от гауссовских значений всех моментов до 4-го порядка включительно.

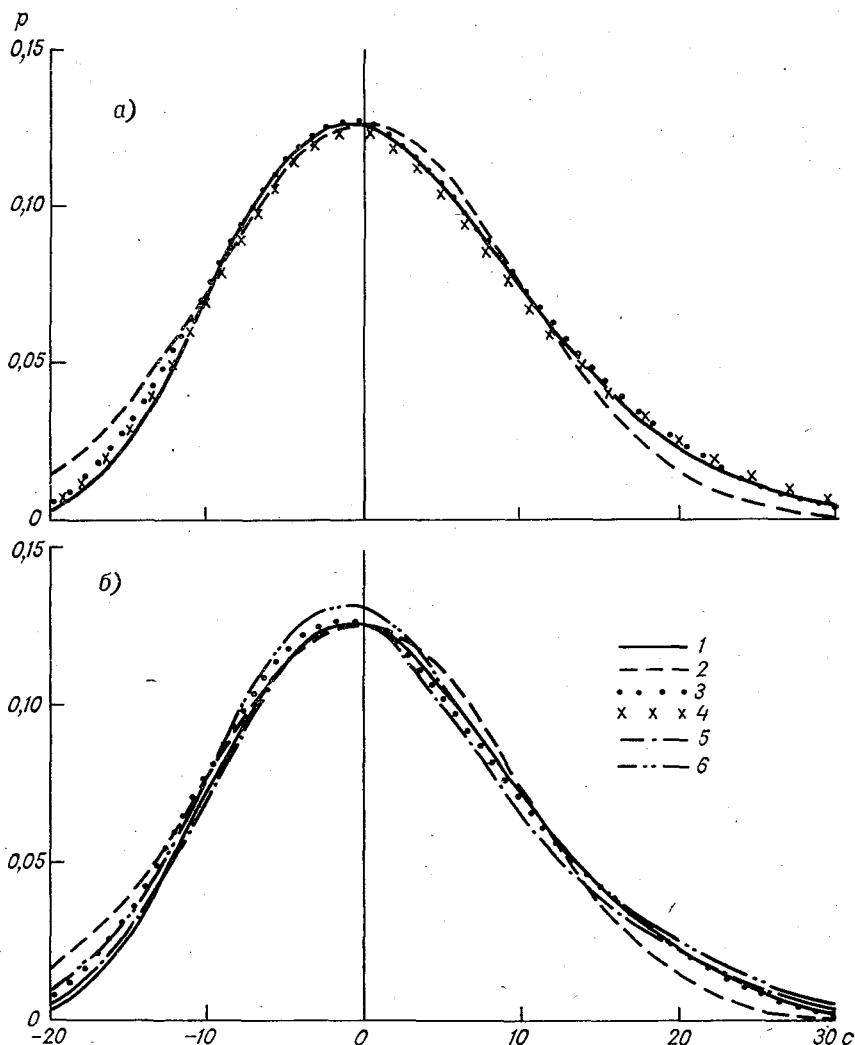


Рис. 2. Зависимость вероятности p выброса последовательности X^2 от уровня s при $\alpha = m_1/\sigma = 5$ (коэффициент корреляции $r = 0,7$).

а) расчет с учетом точных значений моментов, б) расчет с применением гипотез о моментах; 1) истинные значения вероятности выброса, 2) расчетные в предположении гауссовости, 3) расчетные с учетом асимметрии, 4) расчетные с учетом асимметрии и эксцесса, 5) расчетные с учетом асимметрии и эксцесса с использованием (22б), 6) расчетные с учетом асимметрии и эксцесса с использованием (22а).

Из этого рисунка видно, что учет асимметричности распределения в значительной мере приближает значения вероятностей выброса к истинным. В целом при данном α кривая, полученная в результате расчетов по формуле (4), вполне удовлетворительно описывает теоретическую зависимость вероятности выброса от уровня.

О том, какова степень приближения при других значениях α можно судить по рис. 3 а, на котором представлена зависимости от параметра α вероятности выброса последовательности X с коэффициентом корреляции 0,7 между смежными членами для уровней $c = \pm 1,5$. Как видно из этого рисунка, для рассмотренного примера значения вероятностей выброса, полученные по формуле (4), оказываются существенно ближе к истинным, чем гауссовские

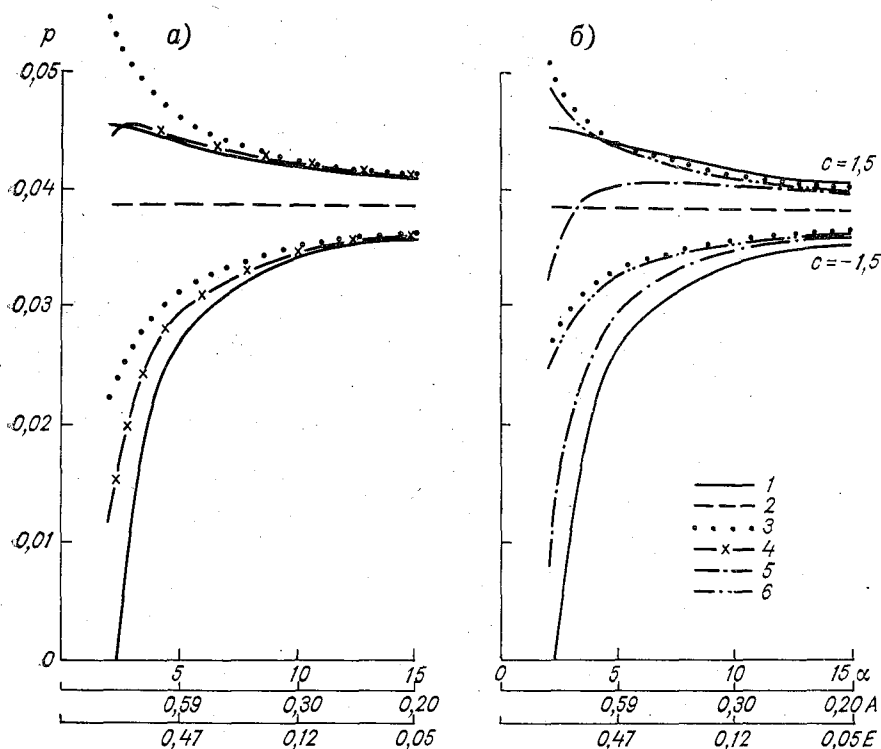


Рис. 3. Зависимость вероятности p выброса через уровни $c = 1,5$ и $c = -1,5$ последовательности X^2 от параметра $\alpha = m_1/\sigma (r = 0,7)$.

Усл. обозначения см. на рис. 2.

и при достаточно больших значениях A и E , хотя с увеличением этих параметров (т. е. с уменьшением α) точность расчета вероятности выброса по формуле (4), естественно, уменьшается.

Значения вероятностей выбросов X^2 оказалось возможным вычислить по формуле (4), так как для этой последовательности легко находятся двумерные смешанные моменты. Что касается реальных метеорологических рядов, то, насколько нам известно, к настоящему времени информация о смешанных моментах метеорологических элементов в последовательные моменты времени практически отсутствует. Поэтому представляет интерес попытаться

ся при расчете вероятности выброса задать какие-либо гипотезы о поведении смешанных моментов. Ясно, что при коэффициенте корреляции r , равном единице, величины b_{31} и b_{22} должны быть равны E , а b_{21} должно быть равно A . Будем полагать также, что при $r=0$ величины b_{21} , b_{31} , и b_{22} обращаются в нуль. Относительно моментов μ_{21} и μ_{31} довольно естественно предположить, что они связаны с моментами μ_{30} и μ_{40} соотношениями

$$\begin{aligned}\mu_{21} &= \mu_{30} r, \\ \mu_{31} &= \mu_{40} r,\end{aligned}\tag{19}$$

справедливыми в гауссовском случае, т. е. что

$$b_{21} = Ar,\tag{20}$$

$$b_{31} = Er.\tag{21}$$

Для величины b_{22} априорный выбор аналогичной зависимости представляется затруднительным. Это обстоятельство является тем более существенным, что от вида этой зависимости заметно меняется результат расчета. Нами, в частности, при расчетах использовалось два варианта аппроксимации величины b_{22} :

$$b_{22} = Er^2,\tag{22a}$$

$$b_{22} = Er.\tag{22б}$$

Вопрос о целесообразности применения гипотез при расчете вероятностей выброса может быть проиллюстрирован рис. 2 б и 3 б, на которых представлены значения вероятностей выброса, полученные по формуле (4) с подстановкой в нее соотношений (20) — (22), как без учета эксцесса, так и с учетом. При этом для задания величины b_{22} использовалось два приведенных варианта аппроксимации. Из этих рисунков видно, что учет асимметрии оказывается полезным даже при использовании соотношения (20). Что касается учета эксцесса, то следует иметь в виду, что поправка на эксцесс существенно зависит от поведения b_{22} , в особенности при уровнях, близких к норме. Поэтому в случаях, когда нет оснований выбрать ту или иную гипотезу относительно величины b_{22} , может оказаться целесообразным при расчете вероятности выброса последовательности совсем не учитывать влияние эксцесса.

Заметим, что в случае принятия гипотезы (20) о поведении b_{21} выражение для вероятности выброса $p(C)$ с учетом асимметричности распределения имеет вид

$$p(C) = p_r(C) \cdot (1 + A \psi_A(c_1, c_2, r)),\tag{23}$$

где

$$\psi_A(c_1, c_2, r) = \psi_{30}(c_1, c_2, r) + r \psi_{21}(c_1, c_2, r).$$

Для удобства практического использования (23) при расчетах в приложении для некоторых коэффициентов корреляции r и относительных уровней c представлены также значения ψ_A . Для функ-

Таблица 1

Моменты двумерного распределения средней суточной температуры воздуха за смежные сутки по месяцам.
ГМС Москва, Сельскохозяйственная академия, 1879—1972 гг.

Характеристика	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
A	-0,51	-0,25	-0,52	-0,02	-0,08	—	0,12	0,28	0,11	-0,18	-0,64	-0,74
E	-0,31	-0,35	-0,19	-0,18	-0,62	—	-0,31	-0,22	-0,27	-0,21	0,36	0,19
r	0,80	0,77	0,79	0,80	0,81	—	0,77	0,80	0,76	0,77	0,80	0,79
$\mu_{21}^* = b_{21}$	-0,38	-0,25	-0,43	-0,03	-0,08	—	0,10	0,23	0,05	-0,19	-0,49	-0,58
Ar	-0,41	-0,19	-0,41	-0,02	-0,06	—	0,09	0,22	0,08	-0,13	-0,51	-0,59
μ_{31}^*	2,12	1,89	2,19	2,15	1,93	—	2,07	2,23	2,01	2,15	2,64	2,41
b_{21}	-0,28	-0,42	-0,18	-0,15	-0,50	—	-0,24	-0,17	-0,27	-0,16	0,24	0,04
Er	-0,25	-0,25	-0,19	-0,14	-0,50	—	-0,24	-0,18	-0,21	-0,16	0,29	0,15
μ_{22}^*	2,05	1,86	2,14	2,09	1,88	—	2,02	2,16	1,95	2,10	2,55	2,36
b_{22}	-0,23	-0,32	-0,10	-0,19	-0,44	—	-0,16	-0,12	-0,21	-0,08	0,27	0,12
Er^2	-0,20	-0,21	-0,12	-0,12	-0,41	—	-0,18	-0,14	-0,16	-0,12	0,23	0,12

ции ψ_A так же, как для ψ_{30} и ψ_{21} , справедливо соотношение $\psi_A(-c, -c, r) = -\psi_A(c, c, r)$.

Рассмотрим возможность применения описанной методики к рядам средней суточной температуры воздуха. Поскольку непосредственных данных о моментах двумерного распределения 3-го и 4-го порядков, необходимых при реализации методики, для температурных рядов нет, была предпринята попытка задания этих моментов с помощью гипотез (20) — (22а).

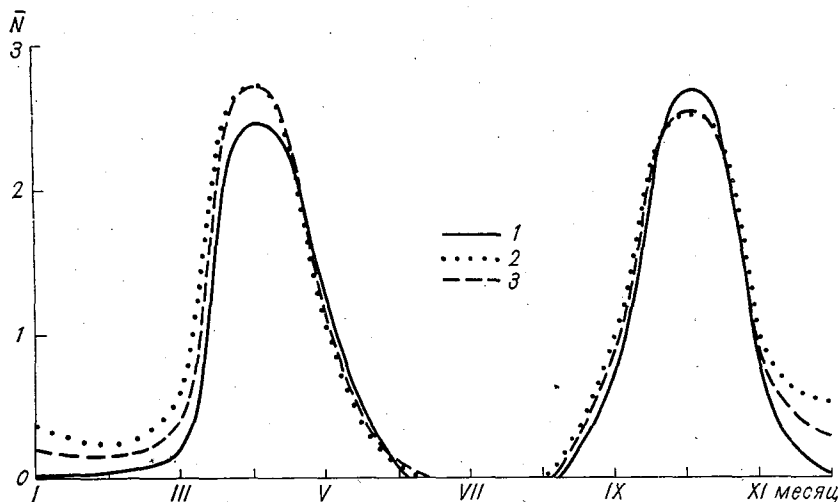


Рис. 4. Среднее число выбросов средней суточной температуры воздуха вверх через $+5^{\circ}\text{C}$. (Москва, СХА).

1 — фактическое, 2 — рассчитанное в предположении гауссовости, 3 — рассчитанное с учетом асимметрии.

С целью выяснения справедливости этих гипотез были выполнены оценки моментов двумерного распределения 3-го и 4-го порядков на материале наблюдений за средней суточной температурой воздуха на ГМС Москва, Сельскохозяйственная академия. Некоторые результаты расчетов представлены в табл. 1. В ней A , E , r — средние за месяц значения соответственно коэффициентов асимметрии, эксцесса и корреляции средней суточной температуры за смежные сутки, μ_{ik}^* — средние за месяц значения нормированных моментов двумерного распределения за смежные сутки. Представленные в табл. 1 значения Ar , Er и Er^2 позволяют судить о справедливости гипотез (20) — (22а). Из данных таблицы видно, что соотношения (20) — (22а) действительно хорошо описывают поведение величин b_{21} , b_{31} и b_{22} .

Формулы (20) — (22а) использовались при экспериментальных расчетах с целью выяснения возможности их применения для уточнения характеристик выбросов. Выяснилось, что учет асимметричности распределения при использовании гипотезы (20) целесообразен.

В качестве примера на рис. 4 приведен график годового хода среднего числа выбросов средней суточной температуры через уровень 5°C для ГМС Москва, Сельскохозяйственная академия, построенный по фактическим данным и по данным вычислений в предположении гауссовости распределения и с учетом асимметрии его. Из рисунка видно, что учет асимметрии заметно сближает фактические и расчетные данные.

К сожалению, учет отклонений моментов 4-го порядка от соответствующих моментов гауссовского распределения не привел к уточнению среднего числа выбросов. По-видимому, это связано с тем, что коэффициенты при величинах $b_{ih} (i+k=4)$, входящие в формулу для определения вероятности выброса в области значений коэффициентов корреляции r , характерных для средней суточной температуры, сравнительно велики, имеют разные знаки и быстро меняются с изменением r , вследствие чего погрешности в задании E , r , а также в задании зависимостей b_{31} и b_{22} от r приводят к большой изменчивости величины поправки на эксцесс и даже к изменению ее знака. Поэтому на данном этапе учет эксцесса распределения средней суточной температуры при массовых расчетах среднего числа выбросов представляется нецелесообразным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзен А. М., Ципенюк А. Л. Анализ изменчивости солнечной радиации с помощью статистической теории выбросов.— «Тр. ГГО», 1969, вып. 250, с. 139—147.
2. Бурман Э. А., Емшанова Н. В. Косвенная оценка статистических характеристик ветра на станциях с кататическим стоком.— «Тр. НИИАК», 1973, вып. 83, с. 115—126.
3. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. О расчете статистических характеристик выбросов случайной функции.— «Тр. ГГО», 1970, вып. 268, с. 146—172.
4. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970. 392 с.
5. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределения. М., «Наука», 1966. 587 с.

Зависимость $\psi_{ij}(c, c, r)$ ($i+j=3, 4, j=0, 1, 2$) и $\psi_A(c, c, r)$
от относительного уровня c и связности ряда

c	r						
	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9

$\psi_{30}(c, c, r)$							
0,0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	-0,04	-0,02	0,01	0,05	0,10	0,18	0,43
0,4	-0,07	-0,03	0,02	0,11	0,20	0,37	0,87
0,6	-0,08	-0,03	0,05	0,19	0,32	0,57	1,32
0,8	-0,06	0,01	0,10	0,28	0,45	0,79	1,79
1,0	0	0,07	0,18	0,40	0,61	1,03	2,29
1,2	0,11	0,18	0,31	0,56	0,81	1,31	2,81
1,4	0,27	0,34	0,47	0,76	1,05	1,63	3,38
1,6	0,50	0,56	0,69	1,01	1,33	1,99	3,98
1,8	0,79	0,84	0,98	1,31	1,67	2,40	4,64
2,0	1,16	1,20	1,33	1,68	2,07	2,88	5,36
2,2	1,61	1,64	1,77	2,13	2,54	3,42	6,13
2,4	2,15	2,17	2,29	2,65	3,09	4,03	6,98
2,6	2,78	2,80	2,90	3,27	3,73	4,73	7,90
2,8	3,52	3,53	3,62	3,99	4,46	5,52	8,91
3,0	4,37	4,38	4,45	4,81	5,29	6,40	10,01

$\psi_{21}(c, c, r)$							
0,0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	-0,13	-0,12	-0,13	-0,17	-0,21	-0,29	-0,54
0,4	-0,24	-0,24	-0,26	-0,33	-0,41	-0,57	-1,07
0,6	-0,33	-0,34	-0,38	-0,49	-0,61	-0,85	-1,60
0,8	-0,40	-0,43	-0,49	-0,64	-0,80	-1,12	-2,12
1,0	-0,44	-0,49	-0,58	-0,77	-0,97	-1,39	-2,63
1,2	-0,44	-0,53	-0,65	-0,89	-1,14	-1,64	-3,13
1,4	-0,42	-0,54	-0,70	-0,99	-1,29	-1,87	-3,62
1,6	-0,38	-0,53	-0,72	-1,08	-1,42	-2,09	-4,09
1,8	-0,32	-0,50	-0,73	-1,14	-1,53	-2,29	-4,55
2,0	-0,26	-0,45	-0,72	-1,18	-1,62	-2,47	-4,99
2,2	-0,20	-0,40	-0,69	-1,21	-1,69	-2,63	-5,40
2,4	-0,15	-0,34	-0,64	-1,21	-1,74	-2,77	-5,80
2,6	-0,10	-0,28	-0,59	-1,19	-1,77	-2,88	-6,17
2,8	-0,07	-0,22	-0,53	-1,16	-1,78	-2,98	-6,51
3,0	-0,04	-0,17	-0,46	-1,11	-1,76	-3,05	-6,83

c	r						
	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9

$\psi_{40}(c, c, r)$							
0,0	0	-0,04	-0,10	-0,24	-0,41	-0,82	-2,77
0,2	0,01	-0,03	-0,09	-0,23	-0,39	-0,81	-2,74
0,4	0,02	-0,01	-0,07	-0,19	-0,35	-0,75	-2,63
0,6	0,05	0,02	-0,03	-0,14	-0,29	-0,66	-2,47
0,8	0,08	0,06	0,02	-0,08	-0,20	-0,54	-2,24
1,0	0,10	0,09	0,07	-0,01	-0,11	-0,40	-1,96
1,2	0,11	0,11	0,11	0,06	-0,01	-0,25	-1,64
1,4	0,10	0,11	0,12	0,11	0,07	-0,09	-1,29
1,6	0,06	0,08	0,11	0,14	0,14	0,05	-0,91
1,8	-0,04	-0,01	0,04	0,12	0,16	0,16	-0,54
2,0	-0,19	-0,16	-0,09	0,03	0,13	0,22	-0,19
2,2	-0,42	-0,38	-0,30	-0,12	0,02	0,23	0,14
2,4	-0,75	-0,71	-0,60	-0,38	-0,18	0,14	0,40
2,6	-1,18	-1,14	-1,03	-0,76	-0,50	-0,05	0,59
2,8	-1,74	-1,71	-1,59	-1,27	-0,95	-0,38	0,67
3,0	-2,46	-2,42	-2,30	-1,95	-1,57	-0,86	0,62

$\psi_{31}(c, c, r)$							
0,0	0,21	0,26	0,37	0,70	1,15	2,40	8,92
0,2	0,20	0,25	0,36	0,69	1,14	2,38	8,90
0,4	0,17	0,22	0,34	0,66	1,11	2,34	8,82
0,6	0,12	0,18	0,30	0,62	1,05	2,27	8,70
0,8	0,06	0,13	0,25	0,56	0,98	2,17	8,53
1,0	0	0,07	0,18	0,48	0,89	2,05	8,31
1,2	-0,05	0,01	0,11	0,40	0,79	1,91	8,04
1,4	-0,10	-0,05	0,04	0,30	0,67	1,74	7,73
1,6	-0,12	-0,10	-0,02	0,20	0,54	1,56	7,38
1,8	-0,13	-0,13	-0,09	0,10	0,40	1,36	7,00
2,0	-0,13	-0,16	-0,14	-0,00	0,26	1,14	6,56
2,2	-0,12	-0,17	-0,19	-0,10	0,12	0,92	6,10
2,4	-0,10	-0,17	-0,22	-0,18	-0,01	0,69	5,61
2,6	-0,08	-0,15	-0,24	-0,26	-0,15	0,46	5,09
2,8	-0,06	-0,14	-0,25	-0,33	-0,27	0,23	4,55
3,0	-0,04	-0,12	-0,24	-0,39	-0,38	-0,00	4,00

$\psi_{22}(c, c, r)$							
0,0	0	-0,04	-0,11	-0,32	-0,60	-1,44	-6,02
0,2	-0,01	-0,04	-0,12	-0,32	-0,61	-1,44	-6,03
0,4	-0,02	-0,06	-0,13	-0,33	-0,62	-1,46	-6,06

c	r						
	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9

0,6	-0,05	-0,08	-0,15	-0,35	-0,64	-1,49	-6,11
0,8	-0,08	-0,10	-0,17	-0,38	-0,67	-1,53	-6,18
1,0	-0,11	-0,13	-0,20	-0,41	-0,71	-1,58	-6,26
1,2	-0,13	-0,16	-0,23	-0,45	-0,75	-1,64	-6,37
1,4	-0,15	-0,18	-0,26	-0,48	-0,80	-1,70	-6,48
1,6	-0,15	-0,20	-0,28	-0,52	-0,85	-1,77	-6,62
1,8	-0,15	-0,20	-0,30	-0,56	-0,90	-1,84	-6,76
2,0	-0,13	-0,20	-0,32	-0,59	-0,95	-1,92	-6,92
2,2	-0,11	-0,19	-0,32	-0,62	-1,00	-2,00	-7,09
2,4	-0,09	-0,18	-0,32	-0,64	-1,04	-2,08	-7,27
2,6	-0,07	-0,16	-0,31	-0,66	-1,07	-2,15	-7,45
2,8	-0,05	-0,13	-0,29	-0,66	-1,10	-2,22	-7,63
3,0	-0,03	-0,11	-0,27	-0,66	-1,12	-2,28	-7,82

$\psi_A(c, c, r)$

0,0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	-0,04	-0,04	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05
0,4	-0,07	-0,08	-0,08	-0,09	-0,09	-0,09	-0,09
0,6	-0,08	-0,09	-0,10	-0,11	-0,11	-0,11	-0,11
0,8	-0,06	-0,08	-0,09	-0,10	-0,11	-0,11	-0,11
1,0	0	-0,03	-0,05	-0,06	-0,07	-0,07	-0,08
1,2	0,11	0,07	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00
1,4	0,27	0,23	0,19	0,16	0,15	0,13	0,12
1,6	0,50	0,45	0,40	0,36	0,34	0,32	0,30
1,8	0,79	0,74	0,69	0,63	0,60	0,57	0,55
2,0	1,16	1,11	1,04	0,97	0,94	0,90	0,87
2,2	1,61	1,56	1,49	1,41	1,36	1,31	1,27
2,4	2,15	2,10	2,03	1,93	1,88	1,82	1,76
2,6	2,78	2,74	2,67	2,56	2,49	2,42	2,35
2,8	3,52	3,49	3,41	3,29	3,22	3,14	3,05
3,0	4,37	4,34	4,27	4,14	4,06	3,96	3,86

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ РЯДОВ СРЕДНЕЙ СУТОЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА НА ТЕРРИТОРИИ СССР

При исследовании структуры метеорологических рядов, в частности рядов средней суточной температуры воздуха, важное значение имеет оценка как моментов их одномерных распределений (среднего, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса), так и характеристик временной корреляции рядов. Для территории СССР моменты одномерного распределения средней суточной температуры наиболее полно исследовались в работах Л. В. Тихомировой [1, 2]. При этом моменты вычислялись по месячным совокупностям в целом, без исключения годового хода. В дальнейшем моменты, полученные таким образом, будем условно называть глобальными и обозначать индексом g . Поскольку ряды средней суточной температуры нестационарны за счет годового хода, наряду с глобальными моментами интерес представляют средние за месяц значения моментов, а также ход моментов внутри месяца.

В [3] по распределениям средней суточной температуры, приведенным в Справочнике по климату СССР [4], были получены оценки дисперсии средней суточной температуры на ЕТС с учетом внутримесячного хода норм. При этом использовалась параболическая интерполяция хода норм по данным исследуемого, предыдущего и последующего месяцев.

В данной работе расчет моментов средней суточной температуры воздуха до 4-го порядка включительно с учетом внутримесячного хода моментов выполнен для 269 станций, расположенных на всей территории СССР. При этом для описания внутримесячного хода моментов использовался более совершенный способ интерполяции с помощью сплайнов, применение которого к задаче восстановления годового хода моментов рассматривалось в [5].

Расчет моментов производился на материале тех станций, для которых в Справочнике по климату СССР приводятся данные о числе дней со средней суточной температурой в определенных пределах (ч. II, табл. 6) и данные о повторяемости междусуточной

изменчивости средней суточной температуры (ч. II, табл. 4а). Последние привлекались для расчета междусуточной корреляции r средней суточной температуры с помощью соотношения между структурной и нормированной корреляционной функциями. При нормировании структурной функции использовались средние за месяц значения дисперсии, полученные с исключением влияния годового хода норм. Этот способ вычисления междусуточной корреляции был опробован [6] и некоторые результаты расчета r для ЕТС приведены в [3].

В настоящей работе по всем выбранным на территории СССР станциям были вычислены средние, дисперсии σ^2 , коэффициенты асимметрии A и эксцесса E на каждый день месяца, средние за месяц значения этих моментов, а также значения междусуточной корреляции r для каждого месяца года. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов.

На рис. 1—3 представлены карты-схемы, характеризующие распределение моментов на территории СССР в центральные месяцы сезонов. Существенно отметить, что для экстремальных сезонов (для января и июля), когда ряды средней суточной температуры можно практически считать стационарными, средние значения моментов мало отличаются от глобальных моментов и распределение их хорошо согласуется с закономерностями, описанными в работах Л. В. Тихомировой. Поэтому для этих месяцев приведены только карты средних значений моментов. При картировании мы, так же как и Л. В. Тихомирова, отказались от детального описания полей коэффициентов асимметрии и эксцесса как характеристик, определяемых со сравнительно малой точностью (см. [7]), и ограничились выделением областей $|A| < 0,4$, $-0,8 < A < -0,4$, $|E| < 0,6$.

Для переходных сезонов различия между средними значениями моментов и обычно вычисляемыми глобальными моментами оказываются большими. Наиболее отчетливо эти различия прослеживаются на картах-схемах среднего квадратического отклонения для апреля (см. рис. 1 б, 2 а) и октября (см. рис. 1 г и 2 б). Для этих месяцев значительная часть полной дисперсии σ_g^2 определяется годовым ходом нормы температуры внутри месяца; поэтому значения $\sqrt{\sigma^2}$ существенно меньше значений σ_g , но поля $\sqrt{\sigma^2}$ и σ_g сохраняют заметное подобие. Заметные различия имеются в переходные сезоны и между полями A_g и $\bar{A}$, а также E_g и $\bar{E}$. Последние, как правило, более мелкомасштабны.

Довольно сложным оказывается и годовой ход моментов. Годовой ход дисперсии характеризуется высокими значениями в холодный и низкими значениями в теплый период года. Амплитуда годового хода возрастает по мере увеличения степени континентальности климата. В холодный период года на всех станциях отмечается по одному максимуму, который приходится на разные месяцы в зависимости от местных условий. В течение теплого периода года, как правило, отмечается два минимума в ходе

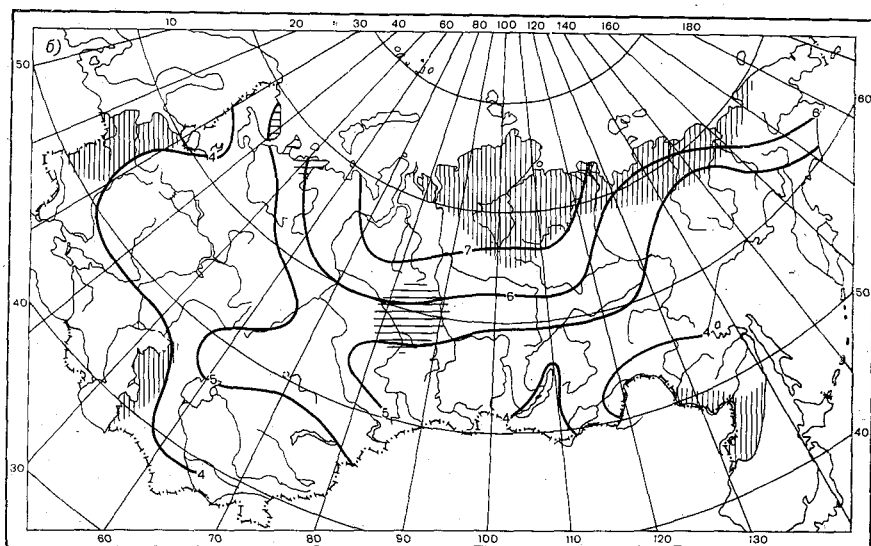
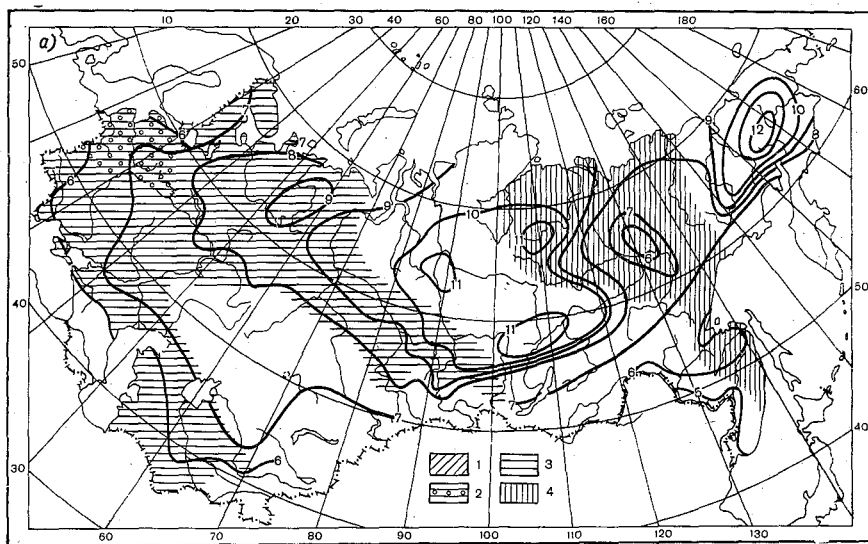
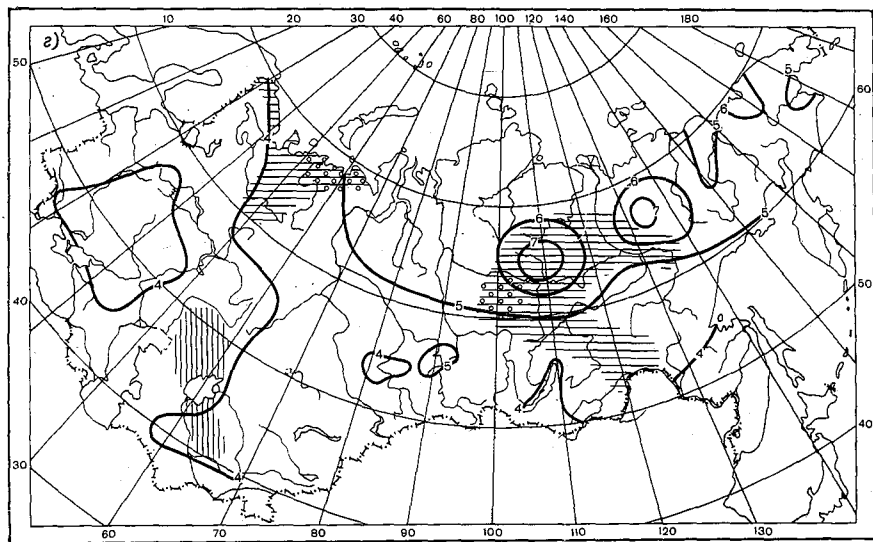
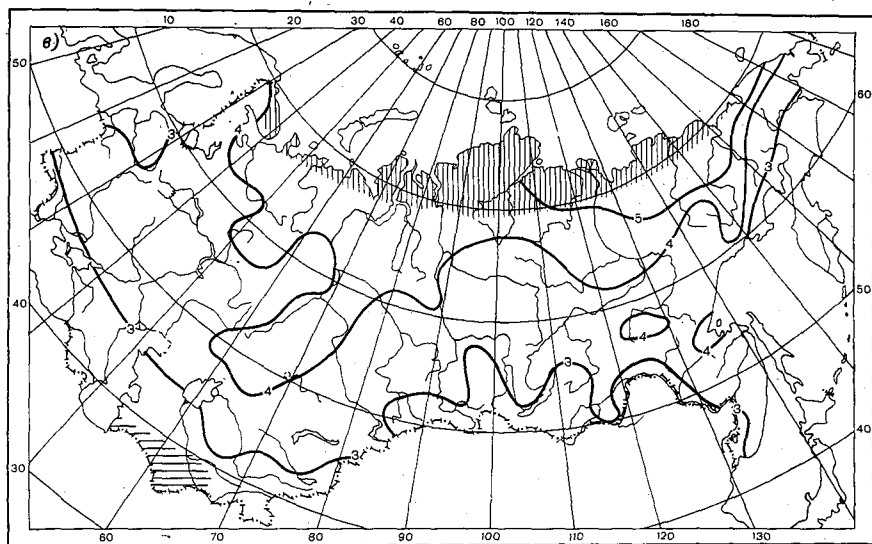


Рис. 1. Среднее квадратическое отклонение $\sqrt{\sigma^2}$
а) январь, б) апрель, в) июль, г) октябрь; 1) районы с высотой 700 м



изолинии) и коэффициент асимметрии $\bar{A}$ (2—4).
 более (см. рис. 3 а), 2) $\bar{A} < 0,8$, 3) $-0,8 < \bar{A} < -0,4$, 4) $\bar{A} > 0,4$.

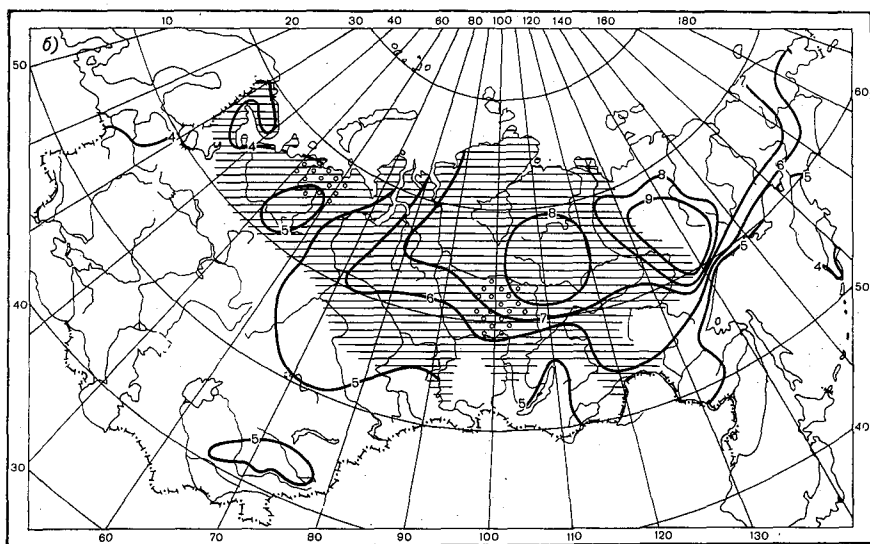
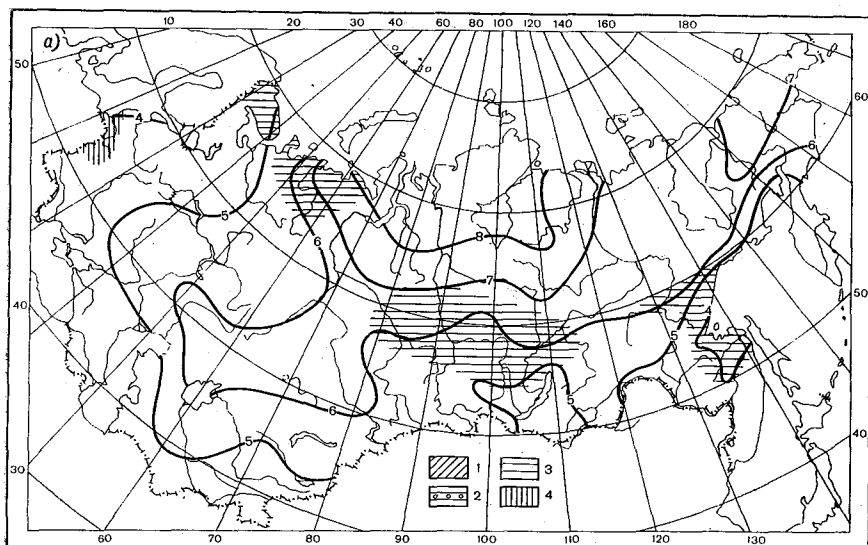


Рис. 2. Среднее квадратическое отклонение σ_g (изолинии) и коэффициент асимметрии $A_g(2-4)$.

а) апрель, б) октябрь; 1) районы с высотой 700 м и более (см. рис. 3 а), 2) $A_g < -0,8$, 3) $-0,8 < A_g < -0,4$, 4) $A_g > 0,4$.

дисперсии: первый приходится на март—май, а второй, являющийся в большинстве районов более глубоким, — на август—октябрь. На рис. 4 приводится годовой ход среднего квадратического отклонения средней суточной температуры для некоторых станций СССР. Из рисунка видно, что на территории СССР возможно выделение зон с характерными типами годового хода рассматриваемого момента.

Таблица 1

Годовой ход среднего коэффициента эксцесса средней суточной температуры воздуха

Станция	I	II	III	IV	V	VI
Саскылах	−0,6	−0,5	−0,7	−0,3	−0,5	−0,3
Ашхабад	0,3	−0,2	0,1	0,1	0,1	0,6
Пермь	0,0	−0,4	−0,1	−0,6	−0,6	−0,5
Братск	−0,6	−0,6	0,0	−0,4	−0,4	0,0
Анадырь	−0,6	−0,6	−0,4	−0,4	−0,4	−1,1
Владивосток	−0,3	−0,2	−0,5	0,1	0,1	0,3
Станция	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Саскылах	−0,1	−0,3	−2,1	0,7	−0,7	−0,7
Ашхабад	−0,3	−0,8	0,3	−0,6	−0,2	0,9
Пермь	−0,3	−0,5	0,0	−0,4	0,4	0,1
Братск	−0,5	−0,3	−0,9	1,5	−0,2	−0,7
Анадырь	−0,4	−0,3	−0,6	−0,5	−0,2	0,1
Владивосток	0,3	−0,9	0,7	0,0	−0,6	−0,3

Ход коэффициента асимметрии здесь в течение зимнего периода является сравнительно простым и легко выделяются зоны (см. рис. 1 а), в которых коэффициент асимметрии в зависимости от циркуляционных, радиационных факторов и условий залегания снежного покрова устойчиво сохраняет положительные и отрицательные значения. В летний период его изменение во времени, как и по территории, является довольно сложным. Это хорошо видно из рис. 5, на котором представлен годовой ход коэффициента асимметрии для некоторых станций.

Как указывалось в [5], детально восстанавливать ход коэффициента эксцесса для каждого дня года нецелесообразно, но средние за месяц значения можно восстановить с достаточной точностью.

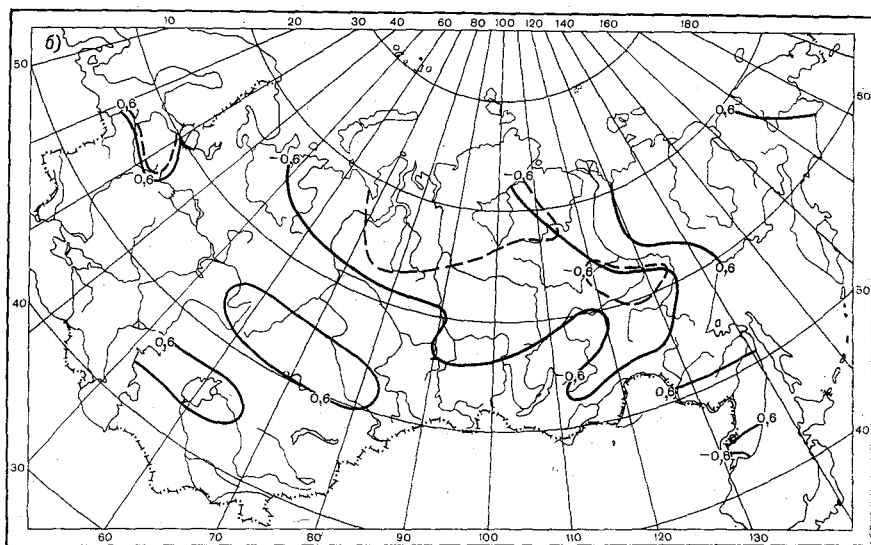
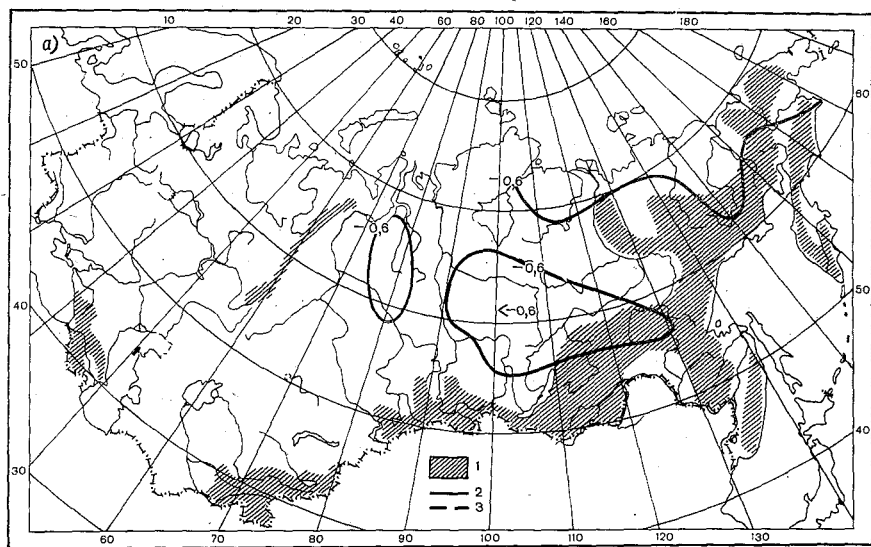
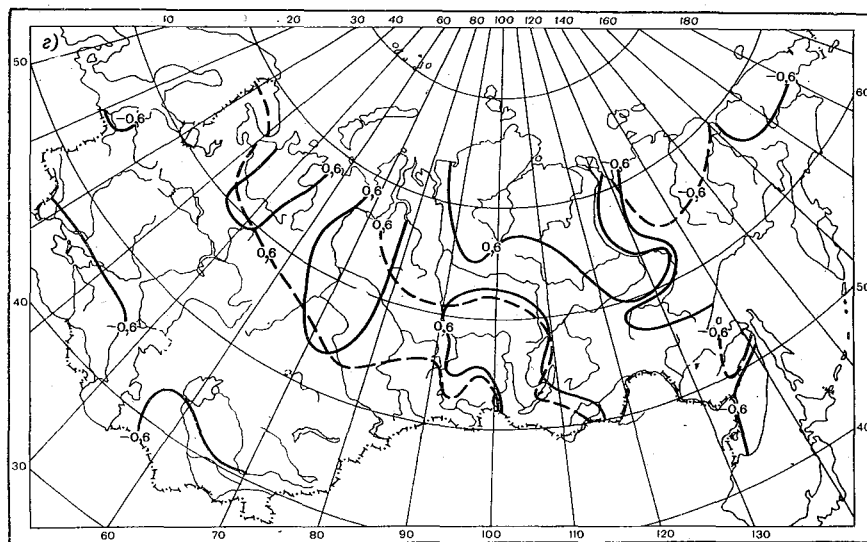
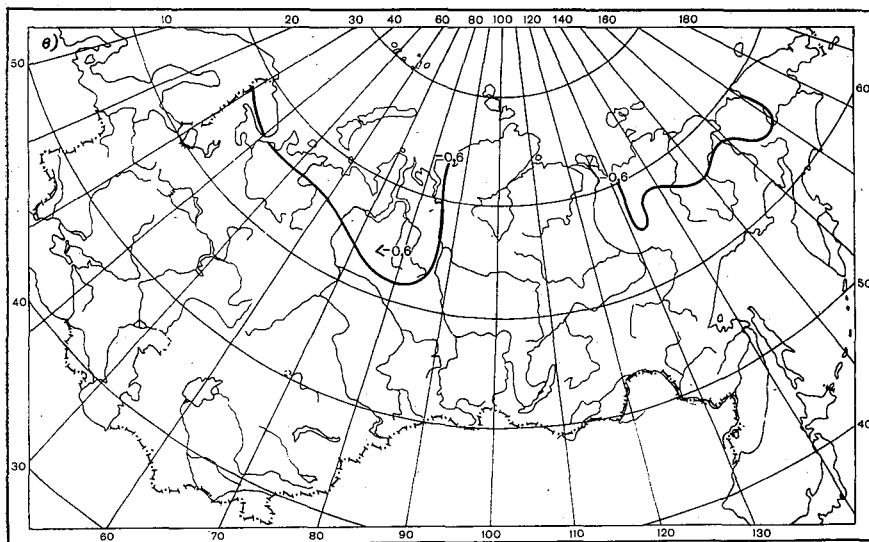
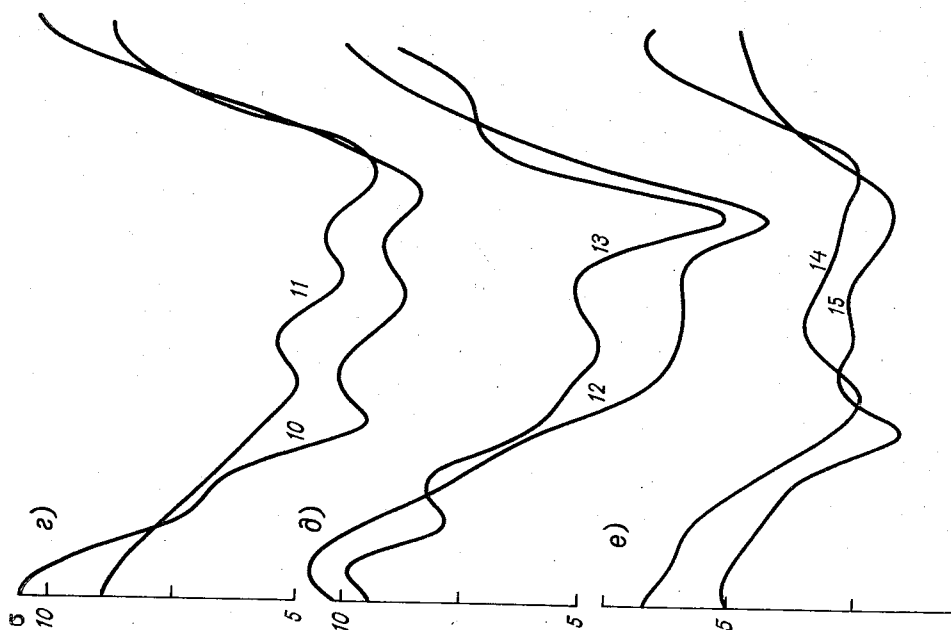
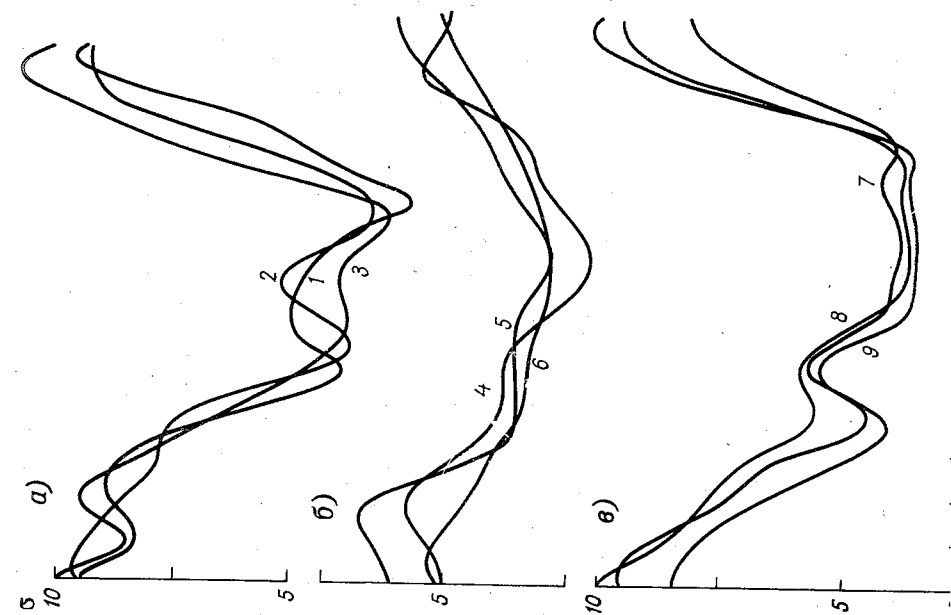


Рис. 3. Коэффициенты
а) январь, б) апрель, в) июль, г) октябрь;



экспесса E и $\bar{E}_g$.

1) районы с высотой 700 м и более, 2) $\bar{E}$, 3) E_g .



← Рис. 4. Годовой ход среднего квадратического отклонения средней суточной температуры воздуха.

а) 1 — Нарьян-Мар, 2 — Саскылах, 3 — Верхоянск; б) 4 — Ужгород, 5 — Ростов-на-Дону, 6 — Ашхабад; в) 7 — Пермь, 8 — Васюганское, 9 — Томск; г) 10 — Ухта, 11 — Братск, д) 12 — Красноармейский Прииск; 13 — Анадырь, е) 14 — Владивосток, 15 — Николаевск-на-Амуре.

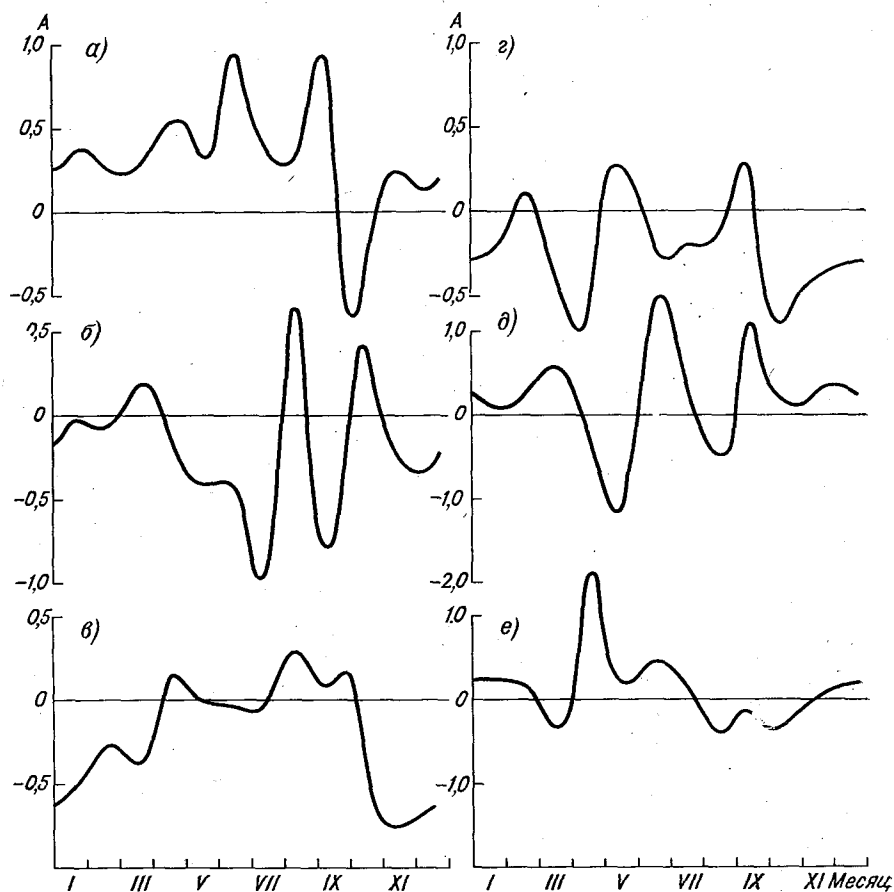


Рис. 5. Годовой ход коэффициента асимметрии A средней суточной температуры воздуха.

а — Саскылах, б — Ашхабад, в — Пермь, г — Братск, д — Анадырь, е — Владивосток.

Поэтому приведем табл. 1, в которой для тех же станций, для которых на рис. 5 изображен годовой ход коэффициента асимметрии, даны средние за месяц значения коэффициента эксцесса.

Уже предварительный анализ показывает, что для разных районов в различные периоды года распределение средней суточной температуры отличается от нормального. Существенно, однако, иметь

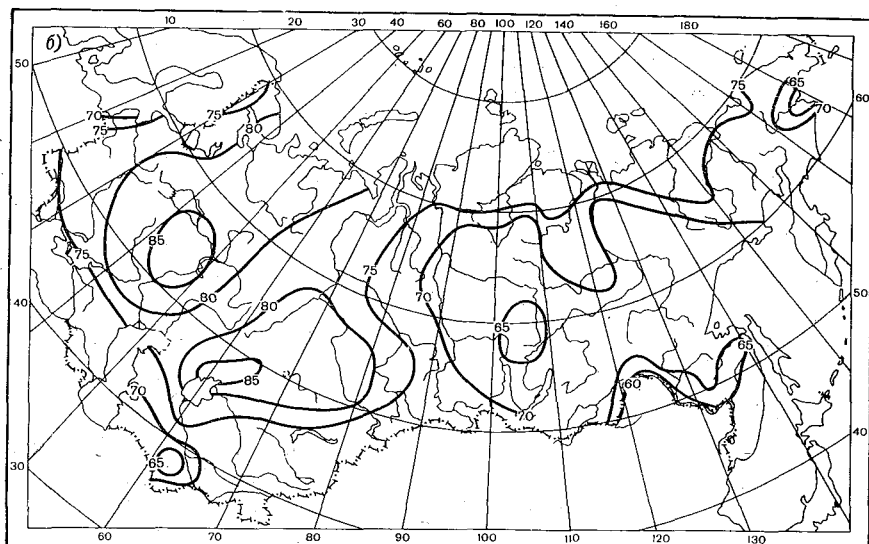
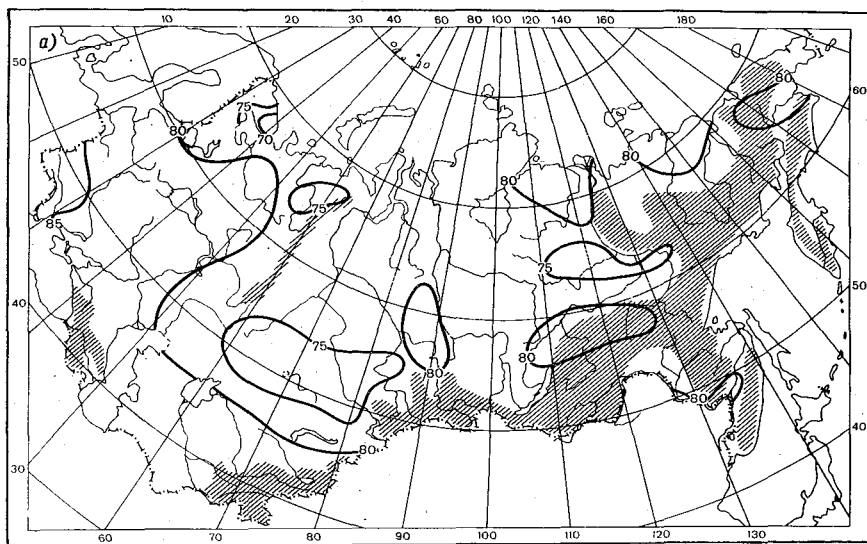
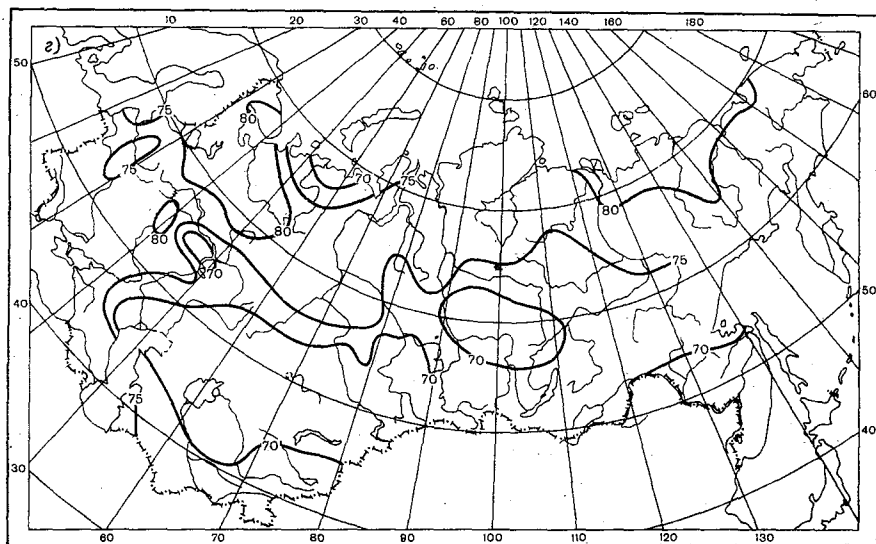
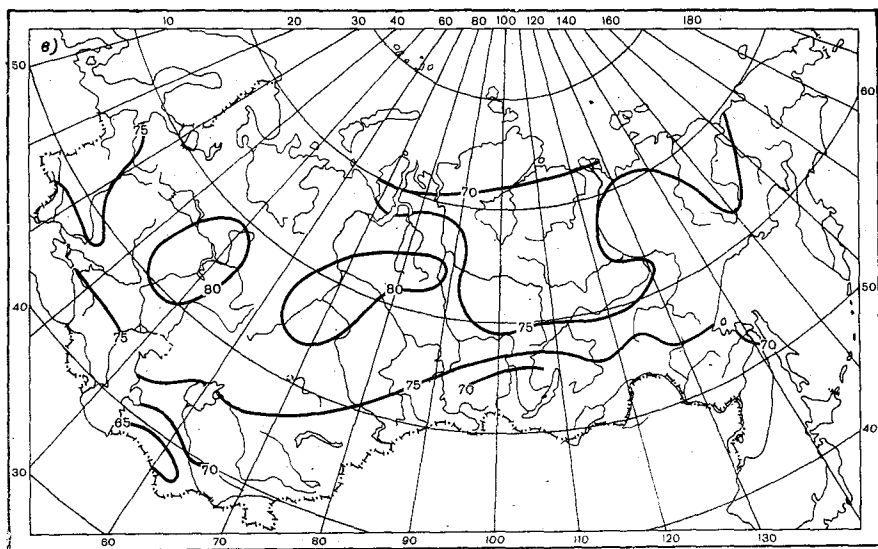


Рис. 6. Междусуточная корреляция средней суточной
 а — январь, б — апрель, в — июль, г — октябрь; районы



температуры воздуха (в сотых долях единицы).
с высотой 700 м и более даны на рис. 3 а.

в виду, что отклонения эти сравнительно невелики: коэффициенты асимметрии и эксцесса не превышают, как правило, единицы. Поэтому представляется вполне оправданным для описания средней суточной температуры в различных пунктах пользоваться разложениями Грама — Шарлье, подобно тому, как это делалось в [1] для одномерного распределения и в [8] для двумерного.

На рис. 6 для центральных месяцев сезонов представлены карты-схемы междусуточной корреляции средней суточной температуры воздуха. Существенно, что на всей территории СССР (если исключить нехарактерные горные станции) отмечается плавное изменение коэффициента корреляции, что является дополнительным подтверждением достоверности полученных характеристик и позволяет пользоваться приведенными картами для оценки междусуточной корреляции температуры и в тех пунктах, для которых расчеты непосредственно не производились. Для ориентировочных оценок во многих случаях, по-видимому, можно пользоваться значением $r=0,75$.

При аппроксимации корреляционной функции средней суточной температуры однопараметрической зависимостью, например экспоненциальной, на возможность применения которой к температурным рядам указывалось в [9, 10], знание r позволяет при необходимости задавать ход корреляционной функции на всем временном интервале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомирова Л. В. Некоторые особенности временных рядов распределения температуры воздуха на территории СССР.— В кн.: Применение статистических методов в метеорологии. Л., Гидрометеониздат, 1971, с. 290—304.
2. Тихомирова Л. В. Параметры распределения средней суточной температуры воздуха как показатели временной структуры термического режима на территории СССР.— «Тр. НИИАК», 1973, вып. 83, с. 3—47.
3. Федорченко Е. И., Молчанова Л. Н. Об изменчивости средней суточной температуры воздуха на ЕТС.— «Тр. ГГО», 1973, вып. 308, с. 92—98.
4. Справочник по климату СССР. Ч. II. Л., Гидрометеониздат, 1965.
5. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. О восстановлении годового хода моментов метеорологических рядов.— «Тр. ГГО», 1975, вып. 348, с. 99—111.
6. Лепехина Н. А., Федорченко Е. И. О временной структуре температурных рядов.— «Тр. ГГО», 1972, вып. 286, с. 63—70.
7. Федорченко Е. И. О влиянии группировки данных на точность выборочных моментов.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 336, с. 159—165.
8. Федорченко Е. И. Об учете отклонений от нормального распределения при расчете вероятности выброса случайной последовательности. См. наст. сборник.
9. Марченко А. С., Помозова Л. И., Чубенко М. А. Временная статистическая структура метеорологических процессов.— «Тр. НИИАК», 1968, вып. 54(4), с. 35—46.
10. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. О расчете статистических характеристик выбросов случайной функции.— «Тр. ГГО», 1970, вып. 268, с. 146—172.

О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ ВЫБРОСОВ СРЕДНЕЙ СУТОЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА НА ТЕРРИТОРИИ СССР

В настоящей работе приводятся некоторые результаты расчета среднего числа выбросов средней суточной температуры воздуха на территории СССР (среднего числа периодов непрерывной продолжительности пребывания ее выше или ниже заданного уровня); полученные на основе использования теоретико-вероятностного подхода. Предполагалось, что ряды средней суточной температуры нестационарны и распределения ее отклоняются от нормального, но незначительно, так что плотность распределения можно представить в виде ряда Грама—Шарлье, ограничиваясь учетом асимметрии и эксцесса распределения. Значения среднего числа выбросов через заданные уровни для отдельных месяцев получались суммированием вероятностей выбросов ото дня ко дню, которые вычислялись в соответствии с методикой, описанной в работах [1, 2]. Все требуемые для расчетов параметры (среднее, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса на каждый день года, средние за месяц значения коэффициента междусуточной корреляции средней суточной температуры) [4, 5] были найдены по данным Справочника по климату СССР [3].

По принятой методике для 269 станций СССР, необходимые сведения о которых содержатся в Справочнике по климату СССР, были получены среднее число и средняя продолжительность выбросов температуры (раздельно вверх и вниз) через все уровни, кратные 5°C. Не имея возможности представить здесь весь материал, ограничимся приведением на рис. 1 карт-схем среднего числа выбросов для центральных месяцев сезонов через некоторые характерные уровни. Как показано в [2], учет эксцесса средней суточной температуры при получении среднего числа выбросов нецелесообразен, поэтому представленные карты-схемы построены по значениям, рассчитанным лишь с учетом асимметричности распределения.

Анализ среднего числа выбросов средней суточной температуры воздуха показывает, что эта характеристика заметно чувствительнее к физико-географическим условиям расположения станций, чем центральные моменты или коэффициенты междусуточной корреля-

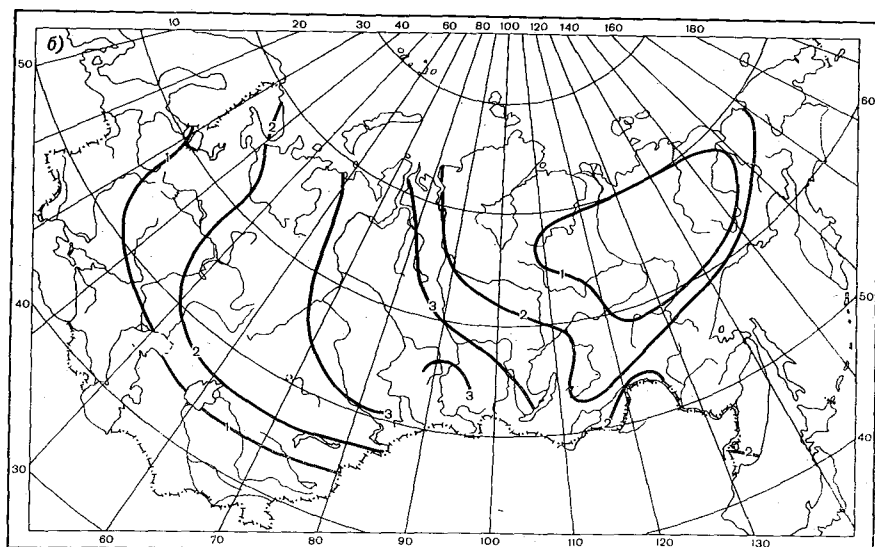
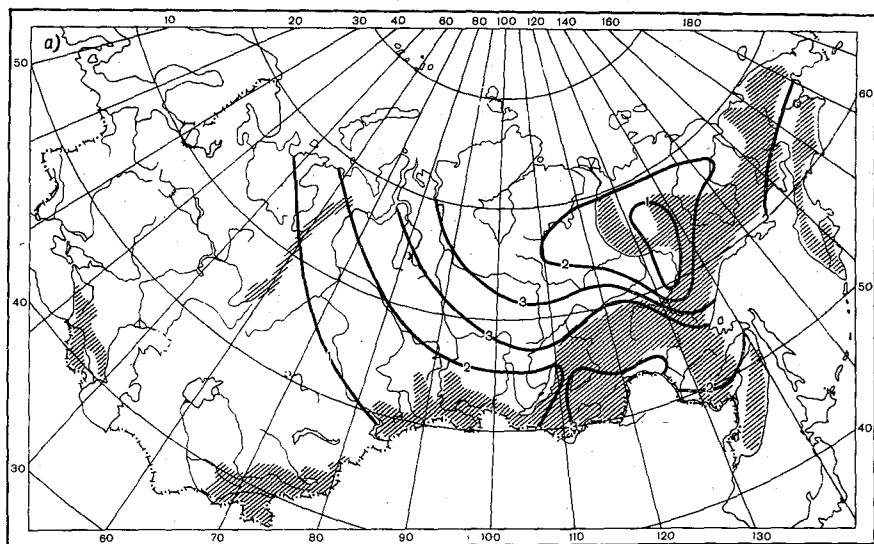
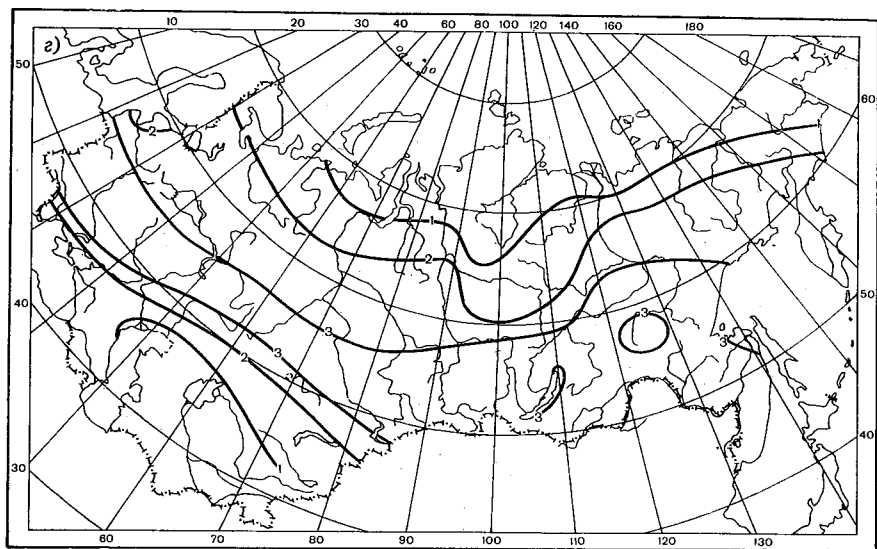
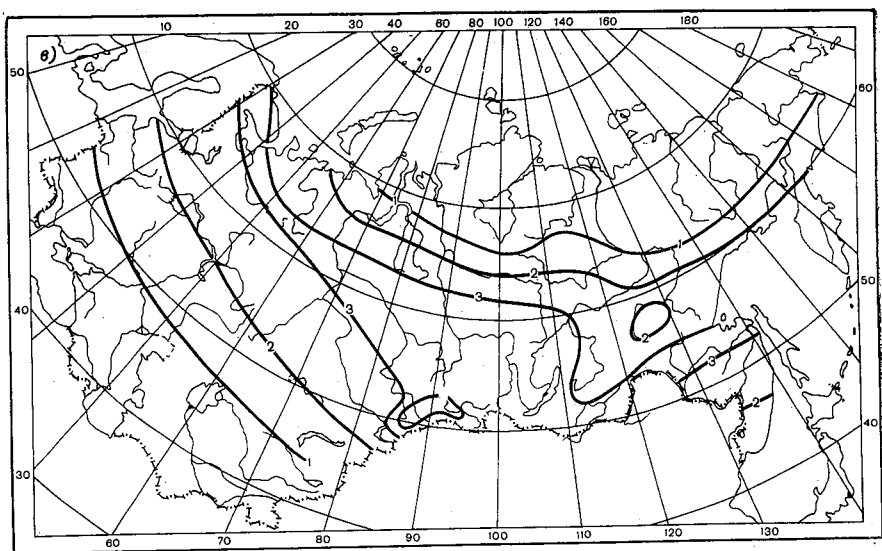


Рис. 1. Среднее число выбросов средней
 а — вниз через -30°C , январь; б — вниз через -20°C , январь;

ции [5]. Это связано с тем, что среднее число выбросов существенно зависит от того, насколько уровень удален от нормы. Поэтому все факторы, влияющие на изменчивость нормы, в первую очередь высота станции и условия рельефа, сильно сказываются на этой характеристике. Зависимость числа выбросов от поля норм хорошо



суточной температуры воздуха.

в — вверх через 0°C , апрель; г — вверх через 20°C , июль.

прослеживается на приведенных картах, конфигурация изолиний на которых напоминает изотермы средних месячных значений. Отличительной чертой поля среднего числа выбросов является наличие пояса максимальных значений числа выбросов (3 и больше выбросов в месяц), примерно совпадающего с изотермой данного.

уровня. По обе стороны от этого уровня по мере удаления нормы от уровня среднее число выбросов убывает.

Подобного рода расчеты были выполнены нами для отдельных месяцев, поскольку именно такие данные приводятся в Справочнике по климату СССР. Для практических целей могут потребоваться характеристики выбросов и для больших периодов, например для летнего или зимнего сезона. Так как принятое при расчетах определение выброса обеспечивает аддитивность числа выбросов по отношению к периоду, соответствующие характеристики могут

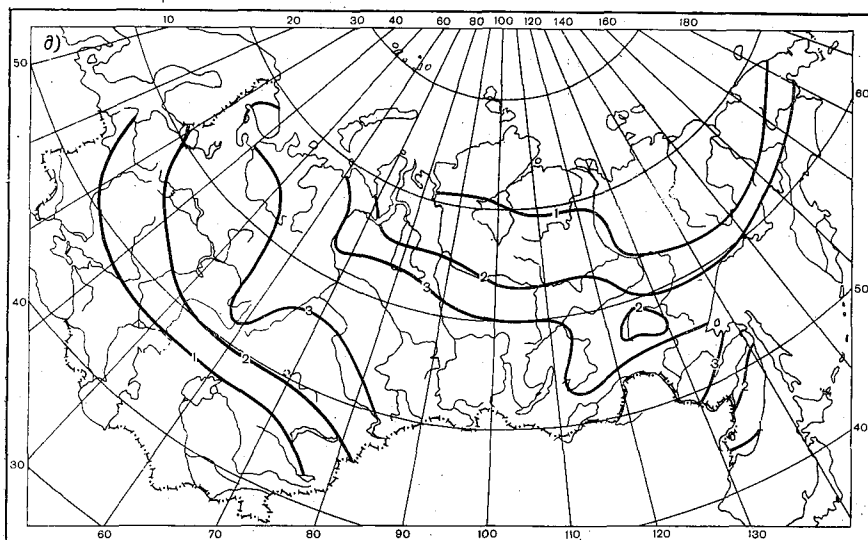


Рис. 1. Среднее число выбросов средней суточной температуры воздуха.
д — вниз через 0°C , октябрь.

быть получены путем простого сложения значений среднего числа выбросов, полученных для каждого отдельного месяца сезона.

При решении многих народнохозяйственных задач необходимы сведения о непрерывной продолжительности периодов со средней суточной температурой воздуха выше или ниже заданных уровней, например о средней непрерывной продолжительности таких периодов (о средней продолжительности выбросов). Значения этой величины могут быть найдены делением средней общей продолжительности пребывания элемента за уровнем на среднее число выбросов. Такие расчеты в данной работе выполнены.

При необходимости получения средней непрерывной продолжительности выбросов, среднее число которых представлено на рис. 1, можно использовать приведенные карты и сведения об общей продолжительности пребывания средней суточной температуры в определенных пределах, содержащиеся в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорченко Е. И. Об учете отклонений от нормального распределения при расчете вероятности выброса случайной последовательности. См. наст. сборник.
2. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. К расчету вероятности выброса нормальной последовательности.— «Тр. ГГО», 1975, вып. 348, с. 69—77.
3. Справочник по климату СССР, ч. II. Л., Гидрометеиздат, 1965.
4. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. О восстановлении годового хода моментов.— «Тр. ГГО», 1975, вып. 348, с. 99—111.
5. Федорченко Е. И. О статистической структуре рядов средней суточной температуры воздуха на территории СССР. См. наст. сборник.

К ВОПРОСУ О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ АНОМАЛИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА

1. В статьях [1, 2] приведены данные о пространственной корреляции средних месячных значений температуры воздуха в центральной части ЕТС. Из этих данных следует, что пространственная структура от месяца к месяцу заметно изменяется. Наряду с изменением осредненной по всем направлениям корреляционной функции меняется также и характер анизотропии пространственной корреляции. Представляет интерес количественно оценить значимость этих различий и определить, отражают ли они реальные климатические особенности исследуемого поля, или связаны лишь с особенностями используемой при расчетах выборки.

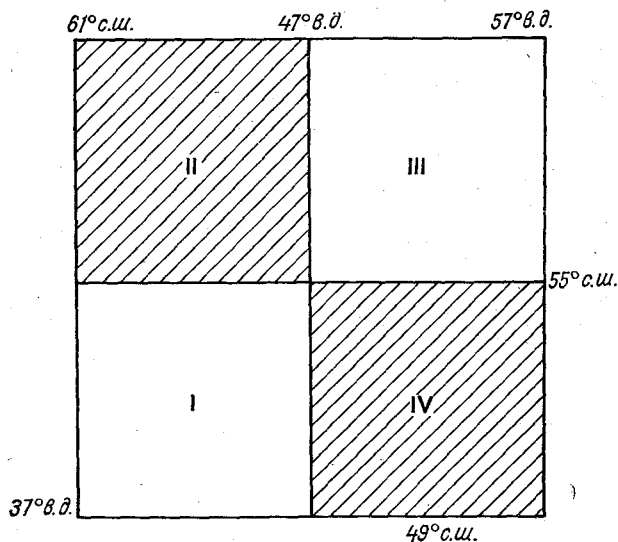


Рис. 1. Схема деления территории задания исходных данных на районы.

Напомним, что представленные в [1, 2] корреляционные функции получены путем расчета по данным наблюдений за 1930—1950 гг. на 172 станциях, расположенных в центре ЕТС в районе, ограниченном 49° и 61° с. ш. и 37° и 57° в. д. (рис. 1), который может быть схематически представлен в виде квадрата со стороной около 1200 км. Расчеты в [1] выполнены по составленной И. И. Поляком [3] программе. Поскольку ограниченная память ЭВМ не позволяла выполнять вычисления сразу для всех 172 станций, они выполнялись раздельно для двух групп станций. Вся территория была разделена по параллели 55° с. ш. и меридиану 47° в. д. на 4 квадранта и в каждую из групп вошли станции из двух накрест лежащих квадрантов, так что в первую из групп (квадранты I и III) вошло 95, а во вторую (квадранты II и IV) — 77 станций. Корреляционные функции для всей территории получались путем осреднения корреляционных функций для обеих групп.

Программа [3] предусматривает расчет характеристик пространственной структуры в предположении однородности и изотропии исследуемого поля. В [2] приведены корреляционные функции, полученные при отказе от предположения об изотропии. Соответствующие расчеты были выполнены по составленной В. П. Таракановой модификации программы [3], в которой за счет использования второго МОЗУ и отказа от вычисления взаимных корреляционных функций удается обрабатывать большие объемы исходных данных и получать раздельно пространственные корреляционные функции для различных направлений. Предположение об однородности поля при этом остается в силе.

Предполагается также, что характер анизотропии в пределах рассматриваемой территории и в пределах выделенных градаций углов не изменяется. Практически расчеты велись для четырех секторов, в которые включались пары станций, для которых углы между прямыми, соединяющими их, и северным направлением, лежали соответственно в пределах $337,5$ — $22,5$ (или $158,5$ — $202,5$)¹, $22,5$ — $67,5$ (или $202,5$ — $247,5$), $67,5$ — $112,5$ (или $247,5$ — $292,5$) и $112,5$ — $157,5^\circ$ (или $292,5$ — $337,5^\circ$). Полученные результаты условно относились к направлениям 0 — 180 , 45 — 225 , 90 — 270 и 135 — 315° соответственно.

Дадим некоторые оценки точности приведенных в [1, 2] характеристик пространственной корреляции. При этом наряду с оценками теоретического характера представим результаты обработки данных, имитирующих наблюдения за температурой воздуха и полученные путем их моделирования на ЭВМ. Проведем также сопоставление приведенных в [1, 2] корреляционных функций с корреляционными функциями, полученными путем обработки данных наблюдений за 1951—1972 гг.

2. Для теоретической оценки точности корреляционных функций используем подход, предложенный в [4]. Будем оценивать точность значения корреляционной функции, полученного путем осред-

¹ Углы отсчитываются от направления на север по часовой стрелке.

нения N_p коэффициентов корреляции, попадающих в градацию расстояний со средним расстоянием ρ , по формуле

$$\hat{r}(\rho) = \frac{1}{N_p} \sum_{p=1}^{N_p} r_{i_p k_p}. \quad (1)$$

Здесь $r_{i_p k_p}$ — коэффициент корреляции между значениями f в точках i_p и k_p , расстояние между которыми попадает в градацию, среднее значение для которой равно ρ .

Поскольку расстояния в пределах градации меняются сравнительно мало, естественно считать, что относительно мало меняются и значения индивидуальных коэффициентов корреляции. Поэтому воспользуемся для них единой оценкой дисперсии выборочного коэффициента корреляции, полученной по данным наблюдений в n независимых реализациях,

$$\sigma_{r(\rho)}^2 = \frac{[1 - r^2(\rho)]^2}{n - 1}. \quad (2)^1$$

Учитывая формулу (1), дисперсию величины $\hat{r}(\rho)$ можно представить в виде

$$\sigma_{\hat{r}(\rho)}^2 = \sigma_{r(\rho)}^2 \cdot \hat{\mu}(\rho), \quad (3)$$

где

$$\hat{\mu}(\rho) = \frac{1}{N_p^2} \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_p} \mu_r(i_p, k_p; i_q, k_q), \quad (4)$$

а $\mu_r(i_p, k_p; i_q, k_q)$ представляет собой коэффициент корреляции для пар точек i_p, k_p и i_q, k_q . Как показано в [4], значения μ_r могут быть определены по приближенной формуле

$$\begin{aligned} \mu_r(i_p, k_p; i_q, k_q) = & \left[\frac{1}{2} r_{i_p k_p} r_{i_q k_q} (r_{i_p i_q}^2 + r_{i_p k_q}^2 + r_{k_p i_q}^2 + r_{k_p k_q}^2) + \right. \\ & + (r_{i_p i_q} r_{k_p k_q} + r_{i_p k_q} r_{k_p i_q}) - r_{i_p k_p} (r_{i_p i_q} r_{i_p k_q} + r_{i_p k_q} r_{k_p i_q}) - \\ & \left. - r_{i_p k_p} (r_{i_p i_q} r_{i_p k_q} + r_{k_p i_q} r_{k_p k_q}) - r_{i_q k_q} (r_{i_p i_q} r_{k_p i_q} + r_{i_p k_q} r_{k_p k_q}) \right] / \\ & / (1 - r_{i_p k_p}^2) (1 - r_{i_q k_q}^2), \end{aligned} \quad (5)$$

в которой, например, $r_{i_p k_p}$ означает коэффициент корреляции между значениями изучаемого поля в точках i_p и k_p .

¹ При высоких значениях коэффициента корреляции и небольших объемах выборки в эту формулу должен вводиться поправочный множитель, больший единицы (см., например, [5]). В наших условиях он может достигать значений 1,1—1,2. Имея в виду лишь приближенную оценку точности, мы этим множителем будем пренебрегать.

Задаваясь теми или иными предположениями о характере корреляционной связи между значениями элемента в различных пунктах, можно с помощью формул (2)—(5) оценить точность корреляционных функций, полученных путем обработки данных в произвольно расположенных пунктах наблюдений. Подобные расчеты естественно выполнять на ЭВМ.

Описанный алгоритм применительно к случаю однородного и изотропного по отношению к пространственной корреляции поля был реализован в виде программы на языке «АЛГОЛ-60». Однако опыт использования этой программы показал, что практический расчет по ней целесообразно вести лишь при оценке точности корреляционных функций, полученных по данным сравнительно небольшого (до 40—50) числа пунктов. При большом числе пунктов объем вычислений настолько увеличивается, что становится обременительным даже для ЭВМ. В самом деле, с ростом числа станций M общее количество коэффициентов корреляции (а следовательно, и количество их N_r , приходящееся на одну градацию) растет пропорционально M^2 , соответственно количество членов в двойной сумме (4) растет пропорционально M^4 . При этом следует иметь также в виду, что ограниченный объем памяти ЭВМ не всегда позволяет хранить в оперативном запоминающем устройстве все необходимые значения коэффициентов корреляции. Их приходится многократно вычислять заново, либо обращаться за ними к внешним устройствам, что существенно увеличивает необходимое для расчетов машинное время. Так, например, при расчете на ЭВМ М-220 при M около 100 станций это время приближается к нескольким часам.

Учитывая сказанное, а также то обстоятельство, что оценки являются приближенными, при большом числе пунктов наблюдений на территории целесообразно при расчетах заменить в формуле (4) суммирование интегрированием, которое соответствовало бы размещению пунктов наблюдения во всех точках исследуемой территории. В этом случае

$$\mu(r) = \frac{\iiint_S \mu_r(i_p, k_p, i_q, k_q) dx_{i_p} dy_{i_p} dx_{i_q} dy_{i_q} d\varphi_p d\varphi_q}{\iiint_S dx_{i_p} dy_{i_p} dx_{i_q} dy_{i_q} d\varphi_p d\varphi_q}, \quad (6)$$

а интегрирование по всем переменным осуществляется таким образом, чтобы точки (x_{i_p}, y_{i_p}) , x_{i_q} , y_{i_q} , $(x_{i_p} + r \cos \varphi_p, y_{i_p} + r \sin \varphi_p)$ и $(x_{i_q} + r \cos \varphi_q, y_{i_q} + r \sin \varphi_q)$ лежали в области задания исходных данных S (см. [4]).

Очевидно, при таком расчете величина $\sigma_{r_p}^2$ должна получиться несколько заниженной, так что в результате получается ее оценка снизу. В этом варианте определение $\mu(r)$ сводится к вычислению шестикратного интеграла методом Монте-Карло. На первый взгляд представляется, что подобный расчет должен быть еще более

трудоемким, чем исходный. В действительности же при этом достигается значительная экономия машинного времени, поскольку расположение пунктов i_p , k_p , i_q и k_q не является фиксированным, так что нет необходимости в хранении всех коэффициентов корреляции и в неоднократном обращении за ними к внешним накопителям. Вместе с тем различия в оценках величины $\hat{\mu}(\rho)$ одним и другим способом сравнительно невелики.

В качестве примера в табл. 1 приводятся оценки $\hat{\mu}(\rho)$ для полученной в [1] средней для зимнего сезона корреляционной функ-

Таблица 1

Значения $\hat{\mu}(\rho)$, полученные путем суммирования по формуле (4) ($\hat{\mu}_1$), путем интегрирования по квадрантам II и IV ($\hat{\mu}_2$) и по всей территории ($\hat{\mu}_3$)
 Корреляция средней месячной температуры осреднена за зимний сезон

ρ км	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_3$	N_{ρ_1}	N_{ρ_2}
25	0,40	0,35	0,34	21	44
75	0,39	0,35	0,34	90	238
125	0,41	0,35	0,34	140	405
175	0,44	0,37	0,35	144	488
225	0,43	0,38	0,36	170	653
275	0,46	0,40	0,37	178	727
325	0,46	0,42	0,39	181	800
375	0,48	0,42	0,40	185	833
425	0,49	0,43	0,43	170	906
475	0,52	0,46	0,45	156	919
550	0,56	0,50	0,48	284	1820
650	0,69	0,64	0,51	231	1735
750	0,77	0,72	0,54	235	1580
850	0,78	0,75	0,57	283	1265
950	0,79	0,77	0,59	189	2026
1100	0,85	0,80	0,62	220	
1300	0,90	0,87	0,66	45	241

ции средней месячной температуры воздуха. Последняя была получена по данным наблюдений 77 станций, расположенных в квадрантах II и IV.

Из табл. 1 видно, что значения $\hat{\mu}(\rho)$, полученные по формуле (4) и обозначенные $\hat{\mu}_1$, на несколько процентов выше обозначенных $\hat{\mu}_2$ значений, полученных по формуле (6). Различия являются наи-

большими для малых расстояний. Для больших расстояний, а также для больших территорий расхождения оказываются существенно меньшими, в связи с чем мы далее будем пользоваться оценками, полученными путем использования формулы (6).

Обращают на себя внимание большие значения μ (ρ). Даже для малых расстояний они имеют порядок 0,4, т. е. дисперсия корреляционной функции, полученная путем осреднения сотен коэффициентов корреляции для данной градации расстояния, лишь в 2,5 раза меньше дисперсии каждого из этих коэффициентов корреляции (эквивалентное число независимых значений коэффициентов кор-

Таблица 2

Оценка значимости корреляционных функций средней месячной температуры воздуха для зимнего сезона
Период 1930—1950 гг.

ρ км	$\hat{r}_{XII}$	$\hat{r}_I$	$\hat{r}_{II}$	$\bar{r}$	σ_r	$\sqrt{\hat{\mu}}$	$\sigma_{\hat{r}}$
25	0,991	0,996	0,992	0,993	0,003	0,58	0,002
75	0,984	0,992	0,987	0,998	0,005	0,58	0,003
125	0,980	0,989	0,978	0,982	0,008	0,58	0,005
175	0,972	0,984	0,969	0,975	0,011	0,59	0,007
225	0,961	0,979	0,956	0,965	0,013	0,60	0,008
275	0,948	0,972	0,941	0,954	0,020	0,61	0,012
325	0,935	0,966	0,924	0,942	0,025	0,62	0,015
375	0,924	0,958	0,908	0,930	0,030	0,63	0,019
425	0,908	0,950	0,889	0,916	0,036	0,65	0,023
475	0,892	0,941	0,869	0,901	0,042	0,67	0,028
550	0,868	0,928	0,839	0,878	0,051	0,70	0,036
650	0,833	0,909	0,797	0,846	0,064	0,72	0,046
750	0,796	0,891	0,758	0,815	0,075	0,74	0,055
850	0,756	0,875	0,724	0,785	0,086	0,76	0,065
1050	0,699	0,848	0,692	0,746	0,099	0,78	0,077
1300	0,597	0,813	0,648	0,686	0,119	0,81	0,096

реляции составляет 2,5). С увеличением расстояния ρ между станциями значения μ (ρ) увеличиваются и при расстояниях, превышающих сторону квадрата, они приближаются к единице. Это является естественным следствием конфигурации области задания исходных данных, поскольку при таких расстояниях все пары станций располагаются вдоль одной диагонали квадрата и корреляция соответствующих коэффициентов корреляции очень высока.

Заметно меньшими для больших расстояний оказываются значения $\hat{\mu}(\rho)$ для случая задания исходных данных на всем квадрате, поскольку в этом случае пары станций могут располагаться и вдоль другой диагонали квадрата. Соответствующие значения $\hat{\mu}(\rho)$ также приведены в табл. 1, где они обозначены $\hat{\mu}_3$. Однако и в этом случае точность корреляционной функции повышается сравнительно мало. Если число пар станций, попадающих в градацию при переходе от двух квадрантов (N_{p_1}) ко всему квадрату (N_{p_2}), увеличивается в несколько раз, то величина $\hat{\mu}(\rho)$, а следо-

Таблица 3

Оценка значимости корреляционных функций средней месячной температуры воздуха для различных сезонов года
Период 1930—1950 гг.

ρ км	$\hat{r}_I$	$\hat{r}_{IV}$	$\hat{r}_{VII}$	$\hat{r}_X$	$\bar{r}$	Δ	σ_r	$\sqrt{\frac{\mu}{r}}$	$\sigma_{\hat{r}}$	$\frac{\Delta}{\sigma_{\hat{r}}}$
25	0,996	0,989	0,989	0,993	0,992	0,007	0,004	0,58	0,002	3,5
75	0,992	0,982	0,983	0,988	0,986	0,010	0,006	0,58	0,004	2,5
125	0,989	0,970	0,975	0,984	0,980	0,019	0,009	0,58	0,005	3,8
175	0,984	0,952	0,965	0,976	0,969	0,032	0,013	0,59	0,008	4,0
225	0,979	0,937	0,952	0,970	0,960	0,042	0,017	0,59	0,010	4,2
275	0,972	0,912	0,937	0,959	0,945	0,060	0,023	0,60	0,013	4,6
325	0,966	0,893	0,920	0,949	0,932	0,073	0,030	0,62	0,018	4,1
375	0,958	0,870	0,902	0,941	0,918	0,088	0,035	0,63	0,022	4,0
425	0,950	0,842	0,881	0,928	0,900	0,108	0,042	0,65	0,027	3,8
475	0,941	0,815	0,856	0,914	0,882	0,126	0,050	0,66	0,033	3,5
550	0,928	0,781	0,823	0,898	0,857	0,149	0,059	0,69	0,041	3,6
650	0,909	0,723	0,769	0,873	0,818	0,186	0,073	0,71	0,052	3,6
750	0,891	0,666	0,713	0,847	0,779	0,215	0,088	0,73	0,064	3,5
850	0,875	0,612	0,650	0,821	0,740	0,263	0,101	0,75	0,076	3,6
1050	0,848	0,519	0,542	0,777	0,672	0,329	0,122	0,78	0,091	3,1
1300	0,813	0,448	0,425	0,717	0,601	0,365	0,143	0,80	0,114	3,2

вательно, и дисперсия корреляционной функции для больших расстояний уменьшаются лишь на 30%. Для расстояний, меньших 500 км, уточнение вообще практически отсутствует.

3. Воспользуемся полученными значениями $\hat{\mu}_3$ для выяснения значимости различий между характеристиками пространственной корреляции разных месяцев зимнего сезона. Соответствующие оценки приводятся в табл. 2.

Разумеется, при подобных оценках необходимо задавать уровень значимости. Будем полагать расхождения неслучайными, если вероятность их меньше 10%. Такое задание уровня значимости без привлечения дополнительных физических или экономических соображений является, конечно, субъективным, однако оно позволит нам в дальнейшем пользоваться единым критерием.

В табл. 2 приводятся значения σ_r для $n=21$, полученные в предположении, что корреляционная функция в течение трех месяцев (с декабря по февраль) в действительности не меняется и равна средней из фактически полученных корреляционных функций $\bar{r}$, а также значения $\sqrt{\frac{\Delta}{\mu_3}}$ и определенные по формуле (3) значения σ_{Δ} .

Как видно из табл. 2, расхождения между средней корреляционной функцией и корреляционными функциями для декабря и февраля не выходят за пределы σ_{Δ} . Корреляционная функция для января систематически выше средней корреляционной функции. Превышение это составляет около $1,5 \sigma_{\Delta}$. Вероятность такого превышения для выборки из трех независимых корреляционных функций составляет 0,27 (см., например, [6]). В связи с этим у нас нет оснований утверждать, что корреляционные функции для различных зимних месяцев существенно отличаются одна от другой.

В табл. 3 приводятся некоторые данные, относящиеся к оценке значимости различий между корреляционными функциями для разных сезонов года, представленных центральными месяцами сезонов.

Сравнение корреляционных функций показывает, что для рассмотренного в [1, 2] периода (1930—1950 гг.) корреляция в осенние и зимние месяцы систематически выше, в весенние и летние систематически ниже средней за год, полученной путем осреднения по четырем центральным месяцам. Наибольшими являются разности между корреляционными функциями для января и апреля, которые в табл. 3 обозначены Δ . В последнем столбце таблицы приведены значения отношения Δ к σ_{Δ} для осредненной за год корреляционной функции. Эти отношения для большинства градаций расстояния находятся в пределах 3,5—4,0. Если учесть, что критические значения размаха выборки из четырех чисел составляют 3,2 для уровня значимости 10% и 4,0 для уровня значимости 5% (см., например, [6]), то гипотеза об отсутствии существенных различий между пространственными корреляциями в весенне-летний и осенне-зимний периоды должна быть отвергнута. Существование этих различий определяется в первую очередь характером атмосферных процессов в эти периоды. Известно, что циркуляция атмосферы в осенне-зимний период является более интенсивной, в связи с чем в более тесном взаимодействии находятся большие массы атмосферы, что и определяет распространение взаимных связей как температуры; так и других метеорологических элементов на большие расстояния. Вместе с тем различия

между корреляционными функциями для января и октября, а также для апреля и июля не являются существенными.

Рассмотрим далее вопрос о том, насколько значимы различия в корреляционных функциях, рассчитанных для разных направлений между станциями. Согласно [2], при обработке данных наблюдений за 1930—1950 гг. наибольшая анизотропия отмечена для января, для которого затухание корреляции в направлении с юго-запада на северо-восток происходит примерно в два раза медленнее, чем в направлении с северо-запада на юго-восток. Соответствующие корреляционные функции и относящиеся к ним оценки представлены в табл. 4.

В этой таблице приводится несколько функций $\mu^{\wedge}(\rho)$, характеризующих средний коэффициент корреляции между коэффициентами корреляции для пунктов, находящихся на расстоянии ρ друг от друга.

Таблица 4

Оценка значимости корреляционных функций средней месячной температуры воздуха в различных направлениях
Январь, период 1930—1950 гг.

ρ км	Корреляционная функция в направлении					σ_r	$\mu_1^{\wedge}$	$\mu^{\wedge}$	$\mu_3^{\wedge}$	$\mu_4^{\wedge}$	σ_{Δ}
	0—180°	45—225°	90—270°	135—315°	средняя						
25	0,998	0,992	0,993	0,997	0,996	0,002	0,41	0,42	0,41	0,41	0,001
75	0,993	0,992	0,990	0,992	0,992	0,004	0,42	0,44	0,42	0,41	0,003
125	0,988	0,988	0,993	0,987	0,989	0,005	0,42	0,45	0,42	0,41	0,004
175	0,980	0,988	0,986	0,984	0,984	0,007	0,43	0,47	0,43	0,42	0,005
225	0,974	0,983	0,984	0,974	0,979	0,009	0,44	0,48	0,44	0,42	0,006
275	0,963	0,978	0,979	0,966	0,972	0,012	0,46	0,50	0,46	0,42	0,008
325	0,956	0,973	0,976	0,957	0,966	0,014	0,47	0,52	0,47	0,43	0,010
375	0,944	0,968	0,972	0,945	0,958	0,017	0,48	0,54	0,48	0,43	0,012
425	0,933	0,962	0,965	0,937	0,950	0,022	0,50	0,56	0,50	0,43	0,016
475	0,919	0,958	0,959	0,922	0,941	0,026	0,52	0,59	0,52	0,43	0,019
550	0,900	0,949	0,950	0,903	0,928	0,031	0,54	0,63	0,54	0,44	0,023
650	0,871	0,939	0,938	0,872	0,909	0,038	0,57	0,69	0,57	0,44	0,028
750	0,840	0,927	0,927	0,833	0,891	0,046	0,60	0,75	0,60	0,45	0,034
850	0,805	0,917	0,916	0,806	0,875	0,055	0,62	0,80	0,62	0,45	0,041
1050	0,764	0,898	0,875	0,730	0,848	0,063	0,65	0,87	0,65	0,46	0,047
1300	0,664	0,856	0,812	0,643	0,813	0,076	0,68	0,93	0,68	0,46	0,056

Функция $\mu_1^{\wedge}(\rho)$ вычислена в соответствии с формулой (6) в предположении, что при расчете корреляционных функций осредняются все коэффициенты корреляции, независимо от направления

соответствующих пар станций. Именно такая функция μ использовалась нами ранее.

Функция $\mu_2(\rho)$ вычислена для случая, когда в формуле (6) оба направления фиксированы, так что $\varphi_p = \varphi_q = \frac{1}{4}\pi$, т. е. оценивается корреляционная функция в направлении диагонали квадрата. Она характеризует дисперсию корреляционной функции в этом направлении.

Функция $\mu_3(\rho)$ вычислена при фиксированном направлении $\varphi_p = \frac{1}{4}\pi$ и произвольном изменении другого направления. Она характеризует корреляцию между средней корреляционной функцией и корреляционной функцией в этом направлении.

Функция $\mu_4(\rho)$ вычислена для фиксированных направлений $\varphi_p = \frac{1}{4}\pi$ и $\varphi_q = \frac{3}{4}\pi$. Она характеризует корреляцию между выборочными корреляционными функциями во взаимно перпендикулярных направлениях.

При расчете всех этих функций предполагалось, что в действительности пространственная корреляция поля температуры является однородной и изотропной и определяется осредненной по всем направлениям корреляционной функцией.

Из табл. 2 видно, что функции μ_1 и μ_3 совпадают. Можно показать, что для области задания исходных данных, имеющей форму квадрата или круга, такое совпадение имеет место при любых корреляционных функциях исследуемого поля.

Для малых ρ все функции $\mu(\rho)$ близки между собой. При больших ρ функции μ_2 больше, а μ_4 меньше, чем μ_1 . Это связано с тем, что разные пары пунктов, используемые при расчете корреляционной функции в фиксированном направлении, в среднем расположены ближе друг к другу, чем при расчете обычной корреляционной функции. Для корреляционных функций, рассчитываемых в разных направлениях, расстояния между парами пунктов, естественно, оказываются большими.

В последнем столбце табл. 4 приводятся значения среднего квадратического отклонения выборочных разностей $\Delta(\rho) = \overline{r_1(\rho)} - \overline{r}(\rho)$, где $\overline{r_1(\rho)}$ — корреляционная функция в фиксированном направлении, а $\overline{r}(\rho)$ — осредненная по всем направлениям корреляционная функция. Эти величины оцениваются по формуле

$$\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_r^2 \left[\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \right], \quad (7)$$

которая получена с учетом того, что $\sigma_r^2 = \sigma_r^2 \mu_1$ и $\sigma_{\overline{r_1}}^2 = \sigma_r^2 \mu_2$ представляют собой дисперсию выборочных осредненной корреляцион-

ной функции и корреляционной функции в фиксированном направлении соответственно, а $\mu_3 = \mu_1$ — коэффициент корреляции между этими корреляционными функциями.

Из табл. 4 видно, что отклонения корреляционных функций для различных направлений от средней корреляционной функции для расстояний малых (примерно до 400 км) вообще не выходят за пределы σ_d . Для больших расстояний они оказываются большими, а для максимальных расстояний они достигают значений $2\sigma_d$. Вероятность такого превышения составляет около 15%, следовательно, мы не можем при принятом нами уровне значимости считать различия между корреляционными функциями существенными.

4. Полученные выше оценки являются приближенными. Это связано с тем, что значения дисперсий выборочных корреляционных функций рассчитаны по формулам, полученным в [4] путем учета первых членов разложения в ряд. Главным, однако, является то, что при оценке значимости мы исходим из критериев, разработанных для случайных величин, имеющих нормальное распределение и, строго говоря, неприменимых для коэффициентов корреляции, особенно при высоких их значениях. Поэтому представлялось целесообразным провести дополнительные оценки для выяснения степени достоверности сделанных выше выводов.

В связи с этим были выполнены численные эксперименты по оценке возможного рассеяния выборочных корреляционных функций также методом статистического моделирования.

В ходе этих экспериментов на ЭВМ М-220 моделировались ряды наблюдений за средней месячной температурой воздуха на заранее заданной сети пунктов. При этом поле температуры считалось однородным и изотропным, т. е. его корреляционная функция считалась зависящей лишь от расстояния между пунктами. Задание этой функции и координат пунктов наблюдения определяло значения элементов корреляционной матрицы, которые вычислялись в процессе расчетов. Моделирование связанных наблюдений для каждой реализации производилось путем линейного преобразования системы псевдослучайных чисел. Треугольная матрица преобразования определялась по алгоритму, описанному в монографии Д. И. Голенко [7] (см. также [8]). После получения нужного числа реализаций весь объем моделированных данных подвергался обработке по упомянутой выше программе расчета корреляционных функций.

Такая процедура повторялась многократно, что позволило получить некоторый набор выборочных корреляционных функций, действительно относящихся к одной генеральной совокупности.

В частности, моделировалось 9 выборок по 21 реализации, полученных при задании рассмотренной выше эмпирической корреляционной функции за январь, и 7 выборок такого же объема при задании корреляционной функции за июль. В каждой выборке моделировались данные наблюдений в 60 пунктах, соответствующих реальным станциям, равномерно расположенным на рассмотре-

ном выше квадрате 1200×1200 км. Полученные корреляционные функции изменяются от выборки к выборке в довольно широких пределах. Следует отметить, что различия между ними являются систематическими, так что превышение одной корреляционной функции над другой отмечается во всех рассмотренных нами грациях расстояний.

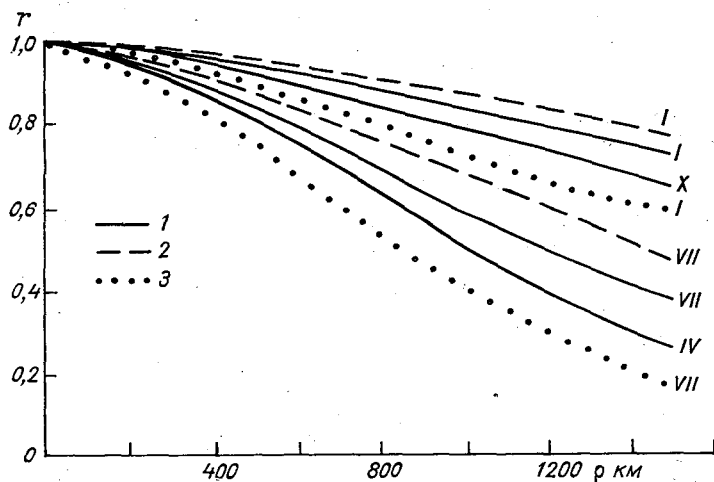


Рис. 2. Пространственные корреляционные функции средней месячной температуры воздуха.

1 — вычисленные по фактическим данным за 1930—1950 гг.; 2 — максимальные из корреляционных функций, полученных методом статистического моделирования; 3 — минимальные из корреляционных функций, полученных методом статистического моделирования. Римские цифры — месяцы.

Представление о диапазоне изменений выборочных корреляционных функций дает рис. 2, на котором представлены минимальные и максимальные из полученных выборочных корреляционных функций для рассмотренных месяцев. Как и следовало ожидать, распределение выборочных корреляционных функций относительно заданной генеральной корреляционной функции не является симметричным. Фактически полученные в [1, 2] корреляционные функции за октябрь и за апрель оказываются в пределах разброса выборочных корреляционных функций, имитирующих соответственно январские и июльские данные. Это вполне согласуется со сделанными нами выше выводами. Диапазоны же выборочных корреляционных функций для января и для июля не перекрываются, что подтверждает сделанный ранее вывод о значимости различий между корреляционными функциями для весенне-летнего и осенне-зимнего периодов.

Как уже указывалось, при моделировании температурного поля предполагалось, что его пространственная корреляция от направления не зависит. При обработке же моделированных данных корреляционные функции считались раздельно для разных направлений. Полученные результаты, естественно, различны для разных

выборок. Для большинства из них поля изокоррелят в соответствии с заданием исходных корреляционных функций близки к концентрическим окружностям, однако в нескольких выборках они получились заметно анизотропными.

В качестве примера на рис. 3 приводится поле изокоррелят для одной из выборок, в которых моделировалось изотропное поле температуры для января. Из рисунка видно, что степень анизотропии этой выборочной корреляционной функции близка к степени анизотропии фактической корреляции средней месячной температуры воздуха в этом месяце за 1930—1950 гг.

Аналогичные результаты дает сравнение корреляционных функций, вычисленных по фактическим и по моделированным данным для июля.

Таким образом, сделанный выше вывод о том, что данные о фактической корреляции температуры в разных направлениях за 20-летний период не позволяют отвергнуть гипотезу о фактической изотропии пространственной корреляции в многолетнем раз-

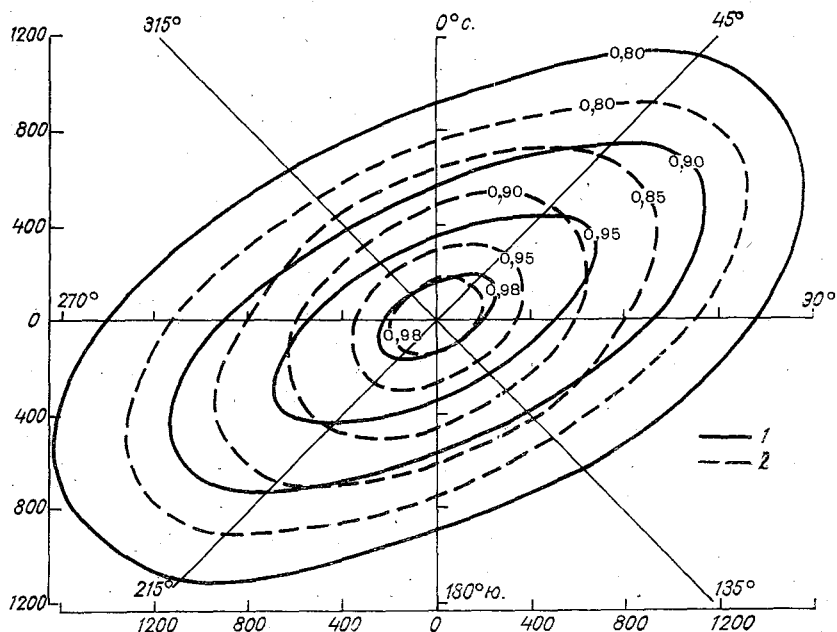


Рис. 3. Зависимость корреляционной функции средней температуры воздуха за январь от направления.

1 — вычисленная по фактическим данным за 1930—1950 гг.; 2 — вычисленная по данным, моделированным в предположении изотропии поля температуры. По осям отложены километры.

резе, подтверждается. Для получения однозначного вывода о значимости характеристик пространственной анизотропии поля температуры для рассматриваемой территории необходимо существенно удлинить период наблюдений.

Корреляционные функции средней месячной температуры воздуха для различных сезонов года
Период 1951—1972 гг.

ρ км	Январь		Апрель		Июль		Октябрь		Средняя за год для периода			σ _r ^	Δ
	^ _r	σ _{rφ}	^ _r	σ _{rφ}	^ _r	σ _{rφ}	^ _r	σ _{rφ}	1930—1950	1951—1972	1930—1972		
25	0,996	0,004	0,991	0,006	0,985	0,015	0,990	0,010	0,992	0,990	0,991	0,003	0,002
75	0,993	0,005	0,984	0,010	0,978	0,014	0,986	0,016	0,986	0,985	0,986	0,003	0,001
125	0,989	0,006	0,976	0,012	0,969	0,016	0,977	0,024	0,980	0,978	0,979	0,005	0,002
175	0,982	0,010	0,966	0,014	0,955	0,019	0,968	0,025	0,969	0,968	0,968	0,006	0,001
225	0,975	0,013	0,954	0,018	0,936	0,028	0,956	0,024	0,960	0,955	0,958	0,008	0,005
275	0,964	0,029	0,988	0,032	0,916	0,052	0,941	0,032	0,945	0,940	0,942	0,011	0,005
325	0,955	0,024	0,926	0,027	0,897	0,045	0,927	0,034	0,932	0,926	0,929	0,013	0,006
375	0,943	0,034	0,913	0,031	0,874	0,060	0,909	0,038	0,918	0,910	0,914	0,015	0,008
425	0,928	0,040	0,898	0,034	0,846	0,069	0,893	0,040	0,900	0,891	0,896	0,017	0,009
475	0,915	0,047	0,882	0,037	0,821	0,076	0,874	0,045	0,882	0,873	0,878	0,019	0,009
550	0,896	0,053	0,860	0,040	0,787	0,079	0,844	0,054	0,857	0,837	0,847	0,023	0,020
650	0,864	0,068	0,826	0,043	0,735	0,091	0,804	0,060	0,818	0,807	0,814	0,027	0,011
750	0,831	0,083	0,788	0,049	0,683	0,104	0,761	0,068	0,779	0,766	0,772	0,033	0,013
850	0,801	0,098	0,750	0,056	0,637	0,114	0,718	0,080	0,740	0,726	0,733	0,045	0,014
1050	0,750	0,126	0,677	0,080	0,550	0,155	0,660	0,098	0,672	0,659	0,666	0,055	0,013
1300	0,734	0,145	0,591	0,155	0,510	0,198	0,594	0,143	0,601	0,607	0,604	0,064	—0,006

**Корреляционные функции средней месячной температуры воздуха
для различных сезонов года
Период 1930—1972 гг.**

р км	Направление, град.									
	0—180	45—225	90—270	135—325	среднее	0—180	45—225	90—270	135—325	среднее
Январь						Апрель				
25	0,998	0,995	0,994	0,996	0,996	0,991	0,988	0,987	0,990	0,990
75	0,992	0,994	0,992	0,992	0,992	0,984	0,983	0,984	0,982	0,983
125	0,988	0,990	0,991	0,987	0,989	0,972	0,975	0,976	0,969	0,973
175	0,980	0,988	0,985	0,980	0,983	0,956	0,974	0,962	0,954	0,959
225	0,973	0,987	0,981	0,970	0,977	0,940	0,955	0,948	0,936	0,946
275	0,962	0,978	0,973	0,960	0,968	0,924	0,937	0,932	0,916	0,925
325	0,952	0,973	0,968	0,948	0,960	0,904	0,924	0,918	0,893	0,910
375	0,940	0,966	0,960	0,932	0,950	0,882	0,908	0,903	0,874	0,886
425	0,926	0,959	0,949	0,918	0,939	0,859	0,895	0,884	0,846	0,870
475	0,912	0,954	0,940	0,899	0,928	0,836	0,876	0,864	0,820	0,848
550	0,890	0,946	0,926	0,872	0,912	0,788	0,853	0,840	0,786	0,820
650	0,858	0,932	0,906	0,832	0,886	0,752	0,812	0,793	0,724	0,774
750	0,820	0,916	0,884	0,784	0,861	0,694	0,768	0,744	0,664	0,726
850	0,781	0,902	0,863	0,741	0,838	0,634	0,724	0,663	0,608	0,678
1050	0,728	0,872	0,810	0,654	0,799	0,584	0,632	0,590	0,522	0,592
1300	0,665	0,843	0,786	0,560	0,774	0,502	0,486	0,510	0,442	0,485
Июль						Октябрь				
25	0,987	0,982	0,987	0,987	0,987	0,992	0,992	0,990	0,992	0,991
75	0,980	0,980	0,982	0,980	0,980	0,986	0,986	0,986	0,988	0,987
125	0,972	0,973	0,972	0,969	0,972	0,979	0,982	0,984	0,977	0,981
175	0,961	0,961	0,958	0,957	0,960	0,970	0,974	0,974	0,972	0,972
225	0,948	0,944	0,941	0,938	0,944	0,957	0,966	0,968	0,961	0,963
275	0,931	0,934	0,918	0,921	0,926	0,946	0,956	0,955	0,947	0,950
325	0,918	0,920	0,902	0,894	0,908	0,930	0,944	0,947	0,932	0,938
375	0,900	0,896	0,876	0,872	0,888	0,916	0,930	0,936	0,918	0,925
425	0,876	0,878	0,848	0,848	0,862	0,901	0,918	0,920	0,904	0,910
475	0,856	0,858	0,824	0,817	0,838	0,882	0,904	0,907	0,886	0,894
550	0,827	0,830	0,782	0,770	0,805	0,854	0,884	0,885	0,862	0,871
650	0,784	0,785	0,726	0,702	0,752	0,820	0,854	0,853	0,828	0,838
750	0,735	0,744	0,656	0,637	0,698	0,783	0,820	0,822	0,782	0,804
850	0,688	0,696	0,593	0,570	0,644	0,741	0,785	0,790	0,742	0,769
1050	0,627	0,618	0,474	0,438	0,546	0,683	0,720	0,750	0,690	0,719
1300	0,450	0,526	0,322	0,236	0,468	0,603	0,614	0,712	0,629	0,656

5. С целью удлинения периода наблюдений были использованы данные о средней месячной температуре воздуха на той же сети станций за 1951—1972 гг. Обработка их производилась по той же программе, что и данных за 1930—1950 гг. Полученные в результате пространственные корреляционные функции для четырех центральных месяцев сезонов представлены в табл. 5. В этой таблице для каждого месяца наряду со средними значениями корреляционной функции для заданной градации расстояний приводятся также средние квадратические отклонения коэффициентов корреляции, фактически попавших в эту градацию ($\sigma_{r\phi}$).

Сравнение этих корреляционных функций с корреляционными функциями для этих же месяцев за 1930—1950 гг. (см. табл. 3, а также приведенные в [1] данные) показывает, что второе 20-летие характеризуется несколько более низкой пространственной корреляцией, чем первое. Мы ограничимся количественной оценкой значимости расхождений между осредненными за год корреляционными функциями (см. табл. 5).

Приведенные в табл. 5 значения σ_{Δ} получены применительно к осредненной за год корреляционной функции при $n=84$, т. е. в предположении независимости корреляционных функций для отдельных месяцев. Они дают оценку возможных выборочных погрешностей средних за год значений корреляционных функций по 20-летним периодам. Фактический размах этих корреляционных функций для двух рассмотренных периодов обозначен Δ . Из таблицы 5 видно, что в рассмотренном интервале расстояний значения Δ меньше σ_{Δ} . Следовательно, расхождения между соответствующими корреляционными функциями не являются существенными. Расхождения для отдельных сезонов являются несколько большими, однако также находятся в пределах возможных выборочных ошибок.

В настоящее время для данного района, по-видимому, наиболее целесообразно пользоваться данными о пространственной корреляции, осредненными за весь период 1930—1972 гг.

Соответствующие корреляционные функции для центральных месяцев сезонов приведены в табл. 6. В ней корреляционные функции даны как осредненные по всем направлениям, так и раздельно по выделенным четырем главным направлениям. Из этих данных следует, что в течение всего рассматриваемого периода корреляционные связи в направлении с юго-запада на северо-восток затухали медленнее, чем в направлении с северо-запада на юго-восток. Анизотропия пространственной корреляции наиболее отчетливо выражена в январе. Оценки, аналогичные выполненным выше, показывают, однако, что, хотя эти характеристики анизотропии для данного периода вполне достоверны, мы не можем утверждать, что они будут пригодны и для других периодов.

Сравнение пространственных корреляционных функций для разных сезонов, как и для первого 20-летия, подтверждает существенное различие между ними в осенне-зимний и весенне-летний пе-

риоды. Различия в характере пространственной корреляции весеннего (апрель) и летнего (июль), а также осеннего (октябрь) и зимнего (январь) сезонов оказываются по-прежнему несущественными.

Осредненные по указанным четырем главным направлениям корреляционные функции для отдельных месяцев за весь период 1930—1972 гг., так же как и для обоих 20-летних периодов, хорошо аппроксимируются аналитическим выражением вида

$$r(\rho) = r(0) e^{-(\rho/\rho_0)^\alpha}, \quad (8)$$

где ρ_0 — радиус корреляции, т. е. расстояние, на котором корреляция убывает в e раз, α — структурный параметр.

Значения параметров, характеризующих статистическую структуру средней месячной температуры воздуха для различных месяцев, приведены в табл. 7. Наряду с уже упомянутыми величинами,

Таблица 7

Характеристики статистической структуры средней месячной температуры воздуха для центральных месяцев сезонов

Параметр	1930—1950 гг.				1951—1972 гг.			
	I	IV	VII	X	I	IV	VII	X
$t^\circ \text{ C}$	—12,7	4,6	19,7	4,1	—12,4	5,1	19,8	4,3
$\sigma_t^\circ \text{ C}$	4,7	2,1	2,0	2,1	4,1	2,3	1,7	1,7
$r(0)$	0,998	0,993	0,992	0,995	0,998	0,994	0,988	0,994
ρ_0 тыс. км	3,20	1,30	1,49	2,59	2,26	2,11	1,44	1,81
α	1,49	1,59	1,67	1,49	1,60	1,42	1,58	1,53

Параметр	1930—1972 гг.			
	I	IV	VII	X
$t^\circ \text{ C}$	—12,6	4,8	19,8	4,2
$\sigma_t^\circ \text{ C}$	4,4	2,2	1,8	1,9
$r(0)$	0,998	0,993	0,990	0,994
ρ_0 тыс. км	2,65	1,65	1,45	2,15
α	1,55	1,50	1,65	1,49

в ней даны значения средней многолетней температуры воздуха $\bar{t}$ и средних квадратических отклонений средней месячной температуры σ_t для рассмотренных периодов.

6. Сведения о пространственной структуре метеорологических полей широко используются при решении ряда практических задач. В связи с этим естественно желание более полно исследовать статистическую структуру этих полей с целью выяснения ее зависимости, например, от времени года, географических условий местности и т. д. При таком исследовании можно было бы отказаться

от традиционно вводимых допущений о стационарности, однородности и изотропии поля. Если бы при этом оказалось возможным получить надежные данные о статистической структуре, то это существенно расширило бы возможности применения их при решении задач, связанных с прогнозом погоды, планированием сети станций и т. д.

К сожалению, как мы видели, вследствие связности индивидуальных корреляционных моментов реальная точность корреляционных функций сравнительно невелика и не всегда соответствует объему обрабатываемых данных. В нашем случае использование данных 172 станций, расположенных в квадрате со стороной 1200 км, не обеспечивает практического повышения точности данных о структуре по сравнению с той, которая могла бы быть достигнута при использовании данных 50—60 станций на той же территории. Это обстоятельство следует учитывать при обработке, поскольку уменьшение числа станций в три раза позволяет уменьшить общий объем вычислений при расчете корреляционных функций почти в девять раз.

При необходимости уточнения характеристик пространственной корреляции наиболее эффективно удлинять период наблюдений. Однако при этом приходится предполагать временную стационарность поля и тем самым заранее отказываться от исследования особенностей статистической структуры в течение тех или иных периодов времени. Кроме того, часто приходится сталкиваться с ограниченностью периода инструментальных измерений.

Если нет возможности удлинить период наблюдений, можно увеличить территорию, данные с которой используются при расчетах. В этом случае, однако, уточнение характеристик структуры также далеко не соответствует увеличению размера территории. Так, например, оценки типа выполненных выше показывают, что при увеличении стороны квадрата от 1200 до 3000 км, т. е. при увеличении его площади более чем в 6 раз, средняя квадратическая погрешность определения выборочной корреляционной функции температуры для января уменьшилась бы лишь на 30%. Но и это уточнение могло бы быть достигнуто лишь в случае климатической однородности территории, что для площадей таких размеров вряд ли реально.

Таким образом, оценка выборочных погрешностей характеристик статистической структуры оказывается очень полезной, поскольку она позволяет определить оптимальный объем подлежащих обработке данных и установить разумную степень детализации данных о структуре. Разумеется, при полном отсутствии сведений о структуре такую оценку выполнить нельзя, однако естественно решать задачу методом последовательных приближений, когда по совсем небольшому объему данных делаются грубые оценки характеристик структуры, на основе которых делаются выводы о необходимом для дальнейшей обработки объеме данных и т. д. Именно такой подход практически и используется при решении любых климатологических задач на ранее не изучавшейся территории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лугина К. М., Малашенко Л. Я. Пространственная корреляция аномалий температуры воздуха и использование ее при рационализации сети станций.— «Тр. ГГО», 1972, вып. 286, с. 26—38.
2. Лугина К. М., Тараканова В. П. Пространственная структура поля средней месячной температуры.— В кн.: Исследования статистической структуры метеорологических полей. М., Гидрометеоиздат, 1975, с. 73—79.
3. Журавлева Е. Б., Каган Р. Л., Поляк И. И. Вычисление автокорреляционных и взаимных корреляционных функций по нескольким реализациям случайного процесса.— «Тр. ГГО», 1971, вып. 289, с. 20—28.
4. Каган Р. Л. О точности расчета пространственных корреляционных функций. Ч. 1.— «Тр. ГГО», 1973, вып. 308, с. 3—19. Ч. 2.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 336, с. 3—19.
5. Федорченко Е. И. Об оценке точности корреляционных моментов, полученных по малым выборкам.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 336, с. 20—24.
6. Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. М., ВЦ, АН СССР, 1973. 586 с.
7. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., «Наука», 1965. 228 с.
8. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. К вопросу о статистическом моделировании двумерных метеорологических полей. — «Тр. ГГО», 1973, вып. 308, с. 20—26.
9. Справочник по климату СССР. Ч. 2, вып. 28. Л., Гидрометеоиздат, 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Л. Каган. Некоторые возможности использования данных о пространственно-временной структуре барического поля	3
Л. Л. Брагинская. Об изменчивости эффективной температуры теплотерм зданий	22
В. П. Тараканова. О точности анализа поля геопотенциала в южном полушарии при использовании прогностической информации	38
Ю. М. Либерман. Об автоматической обработке информационных массивов ПИГАП	45
Н. В. Урикова. Об одном способе объективного анализа	55
И. И. Поляк. Численные схемы анализа нестационарных случайных процессов	63
Н. К. Гриб, И. И. Поляк. Временная изменчивость среднегодовых значений температуры воздуха	71 ✓
И. И. Поляк, В. А. Шахмейстер. Гармонический анализ временных рядов инсоляции, рассчитанных с помощью астрономической теории колебаний климата	92
К. Я. Винников. Спектр пространственно-временных флуктуаций осредненной по широтным кругам средней месячной температуры воздуха северного полушария за период 1881—1969 гг.	95 ✓
Р. Л. Каган. О выборе оптимальной дискретности при обработке данных наблюдений	121
Е. И. Федорченко. К вопросу о смещенности оценки коэффициента эксцесса	132
Р. Л. Каган. О расчете вероятности выброса стационарной релеевской последовательности	136
Е. И. Федорченко. Об учете отклонений от нормального распределения при расчете вероятности выброса случайной последовательности	154
Е. И. Федорченко. О статистической структуре рядов средней суточной температуры воздуха на территории СССР	168
Е. И. Федорченко. О среднем числе выбросов средней суточной температуры воздуха на территории СССР	181
Р. Л. Каган, К. М. Лугина. К вопросу о пространственной корреляции аномалий температуры воздуха	186

Труды ГГО, вып. 374

**ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
В МЕТЕОРОЛОГИИ**

Редактор *Л. В. Царькова*
Техн. редактор *Н. Ф. Грачева*
Корректоры: *Г. С. Макарова, Г. Н. Римант*

Сдано в набор 22/II 1976 г. Подписано к печати 25/X 1976 г. М-19851. Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип. № 1. Печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 14,48. Тираж 900 экз. Индекс МЛ-126. Заказ № 546. Цена 1 р. 01 к.

Гидрометеиздат, 199053. Ленинград, 2-я линия, 23.

Сортавальская книжная типография Управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров Карельской АССР, Сортавала, Карельская, 42.