ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ТРУДЫ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ им. А. И. ВОЕЙКОВА

Выпуск

377

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Под редакцией
канд. техн. наук Л. П. АФИНОГЕНОВА
канд. физ.-мат. наук М. С. СТЕРНЗАТА

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ ЛЕНИНГРАД 1977

УДК 551.508 (061.6)

Сборник посвящен вопросам разработки новых метеорологических приборов и методов измерений для метеорологических станций, в частности для АМСГ, а также для экспериментальных исследований.

Большинство статей тесно связано с задачами автоматизации процессов формирования метеорологической информации. Под этим углом зрения написаны статьи, посвященные построению новых приборов, методике измерений и теоретическим вопросам, связанным с формированием метеорологической информации,— теории измерений, обработке и хранению информации.

Сборник рассчитан на специалистов, занимающихся разработкой приборов и методов измерений и исследованиями в приземном слое атмосферы, на работников гидрометеорологической сети, связанных с эксплуатацией новых приборов, а также на преподавателей и студентов метеорологических вузов и техникумов.

Development of new meteorological instruments and techniques to be used for measurements at meteorological stations, in particular at Civil Aviation Meteorological Stations, and during experimental studies are discussed.

The problem of automation of processes of meteorological data formation is dealt with in papers devoted to instrument production, measuring techniques, and theoretical aspects, i. e. a theory of measurements, data processing, and data storage.

The book is intended for specialists involved in the development of instruments and measuring techniques, and in studies of the surface layer of the atmosphere. It will be useful to hydrometeorological network personnel responsible for maintenance of new instruments. It also will be of use to the teaching staff and students of meteorological institutions and technical schools.

А $\frac{20807\text{-}101}{069(02)\text{-}77}$ 6-77(1)

С. И. Грушин, Ю. П. Петров

ИНДИКАТОРНОЕ УСТРОЙСТВО КРАМС

Рассматриваемое в статье индикаторное устройство (ИУ) выполнено на бесконтактных логических элементах и заменяет релейное ИУ автоматической метеостанции КРАМС, выпуск которого прекращен. Идея построения ИУ и обсуждение некоторых технических решений содержатся в [2]. Поскольку бесконтактные индикаторные устройства находят все более широкое применение как в комплекте станции КРАМС, так и в автономной работе, по-видимому, целесообразно более подробно рассмотреть принцип действия и принципиальные схемы ИУ и таким образом хотя бы частично компенсировать отсутствие сведений о новом индикаторном устройстве в книге [1].

Индикаторное устройство принимает цифровую информацию от центрального устройства (ЦУ) КРАМС или от блока ручного ввода (БРВ), входящего в комплект ИУ. Внешний вид ИУ и БРВ показан на рис. 1. Прием данных осуществляется по двухпроводной линии связи длиной до 10 км. Метеосообщение, поступающее на ИУ, состоит из 47 цифр и содержит следующие сведения: время передачи (часы, минуты), направление ветра, средняя, максимальная скорость ветра и максимальное значение составляющей скорости ветра, перпендикулярной ВПП, атмосферное давление, приведенное к уровню ВПП, количество облаков в баллах и количество облаков нижнего яруса, температура и влажность воздуха, наличие (отсутствие) грозы, явления погоды, название телеграммы (метео, шторм), номер группы датчиков, от которых получены данные о высоте нижней границы облаков и дальности видимости, высота нижней границы облаков от двух датчиков, метеорологическая дальность видимости от трех датчиков, видимость огней высокой интенсивности, наличие (отсутствие) гололеда.

Метеосообщение от ЦУ КРАМС или с выхода БРВ поступает к ИУ в телеграфном коде. Форма сигналов несколько отличается от формы сигналов для телеграфного аппарата. Каждый символ кода передается в виде импульса тока длительностью 10 мс и промежутком между импульсами также 10 мс. «Нулю» соответствует импульс отрицательной полярности, а «единице» — импульс положительной полярности. Такой способ передачи позволяет обойтись без синхронизирующих узлов в приемной части ИУ. На время, когда новая информация не передается, от БРВ или от ЦУ КРАМС поступает постоянное напряжение (—30 В), которое в ИУ используется для контроля исправности линии связи. Поступлению метеосообщения предшествует кратковременное, на 40 мс — 2 с, изменение полярности напряжения в линии связи. По этому сигналу в ИУ производится подготовка блоков к приему новых данных.

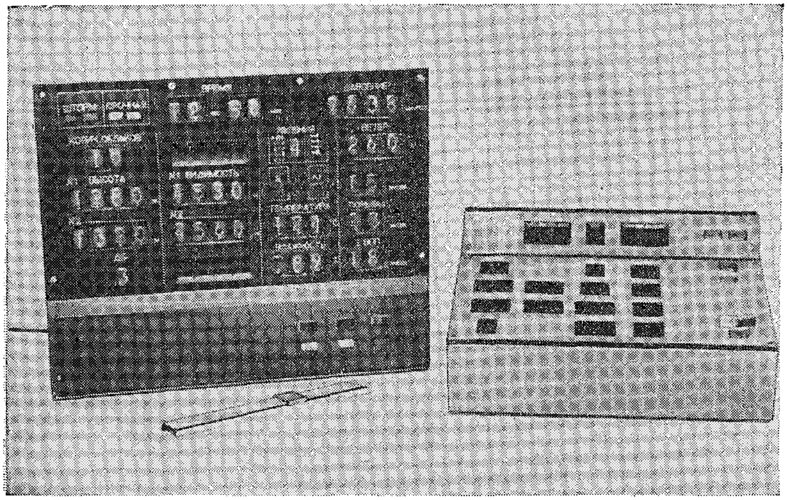


Рис. 1. Внешний вид индикаторного устройства и блока ручного ввода.

В индикаторном устройстве имеется возможность вызова информации путем передачи от ИУ напряжения (—60 В), меняющего направление тока в линии. Изменение направления тока запоминается в ЦУ и переключает работу станции в режим измерений и передачи информации по вызову. При работе от БРВ сигнал вызова настраивает БРВ на передачу данных, набранных на клавиатуре. На время передачи данных вызов от ИУ запрещается (блокируется), что исключает искажение информации при нажатии кнопки «вызов» в момент приема метеосообщения.

Рассмотрим работу ИУ по структурной схеме, изображенной на рис. 2. Индикаторное устройство имеет два режима работы — прием данных из линии связи (*ЛС*) и режим регенерации, т. е. высвечивания принятой информации на панели индикаторов.

Сигналы из *ЛС* классифицируются по длительности и полярности входным устройством (*ВУ*). При постоянном входном напряжении отрицательной полярности от *ВУ* в устройство контроля (*УК*) подается сигнал «Нет передачи», по которому *УК* при отсутствии «сбоя» во время приема данных разрешает регенерацию.

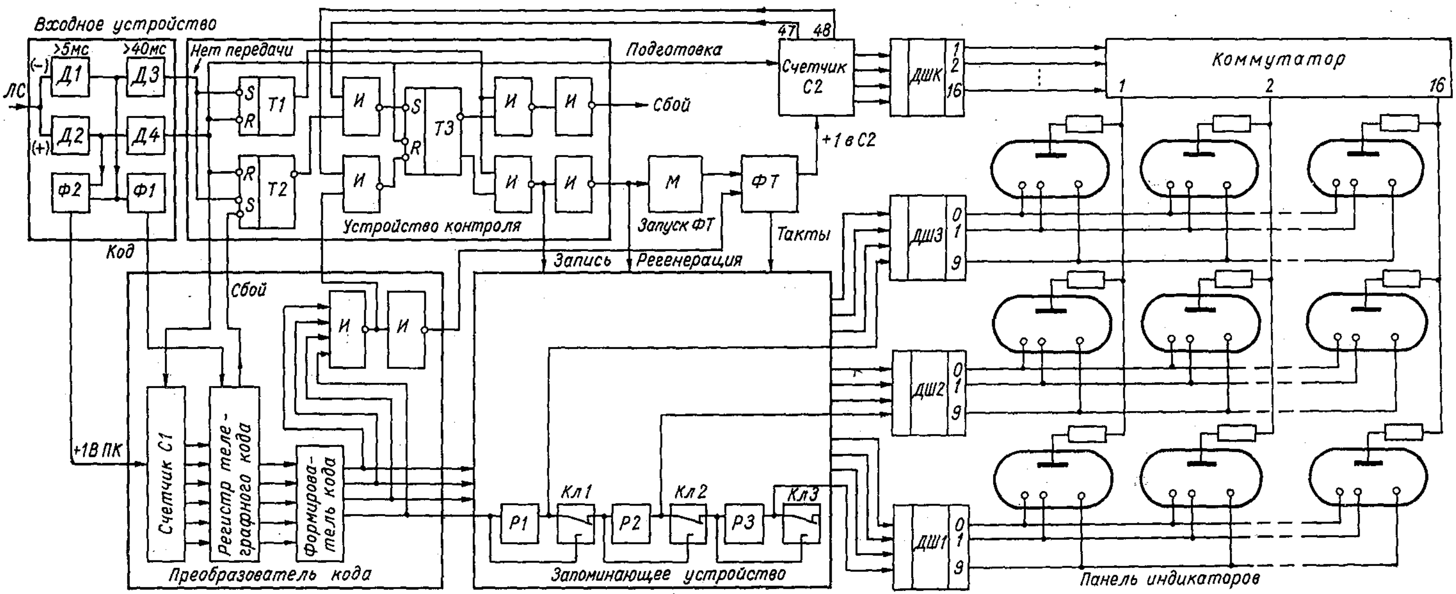


Рис. 2. Структурная схема ИУ.

Информация, предназначенная для отображения, хранится в запоминающем устройстве (*ЗУ*). Основой *ЗУ* являются 12 квазистатических сдвигающих регистров (*Р*), каждый из которых принимает 16 двоичных разрядов (микросхема серии К144). Заполнение *ЗУ* производится в режиме приема данных.

При изменении полярности напряжения в *ЛС* более чем на 40 мс с выхода дискриминатора *Д4* поступает сигнал подготовки, переключающий устройство контроля и другие блоки ИУ в режим приема данных. Сигнал «Регенерация» на выходе *УК* заменяется сигналом «Запись», в результате чего прекращается работа мультивибратора *М*, задающего темп работы ИУ при регенерации. Сигналом «Запись» ключи *Кл ЗУ*, условно показанные в виде контактов реле, переключаются таким образом, что сигналы с выхода первого регистра *Р1* поступают на вход *Р2*, а сигналы от *Р2* поступают на вход *Р3*, т. е. каждые три регистра *ЗУ* соединяются последовательно.

Таблица 1

Цифры и знаки	Телеграфный код	Код на выходе *ПК*
1	1000100	0001
2	1001100	0010
3	1011110	0011
4	1101010	0100
5	1111100	0101
6	1010100	0110
7	1000110	0111
8	1100110	1000
9	1111000	1001
0	1100100	1010
Тире	1001110	1011

После сигнала подготовки в ИУ из *ЛС* поступают информационные сигналы, их длительность (10 мс) недостаточна для срабатывания дискриминаторов *Д3* и *Д4*. При сигнале положительной полярности, соответствующей «единице» в передаваемом двоичном разряде телеграфного кода, от формирователя *Ф2 ВУ* в преобразователь кода *ПК* поступает сигнал «+1 в *ПК*». Если из *ЛС* поступает информационный сигнал отрицательной полярности, то одновременно с сигналом от *Ф2* в *ПК* поступает сигнал от формирователя *Ф1 ВУ*, соответствующий «0» в этом двоичном разряде. Таким образом, *Ф2* срабатывает при входном сигнале любой полярности, а *Ф1* — только при сигнале отрицательной полярности. Когда *Ф1* не срабатывает, *ПК* классифицирует принятый двоичный символ как «единицу».

Преобразователь кода *ПК*, получая последовательно во времени двоичные разряды телеграфного кода цифр и других символов, формирует на четырех своих выходах коды цифр в соответствии с табл. 1 и передает их в *ЗУ*. Формирование кода на выходе *ПК* происходит в том случае, когда принята одна из десятичных цифр или знак «тире», означающий отсутствие сведений о метеоэлементе.

В момент появления хотя бы одной «1» на информационных выходах преобразователь кода передает сигнал «Запуск формирователя тактов *ФТ*». Если из линии связи поступает телеграфный код символа, отсутствующего в табл. 1, то ни на одном из четырех выходов *ПК* нет «1», и сигнал «Запуск *ФТ*» не передается. Это приводит к тому, что принятый символ не запоминается. Необходимость пропускать (не вводить в *ЗУ*) нецифровую информацию обусловлена тем, что параллельно с ИУ в КРАМС включено регистрирующее устройство — рулонный телеграфный аппарат, для которого нужно передавать дополнительно такие символы, как пробел, сдвиг строки и др.

В *ПК* можно выделить три составные части: счетчик числа информационных сигналов из *ЛС* (*С1*), регистр приема телеграфного кода (*РТК*) и формирователь кода (*ФК*). Счетчик определяет номер поступившего двоичного разряда телеграфного кода. В соответствии с этим номером информация от формирователя *Ф1 ВУ* записывается в определенный разряд *РТК*. Одновременно в *РТК* производится контроль полярности первого («стартового») разряда кода, который должен быть всегда положительным («1»). Если первый разряд кода является нулевым, то *РТК* формирует сигнал «Сбой», который передается в устройство контроля и в дальнейшем запрещает высвечивание информации. Принятый в *РТК* код поступает в *ФК*, где преобразуется в четырехразрядный код в соответствии с табл. 1.

Под воздействием сигнала «Запуск *ФТ*» формирователь тактов передает в *ЗУ* тактовые импульсы, нужные для сдвига содержимого всех регистров на один разряд вправо. Одновременно в освободившийся младший разряд *Р1* записывается «0» или «1» в соответствии с кодом на выходе *ПК*. Запоминающее устройство имеет четыре цепочки сдвигающих регистров, по одной на каждый разряд кода на входе *ЗУ*, и код от *ПК* записывается параллельно в четыре регистра.

Кроме тактов сдвига, *ФТ* передает сигнал «+1 в *С2*», по которому содержимое счетчика *С2* увеличивается на единицу. Таким образом, в *С2* подсчитывается число цифр, переданных в *ЗУ*. Информация о числе принятых цифр используется в *УК*. Сигналом подготовки триггеры *Т1*, *Т2*, *Т3 УК* устанавливаются в состояние «0», при этом после окончания передачи *УК* не разрешит регенерацию и от него будет поступать сигнал «Сбой». Количество цифр в метеосообщении известно — 47. После приема всех десятичных разрядов сигналом «47» в случае, если не было «Сбоя» от *ПК*, триггер *Т3* устанавливается в «1», и при появлении сигнала «Нет передачи» устройство контроля разрешает регенерацию, т. е. высвечивание принятой информации. Если принимается еще один десятичный разряд, то сигналом «48» от *С2* триггер *Т3* снова переводится в состояние «0», что соответствует «Сбою» и запрещению регенерации после окончания передачи данных.

В результате последовательного ввода символов из *ЛС* в *ЗУ* оказываются введены все 47 цифр. Первые 15 цифр хранятся в регистрах *Р3*, следующие 16 цифр — в *Р2*, а последние 16 — в регистрах *Р1*. При появлении на выходе *УК* сигнала «Регенерация» ключи *Кл ЗУ* переключаются таким образом, что выход каждого сдвигающего регистра замыкается на свой же вход. Одновременно включается мультивибратор, который начинает запускать *ФТ* с частотой около 4000 Гц. В каждом такте *ФТ* информация с выхода регистра передается по одному разряду на его же вход. Выходы регистров в результате сдвигов последовательно принимают состояние каждого двоичного разряда со скважностью 16.

Коды цифр с выходов *ЗУ* поступают в три дешифратора (*ДШ1*, *ДШ2*, *ДШ3*), каждый из которых подает питание на одну из 10 шин и на одноименные катоды группы из 16 ламп. Выбор одной лампы в каждой группе производится коммутатором, который подает анодное питание на один из своих 16 выходов в зависимости от состояния первых четырех двоичных разрядов счетчика *С2*. При сдвиге информации в регистрах *ЗУ* сигналом от *ФТ* содержимое *С2* увеличивается на единицу и дешифратор *ДШК* открывает следующий выход коммутатора, закрывая предыдущий. Таким образом, в любой момент времени ток протекает лишь через одну лампу в каждой из трех групп. Синхронность работы коммутатора и *ЗУ* обеспечивается тем, что как при записи, так и при регенерации каждый сдвиг в регистрах *ЗУ* сопровождается увеличением на единицу содержимого *С2*.

Применение трех групп индикаторных ламп и трех дешифраторов со стороны катодов позволило обеспечить нужную скважность импульсов тока через каждую лампу (используются газонаполненные индикаторные лампы ИН-12А). При частоте мультивибратора 4 кГц длительность импульса тока в лампе составляет 250 мкс, а скважность — 16. Хорошее качество свечения обеспечивается при токе в импульсе 16 мА и среднем токе в лампе 1 мА вместо 2,5 мА при питании постоянным током.

Как указывалось выше, в запоминающем устройстве применены сдвигающие регистры серии К-144. Каждый регистр содержит 21 триггер на МОП-транзисторах (в памяти ИУ используется только 16 триггеров). Уровень логической «1» в регистрах составляет $-9 \div -12$ В, а амплитуда тактов сдвига -27 В. Бóльшая часть блоков ИУ (счетчики, *УК*, *ПК* и др.) выполнены на микросхемах серии 133, для которых уровень лог. «1» составляет около $+3{,}6$ В. Согласование *ЗУ* с *ПК* и другими блоками, прием сигналов из линии связи, управление индикаторными лампами обеспечиваются с помощью биполярных транзисторов. Ниже кратко рассмотрены принципиальные схемы отдельных блоков ИУ.

Входное устройство (рис. 3). Схема состоит из двух идентичных частей для положительной и отрицательной полярности сигналов на входе. Рассмотрим работу *ВУ* при поступлении на вход *2* отрицательного напряжения по отношению к входу *1*. В этом случае транзистор *Т1* закрывается, а через 2—3 мс (после заряда конденсатора *С1* до напряжения стабилизации стабилитрона *Д3*) открывается *Т3*. Открытый транзистор *Т3* снимает поступающее от его коллектора закрывающее напряжение со входов *Т11*, *Т12* и от *ВУ* в преобразователь кода передаются сигналы «+1 в ПК» и «Код» в виде напряжения низкого уровня. На транзисторах *Т7*, *Т9* собран дискриминатор для выявления факта восстановления

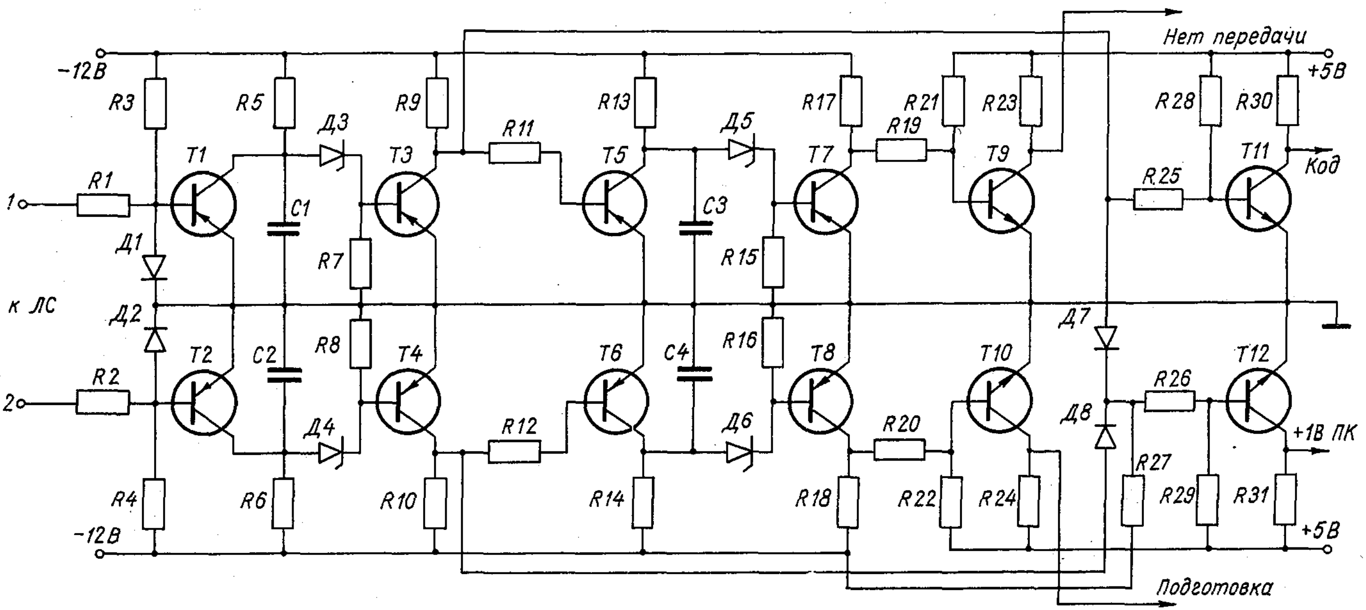


Рис. 3. Входное устройство.

напряжения в линии связи после окончания передачи. Постоянная времени цепочки *R13, C3* около 20 мс. Конденсатор *C3* в обычном состоянии шунтируется открытым переходом коллектор-эмиттер *T5*. Заряд *C3* начинается в момент перехода транзистора *T5* в закрытое состояние, т. е. при открытом транзисторе *T3*, когда на вход *ВУ* поступает напряжение отрицательной полярности. При длительном (более 20—40 мс) воздействии такого напряжения конденсатор *C3* успевает зарядиться до напряжения стабилизации *Д5*. Током через *Д5* открывается транзистор *T7*, при этом снимается поступающее от коллектора *T7* напряжение отрицательной полярности, закрывающее *T9*; транзистор *T9* открывается и от *ВУ* в устройство контроля (см. рис. 2) передается сигнал «нет передачи» в виде напряжения низкого уровня.

Вторая часть *ВУ* (транзисторы *T2, T4, T6, T8, T10*) срабатывает при поступлении из *ЛС* сигналов положительной полярности. В отличие от *T3*, транзистор *T4* не соединен с базовой цепью *T11*. Во время приема информационных сигналов положительной полярности *T4* открывается и снимает закрывающее напряжение только в базовой цепи *T12*. С коллектора *T11* продолжает поступать напряжение +5 В, что соответствует «единице» в принимаемом двоичном разряде. При длительности сигнала из *ЛС*, большей 20—40 мс, срабатывает дискриминатор на транзисторах *T8, T10*, оба эти транзистора открываются и от *ВУ* в *УК* и другие блоки поступает напряжение низкого уровня (сигнал «подготовка»), действующее в течение всего времени, пока на входе *ВУ* имеется напряжение положительной полярности.

Преобразователь кода (рис. 4). На вход *ПК* поступают сигналы из *ВУ* «+1 в *ПК*», «Код» и «Подготовка». *ПК* с помощью счетчика (триггеры *T7, T8, T9*) и группы инверторов *И9 — И14* запоминает на триггерах *T1 — T5* пять двоичных разрядов телеграфного кода цифры. Этот код в момент поступления на вход *ПК* последнего («стопового») разряда преобразуется сначала в унитарный код дешифратором телеграфного кода, а затем в четырехразрядный код (см. табл. 1) десятично-двоичным дешифратором. По окончании приема одной цифры от четырех выходов *ПК* в *ЗУ* поступает код цифры и если этот код содержит хотя бы одну «1», в формирователь тактов передается сигнал «Запуск ФТ».

Работа *ПК* начинается с подготовки счетчика на *7*, который выполнен на триггерах *T7, T8, T9* и инверторе *И18*. С помощью инвертора осуществляется обратная связь в счетчике, необходимая для пересчета на *7*. Триггер *T6* с инвертором на входе служит для формирования фронтов импульсов из *ВУ*. При работе счетчика одновременно на три входа одного из элементов «И—НЕ» *И9 — И15* поступает «1» (высокий уровень напряжения). Переключение же этого элемента происходит лишь тогда, когда на его четвертый вход приходит сигнал «1» с выхода *И7*, соответствующий «0» в принимаемом двоичном разряде телеграфного кода. Элемент *И9* переключается при состоянии счетчика 001, которое соответствует первому («стартовому») разряду кода, и сбрасывает триггеры *T1 — T5*. При

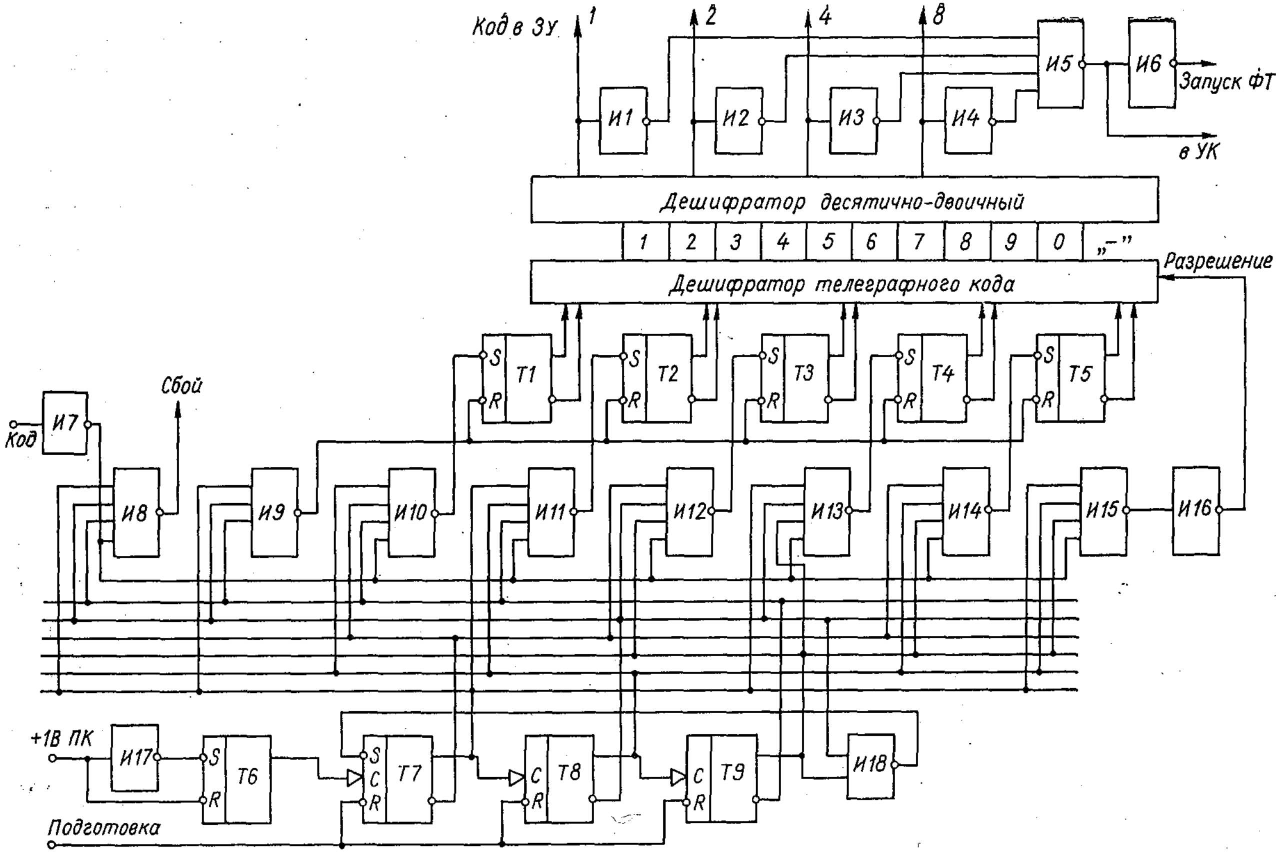


Рис. 4. Преобразователь кода.

поступлении второго разряда телеграфного кода совпадение от счетчика воздействует на *И10* и если принимается «0», то сигналом «0» от *И10* триггер *Т1* переключается в состояние «1». В дальнейшем двоичные разряды телеграфного кода последовательно передаются на триггеры *Т2—Т5*.

При поступлении последнего разряда («стоп») срабатывает элемент *И15*, который через инвертор *И16* подает сигнал разрешения работы дешифратора телеграфного кода. Этот дешифратор состоит из 11 шестивходовых схем «И—НЕ», которые соответствуют цифрам от 0 до 9 и знаку «тире», означающему отсутствие информации по какому-либо параметру. Во время приема цифры или «тире» переключается одна из схем «И—НЕ» и сигнал лог. «0» с одного из выходов дешифратора телеграфного кода поступает в десятично-двоичный дешифратор, где преобразуется в четырехразрядный код в соответствии с табл. 1, который затем записывается в *ЗУ*.

Четыре инвертора на выходе дешифратора и схема «И—НЕ» (*И5, И6*) служат для формирования сигнала «Запуск **ФТ**». Если в преобразователь поступает код, не предназначенный для записи в *ЗУ*, например «пробел», «перевод строки» и т. д., то на выходе десятично-двоичного дешифратора будет код «0000», и *И6* остается в состоянии «1», т. е. сигнал «Запуск *ФТ*» не формируется.

Элемент *И8* служит для выявления «ложного старта»: если в первом разряде принимается «0», то *И8* переключается в состояние «0», что соответствует сбою при приеме метеосообщения.

Запоминающее устройство. На вход *ЗУ* из *ПК* поступает четырехразрядный код цифр или код «тире». На рис. 5 показана часть *ЗУ*, относящаяся к двум младшим разрядам кода. Рассмотрим работу *ЗУ* на примере младшего разряда (регистры *Р1, Р2, Р3*).

Транзистор *Т1* служит для представления логической единицы в виде напряжения —12 В, нужного для работы примененных в *ЗУ* квазистатических регистров сдвига. В режиме записи от устройства контроля на вход *З/ЗУ* подается напряжение —12 В, а на вход *4* — 0 В. При этом диоды *Д2, Д6, Д10* шунтируют сигналы с выходов регистров, не пропуская их на вход этого же регистра. Диоды *Д4*, *Д8* закрыты, благодаря чему сигнал с выхода *Р1* поступает на вход *Р2*, а с выхода *Р2* — на вход *Р3*, т. е. регистры оказываются соединенными последовательно. Сдвиг информации в регистрах на один двоичный разряд и ввод кода в *ЗУ* осуществляются после приема из линии связи очередной телеграфной кодовой комбинации и обеспечиваются подачей двух согласованных во времени тактов на входы *С* и *V* регистров. Содержимое последнего, 16-го разряда регистра передается в первый разряд следующего регистра, а в первый регистр (*Р1*) вносится «0» или «1» в зависимости от сигнала из *ПК*, поступившего на вход *1*.

В режиме регенерации напряжение —12 В подается на вход *4*, а вход *3* соединен с «землей». В результате выход каждого регистра замыкается на его же вход, а связи между регистрами шунтируются диодами *Д4, Д8*. На входы *С* и *V* приходят такты сдвига с частотой 4 кГц. Информация, записанная в каждый регистр, циркулирует

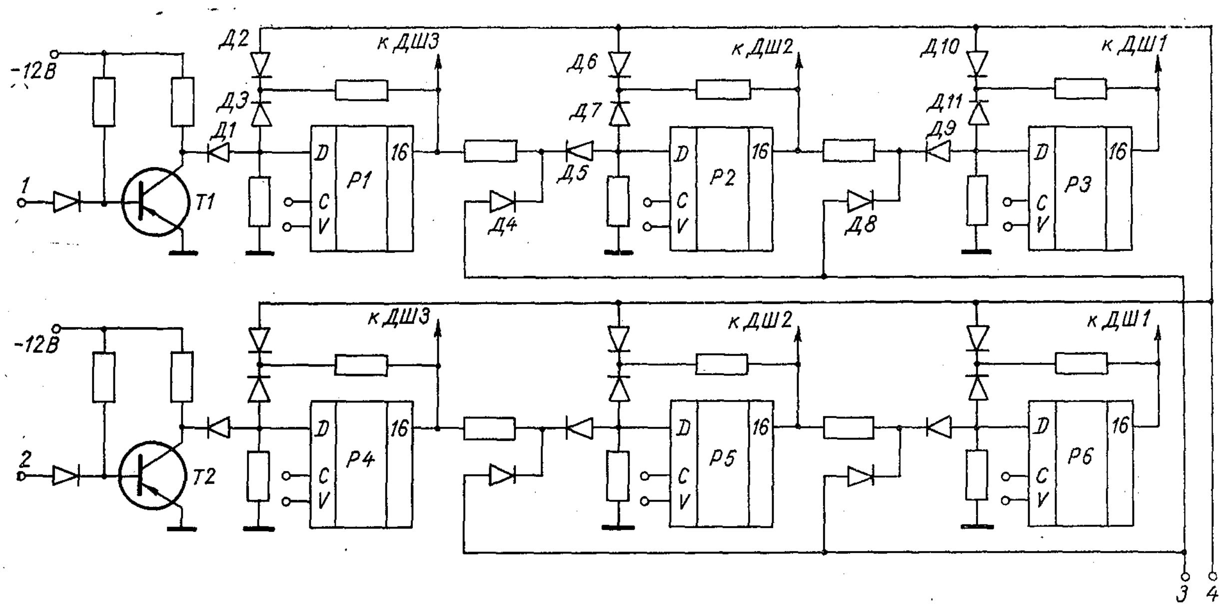


Рис. 5. Запоминающее устройство.

в нем, а также поступает в один из дешифраторов. От регистров *Р1*, *Р4* коды цифр передаются на вход дешифратора *ДШ3* (см. рис. 2), от *Р2*, *Р5* — на вход *ДШ2* и от *Р3*, *Р6* — на вход *ДШ1*.

Дешифратор (рис. 6). Четырехразрядный код, поступающий из *ЗУ*, преобразуется дешифратором в унитарный код. Выходы де-

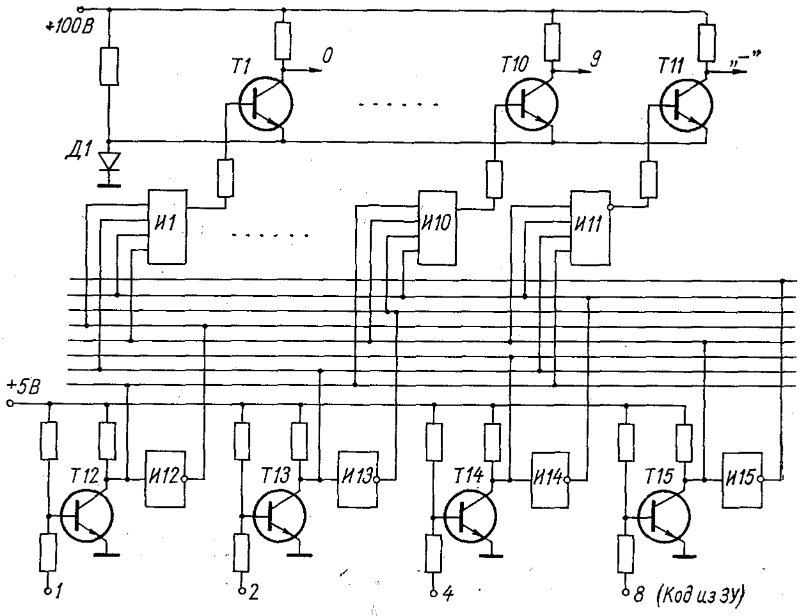


Рис. 6. Дешифратор.

шифратора подключаются к катодам индикаторных ламп, и каждой кодовой комбинации на входе *ДШ* соответствует один открытый выходной транзистор *Т1* — *Т10* (на рисунке транзисторы *Т2* — *Т8* и соответствующие им элементы «И» опущены). Транзисторы *Т12—Т15* служат для перехода от уровня логической единицы сдвигающих регистров (—12 В) к уровню, нужному для микросхем серии 133 (+5 В).

Преобразование кода производится элементами *И1* — *И10*. Когда на четыре входа *ДШ* поступает из *ЗУ* кодовая комбинация, обозначающая какую-либо цифру, один из элементов «И», тот, на все четыре входа которого поступает сигнал лог. «1», переключается в состояние «1» и подключенный к этому элементу транзистор открывается. Источник «+100 В» фиксирует уровень напряжения на коллекторах закрытых транзисторов. Необходимость в такой фиксации вызвана тем, что в случае, когда на *ДШ* поступает код

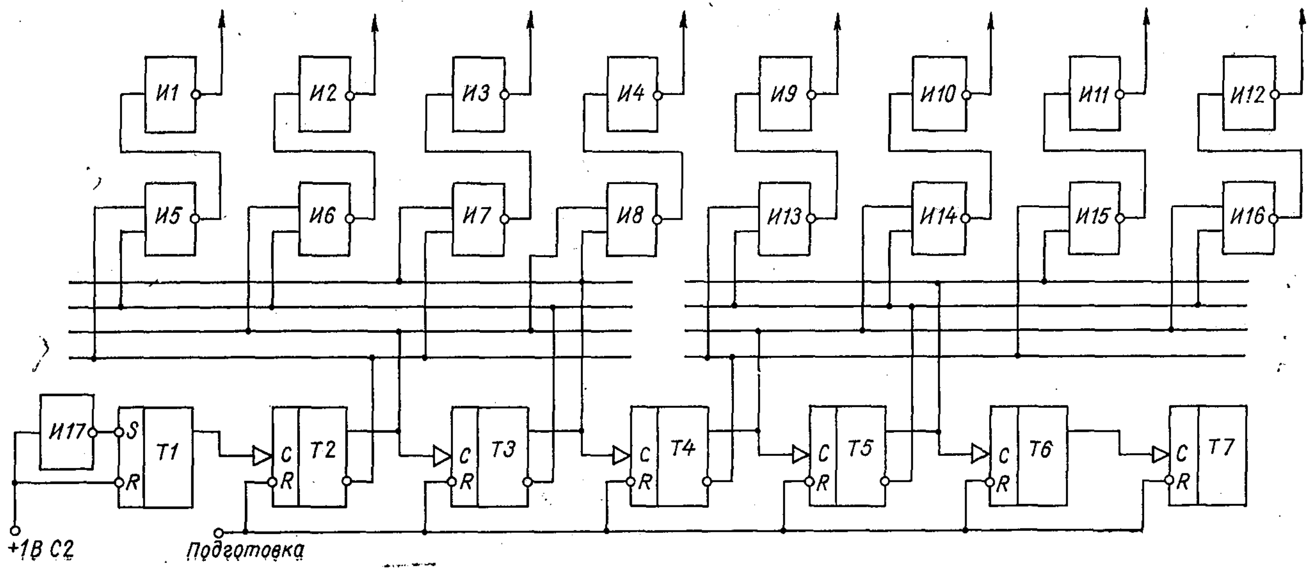


Рис. 7. Счетчик.

«тире», все транзисторы *Т1—Т10* закрыты, а на анод индикаторной лампы независимо от кода поступает напряжение +200 В. Без дополнительного источника напряжения ток через лампу будет зависеть от такого нестабильного параметра, как тепловой ток транзисторов дешифратора.

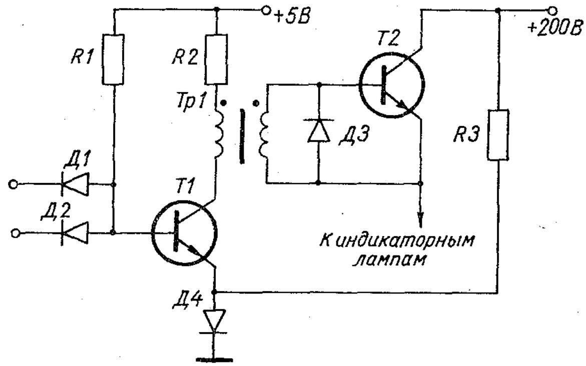


Рис. 8. Ключ коммутатора.

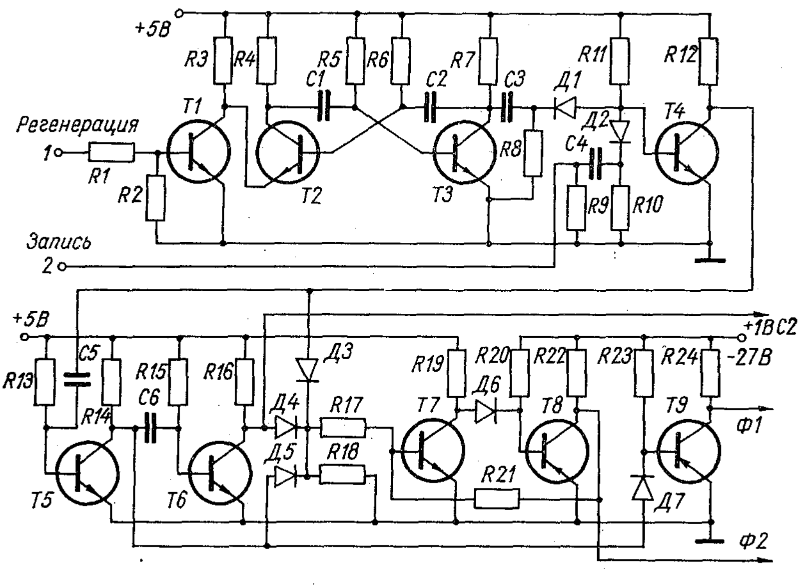


Рис. 9. Формирователь тактов.

Транзистор *Т11* открыт при любом коде на входе *ДШ*, за исключением кода «тире». Это достигается тем, что элемент *И11*, в отличие от *И1 — И10*, дополнительно инвертирует результат выполнения логической операции «И». Низкий уровень напряжения на выходе *И11* будет только в том случае, когда на все входы элемента поступает «1». Воспользовавшись табл. 1, нетрудно убедиться, что нужно подать на входы дешифратора код «тире». С помошью *Т11* подается питание на катоды индикаторных ламп, высвечивающих дополнительные разряды, которые отсутствуют в метеосообщении, например единицы метров высоты нижней границы облаков, дальности видимости (на этих лампах высвечивается цифра «0»). Если сведения о параметре отсутствуют, т. е. поступает «тире», то питание на лампу дополнительного разряда не подается.

Счетчик, коммутатор. На рис. 7 изображен счетчик *С2* с первой ступенью дешифратора *ДШК* (см. рис. 2). Первые четыре разряда *С2* (триггеры *Т2—Т5*) подключены к элементам дешифратора *И5—И8, И13—И16. ДШК* имеет две группы выходов, в каждой группе может быть только одна «1». Вторая ступень *ДШК* представляет собой пары диодов, установленных на входе каждого из 16 ключей коммутатор (рис. 8). К диоду *Д1* подключен один из выходов элементов *И1—И4* дешифратора *ДШК*, а к *Д2* — один из выходов *И9—И12*. Если на оба входа поступает «1» (напряжение +5 В), то *Т1* открывается и импульсом тока во вторичной обмотке трансформатора *Тр1* открывается высоковольтный транзистор *Т2*, подключая источник +200 В к группе из трех ламп. Сопротивление *R3* и диод *Д4* — общие для восьми одинаковых ключей и служат для надежного закрывания *Т1* в случае, когда уровень напряжения на одном из входов ключа соответствует лог. «0».

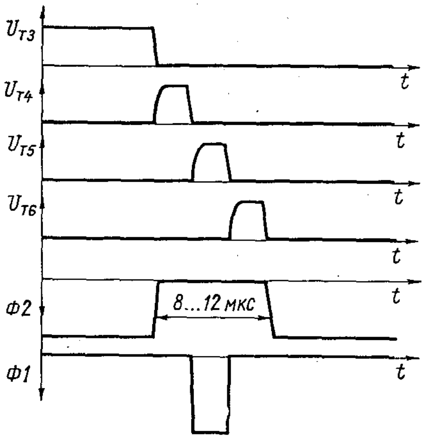


Рис. 10. Временная диаграмма работы *ФТ*.

Формирователь тактов (рис. 9). В режиме регенерации открыт транзистор *Т1* и работает мультивибратор, от которого в формирователь подается сигнал запуска *ФТ*. При приеме информации *Т1* закрыт, мультивибратор не работает, а запуск *ФТ* осуществляется от *ПК* сигналом на входе *2*. Форма тактовых сигналов, нужная для работы *ЗУ*, показана на рис. 10. Здесь же показана форма напряжения на коллекторах *Т3—Т6*.

При переключении транзистора *Т3* мультивибратора в открытое состояние конденсатор *С3* разряжается и на время разряда закрывается *Т4*. Конденсатор *С5* заряжается через сопротивление *R12* и переход эмиттер — база транзистора *Т5*. В дальнейшем после переключения *Т4* в открытое состояние напряжением на *С5* закрывается транзистор *Т5*, а конденсатор *С5* разряжается через сопротивление *R13* и открытый переход эмиттер — коллектор *Т4*. В конце разряда открывается *Т5*. Точно так же формируется импульс напряжения на коллекторе *Т6*. Таким образом, с коллекторов *Т4, Т5,* *Т6* снимаются три сдвинутых по времени импульса, изображенных на рис. 10.

Цепь формирования такта *Ф1* (транзистор *Т9*) управляется непосредственно от *Т5*. Формирование такта *Ф2* производится транзисторами *Т7, Т8;* транзистор *Т8* открыт, если закрыт один из транзисторов *Т4, Т5, Т6*. Кроме тактовых сигналов для *ЗУ*, от *ФТ* с коллектора *Т6* в счетчик *С2* (см. рис. 2) поступают импульсы для подсчета в *С2* числа сдвигов, выполненных запоминающим устройством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматическая станция КРАМС. Под ред. Л. П. Афиногенова и М. С. Стернзата. Л., Гидрометеоиздат, 1974. 218 с.

2. Грушин С. И., Петров Ю. П. Индикаторные устройства для отображения метеорологической обстановки. — «Тр. ГГО», вып. 346, 1976, с. 55—66.

Л. П. Афиногенов, Н. Н. Ерошкевич,
А. И. Мехович, С. М. Стернзат

АВТОМАТИЧЕСКИЕ СТАНЦИИ ДЛЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ (ТЕПЛОБАЛАНСОВЫХ, АКТИНОМЕТРИЧЕСКИХ И АТМОСФЕРНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ) ИЗМЕРЕНИЙ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ — АСГИ

Описываемые в настоящей статье автоматические станции для геофизических измерений (АСГИ) предназначены для оснащения специализированной сети Гидрометслужбы, осуществляющей геофизические измерения. Эта сеть содержит около 200 актинометрических, 80 теплобалансовых и 10 атмосферно-электрических станций. Годовой объем информации, выдаваемый этими станциями в настоящее время, составляет соответственно $3\cdot10^6$, $20\cdot10^6$ и $1{,}2\cdot10^5$ десятичных знаков. Кроме того, имеется потребность в увеличении объема такой информации в 1,5—2 раза за счет увеличения числа измеряемых характеристик, что невозможно сделать на существующей сети [1]. АСГИ предназначены для автоматизации сети, причем их использование позволит рационализировать не только сбор информации, но и ее дальнейшую обработку. Эти станции также могут быть использованы и в других отраслях народного хозяйства.

АСГИ имеют унифицированную для всех трех модификаций (актинометрической, теплобалансовой, атмосферно-электрической) конструкцию, а схемные различия обусловлены только типом используемого в них измерительного блока.

АСГИ осуществляет измерение метеопараметров, представленных в форме напряжения постоянного тока или сопротивления. Центральное устройство АСГИ осуществляет управление работой станции по заданной программе, преобразование и вывод информации на телеграфную ленту и перфоленту РТА, выдает сигналы управления на внешние устройства.

Максимальное число измеряемых параметров АСГИ равно 30, включая измерение трех контрольных напряжений и одного эталонного сопротивления. Включение в каждый цикл измерений определенных контрольных величин позволяет в дальнейшем при машинной обработке информации, записанной на перфоленте, исключать систематические погрешности всего измерительного тракта станции. Время измерения по каждому измерительному каналу не превышает 2 с. Длительность полного цикла измерений и вывода информации не превышает 1,5 мин (с учетом вывода сопутствующей информации).

АСГИ включается в режим измерения и выдачи информации с заранее установленной периодичностью, через 2, 5, 10, 15, 30 мин, 1, 2, 3, 6, 12 ч, а также по команде оператора с пульта управления не более чем через 1 мин после подачи команды.

В состав сообщения, выводимого АСГИ на телеграфную ленту и перфоленту РТА, входят следующие элементы:

1. Признаки начала и конца сообщения, удобные для автоматизированной расшифровки и согласующиеся с требованиями к аппаратуре для передачи данных.

2. Условное обозначение (категория) АСГИ: 01 (актинометрическая, 02 (теплобалансовая), 03 (атмосферно-электрическая).

3. Пятизначный номер станции.

4. Порядковый номер месяца и номер дня в месяце.

5. Время измерения в часах и минутах.

6. Признак служебной группы или однозначный номер измерительного канала.

7. Четырехзначная информация по каждому измерительному каналу (трехразрядный параметр и знак).

АСГИ построена по блочному принципу, рассчитанному на возможность раздельного производства и проверки блоков, их легкую замену при ремонте.

Блок-схема АСГИ показана на рис. 1. В состав АСГИ входят: устройство измерения и преобразования информации (*УИП*), измерительный блок (*ИБ*), устройство вывода информации (рулонный телеграфный аппарат *РТА* с перфоратором), распределительный щит (*РЩ*). *УИП* содержит следующие блоки:

1. Блок коммутации и контроля (*БКК*), осуществляющий подачу управляющих сигналов на измерительный блок (*ИБ*) и формирующий эталонные сигналы для тестовой проверки измерительного тракта *УИП*.

2. Блок преобразования напряжения (*БПН*), осуществляющий преобразование сигнала постоянного напряжения в непрерывный частотный сигнал.

3. Блок цифровой обработки (*БЦО*), преобразующий непрерывный частотный сигнал в код и осуществляющий формирование установленного формата для вывода информации.

4. Блок хронизатора (*БХР*), осуществляющий формирование необходимой сетки частот для синхронизации работы всех блоков *УИП*, обеспечивающий хранение времени и формирование кода текущего времени с целью вывода одновременно с информацией об измеренных параметрах, а также вывод временных отметок (один раз в секунду, один раз в минуту и один раз в пять минут) на внешние устройства АСГИ.

5. Блок управления станцией (*БУС*), осуществляющий формирование сигналов и команд всеми устройствами АСГИ по жестко заданным программам, реализующим соответствующие алгоритмы функционирования АСГИ в различных режимах работы.

6. Пульт управления (*ПУ*), обеспечивающий ручное управление режимами работы АСГИ, в том числе изменение программы *БУС*, а также позволяющий производить визуальный контроль за исполнением программы.

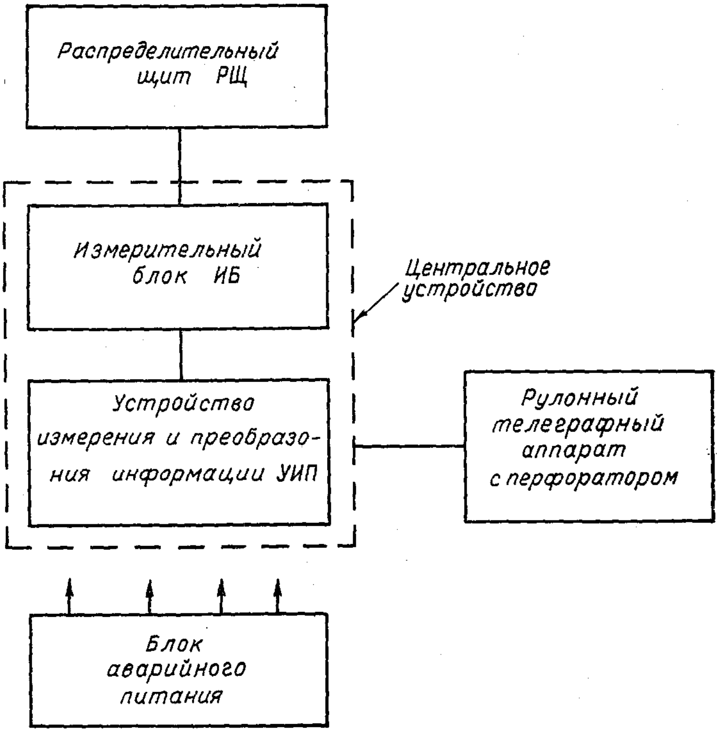


Рис. 1. Блок-схема АСГИ.

7. Блок цифровой индикации (*БЦИ*), обеспечивающий возможность визуального считывания текущего времени и значений измеренных параметров при выполнении регламентных проверок *УИП*.

8. Блоки питания, которые являются вторичными источниками питания электронных блоков и узлов *УИП* и осуществляют преобразование переменного напряжения от сети в постоянное напряжение с необходимыми номинальными значениями.

УИП АСГИ в большой степени унифицировано с устройством измерения и преобразования информации автоматической станции контроля качества поверхностных вод.

Измерительные блоки (*ИБ*) предназначены для преобразования сигналов, поступающих с датчиков и измерительных преобразователей в форме напряжения постоянного тока или сопротивления, в унифицированный сигнал — напряжение постоянного тока, изменяющееся в диапазоне ± 1 В, которое подается на блок преобразования напряжения *УИП*. В состав *ИБ* входят мостовые схемы с коммутирующими элементами, операционный усилитель с перестраиваемым коэффициентом усиления и элементы, обеспечивающие контроль точностных характеристик АСГИ в каждом цикле измерения.

Основная приведенная погрешность всего измерительного тракта АСГИ не превышает 0,5%. Измерительные блоки АСГИ конструктивно и в значительной мере также и схемно унифицированы для всех типов АСГИ.

Таблица 1

№ пп.	Измеряемый метеопараметр	Диапазон измерения	Предел допускаемой погрешности
1	$t_{оп}$	± 50°C	± 1C°
2	$t'_{оп}$	$0 \div +50$°C	± 1°C
3,4	Δt_1; Δt_2	± 10°C	$\pm 0{,}1$°C
5,6	$\Delta t'_1$; $\Delta t'_2$	± 10°C	$\pm 0{,}1$°C
7	$\overline{v}_{оп}$	$0 \div 40$ м/с	$\pm(0{,}5+0{,}05)$ м/с
8,9	$\Delta \overline{v_1}$; $\Delta \overline{v_2}$	± 10 м/с	$\pm 0{,}3$ м/с
10	B	$-0{,}5 \div +1{,}5$ кал/(см^2·мин)	$\pm 0{,}15$ кал/(см^2·мин)
11—19	$t_{п1} - t_{п9}$	$-50 \div +60$°C	$\pm 0{,}2$°C

УИП с конструктивно входящим в него *ИБ* образует центральное устройство (*ЦУ*) АСГИ. Комплектация *ЦУ* тем или иным видом *ИБ* практически определяет модификацию станции.

Распределительный щит унифицирован для всех типов АСГИ, через него осуществляется подключение датчиков и вспомогательного оборудования к станции.

Блок автономного питания обеспечивает сохранение работоспособности станции при временном прекращении подачи электроэнергии (на срок до 3,5 ч).

Автоматическая станция для теплобалансовых измерений предназначена для измерения метеорологических величин, используемых при расчете составляющих теплового баланса.

Станция производит измерение и регистрацию (на цифропечать и перфоленту) следующих величин: температуры воздуха $t_{оп}$ на опорном уровне 2 м, разности температур Δt между уровнями 0,5 и 8 м относительно опорного уровня 2 м, температуры смоченного термометра $t'_{оп}$ на опорном уровне 2 м, разности температур смоченных термометров $\Delta t'$ на уровнях 0,5 и 8 м относительного опорного уровня 2 м, средней скорости ветра (за 5 мин) $\bar{v}_{оп}$ на опорном уровне 1 м, разности средних скоростей ветра $\Delta \bar{v}$ между уровнями 0,5 и 8 м относительно опорного уровня 1 м, радиационного баланса B, температуры почвы $t_п$ на 9 глубинах, а также измерение контрольных величин.

Основные характеристики станции приведены в табл. 1.

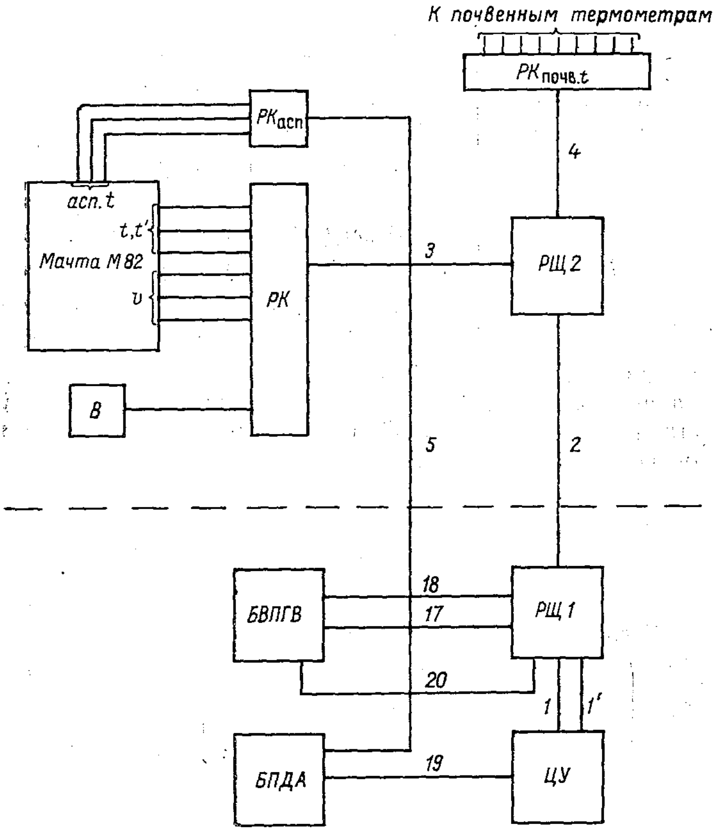


Рис. 2. Блок-схема автоматической станции для теплобалансовых измерений.

Максимальное количество измеряемых метеопараметров, по которым автоматическая станция может выдавать информацию, равно 26. Измерительный блок станции построен таким образом, что при подключении соответствующих датчиков обеспечивается возможность измерять дополнительно разности температур воздуха и температур смоченных термометров на двух уровнях относительного опорного уровня 2 м, измерять радиационную температуру почвы (с одновременным измерением температуры корпуса датчика радиационной температуры почвы), разности средних скоростей ветра на двух уровнях относительного опорного уровня 1 м. Кроме этого, предусмотрена возможность подключения к станции дополнительных измерительных преобразователей, имеющих выходной сигнал в форме напряжения постоянного тока (с пределами изменения ± 1 В) или сопротивления (с пределами изменения от 400 до 600 Ом).

Таблица 2

№ пп.	Измеряемый метеопараметр	Диапазон изменения	Предел допускаемой погрешности
1	S	$0 \div 1{,}7$ кал/(см²·мин)	$\pm 0{,}09$ кал/(см²·мин)
2	D	$0 \div 1{,}2$ кал/(см²·мин)	$\pm 0{,}06$ кал/(см²·мин)
3	Q	$0 \div 2$ кал/(см²·мин)	$\pm 0{,}1$ кал/(см²·мин)
4	R	$0 \div 1{,}2$ кал/(см²·мин)	$\pm 0{,}06$ кал/(см²·мин)
5	B	$-0{,}5 \div +1{,}5$ кал/(см²·мин)	$\pm 0{,}15$ кал/(см²·мин)

Блок-схема автоматической станции для теплобалансовых измерений показана на рис. 2. В состав станции входят следующие блоки: центральное устройство (*ЦУ*), блок вторичного преобразования градиентов ветра (*БВПГВ*), блок питания двигателей аспирации

Таблица 3

№ пп.	Измеряемый метеопараметр	Диапазон изменения	Предел допускаемой погрешности
1	E (I диапазон)	± 500 *В*/м	$\pm(20+0{,}05\,E)$
2	E (II диапазон)	± 5000 *В*/м	$\pm(200+0{,}05\,E)$
3	λ_+	$(0 \div 30)\cdot 10^{-15}$ сим/м	$\pm(1{,}5\cdot 10^{-15}+0{,}05\,\lambda)$
4	λ_-	$(0 \div -30)\cdot 10^{-15}$ сим/м	$\pm(1{,}5\cdot 10^{-15}+0{,}05\,\lambda)$
5, 6, 7	$N_1 - N_3$		$\pm 25\%$ (за сезон)

(*БПДА*). Эти блоки устанавливаются в помещении и соединяются между собой и с остальным оборудованием станции линиями связи (номера *1*, *Г*, *17—20*, *2*, *5*).

Психрометры и анемометры устанавливаются на мачте *М82* и соединяются через распределительную коробку *РК*, линию связи *3*, распределительный щит *РЩ2*, линию связи *2* и распределительный щит *РЩ1*, который расположен в помещении и связан с *ЦУ* (через линии связи *1*, *Г*) и с *БВПГВ* (через линии связи *17*, *18*). Напряжение аспирации подается на двигатели психрометров из *БПДА* через линию связи *5* и распределительную коробку $РК_{асп}$.

Почвенные термометры соединяются с *ЦУ* через распределительную коробку $РК_{почв.\,t}$ линию связи *4*, распределительный щит *РЩ2*, линию связи *2* и *РЩ1*.

Актинометрические датчики подключаются к *ЦУ* через распределительную коробку *РК*.

Автоматическая станция для актинометрических измерений предназначена для измерения составляющих радиационного баланса. Станция производит измерение и регистрацию (на цифропечать и перфоленту) прямой солнечной радиации (S), рассеянной радиации (D), суммарной радиации (Q), отраженной радиации (R) радиационного баланса (B), а также контрольных величин для последующей коррекции данных при машинной обработке. Основные характеристики станции приведены в табл. 2.

В качестве датчика радиационного баланса используется балансомер М-10М, датчики суммарной, отраженной и рассеянной радиации построены с применением термобатареи, аналогичной головке пиранометра М-115М, для измерения прямой солнечной радиации применяется актинометр М-3 измененной конструкции.

Автоматическая станция для атмосферно-электрических измерений предназначена для измерения параметров атмосферного электричества. Станция производит измерение и регистрацию (на цифропечать и перфоленту) следующих элементов: напряженности электрического поля (E), полярных электропроводностей воздуха (λ_+, λ_-), числа грозовых разрядов (N), а также контрольных величин, используемых при последующей коррекции данных при машинной обработке. Основные характеристики станции приведены в табл. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афиногенов Л. П., Русин Н. П. Задачи автоматизации геофизических измерений и научных исследований. — «Тр. ГГО», 1973, вып. 300, с. 3—14.

Е. В. Романов

ОПЫТ ЭКСПЛУАТАЦИИ КРАМС В АЭРОПОРТАХ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Установка комплексных радиотехнических автоматических метеорологических станций КРАМС [1] в аэропортах гражданской авиации (ГА) началась в конце 1971 г. Выпущенные за истекшие годы станции введены в эксплуатацию на авиаметстанциях (АМСГ) и работают; ежегодно вводится в эксплуатацию около 10 станций.

В крупных аэропортах (Москва, Ленинград, Киев, Минск и др.) с целью обеспечения бесперебойности работы установлены комплексы из основной и резервной станций. Центральное устройство одной из двух станций комплекса обычно находится в холодном резерве и его готовность периодически проверяется.

Станция КРАМС представляет собой автоматически работающее устройство и содержит:

— комплект метеорологических измерительных приборов (датчиков);

— центральное устройство (*ЦУ*), предназначенное для опроса датчиков, обработки и выдачи результатов измерений;

— устройства представления информации (цифровые индикаторные устройства и телеграфные аппараты).

Датчики КРАМС по характеру их размещения относительно *ЦУ* можно разделить на ближние и дальние. К ближним относятся блок датчиков температуры и влажности (*ДТВ*), датчик параметров ветра (*ДПВ*) с блоком вторичных преобразований параметров ветра (*БВППВ*), датчик давления (*ДД*) и датчик грозы (*ДГ*). Их устанавливают на метеорологической площадке обычно у одного из стартово-диспетчерских пунктов (*СДП*) и подключают непосредственно к *ЦУ* при помощи комплекта кабелей КРАМС. Дистанционность этих датчиков не превышает 300 м, а *ДД* устанавливается в одном помещении с *ЦУ* на расстоянии от него не более 6 м.

К дальним датчикам относятся РДВ и ИВО. Для обеспечения дистанционного управления и измерения ИВО КРАМС комплектуются приставками ДВ-1. Дальние датчики подключаются к *ЦУ* КРАМС через дистанционный блок (*ДБ*) по линиям связи аэропорта. Схема их подключения позволяет оператору практически

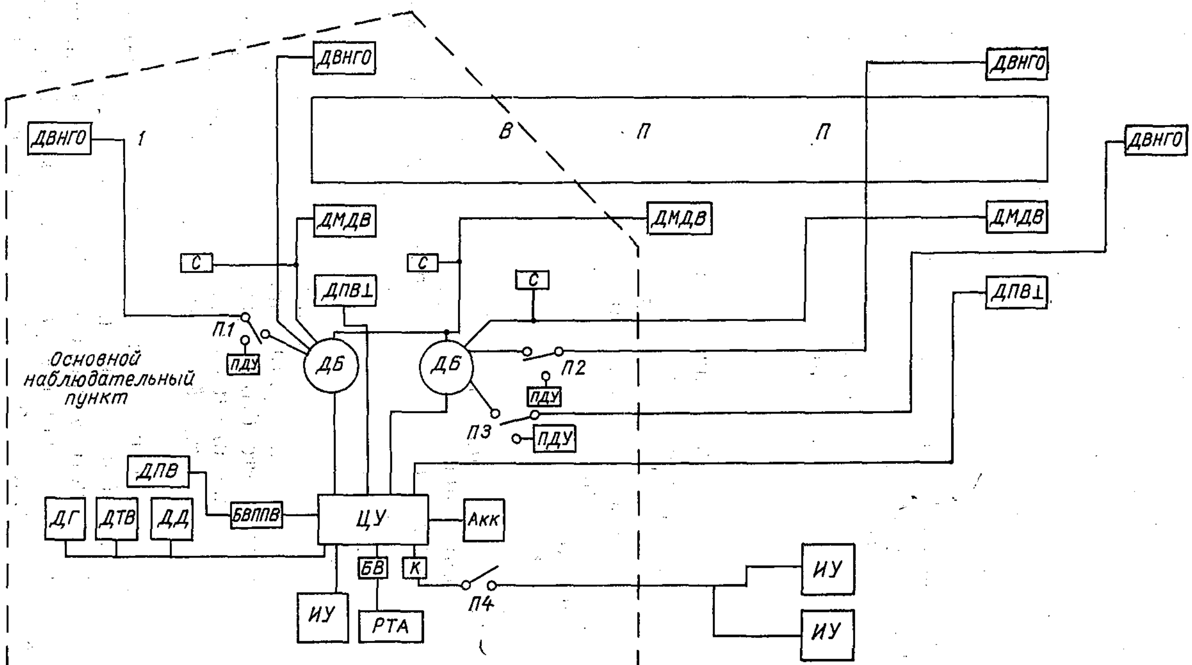

ДВНГО
1
ДВНГО
ДВНГО
ДВНГО
В
П
П
ДМДВ
ДМДВ
ДМДВ
С
С
С
ДПВ⊥
ДПВ⊥
П.1
ПДУ
ДБ
ДБ
П2
ПДУ
П3
ПДУ
Основной
наблюдательный
пункт
ДПВ
БВППВ
ЦУ
Акк
ДГ
ДТВ
ДД
БВ
К
П4
ИУ
ИУ
ИУ
РТА

Рис. 1.

в любое время снимать показания (в том числе дистанционно) с их индикаторов, осуществляя контроль за правильностью результатов автоматических измерений, а в случае отказа *ЦУ* использовать эти датчики в качестве автономно работающих установок.

В группу дальних датчиков входят также и дополнительные *ДПВ*, устанавливаемые вблизи *СДП* и предназначенные для определения максимальной скорости ветра на рабочем старте. По показаниям этих датчиков в центральном устройстве производится вычисление компоненты скорости ветра, нормальной к взлетно-посадочной полосе (*ВПП*).

Размещение КРАМС в аэропорту осуществляется по типовой схеме (рис. 1). Оборудование основного наблюдательного пункта обведено штриховой линией. Сюда входят *ЦУ*, ближние датчики, оба *ДБ*, а также по одному *ДВНГО* (ИВО с приставкой ДВ-1), *ДМДВ* (РДВ) и *ДПВ*⊥. С целью обеспечения возможности автономного использования дальних *ДВНГО* и *ДМДВ* на основном наблюдательном пункте устанавливаются самописцы и указатели (*С*) всех РДВ, а также пульты дистанционного управления (*ПДУ*) ДВ-1.

Размещение КРАМС по этой схеме позволяет выполнить монтаж оборудования на основном пункте без использования линий связи аэропорта (которые иногда отсутствуют), запустить станцию в работу и начать опытную эксплуатацию. Затем (после выделения линий или прокладки новых) включаются дальние датчики. Кроме того, сосредоточение большей части оборудования на основном наблюдательном пункте упрощает техническое обслуживание, ремонт и эксплуатацию станции, поскольку уменьшается число разъездов по территории аэропорта.

Для более быстрого ввода КРАМС в эксплуатацию необходимо до получения станции провести подготовительные работы. Надо подготовить фундаменты, домики или фермы для *ДВНГО* и *ДМДВ*, подвести электроэнергию к местам установки приборов, выделить (или проложить) и проверить линии связи до мест установки дистанционных блоков.

В здании основного наблюдательного пункта нужно:

— выделить помещение для установки двух дистанционных блоков (желательно, чтобы это была отдельная комната, приспособленная для выполнения ремонтных операций, хранения технической документации, запасных деталей, инструмента, измерительной аппаратуры и пр.);

— подготовить место в помещении оператора (наблюдателя) для *ЦУ*, *БВППВ, РТА* с блоком вызова (*БВ*), пульта ИВО с ДВ-1, контрольного индикаторного устройства (*ИУ*), датчика давления, самописцев, указателей и пультов управления всех РДВ и ДВ-1;

— подвести электроэнергию к местам установки всех перечисленных блоков;

— выделить помещение для аккумуляторов;

— подготовить каналы для кабелей от места установки *ЦУ* на метеоплощадку, к помещению установки *ДБ* и к аккумуляторам;

— провести шины заземления к местам установки приборов.

После получения станции и проверки ее комплектности производится монтаж, который в летнее время занимает не более 1,5—2 чел/мес. Перед установкой датчиков *ДТВ*, *ДПВ*, *ДГ* на метеоплощадке обязательно должна производиться их стыковка с *ЦУ* в помещении в комплекте с кабелями (в бухтах). Это позволяет быстро отыскать возможные дефекты, возникшие при транспортировке, и облегчает их дальнейшее устранение[1].

Опыт эксплуатации станций показал, что после отладки на месте они работают достаточно надежно. Если в качестве критерия надежности взять время наработки на ремонт *ЦУ* (исключая мелкие неполадки, устраняемые специалистами АМСГ самостоятельно), то оно, по экспериментальным данным, составило в среднем 6000 ч. Для подсчета этого времени были взяты одновременно эксплуатировавшиеся 10 станций. Следует отметить, что простой станций определялся в основном ожиданием приезда ремонтной бригады завода-изготовителя и составил в среднем 2000 ч на один ремонт (сам ремонт обычно выполнялся быстро и занимал не более 20 ч).

Это показывает, насколько важно аварийный ремонт КРАМС организовать в УГМС, подготавливая для этого своих специалистов высокой квалификации, которые могут оперативно выезжать на АМСГ, где возникают неисправности. Для успешной работы ремонтных групп необходим групповой ЗИП, основой которого должна быть развернутая в помещении УГМС технологическая станция. Ремонт во многих случаях может быстро выполняться заменой неисправных блоков с их последующим восстановлением на технологической станции. Такой метод применяет ремонтная группа УГМС БССР. Технологическая станция может также использоваться для повышения квалификации персонала АМСГ, обслуживающего КРАМС.

Кроме специализированных групп в УГМС, на АМСГ должны быть выделены лица по текущему техническому обслуживанию дальних датчиков, а также специалист, обеспечивающий работу оборудования основного наблюдательного пункта (*ЦУ*, ближние датчики и др.).

Проводившиеся в течение всего времени эксплуатации сравнения данных КРАМС с данными штатных приборов АМСГ показали, что измерительные каналы станции работают устойчиво и по точностным характеристикам не уступают стандартным сетевым приборам. При синхронных отсчетах среднеквадратическое значение разности показаний сравниваемых приборов не превышало ни по одному каналу суммарной среднеквадратической инструментальной погрешности, взятой из паспортных данных. При несинхронности, составляющей несколько минут, среднеквадратическое значе-

[1] Устранение дефектов производит завод-изготовитель, который в срок до трех лет обязан выполнять гарантийный ремонт. Он же должен осуществлять запуск станций; при невыезде представителей завода в согласованный срок на запуск станции УГМС осуществляет пуск в эксплуатацию своими силами, а при наличии дефектов предъявляет рекламацию.

ние разности показаний возрастало для ближних датчиков в два-три раза, что может быть взято за практический критерий качества работы станций по таблицам сравнения. Аналогичный контроль при несинхронности для каналов высоты нижней границы облаков и метеорологической дальности видимости практически невозможен ввиду сильной изменчивости этих метеоэлементов.

Состав информации КРАМС и периодичность ее обновления еще не полностью отвечают требованиям наставления НМОГА-73. Согласно наставлению, информация о погоде на АМСГ должна обновляться в 25 (20) и 55 (50) мин каждого часа, а при ухудшении видимости и понижении высоты облаков за установленные пределы

Таблица 1

Перечень изменений в долговременном запоминающем устройстве КРАМС

№ тыс.	Адрес	Было	Надо	Назначение
1	571	—	16 203	Повторная выдача на *ИУ* и *РТА* по вызову с *БВ РТА*
2	200	000005	00 571	
2	202	04 797	18 918	
2	247	04 779	04 798	Автоматический переход к учащенным измерениям
2	252	15 137	16 234	
1	894	18 937	18 348	Обеспечение сдвига сроков
1	755	00 028	00 020	(константа получасового режима)
1	754	00 008	00 005	(константа 15-минутного режима)

должны производиться дополнительные наблюдения в 10 (5) и 40 (35) мин каждого часа. КРАМС же может выдавать информацию с периодичностью 30 мин в 02 и 32 мин или с периодичностью 10 мин в 02, 12, 22, 32, 42, 52 мин каждого часа. Эти сроки не совпадают со сроками АМСГ. Однако информацию КРАМС можно получить по запросу. Наличие же многочисленных лишних выдач и необходимость выполнять запрос перегружают наблюдателя.

В связи с этим нами разработаны изменения программы КРАМС, обеспечивающие автоматическую выдачу информации на *ИУ* (с дублированием на *РТА*) в 24 и 54 мин в получасовом режиме работы и в 09, 24, 39, 54 мин в 15-минутном режиме, в который станция переходит автоматически без смены режима при помощи переключателя на пульте *ЦУ* при ухудшении видимости и понижении нижней границы облаков по показаниям приборов *ДМДВ* и *ДВНГО*. Эти изменения представлены в табл. 1. Константы в адресах 754 и 755 должны быть уменьшены на пять единиц, если необходимо обеспечить выдачи на 5 мин раньше, т. е. в 04, 19, 34, 49 мин.

В этой же таблице приведены изменения программы для обеспечения повторной выдачи информации на *ИУ*, необходимой при сбоях в передаче или после устранения оператором ошибок измерений, прямо в оперативном запоминающем устройстве через пульт *ЦУ* простым нажатием на кнопку, расположенную на блоке вызова *РТА*. Выполнение повторной выдачи нажатием на кнопку более удобно, чем предложенное в [2] использование тест-программы, поскольку исключаются последствия возможного неправильного к ней обращения. Для запрещения нежелательных выдач на выносные *ИУ* или гашения ложной уже выданной информации оператор, как это и рекомендовано в [2], пользуется соответственно выключателем *П4* и кнопкой гашения *К* (см. рис. 1).

Для выполнения требования НМОГА-73 реагировать на запрос не позднее чем через 2 мин (в КРАМС это время составляет 5—6 мин) необходимо ввести в станцию режим работы без выключения питания *ДВНГО*. Программные изменения для осуществления такого режима разработаны и после эксплуатационной проверки будут внедряться на действующих станциях. Требуемый для этого объем изменений долговременного запоминающего устройства составляет 60—70 адресов.

Таким образом, незначительные изменения программы КРАМС и правильная методика работы со станцией, рекомендованная в [2] и изложенная выше, позволяют наблюдателям АМСГ эффективно использовать станцию в своей оперативной работе. Некоторые ограничения накладывает несоответствие объема и характера передаваемой информации требованиям наставления (отсутствие вычислений видимости огней высокой интенсивности, вычисление параметров ветра на 10-минутном интервале вместо 2-минутного, отсутствие некоторых ручных вводов), преодоленное в модернизированной станции КРАМС-М благодаря увеличению объема долговременного запоминающего устройства на 20% и существенной переработке программы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматическая станция КРАМС. Под ред. Л. П. Афиногенова и М. С. Стернзата. Л., Гидрометеоиздат, 1974. 217 с.

2. Романов Е. В. Принципы размещения и особенности эксплуатации КРАМС в аэропортах. — «Тр. ГГО», 1976, вып. 346, с. 3—9.

С. А. Капустин

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ДАТЧИКА МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ ДАЛЬНОСТИ ВИДИМОСТИ

При разработке функционального преобразователя для датчика метеорологической дальности видимости (м. д. в.) за основу была принята схема мультивибратора, описанная в работе [2]. Экспериментальные исследования схемы показали, что зависимость частоты мультивибратора от управляющего напряжения с достаточной для практического использования точностью совпадает с теоретической кривой зависимости м. д. в. от коэффициента прозрачности атмосферы [1, 2]. Вместе с тем, амплитуда и длительность импульсов на выходе мультивибратора изменяются в широких пределах при изменении управляющего (входного) напряжения (рис. 1). Поэтому исходная схема была усовершенствована с целью обеспечения на выходе импульсов прямоугольной формы, а также постоянной их амплитуды и длительности. При этом учитывались дополнительные требования: возможность подключения к выходу преобразователя не только цифрового, но и стрелочного индикатора, а также дистанционность измерения.

В данной работе приводится описание всей схемы преобразователя, которая реализована в опытном образце датчика метеорологической дальности видимости. В конце приведены данные элементов схемы и питания.

Преобразователь (рис. 2) состоит из следующих функциональных узлов: а) управляемого мультивибратора-генератора однополярных импульсов, собранного на транзисторах *Т2* — *Т6*; б) инвертора-ограничителя (транзистор *Т8*); в) заторможенного мультивибратора-формирователя, собранного на транзисторах *Т10* и *Т11*; г) входного и выходного каскадов (эмиттерные повторители на транзисторах *Т1* и *Т12*); д) согласующих каскадов (повторители на транзисторах *Т7* и *Т9*).

Входной каскад предназначен для обеспечения высокого, порядка 100—150 кОм, входного сопротивления преобразователя. Выходной каскад служит для исключения влияния внешней нагрузки, подключаемой к выходу преобразователя, на работу мультивибратора-формирователя. Эмиттерный повторитель на транзисторе *Т7* обеспечивает согласование выхода мультивибратора-генератора со входом инвертора-ограничителя. Повторитель на транзисторе *T9* предназначен для согласования входного сопротивления формирователя *T10 — T11* с выходным сопротивлением инвертора.

Принцип работы мультивибратора-генератора описан в [2]. Транзистор *T4* введен в схему генератора для расширения частотного диапазона и улучшения фронтов его импульсов и на принцип работы не влияет.

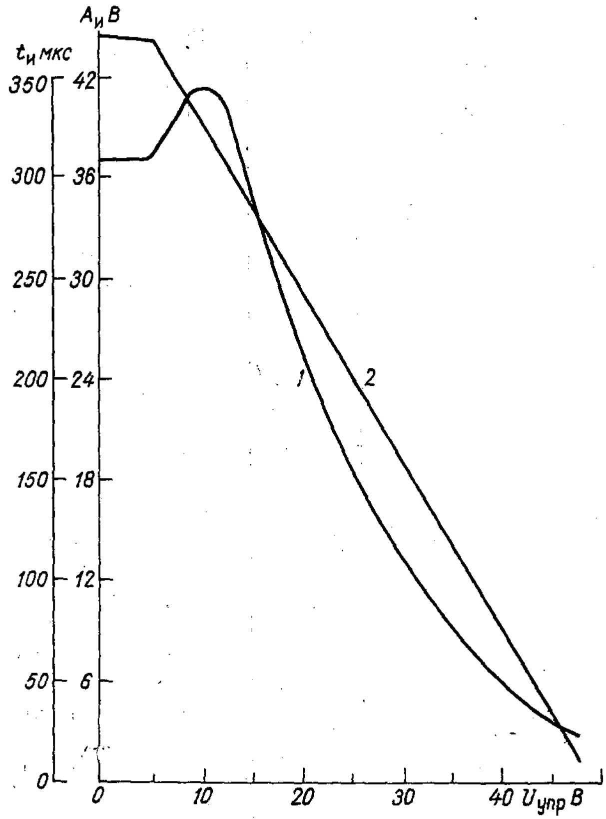


Рис. 1. Параметры генерируемых импульсов в функции управляющего напряжения.
1 — длительность, *2* — амплитуда.

С транзистора *T4* мультивибратора (рис. 2) импульсы положительной полярности подаются через повторитель *T7* на базу инвертора-ограничителя. Последний построен по схеме с местной последовательной связью по переменному току, глубина которой определяется его эмиттерным сопротивлением *R9*. Подобные инверторы, как показано в [3], имеют как большое входное, так и весьма большое выходное сопротивление, составляющее, как правило, десятки

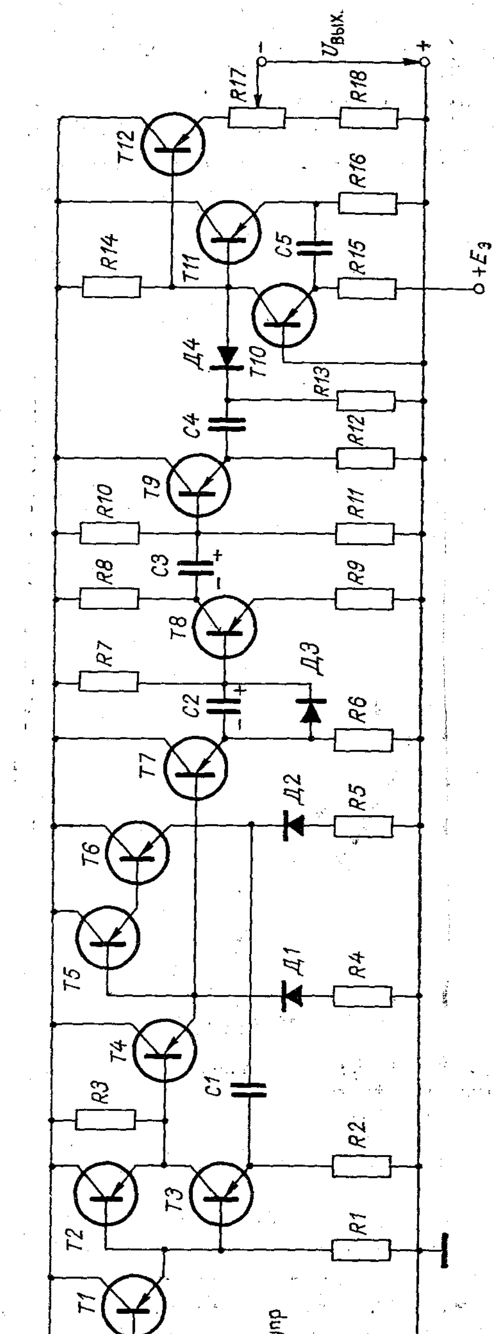


Рис. 2. Полная электрическая схема функционального преобразователя.

и сотни тысяч ом. (Это и определяет необходимость в схеме функционального преобразователя повторителей на транзисторах *T7* и *T9*.)

Инвертор изменяет полярность импульсов и ограничивает амплитуду по уровню таким образом, что на выходе инвертора амплитуда остается постоянной (в данном случае 14 В) при изменении управляющего напряжения на входе преобразователя от 0 до 0,8 $E_к$. Дальше амплитуда импульсов уменьшается, составляя при критическом напряжении управления (соответствующем срыву генерации) величину порядка 2 В.

Формирователь представляет собой заторможенный мультивибратор с эмиттерной времязадающей цепью, собранной по схеме ОБ-ОК и имеющий два независимых источника питания. Такая схема по сравнению с другими имеет ряд существенных достоинств [4], в том числе малое время восстановления (что обеспечивает широкий частотный диапазон) и стабильную форму импульсов. В исходном состоянии транзистор *T11* формирователя закрыт, конденсатор *C5* разряжен, диод *Д4* открыт, транзистор *T10* насыщен. С приходом на базу транзистора *T11* импульса отрицательной полярности с сопротивления

R13 транзистор *T11* открывается, конденсатор заряжается, транзистор *T10* закрывается, происходит формирование выходного импульса, длительность которого превышает длительность импульса запуска. Диод *Д4* в это время закрывается, отключая цепь запуска от мультивибратора. Вследствие этого длительность запускающих импульсов, об изменении которых речь шла выше, не влияет на нормальную работу мультивибратора. По окончании формирования импульса транзисторы мультивибратора, конденсатор и диод возвращаются в исходное состояние.

Мультивибратор формирует однополярные прямоугольные импульсы, амплитуда и длительность которых определяется только элементами схемы и не зависит от частоты (в конечном счете — от управляющего напряжения на входе преобразователя). Рабочие импульсы, отрицательной полярности, снимаются с коллектора транзистора *T10*.

Обозначение	Тип, величина	Обозначение	Тип, величина	Обозначение	Тип, величина	Обозначение	Тип, величина
T1 ... T12	МП26Б	*R6*	10к±5%	*R12*	10к±10%	*R18*	2,7к±10%
R1	5,6к±10%	*R7*	680к±5%	*R13*	12к±5%	*C1*	0,033мкФ
R2	150к±10%	*R8*	7,5к±5%	*R14*	16к±5%	*C2, C3*	2—10мкФ
R3	20к±5%	*R9*	1,8к±5%	*R15*	11к±5%	*C4*	0,022мкФ
R4	47к±10%	*R10*	51к±10%	*R16*	3,3к±5%	*C5*	0,015—0,022мкФ
R5	5,6к±10%	*R11*	11к±5%	*R17*	3,3к±10%	*Д1 ... Д4*	Д223А

Экспериментальная проверка реализованного по схеме рис. 2 преобразователя подтвердила линейную зависимость между уровнем постоянной составляющей напряжения на выходе и частотой импульсов

$$U_{\text{вых}} = aF \tag{1}$$

в широком рабочем диапазоне. Так как частота мультивибратора-генератора F связана с величиной м. д. в. $S_{\text{м}}$ линейной зависимостью [2]

$$S_{\text{м}} = kF, \tag{2}$$

описанный преобразователь обеспечивает линейную зависимость между величиной м. д. в. и частотой или уровнем постоянной составляющей напряжения на выходе преобразователя:

$$S_{\text{м}} = k_1 F = k_2 U_{\text{вых}}. \tag{3}$$

При этом шкала измерительного прибора будет всегда равномерной.

Предотвращение срыва колебаний мультивибратора-генератора при возможном повышении управляющего напряжения до критического значения (и выше) осуществляется диодным ограничением на входе преобразователя (на схеме не показано). Экспериментальная проверка ограничения (с использованием диода, стабилитронов и лишь одного источника $E_к$ схемы) показала хорошие результаты; при этом входное сопротивление преобразователя не снижается.

В табл. 1 приведены данные элементов схемы.

Питание схемы осуществляется от двух стабилизированных источников напряжением 50 В каждый. Потребление тока не превышает 35 мА от источника коллекторного напряжения $E_к$ и 8 мА — от эмиттерного $E_э$.

Описанный преобразователь может найти применение не только в измерителе дальности видимости, но и в ряде других приборов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стернзат М. С. Метеорологические приборы и наблюдения. Л., Гидрометеоиздат, 1968. 464 с.

2. Капустин С. А., Карпуша В. Е., Круглов Р. А. Электронный функциональный преобразователь для датчика метеорологической дальности видимости.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 342, с. 87—93.

3. Степаненко И. П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. М., «Энергия», 1973. 608 с.

4. Яковлев Н. В. Импульсные генераторы на транзисторах. Киев, «Техника», 1968. 444 с.

И. А. Арбузов, Н. Г. Протопопов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ АНЕМОМЕТРОВ

В настоящее время для измерения скорости ветра широко используются как чашечные, так и лопастные вращающиеся анемометры. Установлено [1], что лопастные анемометры обладают рядом преимуществ по сравнению с чашечными. Лопастные анемометры могут быть разделены на анемометры с постоянным углом поворота лопастей и анемометры с постоянным геометрическим шагом (винтовые анемометры). В дальнейшем первые будут называться анемометрами типа А, а вторые — типа В.

Важнейшими характеристиками вращающегося анемометра являются начальная скорость (порог чувствительности), чувствительность (крутизна статической характеристики) и их постоянство при различных режимах работы и во времени. Немаловажное значение имеют также и динамические характеристики анемометра, в частности завышение показаний средней скорости ветра при наличии пульсаций.

В работе [2] было исследовано влияние боковых составляющих скорости ветра на работу анемометра в стационарном потоке. Настоящая статья посвящена дальнейшему исследованию характеристик вращающихся анемометров в зависимости от угла поворота лопастей (у анемометра типа А) или от геометрического шага (у анемометра типа В) и сравнению их характеристик между собой.

Выражение для момента аэродинамических сил, действующих на элементы площади ds лопастей, находящихся на расстоянии r от оси вращения, имеет вид [2]

$$dM = \frac{\rho}{2} zr\sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}\,[v(c_y - c_x)\sin\alpha\cos\alpha - \omega r(c_y + c_x \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha]\,ds, \quad (1)$$

где ρ — плотность воздуха; z — число лопастей; ω — угловая скорость ротора анемометра; v — скорость ветра; α — угол между плоскостью элемента ds и осью вращения ротора; c_x и c_y — коэффициенты профильного и лобового аэродинамического сопротивления лопасти, равные для узкой и тонкой лопасти: $c_x=0{,}03$, $c_y=1{,}21\div1{,}28$ ($c_{y\text{ср}}=1{,}24$).

Предварительно рассмотрим распределение по длине лопасти моментов dM/dr аэродинамических сил для анемометров типа А и В.

Для анемометра типа А ($\alpha=\text{const}$)

$$\frac{dM_A}{dr}=\frac{\rho}{2}zbv^2\sqrt{1+\frac{\omega^2r^2}{v^2}}\times$$
$$\times\left[(c_y-c_x)\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\omega r}{v}(c_y+c_x\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha\right]r, \qquad (2)$$

где b — ширина лопасти.

Из (2) следует, что $\frac{dM_A}{dr}=0$ при $r=0$ и на расстоянии r_0 от оси вращения, равном

$$r_0=\frac{v}{\omega}\,\frac{(c_y-c_x)\operatorname{tg}\alpha}{c_y+c_x\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (3)$$

причем при $r<r_0$ $\frac{dM_A}{dr}>0$, а при $r>r_0$ $\frac{dM_A}{dr}<0$. Следовательно, если $R_{\min}<r_0<R_{\max}$, то часть лопасти от $R_{\min}$ до r_0 создает вращающий момент, а часть лопасти от r_0 до $R_{\max}$ — тормозящий момент. Это приводит к появлению изгибающих моментов, прикладываемых к лопастям анемометра, и возмущению набегающего потока воздуха.

Для анемометра типа В, для которого угол поворота лопастей изменяется по закону

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\pi r}{H}, \qquad (4)$$

где H — геометрический шаг анемометра,

$$\frac{dM_B}{dr}=\frac{\rho}{2}zbv^2H\sqrt{1+\frac{\omega^2r^2}{v^2}}\times$$
$$\times\left[(c_y-c_x)2\pi-H\frac{\omega}{v}(c_y+c_x\operatorname{tg}^2\alpha)\right]\frac{r^2}{H^2+4\pi^2r^2}. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что если выполняется условие

$$\left[(c_y-c_x)\frac{2\pi}{H}-\frac{\omega}{v}(c_y+c_x\operatorname{tg}^2\alpha)\right]=0 \qquad (6)$$

для какого-либо сечения лопасти, то оно выполняется практически для всех ее сечений, поскольку зависимость от $\operatorname{tg}\alpha$ весьма слабая, так как $c_x\ll c_y$. В этом заключается одно из основных преимуществ винтовых анемометров перед анемометрами типа А и особенно перед чашечными, поскольку они вносят минимум возмущений в структуру ветрового поля.

Чтобы получить полный аэродинамический момент, создаваемый лопастями анемометра, следует проинтегрировать уравнение (1) по r от R_{min} до R_{max}. В настоящей статье такая задача решается лишь для анемометров с постоянной шириной лопасти B_0. Результаты, полученные для этого частного случая, с некоторым приближением могут быть распространены и на анемометры с лопастями произвольной формы.

Для исследования влияния угла поворота лопастей (геометрического шага) на начальную скорость анемометров типа А и В вычислим моменты аэродинамических сил при $\omega=0$. Из уравнений (2) и (5) следует

$$M_A^0 = \frac{\rho}{4} zB_0v^2(c_y - c_x)\sin\alpha\cos\alpha\left(R_{max}^2 - R_{min}^2\right) \tag{7}$$

и

$$M_B^0 = \frac{\rho}{4\pi} zB_0v^2 H(c_y - c_x)\left[(R_{max} - R_{min}) - \frac{H}{2\pi}(\alpha_{max} - \alpha_{min})\right]. \tag{8}$$

Рассмотрим для простоты частный случай, когда $R_{min} \ll R_{max}$. Тогда, полагая в (7) $R_{min}=0$, а в (8) $R_{min}=0$ и $\alpha_{min}=0$, можно получить

$$M_A^{00} = \frac{\rho}{4} zB_0v^2(c_y - c_x) R_{max}^2 \sin\alpha\cos\alpha \tag{9}$$

и

$$M_B^{00} = \frac{\rho}{4\pi} zB_0v^2 H(c_y - c_x)\left(R_{max} - \frac{H}{2\pi}\alpha_{max}\right). \tag{10}$$

Момент M_B^{00} может быть записан в виде

$$M_B^{00} = \frac{\rho}{2} zB_0v^2(c_y - c_x)R_{max}^2 \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_{max}}\left(1 - \frac{\alpha_{max}}{\operatorname{tg}\alpha_{max}}\right). \tag{11}$$

Из (9) следует, что максимальный момент у заторможенного анемометра типа А, как и следовало ожидать, имеет место при $\alpha=45°$ и равен

$$M_A^{00} = \frac{\rho}{8} zB_0v^2R_{max}^2(c_y - c_x), \tag{12}$$

а у типа В — при условии $\frac{dM_B^{00}}{d\alpha_{max}}=0$, что выполняется при соблюдении равенства

$$2\alpha_{max} = \operatorname{tg}\alpha_{max}(1 + \cos^2\alpha_{max}). \tag{13}$$

Соответствующие расчеты дают

$$\alpha_{max} = 0{,}985\left(\alpha_{max}^0 = 56°24'\right), \quad \text{а } H = 4{,}16R_{max}. \tag{14}$$

При этом отношение момента M_A^{00} к моменту M_B^{00} составляет 1,08, т. е. всего лишь на 8%. Таким образом, разница в начальной скорости анемометров типа А и типа В весьма незначительна. Так как при найденных значениях углов и геометрического шага аэродинамический момент достигает максимального значения, то при этих углах начальная чувствительность анемометров меньше всего зависит от изменения угла поворота лопастей или изменения геометрического шага.

Радиусы центров приложения аэродинамических сил к лопасти у анемометра типа А

$$r_A = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}, \tag{15}$$

а у типа В

$$r_B = 2R_{\max} \frac{\left[\left(1 - \frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right) - \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{\operatorname{tg} \alpha_{\max}}\right]}{\operatorname{tg} \alpha_{\max} \ln\left(\frac{H^2 + 4\pi^2 R_{\max}^2}{H^2 + 4\pi^2 R_{\min}^2}\right)}. \tag{16}$$

При $R_{\min}=0$ $(\alpha_{\min}=0)$ радиусы соответственно равны

$$r_A = 0{,}5R_{\max}, \tag{17}$$

$$r_B = 0{,}585R_{\max}. \tag{18}$$

Представляет интерес, кроме того, значение того радиуса, при котором лопасть винтового анемометра составляет с осью вращения угол, равный 45°:

$$r_B^0 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{\max}} R_{\max}.$$

Для $\alpha_{\max} = 56°24'$, $r_B^0 = 0{,}663\ R_{\max}$.

Найдем моменты аэродинамических сил для анемометров типа А и В при $\omega \neq 0$. Интегрирование уравнения (2) дает при $R_{\min}=0$.

$$M_A = \frac{\rho}{2} z B_0 v^2 \left\{(c_y - c_x)\sin\alpha\cos\alpha \frac{v^2}{3\omega^2} \times \right.$$
$$\times\left[\left(1 + \frac{\omega^2 R_{\max}^2}{v^2}\right)^{3/2} - 1\right] - \frac{\omega}{v}(c_y + c_x \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha \frac{v^3}{8\omega^3} \times$$
$$\times\left[2\frac{\omega R_{\max}}{v}\left(1 + \frac{\omega^2 R_{\max}^2}{v^2}\right)^{3/2} - \frac{\omega R_{\max}}{v}\sqrt{1 + \frac{\omega^2 R_{\max}^2}{v^2}} - \right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(\frac{\omega R_{\max}}{v} + \sqrt{1 + \frac{\omega^2 R_{\max}^2}{v^2}}\right)\right]\right\}. \tag{19}$$

Для анемометра типа В уравнение (5) не может быть проинтегрировано в элементарных функциях. Заменим $\sqrt{1 + \frac{\omega^2 r^2}{v^2}}$ приближенным выражением $1 + \lambda \frac{\omega^2 r^2}{v^2}$, соответственно подобрав величину λ. Как будет показано в дальнейшем, $\omega r/v$ превосходит незначительно

$\sqrt{2}$, поэтому, приравняв точное и приближенное значения между ссбой, $\sqrt{3}=1+2\lambda$, можно получить

$$\lambda=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=0{,}366. \qquad (20)$$

Заметим, что погрешность в результате такой замены не превосходит 5% в диапазоне изменения $\omega r/v$ от 0 до $\sqrt{3}$.

Интегрирование уравнения (5) дает

$$M_B=Av^2\left(B-C\frac{\omega R_{\max}}{v}+D\frac{\omega^2 R_{\max}^2}{v^2}-E\frac{\omega^3 R_{\max}^3}{v^3}\right), \qquad (21)$$

где

$$A=\frac{\rho}{8\pi^2}zB_0H^2;$$

$$B=(c_y-c_x)(\operatorname{tg}\alpha_{\max}-\alpha_{\max});$$

$$C=(c_y-c_x)\frac{\operatorname{tg}\alpha_{\max}-\alpha_{\max}}{\operatorname{tg}\alpha_{\max}}+\frac{1}{3}c_x\operatorname{tg}\alpha_{\max};$$

$$D=0{,}366(c_y-c_x)\left(\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{tg}\alpha_{\max}-\alpha_{\max}}{\operatorname{tg}^3\alpha_{\max}}\right)+\frac{1}{3}c_x\operatorname{tg}\alpha_{\max};$$

$$E=0{,}366(c_y-c_x)\left(\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{tg}\alpha_{\max}-\alpha_{\max}}{\operatorname{tg}^3\alpha_{\max}}\right)+\frac{1}{5}c_x\operatorname{tg}^2\alpha_{\max}.$$

Для сравнения вычислим и M_A при замене $\sqrt{1+\frac{\omega^2 r^2}{v^2}}$ приближенным значением $1+0{,}366\frac{\omega^2 r^2}{v^2}$. При этом получается выражение для момента M_A, аналогичное (21), но с другими коэффициентами, а именно:

$$A=\frac{\rho}{2}zB_0R_{\max}^2\cos^2\alpha; \qquad B=\frac{1}{2}(c_y-c_x)\operatorname{tg}\alpha;$$

$$C=\frac{1}{3}(c_y+c_x\operatorname{tg}^2\alpha); \qquad D=\frac{1}{4}0{,}366(c_y-c_x)\operatorname{tg}\alpha;$$

$$E=\frac{1}{5}0{,}366(c_y+c_x\operatorname{tg}^2\alpha).$$

В установившемся режиме моменты аэродинамических сил M_A и M_B уравновешиваются только моментом сил трения $M_{\text{тр}}$ на осях вращения. Положим для простоты исследования $M_{\text{тр}}=0$. Тогда из (21) может быть найдена крутизна статических характеристик $\frac{\omega^0 R_{\max}}{v_0}$ анемометров типа А и В для любых углов α и $\alpha_{\max}$. Так, для угла $\alpha=45°$ крутизна статической характеристики анемометра типа А составляет 1,36, а для анемометра типа В при $\alpha_{\max}=56°24'$—1,41, что отличается от крутизны анемометра типа А менее чем на 4%.

Динамические характеристики анемометров типа А и В определяются дифференциальным уравнением

$$I\frac{d\omega}{dt}=M(\omega,\ v), \tag{22}$$

где I — момент инерции ротора анемометра; M $(\omega,\ v)$ — момент аэродинамических сил, действующих на лопасти анемометра. В общем виде уравнение (22) является нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами.

Рассмотрим малые отклонения угловой скорости ω от установившегося значения ω_0. Для этого линеаризуем уравнение (22), положив $\omega=\omega_0+\Delta\omega$, где ω_0 — установившееся значение угловой скорости анемометра, а $\Delta\omega$ — изменение угловой скорости, вызываемое пульсацией Δv скорости ветра.

Запишем M $(\omega,\ v)$ в виде

$$M(\omega,\ v)\approx\frac{\partial M}{\partial v}\Delta v-\frac{\partial M}{\partial\omega}\Delta\omega. \tag{23}$$

Отсюда

$$I\frac{d\Delta\omega}{dt}+\frac{\partial M}{\partial\omega}\Delta\omega=\frac{\partial M}{\partial v}\Delta v. \tag{24}$$

Очевидно, анемометр тем меньше будет завышать среднюю скорости при наличии пульсации ветра, чем меньше частная производная $\partial M/\partial\omega$ будет зависеть от v, а $\partial M/\partial v$ от ω. Этим требованиям удовлетворяет условие $\frac{\partial^2 M}{\partial\omega\,\partial v}=0$.

Соответствующие вычисления дают

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\omega\,\partial v}=A\left[-CR_{\max}+3E\frac{\omega^2 R_{\max}^3}{v^2}\right]. \tag{25}$$

Из (25) следует

$$\frac{\omega_0 R_{\max}}{v}=\sqrt{\frac{C}{3E}}. \tag{26}$$

Но в установившемся режиме должно выполняться условие

$$B-C\frac{\omega_0 R_{\max}}{v_0}+D\frac{\omega_0^2 R_{\max}^2}{v_0^2}-E\frac{\omega_0^3 R_{\max}^3}{v_0^3}=0. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (27), можно получить соотношение, при котором лопастной анемометр при малых отклонениях угловой скорости от установившегося значения ведет себя как динамическое звено первого порядка с постоянной времени, не зависящей от скорости ветра:

$$3\sqrt{3}BE+\sqrt{3}CD=4C\sqrt{CE}. \tag{28}$$

Найдем угол α поворота лопастей у анемометра типа А и геометрический шаг H (α_{max}) у анемометра типа В, при котором выполняется соотношение (28). Расчеты дают $\alpha=0{,}877$; $\alpha^0=41°20'$; $\frac{\omega_0 R_{max}}{v_0}=1{,}23$; $\alpha_{max}=0{,}996$; $\alpha^0_{max}=57°$; $H=4{,}06$; $\frac{\omega_0 R_{max}}{v_0}=1{,}43$.

Заметим, что поскольку в соотношение (28) не входит скорость ветра, найденные значения углов α и α_{max} оказываются приемлемыми для широкого диапазона скоростей ветра. Не следует, однако, забывать, что условие (28) было найдено для лопастей с постоянной шириной B_0, при $R_{min}=0$ и без учета моментов трения на оси анемометра. Поэтому весьма целесообразна постановка аналогичной задачи на ЭВМ с учетом действительной конфигурации лопастей и моментов трения.

Выводы

На основании проведенных теоретических исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Угол α поворота лопастей у анемометра типа А и геометрический шаг H винта у анемометра типа В существенно влияют на такие характеристики, как начальная скорость анемометра и крутизна статической характеристики, а также на завышение средней скорости ветра при его пульсации.

2. Не представляется возможным удовлетворить всем требованиям, предъявляемым к характеристикам анемометра, одним лишь поворотом лопастей или выбором величины геометрического шага, поскольку эти требования оказываются противоречивыми.

3. Для достижения наибольшей начальной чувствительности анемометра и наименьшего завышения средней скорости пульсирующего ветра угол поворота лопастей анемометра типа А должен быть в пределах 41—45°, а геометрический шаг анемометра типа В — в пределах 4—4,2 R_{max}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Протопопов Н. Г. Некоторые вопросы теории и расчета винтовых ветрочувствительных элементов. — «Тр. ГГО», 1966, вып. 199, с. 3—32.

2. Арбузов И. А., Протопопов Н. Г. Работа винтового анемометра в стационарном потоке при наличии боковой составляющей скорости ветра. — «Тр. ГГО», 1976, вып. 346, с. 21—32.

Л. П. Афиногенов, Е. В. Романов

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ АНЕМОМЕТРОВ ПРИ ПУЛЬСАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ ПОТОКА ТЕПЛА

Обычная схема измерения среднего на интервале τ вертикального переноса H некоторой субстанции в атмосфере основана на соотношении

$$H = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g_v(t)\, v_z(t)\, dt,$$

где $g_v\ (t)$ — объемная концентрация (плотность) субстанции, перенос которой подлежит измерению; $v_z\ (t)$ — вертикальная составляющая скорости ветра, под которой понимается объем воздуха, переносимый в единицу времени через горизонтальную площадку единичной площади.

Аналогичная формула может быть написана, если измеряется не объемная, а массовая концентрация $g_m\ (t) = \frac{g_v(t)}{\rho\,(t)}$ (в дальнейшем индексы зависимости параметров от времени t опущены), т. е. удельное содержание субстанции в единице массы смеси. При этом вместо скорости v_z следует использовать вертикальную составляющую скорости переноса массы $w_z = \rho v_z$, где $\rho = \rho(t)$ — плотность воздуха (смеси).

Вводя черту для обозначения временно́го осреднения, можно записать

$$H = \overline{g_v v_z} = \overline{g_m w_z}. \tag{1}$$

Каждую из переменных величин, входящих в (1), можно представить в виде суммы постоянной на интервале осреднения и переменной составляющих (переменные обозначены штрихами):

$$g_v = \overline{g}_v + g'_v, \qquad g_m = \overline{g}_m + g'_m,$$

$$v_z = \overline{v}_z + v'_z, \qquad w_z = \overline{w}_z + w'_z. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$H=\overline{g}_v\overline{v}_z+\overline{g'_v v'_z} \tag{3}$$

или

$$H=\overline{g}_m\overline{w}_z+\overline{g'_m w'_z}. \tag{4}$$

Первые слагаемые в (3) и (4) характеризуют перенос за счет постоянной составляющей скорости ветра ($\overline{v}_z$; $\overline{w}_z$), а вторые — за счет турбулентного движения воздушных масс.

При измерении вертикальных переносов в приземном слое, как правило, можно считать, что средний перенос воздушной массы равен нулю ($\overline{w}_z=0$). В этом случае формула (4) упрощается:

$$H=\overline{g'_m w'_z}. \tag{5}$$

Для измерения вертикальной составляющей скорости ветра при пульсационных измерениях обычно используются акустические анемометры, положительные свойства которых (малая инерционность, способность измерять составляющую скорости вдоль оси анемометра и др.) реализуются лучше всего именно в этом виде измерений.

В акустических анемометрах используется зависимость скорости распространения акустического сигнала от скорости ветра. Время распространения акустических колебаний от точечного излучателя до приемника, отнесенного по вертикали на расстояние L, определяется выражением [1]

$$\tau_1=\frac{L\left(-v_z+\sqrt{c_0^2-v_y^2-v_x^2}\right)}{c_0^2-V^2}, \tag{6}$$

где c_0 — скорость распространения звука в неподвижной среде; v_x, v_y, v_z — составляющие скорости среды (воздуха); V — модуль вектора скорости ветра.

Для исключения влияния поперечных к базе компонент v_y, v_x и скорости распространения звука c_0 применяют дифференциальные схемы, в которых звук распространяется в двух противоположных направлениях. Время прохождения акустических колебаний в противоположном направлении τ_2 равно

$$\tau_2=\frac{L\left(v_z+\sqrt{c_0^2-v_y^2-v_x^2}\right)}{c_0^2-V^2}. \tag{7}$$

Совместное решение (6) и (7) относительно v_z дает выражение

$$v_z=\frac{L}{2}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)=\frac{c_0^2-V^2}{2L}(\tau_2-\tau_1), \tag{8}$$

которое лежит в основе принципа действия акустических анемометров.

Если частота акустических колебаний f, то разность фаз $\Delta\varphi$ акустических колебаний в точках расположения приемников, используемая в качестве выходного параметра в фазовых анемометрах, равна

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2\pi f(\tau_2-\tau_1)=\frac{4\pi fLv_z}{c_0^2-V^2}. \tag{9}$$

В знаменателе формулы (9) можно пренебречь членом V^2 по сравнению с c_0^2. Погрешность в определении v_z при этом не превысит 0,2% для $V\leqslant 15$ м/с. Тогда

$$\Delta\varphi\approx\frac{4\pi fL}{c_0^2}v_z. \tag{10}$$

Скорость звука c_0 определяется формулой Лапласа [2]

$$c_0=\sqrt{\frac{c_p p}{c_v \rho}}\approx 20\sqrt{T}, \tag{11}$$

где c_p, c_v — удельные теплоемкости воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме, p — атмосферное давление, T — абсолютная температура.

Подставляя (11) в (10) и имея в виду, что $w_z=\rho v_z$, получим

$$\Delta\varphi\approx\frac{4\pi fLc_v}{c_p p}w_z. \tag{12}$$

Давление p за время измерений можно считать постоянным. Кроме того, пульсации давления крайне малы [3]. Поэтому можно принять $p=\text{const}$. Все остальные величины, входящие в (12), кроме w_z, постоянны. Поэтому из формулы (12) следует, что акустический анемометр фазового типа измеряет массовую скорость ветра w_z [4, 5].

Акустические анемометры частотного типа по каждому каналу вырабатывают частоту, обратно пропорциональную времени распространения акустических колебаний от излучателей к приемникам. Разность этих частот, как нетрудно получить из (6) и (7), равна

$$\Delta f=f_2-f_1=\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}=\frac{2}{L}v_z. \tag{13}$$

Таким образом, анемометр частотного типа измеряет объемную скорость ветра v_z [6].

Эти особенности акустических анемометров надо иметь в виду при их использовании для пульсационных измерений.

Рассмотрим теперь вопрос об измерении вертикального потока тепла, считая, что пульсации давления незначительны и ими можно пренебречь.

Теплосодержание единицы массы воздуха g_m при неизменном давлении однозначно определяется температурой. Представляем g_m в виде суммы постоянной составляющей и приращения:

$$g_m = \overline{g}_m + c_p(T - \overline{T}). \tag{14}$$

Следовательно, $g'_m = c_p T'$ и, согласно (5),

$$H = c_p \overline{T' w'_z}. \tag{15}$$

В большинстве случаев формула (15) лежит в основе измерения вертикального потока тепла, причем используются малоинерционные датчики температуры (T') и акустический анемометр фазового типа (w'_z).

Однако, если для измерений скорости ветра v_z использовать анемометр частотного типа, формула для потока тепла не содержит пульсационных членов.

Покажем это. Подставляя (14) в (1), получим

$$H = \overline{g}_m \overline{w}_z + c_p \overline{T \rho v_z} - c_p \overline{T} \overline{w}_z = (\overline{g}_m - c_p \overline{T}) \overline{w}_z + c_p \overline{T \rho v_z}.$$

Используя уравнение состояния $\frac{p}{R} = T\rho$ и учитывая, что $p = \mathrm{const}$ и $\overline{w}_z = 0$, получим

$$H = c_p \frac{p}{R} \overline{v_z}. \tag{16}$$

Этот результат очень интересен. Он показывает, что для измерения вертикального турбулентного потока тепла достаточно использовать всего один датчик, реагирующий на вертикальную составляющую объемной скорости ветра v_z, причем можно показать [7], что, поскольку в (16) производится интегрирование, результат не зависит от динамических свойств датчика. Он может представлять собой инерционное звено первого, второго и т. д. порядка и должен только удовлетворять требованию линейности (в динамическом смысле).

Чувствительность рассматриваемого метода

$$\frac{\Delta v_z}{\Delta H} = \frac{R}{c_p p} = \frac{1}{c_p \rho T} \approx 0{,}2 \ \frac{\text{см/с}}{\text{кал/(см}^2\cdot\text{мин)}}$$

при $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, $c_p = 0{,}24$ кал/(г·°С), $T = 300$ К.

Поясним физический смысл турбулентного переноса тепла в рассматриваемой модели. При положительном (вверх) направлении потока тепла в процессе турбулентного обмена в среднем вверх поднимаются более теплые (а значит, и менее плотные) элементы объема, а вниз опускаются менее теплые (более плотные) элементы. При постоянном давлении и отсутствии вертикального переноса массы это приводит к неравенству (в среднем) объемов, перемещающихся через горизонтальную площадку вверх и вниз. Таким образом возникает средний перенос объема без количествен-ного переноса самого вещества, что и отмечается частотным анемометром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М., Гостехиздат, 1946. 220 с.

2. Тверской П. Н. Курс метеорологии. Л., Гидрометеоиздат, 1962. 699 с.

3. Голицын Г. С. О временном спектре микропульсаций атмосферного давления. — «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1964, № 8, с. 1253—1258.

4. Mitsuta J. Sonic anemometer — thermometer for general use.— "J. Me. Soc. of Japan", 1966, vol. 44. N 1, p. 167—174.

5. Романов Е. В. Аппаратура для регистрации пульсаций влажности и вертикальной компоненты скорости ветра в приземном слое атмосферы. В кн.: Труды Всесоюзной конференции молодых ученых Гидрометслужбы СССР. Л., Гидрометеоиздат, 1972, с. 61—66.

6. Афиногенов Л. П., Попов М. В. О возможности измерения скорости движения газовых и жидких сред при помощи генерирующей системы с запаздывающей акустической обратной связью.— «Тр. ГГО», 1967, вып. 216, с. 139—142

7. Афиногенов Л. П. Вычисление значений интегралов от токов и напряжений в линейных электрических цепях.— «Тр. ГГО», 1967, вып. 216, с. 114—116

Р. А. Круглов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЗРАЧНОСТИ АТМОСФЕРЫ ПО УРОВНЮ ПОСТОЯННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СИГНАЛА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

В работе [1] показано наличие при определенных условиях функциональной связи между прозрачностью исследуемого отрезка трассы зондирования l и суммарным значением I^* эхо-сигналов, дважды накопленных за время $t=2l^*/c$, от каждого из элементарных слоев, составляющих исследуемый отрезок трассы зондирования— сначала при прохождении через указанный отрезок переднего, а затем заднего фронта светового импульса в прямом и обратном направлениях. Характер функциональной связи определяется, согласно [1], простыми соотношениями:

$$I^* = l^* \frac{1-j}{L} I_{\max}, \tag{1}$$

$$l^* = -\frac{\ln j}{2\bar{\alpha}}, \tag{2}$$

где j — коэффициент, меньший 1; $\bar{\alpha}$ — среднее для отрезка трассы l^* значение показателя ослабления света; $2L$ — пространственная протяженность светового импульса; $I_{\max}$ — значение функции I^* при $l^*=L$.

Поскольку в измерении участвуют не мгновенные, а суммарные значения эхо-сигналов, накопленные от каждого из рассеивающих слоев за время $t=2l^*/c$, то следует ожидать уменьшения погрешности измерений при наличии шумов, например шумов, возникающих при воздействии фонового излучения.

В связи с этим составим выражение для погрешности метода измерения.

Дифференцируя (2) и переходя от дифференциалов к приращениям, получим

$$\Delta\bar{\alpha} = -\frac{1}{2}\,\frac{l^*\delta j - \ln j\,\Delta l^*}{l^{*2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\delta j - \ln j\,\delta l^*}{l^*} \tag{3}$$

или

$$\delta\bar{\alpha}=\frac{\delta j}{\ln j}-\delta l^*\approx-\delta l^*,$$

где δ обозначены относительные погрешности определения соответствующих элементов. Раскроем выражение для относительной погрешности определения $\bar{\alpha}$, пользуясь следующим соотношением, полученным в [1]:

$$(\Delta l)^2=\frac{\Delta IL}{jI_{\max}\alpha(l)},\qquad (4)$$

где $\alpha(l)$ — локальное значение показателя ослабления света; $\Delta I = I_0^*-I$; $I_0^*=\frac{1}{L}\left[\int\limits_0^l i_1(x)\,dx+\int\limits_0^{R=l^*} i_2(x)\,dx-jI_{\max}l^*\right]$ — функция оценки эхо-сигнала по параметру l; $l=l^*\pm\Delta l$; R — расстояние до заднего фронта импульса; $i_1(x)$ и $i_2(x)$ — огибающие эхо-сигналов в моменты прохождения переднего и заднего фронтов светового импульса через исследуемый отрезок трассы зондирования; $I=\frac{1}{L}\left[\int\limits_0^l i_1(x)dx+\int\limits_0^R i_2(x)dx-jI_{\max}R\right]=\frac{l}{L}(1-j)\,I_{\max}$ для любого l, в том числе $l=l^*$.

Принимая во внимание последнее выражение, нетрудно показать, что

$$\delta l^*=\sqrt{\frac{\Delta IL}{jI_{\max}\alpha(l)l^{*2}}}=\sqrt{\frac{1-j}{jl^*\alpha(l)}\delta I}.\qquad (5)$$

Подставив (2) в (5), получим

$$\delta\bar{\alpha}=-\sqrt{\frac{1-j}{-j\ln j}\cdot\frac{\bar{\alpha}(l)}{\alpha(l)}2\delta I}.\qquad (6)$$

В частном случае при $j=1/e$, имеем

$$\delta\bar{\alpha}=-\sqrt{(e-1)\frac{\bar{\alpha}(l)}{\alpha(l)}2\delta I}.\qquad (7)$$

Выражение (7) показывает, что погрешность измерения прозрачности атмосферы в данном случае определяется не мгновенными, а осредненными на интервале времени $t=2l^*/c$ значениями огибающей эхо-сигнала, что и определяет высокую помехоустойчивость измерений. Если в качестве критерия помехоустойчивости использовать значение среднеквадратической погрешности измерений, то дополнительный выигрыш в помехоустойчивости можно оценить, сравнивая отношения сигнал/шум для мгновенных и осредненных значений огибающей эхо-сигнала. С этой целью представим операцию суммирования эхо-сигналов при наличии помех от каждого из рассеивающих слоев в виде

$$I_{с/ш} = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} (a + \varepsilon_k) = na + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k, \tag{8}$$

где $I_{с/ш}$ — суммарное значение сигнала на выходе решающего устройства, I_k — значение огибающей эхо-сигнала на входе решающего устройства от k-го рассеивающего объема, a — регулярная составляющая сигнала, ε_k — значение помехи в момент k-го отсчета.

Отношение сигнал/помеха, согласно [2], на выходе решающего устройства при общепринятых допущениях имеет вид

$$\rho = \frac{n^2 a^2}{D(\Sigma\, \varepsilon_k)} = \frac{n^2 a^2}{nD\, \varepsilon} = n\, \frac{a^2}{\sigma^2}, \tag{9}$$

где D — дисперсия, $a^2/\sigma^2 = \rho_0$ — отношение сигнал/помеха на входе решающего устройства.

Таким образом, имеет место выигрыш в n раз по требуемой мощности излучения при том же значении среднеквадратической ошибки измерения. Если число n представить в виде отношения толщины исследуемого отрезка трассы зондирования l^* к допустимой величине погрешности дискретизации Δl, то станет очевидным, что выигрыш может достигать одного порядка величины и более по сравнению со случаем использования импульсов света большой длительности без повторного интегрирования и двух порядков величины и более по сравнению со случаем короткого импульса света [3].

С целью определения алгоритма обработки сигнала по данному способу рассмотрим выражение для разности функций $I_0^* - I$, которую, согласно изложенному выше, можно представить в виде

$$I_0^* - I = \frac{1}{L}\left\{\int_0^{R=L} [i_2(x) - jI_{\max}]\, dx - \int_0^{R=L} i_2(x) dx - jI_{\max} R\right\}, \tag{10}$$

где $I_и = \frac{1}{L}\int_0^{R=L} [i_2(x) - jI_{\max}]\, dx$ — измерительный сигнал, $I_с = \frac{l}{L}\left[\frac{1}{l}\int_0^{R=l} i_2(x) dx - jI_{\max}\right]$ — сигнал сравнения.

Поскольку рассмотренная разность функций пропорциональна сигналу рассогласования, экстремум которого определяет искомую величину l^* [1], то обработка сигнала по данному способу должна включать в себя следующие основные операции:

1. Определение опорного сигнала $I_{\max}$ как суммы средних значений участков огибающей эхо-сигнала на интервалах времени $\tau = 2h/c$, отсчитываемых с момента начала излучения светового импульса до момента его окончания.

2. Определение величины измерительного сигнала $I_и$ как среднего значения огибающей сигнала обратного рассеяния, превышающего уровень $jI_{\max}$ на интервале времени $\tau = 2L/c$, отсчитанном после

момента окончания излучения, где j — заранеее выбранный коэффициент, меньший 1.

3. Определение величины сигнала сравнения $I_с$ как взятой с коэффициентом t/τ разности между средним значением участка огибающей эхо-сигнала на интервале времени $t=2l/c$, отсчитанном от момента окончания излучения, и уровнем jI_{max}.

4. Определение искомого значения $l^*=ct^*/2$ по минимальной величине разности функций $I_и—I_с$.

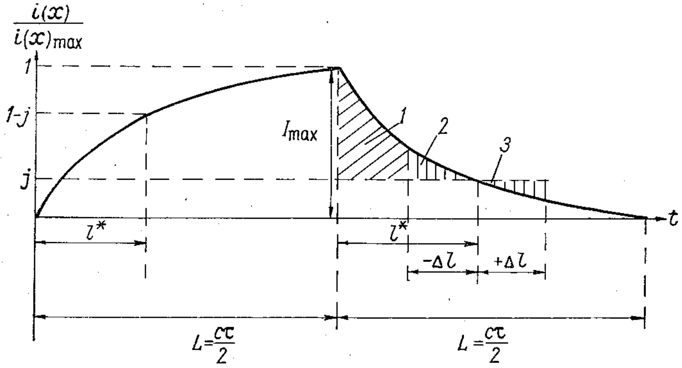


Рис. 1. Эпюра эхо-сигнала.

1 — площадь, пропорциональная сигналу сравнения; *2*, *3* — площадь, пропорциональная сигналу ошибки; *1*+*2* — площадь, пропорциональная измерительному сигналу.

5. Определение показателя ослабления света $\bar{\alpha}$, характеризующего прозрачность участка l^* трассы зондирования в соответствии с выражением (2).

Изложенное поясняется рис. 1, на котором изображена эпюра эхо-сигнала при использовании в качестве зондирующего сигнала импульсов света большой длительности $(\bar{\alpha}L\gg1)$. Для простоты рассматривается случай однородной атмосферы. На эпюре показаны доли эхо-сигнала, используемые в качестве измерительного сигнала $I_и$ и сигнала сравнения $I_с$ при определении искомого значения l^*, удовлетворяющего условию (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Круглов Р. А. О связи между прозрачностью атмосферы и постоянной составляющей сигнала обратного рассеяния от импульсного источника света. — См. наст. сб.

2. Харкевич А. А. Теория информации. Опознание образов. Т. III. М., «Наука», 1973, с. 524.

3. Аблавский Л. М., Круглов Р. А. Сравнительная оценка методов определения прозрачности атмосферы по интегральному значению сигнала обратного рассеяния. — «Тр. ГГО», 1974, вып. 240, с. 25—29.

Р. А. Круглов

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРОЗРАЧНОСТЬЮ АТМОСФЕРЫ И ПОСТОЯННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СИГНАЛА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ОТ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА СВЕТА

В последние годы предложен целый ряд способов определения характеристик прозрачности атмосферы на высотах в целях метеорологического обеспечения взлета и посадки самолетов. Обзор этих способов дан в работе [1]. Однако практическая реализация предложенных способов наталкивается на технические трудности решения задачи обнаружения слабых оптических сигналов в шумах фотоприемника, работающего при высоких уровнях фоновой засветки. Для надежного обнаружения этих сигналов требуется огромная мощность излучения. При этом резко сокращается срок службы источника световых импульсов. Кроме того, огромная мощность излучения может представлять опасность для пилота, совершающего посадку самолета.

Определенные перспективы в решении этого вопроса появились после того, как были предложены алгоритмы обработки эхо-сигнала, позволяющие извлечь информацию о прозрачности атмосферы после предварительного интегрирования сигнала обратного рассеяния с одновременной компенсацией геометрической функции оптической части установки, определяющей характер убывания эхо-сигналов с расстоянием [2, 3, 4]. Предварительное интегрирование (накопление) эхо-сигналов позволяет на порядок величины повысить помехоустойчивость измерений. Кроме того, может быть обеспечен значительный выигрыш в помехоустойчивости, если выполнять интегрирование не на выходе фотоприемника, а на его входе [3].

Способы с предварительным интегрированием эхо-сигнала используют функциональную связь между мгновенными значениями интегральной кривой профиля прозрачности и осредненными значениями показателя ослабления света на исследуемом отрезке трассы зондирования. Наличие такой функциональной связи (при допущении постоянства индикатриссы рассеяния вдоль трассы зондирования) показано в работе [2].

Естественно предположить, что дополнительный выигрыш в помехоустойчивости следует ожидать от повторного интегрирования (накопления) эхо-сигналов. Для этого, однако, необходимо показать существование функциональной связи между осредненными (а не мгновенными) значениями интегральной кривой профиля прозрачности и средними значениями показателя ослабления света.

Это и составляет цель данной работы.

Рассмотрим следующую функцию сигнала обратного рассеяния для случая скомпенсированной геометрической функции оптической части установки:

$$I = \frac{1}{L}\left[\int_0^l i_1(x)\,dx + \int_0^R i_2(x)\,dx - jI_{\max} R\right], \tag{1}$$

где $I_{\max}=I$ $(l=R=L)$ при $j=0$; l — исследуемый отрезок трассы зондирования; R — расстояние до заднего фронта импульса; j — коэффициент, меньший 1; $2L$ — пространственная протяженность светового импульса; $i_1(x)$ и $i_2(x)$ — огибающие эхо-сигналов во время излучения светового импульса и после его окончания.

Если выполняется условие $\bar{\alpha} L \gg 1$, где $\bar{\alpha}$ — среднее значение показателя ослабления света на участке трассы длиной L, т. е. если используются импульсы света большой пространственной протяженности [3], то при принятых допущениях справедливы следующие выражения:

$$i_1(x) = \frac{kP}{2}\left(1 - e^{-2\bar{\alpha} x}\right), \tag{2}$$

$$i_2(x) = \frac{kP}{2} e^{-2\bar{\alpha} R}, \tag{3}$$

где $R=x-L$; P — импульсная мощность излучения; k — коэффициент, учитывающий параметры оптического тракта и значение относительного коэффициента рассеяния под углом π к направлению излучения — $\rho(\pi)$ (при допущении его постоянства вдоль трассы зондирования).

С учетом (2) и (3) решение уравнения (1) для случая $R=l$ дает функцию вида

$$I = \frac{l}{L}(1-j)\,I_{\max}, \tag{4}$$

где $I_{\max}=kP/2$.

Как следует из (1), значение этой функции пропорционально площади, ограниченной отрезками огибающей эхо-сигнала от участка трассы зондирования длиной l как во время излучения светового импульса, так и после его окончания, за вычетом компоненты $jI_{\max}l$. При этом функция I не зависит от прозрачности атмосферы и при фиксированном j полностью определяется выбором l. По этой причине значение функции I для любого l может быть рассчитано заранее.

Наряду с этим можно показать, что существует значение функции $I=I^*$ в точке $l=l^*$, для которого выполняется условие

$$j = e^{-2\overline{\alpha}\, l^*}. \tag{5}$$

Другими словами, имеет место функциональная связь между I и l^*, которая, согласно (4), подчиняется выражению

$$I^* = \frac{l^*}{L}(1-j)\, I_{\max}. \tag{6}$$

Однако сразу же возникает вопрос, каким образом может быть найдено значение l^* среди множества его значений (от $l=0$ до $l=L$), если использовать для этой цели не мгновенные, а осредненные значения огибающей эхо-сигнала.

В связи с этим рассмотрим следующую функцию сигнала обратного рассеяния, которую назовем функцией оценки эхо-сигнала по параметру l:

$$I_0^* = \frac{1}{L}\left[\int\limits_0^l i_1(x)dx + \int\limits_0^{R=l^*} i_2(x)dx - jI_{\max}\, l^*\right], \tag{7}$$

где $l=l^*\pm\Delta l$.

Решение (7) для малых значений Δl (когда $\Delta l \to 0$) дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
LI_0^* &= \frac{kP}{2}\left[\int\limits_{l^*}^{l^*\pm\Delta l}\left(1-e^{-2\overline{\alpha}x}\right)dx + l^*\right] - jI_{\max}\, l^* = \\
&= \frac{kP}{2}\left[l^*\pm\Delta l - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\overline{\alpha}l^*}\left(1-e^{\mp 2\alpha\Delta l}\right)\right] - jI_{\max}\, l^* = \\
&= \frac{kP}{2}\left\{l - j\frac{1}{2\alpha}\left[1-1\pm 2\alpha\Delta l - \frac{(2\alpha\Delta l)^2}{2}\right]\right\} - jI_{\max}\, l^* = \\
&= \frac{kP}{2}\left[l - j\frac{2\alpha\Delta l}{2\alpha}(\pm 1 - \alpha\Delta l)\right] - jI_{\max}\, l^* = \\
&= \frac{kP}{2}\, l - j\frac{kP}{2}(\pm\Delta l) - jI_{\max} l^* + j\frac{kP}{2}(\alpha\Delta l)\,\Delta l = \\
&= I_{\max}\, l - jI_{\max}\, l + jI_{\max}(\alpha\Delta l)\,\Delta l = \\
&= l(1-j)\, I_{\max} + \Delta l\, jI_{\max}(\alpha\Delta l).
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя в (8) выражение для I из (4), получим

$$I_0^* = I + \frac{\Delta l}{L}\, jI_{\max}\,\alpha\,\Delta l. \tag{9}$$

Из последнего выражения следует, что разность функции I^* и I имеет экстремум в точке $l=l^*$. В этой точке $I=I^*$. Это значит, что определение l^* по осредненным значениям огибающей эхо-сигнала сводится к нахождению экстремума разности функций I_0^* и I.

Определение I, как было показано, не представляет затруднений, если известно значение I_{max}. Хуже дело обстоит с определением I_0^*. Дело в том, что аргумент l^* функции I_0^* является одновременно искомой величиной. Однако это затруднение можно обойти, если пропустить часть эхо-сигнала через пороговое устройство с пороговым уровнем jI_{max}. Действительно, из (3), (1) и (5) следует, что

$$jI_{\max} l = i_2(l) \cdot l = \int\limits_0^l i_2(l)\, dx. \tag{10}$$

Следовательно, выражение для I_0^* можно записать в виде

$$I_0^* = \frac{1}{L} \left\{ \int\limits_0^l i_1(x)\, dx + \int\limits_0^{l^*} [i_2(x) - i_2(l^*)]\, dx \right\},$$

а для области значений $i_2(x) \geqslant i_2(l^*)$ справедлива следующая зависимость:

$$I_0^* = \frac{1}{L} \left\{ \int\limits_2^l i_1(x)\, dx + \int\limits_0^L [i_2(x) - jI_{\max}]\, dx \right\}. \tag{11}$$

Согласно этой зависимости, определение функции I_0^* не связано с необходимостью знать искомое значение l^*. Определив l^*, нетрудно затем найти $\bar{\alpha}$ на исследуемом отрезке трассы зондирования, пользуясь зависимостью (5).

Приведенные соотношения, отражающие характер функциональной связи осредненных значений огибающей эхо-сигнала от квазинепрерывного излучателя со средними значениями показателя ослабления света должны явиться исходным материалом для разработки алгоритмов определения прозрачности атмосферы, обеспечивающих высокую помехоустойчивость измерений в условиях шумов, возникающих на выходе фотодетектора в результате фоновой засветки фотокатода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аднашкин В. Н., Круглов Р. А. Результаты анализа инструментальных методов определения прозрачности атмосферы. — «Тр. ГГО», 1974, вып. 342, с. 46—58.

2. Ковалев В. А. Измерение прозрачности атмосферы с помощью световых импульсов малой длительности. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 279, с. 194—200.

3. Аблавский Л. М., Круглов Р. А. Сравнительная оценка методов определения прозрачности атмосферы по интегральному значению сигнала обратного рассеяния. — «Тр. ГГО», 1974, вып. 340, с. 25—29.

4. Вараксин В. П. Способ определения прозрачности атмосферы.— Авт. свид. № 300861. Бюлл. открытий, изобретений, промышленных образцов и товарных знаков, 1971, № 13.

В. Е. Боханов

РАЗРАБОТКА ТИПОВОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ НА АЭРОДРОМЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ

Существующие схемы установки метеорологических приборов по прямой линии около дальних и ближних приводных радиостанций (ДПРС и БПРС) и обусловленный таким размещением инерционный прогноз условий посадки (взлета), при котором результаты измерений распространяются на момент посадки, может приводить к ошибкам, превышающим значение измеренной величины в несколько раз. Реализация экстраполяционного прогноза и переход от временно́го к пространственно-временно́му сглаживанию метеорологических величин позволяют повысить точность и устойчивость метеоинформации, автоматизировать измерение количества облаков.

В статье обосновывается схема размещения пунктов метеорологических измерений на аэродроме, позволяющая повысить надежность метеообеспечения авиации. Приводится вариант типовой схемы размещения метеорологических датчиков применительно к обеспечению полетов по минимумам ИКАО (рис. 1).

1. С целью обеспечения удобства эксплуатации метеоаппаратуры метеорологические датчики должны устанавливаться стационарно и комплектно, как это предусмотрено в настоящее время в станции КРАМС.

В комплект целесообразно включить датчики высоты нижней границы облаков, горизонтальной дальности видимости, параметров ветра, влажности воздуха, наличия осадков, напряженности электрического поля.

2. Пункты измерений должны быть размещены по площади аэродрома по возможности равномерно, что позволяет повысить точность осреднения метеорологических величин.

Учитывая, что при изменении направления ветра меняется и рабочий старт, пункты измерения должны образовывать «штормовые полукольца» датчиков относительно каждого старта (рис. 1). Такое размещение позволяет осуществлять микроэкстраполяционный прогноз условий посадки независимо от направления движения воздушной массы. При этом датчики, установленные в пунктах *2*, *3* и *4*, обеспечивают прогноз условий посадки на старте I при скорости смещения метеоявлений от 10 км/ч и более. Датчики в пунктах *1* и *5* целесообразно использовать при слабом ветре. Информация о погоде на взлетном курсе может быть получена из пунктов *3* и *5*.

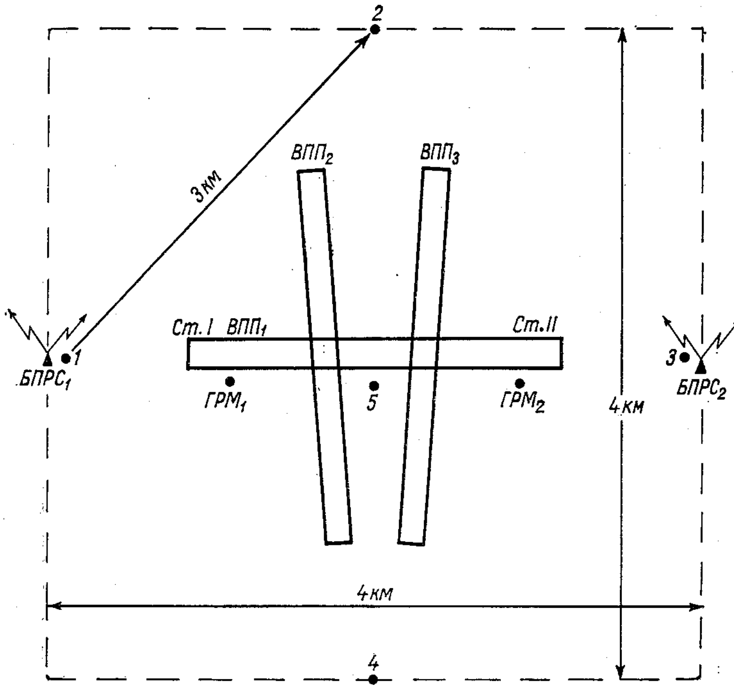


Рис. 1. Схема размещения пунктов метеорологических наблюдений на аэродроме.

1—5 — пункты наблюдений.

Принципы использования датчиков при работе со старта II и с других ВПП аналогичны, так как пункты измерений расположены относительно стартов симметрично.

3. Автоматическая метеостанция должна обеспечить получение метеоинформации, необходимой для разработки стратегии и тактики полета:

а) при предварительном анализе погоды перед вылетом необходима информация о фактических и прогностических обобщенных характеристиках полей метеоэлементов в районе аэродрома. Представление фактической погоды в районе аэродрома посредством средних и средних квадратических отклонений значений метеоэлементов позволяет получить достаточно точное описание полей метеоэлементов. Отображение данной метеоинформации на синоптических и кольцевых картах погоды обещает существенно повысить качество анализа синоптической обстановки и оправдываемость прогнозов всех видов.

Обобщенная метеоинформация должна быть достаточно устойчива. Время и число отсчетов, потребные для получения обобщенной метеоинформации с заданной точностью, должны быть минимальны.

Время, необходимое для выдачи обобщенной метеоинформации, и число отсчетов регламентируются не только ошибками измерений, но главным образом необходимостью быстрого принятия решения на всех этапах подготовки к полету и во время полета, своевременного обнаружения тенденций изменения погоды.

Схема установки датчиков (рис. 1) позволяет получить обобщенные характеристики метеополей в течение 1—2 мин. Их устойчивость оценим исходя из того, что площадь осреднения

$$S = l_y(l_x + \overline{V}T), \tag{1}$$

гед l_x и l_y — стороны прямоугольника, на площади которого установлены датчики; T — время осреднения; $\overline{V}$ — средняя скорость движения воздушной массы (ВМ).

В нашем случае $S \approx 20$ км^2. Такая площадь эквивалентна не менее чем 10—15-минутному интервалу осреднения в пункте, обеспечивающему, как известно, сглаживание метеоэлемента по полному периоду флуктуационных колебаний [1, 2]. Это позволяет получить устойчивые в течение 1 ч результаты. Кроме того, необходимо учитывать, что ВМ смещается в район глиссады снижения, поэтому репрезентативность обобщенной информации повышается.

Максимальная точность осреднения при минимальном числе измерений обеспечивается равномерным распределением датчиков по площади аэродрома. Средний квадрат ошибки осреднения σ_S^2, учитывая малость T, оценим [3] по формуле

$$\sigma_S^2 = \frac{0{,}23\sqrt{S}}{l_0 m^{3/2}}\sigma_\infty^2 + \frac{\sigma_{\text{изм}}^2}{m}, \tag{2}$$

где l_0 — радиус корреляции, $m = jk$, j — число отсчетов за время T по одному датчику, k — число датчиков, σ_∞^2 — дисперсия метеоэлемента, $\sigma_{\text{изм}}^2$ — дисперсия приборной ошибки при единичном измерении.

Расчеты по (2) показывают, что ошибка осреднения, например, высоты нижней границы облаков $\overline{H}$ (ВНГО) при $m = 15 \div 20$, $\sigma_{\infty,H} = 0{,}5\overline{H}$ [4], $l_0 = 100$ км и $\sigma_{\text{изм}} = 0{,}03\overline{H}$ [5] не превышает $0{,}03\overline{H}$. Это позволяет выявить систематические изменения ВНГО при их скорости $\geqslant 0{,}5$ м/мин. Для определения количества облаков с ошибкой $\leqslant 0{,}5$ балла также необходимо произвести порядка 20 измерений ВНГО [6].

В [7] показано, что при $m=20$ обеспечивается расчет доверительной вероятности попадания результата измерения ВНГО выше заданного уровня по нормальному закону распределения;

б) непосредственно перед взлетом и посадкой летательного аппарата, соответственно не менее чем за 1—2 мин до взлета и 5—6 мин до приземления, пока пилот еще имеет возможность парировать опасные метеоусловия принятием решения, например, уйти на повторный заход по малому прямоугольному маршруту, необходимо знать дополнительно «точные» условия взлета и посадки: ВНГО над БПРС (в зависимости от минимума — ДПРС) — в расчетное время пролета БПРС; скорость бокового ветра на траверзе глиссадного радиомаяка (ГРМ) — в расчетное время приземления и т. д. Иначе говоря, метеоинформация для взлета и посадки при разработке тактики полета должна быть согласована по месту, времени и характеру влияния на объект с наиболее ответственными (критичными) участками взлета и посадки.

Однако даже в том случае, когда метеоизмерения производятся в районе рабочего старта ежеминутно, а результаты измерений передаются на борт самолета немедленно, погода на момент посадки, после принятия решения о заходе на посадку, может существенно изменяться.

Средняя квадратическая ошибка $\sigma_{\text{и}}(\tau)$ своеобразного инерционного прогноза на время τ, при условии непрерывности процесса, определяется структурной функцией метеоэлемента:

$$\sigma_{\text{и}}(\tau)=\sqrt{B_x(\tau)}, \tag{3}$$

где $B_x(\tau)$ — продольная структурная функция.

Учитывая, что гипотеза о переносе турбулентных пульсаций средним потоком приводит к очень хорошему согласованию данных по временно́й и пространственной изменчивости полей метеоэлементов [8, 9], можно попытаться инерционный прогноз условий посадки заменить экстраполяционным.

Известно, что по скорости V и направлению движения облака или его части можно судить о скорости и направлении ветра. Решая обратную задачу, получаем возможность дать достаточно точный прогноз высоты облачности или обнаружить разрывы в ней.

Скорость и направление движения адвективных туманов, участков с ухудшенной видимостью в дымке и осадках также обычно определяются скоростью и направлением ветра.

На высокую эффективность экстраполяционного прогноза видимости при метеообеспечении посадки самолетов в тумане указывается в [10].

Из исследований структуры поля ветра следует, что так как флуктуации скорости ветра переносятся средним потоком [8, 9, 11], то имеется возможность обнаружения за несколько минут до приземления опасных турбулентных вихрей.

Ошибка экстраполяционного прогноза зависит в основном от величины сектора обслуживания, приходящегося на каждый из датчиков, расположенных в пунктах *2, 4* и *6* (рис. 2).

Рассмотрим среднюю квадратическую ошибку экстраполяционного прогноза $\sigma_э(l)$ как меру ошибки замены истинных значений метеоэлемента на дуге окружности

$$l_\smile = \frac{\pi \cdot l}{k_0} = \frac{\pi V \tau}{k_0}, \tag{4}$$

где l — радиус штормового кольца, k_0 — число датчиков в штормовом полукольце, результатом измерения в центре дуги $l_\smile$.

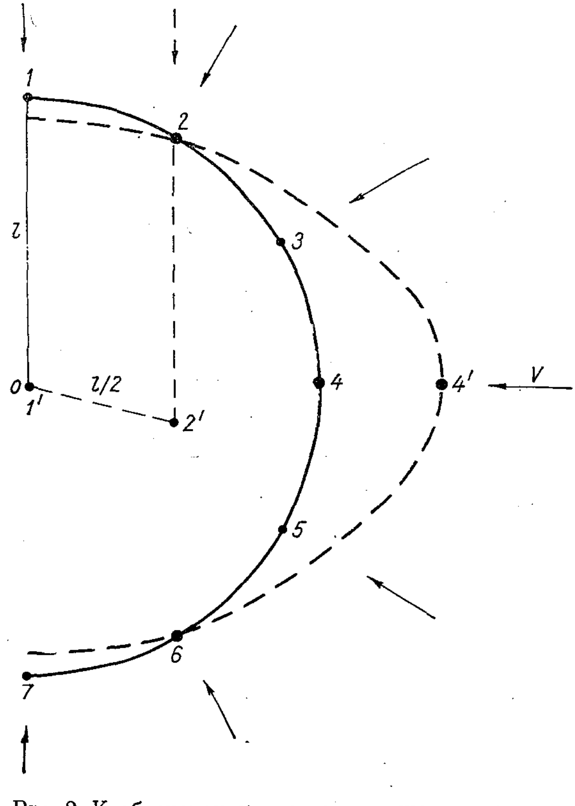


Рис. 2. К обоснованию схемы размещения пунктов метеонаблюдений на аэродроме.
2, 4, 6 — пункты наблюдений.

Меру ошибки замены истинного значения метеоэлемента в любой точке дуги $l_\smile$ результатом измерения в центре дуги $\sigma^2(l_\smile)$, при условии $l_\smile < \pi l$, найдем по известному выражению для меры ошибки по отрезку:

$$\sigma^2(l_\smile) = 0{,}16 \frac{l_\smile}{l_0} \sigma^2_\infty. \tag{5}$$

Перемещая (экстраполируя) со скоростью ведущего потока любую из точек дуги $l_{\smile}$ в точку o, истинное значение метеоэлемента в точке o получим с ошибкой $\sigma_э(l)=\sigma(l_{\smile})$.

После подстановки в (5) известного выражения для структурной функции и уравнений (3), (4) получим

$$\sigma_э^2(l) = \frac{0{,}08\,\pi\, l\, \sigma_и^2(l)}{k_0 l_0 [1 - r(l)]}. \qquad (6)$$

Отсюда, для корреляционной функции вида

$$r(l) = \exp(-l/l_0) \qquad (7)$$

имеем

$$\sigma_э(l) = \frac{c(l)}{\sqrt{k_0}}\,\sigma_и(l), \qquad (8)$$

где $c(l)=c(l=0{,}05l_0)=0{,}50$; $c(l=0{,}5l_0)=0{,}56$; $c(l=l_0)=0{,}64$, т. е. изменяется незначительно.

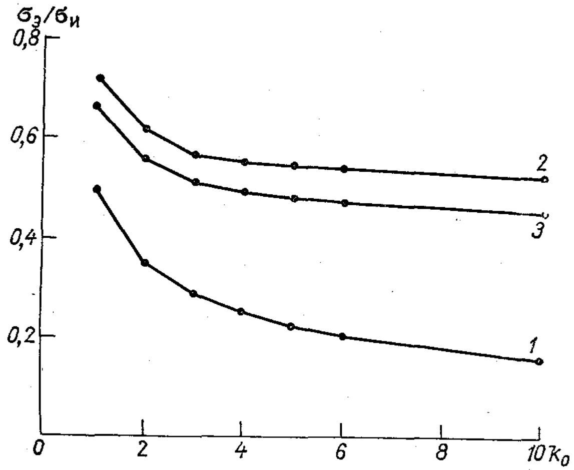


Рис. 3. Зависимость отношения ошибок экстраполяционного и инерционного прогнозов от числа датчиков в штормовом полукольце.

$1 - \sigma_э/\sigma_и$, $2 - \sigma_{мет}/\sigma_и$ при $\tau = 8$ мин, $3 - \sigma_{мет}/\sigma_и$ при $\tau = 15$ мин.

Зависимость отношения $\sigma_э/\sigma_и$ от k_0 при $c(l)=0{,}5$ показана на рис. 3, откуда следует, что $\sigma_э=0{,}29\,\sigma_и$ при $k_0=3$.

Аналогичный результат получим и в том случае, если вычислим среднюю арифметическую из ошибок в точках *1—7* (рис. 2).

При движении ВМ через точки *2, 4* и *6* минимальная ошибка $\sigma_{э,мин}=0$. Максимальная ошибка в точках *1, 3, 5, 7*

$$\sigma_{э,\,\max} \approx \sqrt{B_y(l/2)}, \qquad (9)$$

где $B_y(l/2)$ — поперечная структурная функция.

Средняя ошибка для всего сектора 180°.

$$\overline{\sigma_э} \approx \frac{4}{7} \sqrt{B_y(l/2)}. \qquad (10)$$

Вследствие ошибок в определении расчетного времени приземления $\Delta\tau$, направления движения ВМ $\Delta\varphi$ и скорости движения ΔV суммарный средний квадрат методической ошибки экстраполяционного прогноза $\sigma^2_{мет}$ (l) найдем по формуле

$$\sigma^2_{мет}(l) = \sigma^2_э(l) + \sigma^2(\Delta\tau) + \sigma^2(\Delta\varphi) + \sigma^2(\Delta V) =$$
$$= \sigma^2_э(l) + B_x(\Delta\tau) + [\sigma_э(l + \Delta l) - \sigma_э(l)]^2 + B_x(\Delta l). \qquad (11)$$

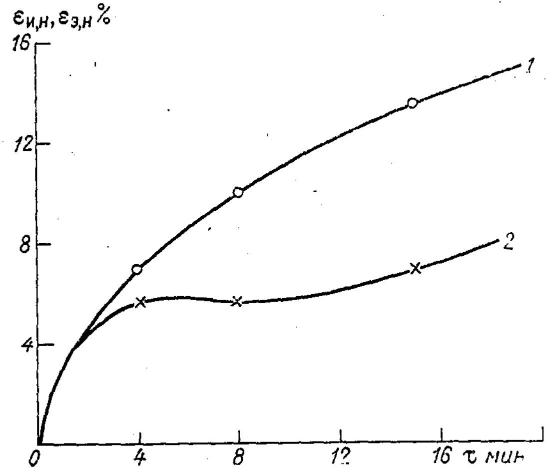


Рис. 4. Зависимость относительных средних квадратических ошибок инерционного и экстраполяционного прогнозов высоты облаков от заблаговременности прогнозов.

$1 - \varepsilon_{и,\,H}$, $2 - \varepsilon_{э,\,H}$

Примем средние значения $\Delta\tau = 1$ мин, $\tau = 8$ мин, $\Delta\varphi = 10°$, $\Delta V = 0{,}1\ V$ и $V = 25$ км/ч, тогда

$$\sigma^2_{мет}(l) \approx \left[\frac{c^2(l)}{k_0} + 0{,}13 + \frac{c^2(l)}{18} + 0{,}10\right] \sigma^2_и(l) =$$
$$(0{,}25/k_0 + 0{,}26)\, \sigma^2_и(l). \qquad (12)$$

Из (12) найдем, что при $k_0 = 3$ отношение ошибок экстраполяционного и инерционного прогнозов равно 0,57 и дальнейшее увеличение числа датчиков не эффективно (рис. 3).

В (11) не учтена ошибка экстраполяционного прогноза за счет трансформации ВМ вследствие притока тепла, но необходимо иметь в виду, что эта ошибка имеет место и при инерционном прогнозе.

10. Кэлверт и др. Безопасность и регулярность воздушного движения при критических метеоусловиях. Пер. с англ. № 42054/4 материалов 15-й техн. конф. международной ассоциации воздушного транспорта. Изд. ВИНИТИ, 1964. 46 с.
11. Шейнин М. П. Изучение и предупреждение причин аварийности, связанных с летной деятельностью. М., ГосНИИГА, ОНТИ, 1970, № 1—2, с. 4—50.
12. Aircraft accident report Delta Air Lines, Inc. Douglas DC-9-31, № 975NE. National Transportation Safety Board, USA, 1974, March 7.

В. Е. Боханов, Е. Н. Довгялло

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ВЫСОТЫ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ОБЛАКОВ И ДАЛЬНОСТИ ВИДИМОСТИ

Значительная пространственно-временна́я изменчивость высоты нижней границы облаков H и дальности видимости W приводит к необходимости вероятностного анализа результатов измерений и разработки оперативных прогнозов в вероятностной форме.

Известно, что для посадки (взлета) самолета устанавливаются минимумы по высоте нижней границы облаков ($H_{доп}$) и дальности видимости ($W_{доп}$), поэтому одной из основных задач вероятностного анализа является вычисление вероятностей $P(H_{доп} \leqslant H)$ и $P(W_{доп} \leqslant W)$. Эти вероятности, при известном законе распределения случайной величины Z, могут быть рассчитаны для оценки обеспеченности благоприятных условий посадки непосредственно по результатам измерений при представлении фактической погоды и по известным статистическим закономерностям при разработке прогноза. Однако функции распределения H и W практически не исследованы, а в литературе часто встречаются противоречивые утверждения о их соответствии или несоответствии нормальному закону.

В данной статье рассматривается распределение флуктуаций:

— высоты нижней границы облаков по результатам ежеминутных измерений;

— горизонтальной дальности видимости — по фактическому распределению повторяемости заходов на посадку в лондонском аэропорту Хитроу. При этом учитывалось, что вылеты с расчетом посадки в аэропорту Хитроу с целью обеспечения регулярности полетов производились в любую погоду, а принятие решения о заходе на посадку или уходе на запасной аэродром зависело только от результатов измерений дальности видимости.

Поскольку высокочастотные флуктуации H и W зависят от большого числа параметров атмосферы и подстилающей поверхности, примем гипотезу о нормальности распределения анализируемой случайной величины Z. Тогда, как известно, вероятность

$$P(z \leqslant Z < \infty) = 0{,}5 - F_0(z), \quad (1)$$

где функция Лапласа

$$F_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt, \tag{2}$$

$$t=\frac{z-\hat{z}}{\sigma_{\hat{z}}} \tag{3}$$

($\hat{z}$ и $\sigma\hat{z}$ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение).

Если число измерений n невелико, то при нормальном или близком к нему законе распределения для расчета доверительных интервалов обычно используют распределение Стьюдента, задаваемое вероятностью

$$P(-t<t_p\leqslant t)=\int\limits_{-t}^{t} S(t,\ n-1)\,dt, \tag{4}$$

что связано с ошибкой определения отношения

$$t_p=\frac{z-\overline{z}}{\sigma_z}, \tag{5}$$

где $\overline{z}$ и σ_z — оценки математического ожидания и стандартного отклонения.

Поскольку при $t_p\to\infty$ ошибка в определении t_p не играет роли, то с учетом (1) и (4) доверительная вероятность

$$P_p(z\leqslant Z<\infty)=0{,}5-0{,}5P(|t|<t_p). \tag{6}$$

Отметим, что в (6) имеет место тождество

$$P(t<t_p)\equiv -P(-t<t_p). \tag{7}$$

Распределение доверительной вероятности P_p $(z\leqslant Z<\infty)$ в зависимости от отношения t_p и числа измерений n приведено в табл. 1. Случай $n=\infty$ соответствует нормальному распределению. В последней графе таблицы приведены расчеты фактического распределения вероятности

$$P(H_{доп}\leqslant H<\infty)=P\left(\overline{H}-t_p\sigma_H\leqslant H<\infty\right) \tag{8}$$

для результатов ежеминутных измерений H прибором ИВО внутри 30-минутного интервала наблюдений.

Расчеты фактического распределения H по (8) выполнены по 18 сериям, т. е. в общей сложности было проанализировано 540 измерений, результаты которых опубликованы в [1]. Значительное число измерений позволяет сравнить распределение H с нормальным.

Как и следовало ожидать, доверительный интервал, основанный на нормальном законе, является в отношении фактического распределения H «перестраховочным» и, следовательно, его принятие позволяет ограничить число измерений, не опасаясь неблагоприятных последствий.

Допуская, что доверительные интервалы расширяются при уменьшении n относительно фактического распределения H таким

Таблица 1

Функции распределения вероятностей, вычисленные по формулам (6) и (8)

t_p	n							
	2	5	10	15	20	30	∞	540
—6,0	95,0	99,7	99,9	99,9...	99,9...	99,9...	99,9...	100
—4,0	92,0	99,2	99,8	99,9	99,9	99,9..,	99,9...	100
—3,0	89,8	98,0	99,2	99,5	99,7	99,8	99,9	100
—2,5	87,9	96,7	98,3	98,7	98,9	99,0	99,4	99,8
—2,0	85,2	94,2	96,2	96,7	97,0	97,2	97,7	98,8
—1,5	81,0	89,6	91,7	92,2	92,5	92,6	93,3	95,5
—1,0	75,0	80,0	82,2	83,0	83,5	83,7	84,1	84,5
—0,5	65,0	67,0	68,0	68,5	68,9	69,0	69,1	69,7
0,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,3
0,5	35,0	33,0	32,0	31,5	31,1	31,0	30,9	31,4
1,0	25,0	20,0	17,8	17,0	16,5	16,3	15,9	19,3
1,5	19,0	10,4	8,3	7,8	7,5	7,4	6,7	8,9
2,0	14,8	5,8	3,8	3,3	3,0	2,8	2,3	4,0
2,5	12,1	3,3	1,7	1,3	1,1	1,0	0,6	1,1
3,0	10,2	2,0	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0,5
4,0	8,0	0,8	0,2	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0
6,0	5,0	0,3	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

же образом, как и в распределении Стьюдента, получаем возможность в практических расчетах вероятности $P(H_{\text{доп}} \leqslant H < \infty)$ пользоваться нормальным законом распределения с ошибкой, не превышающей 1% при $n \geqslant 15$.

Переходя к анализу закона распределения случайных отклонений дальности видимости, рассмотрим фактическое распределение заходов на посадку в лондонском аэропорту Хитроу по статистическим данным за 10-летний период, с 1958 по 1968 г. [2, 3].

На рис. 1 показаны следующие зависимости. Кривая *1* — минимумы по видимости *RVR*[1], принятые в английских авиакомпаниях.

[1] Видимость *RVR* — дальность видимости огней с высоты 5 м.

Среднее значение минимума $\overline{RVR}=460$ м. Кривая 2 — зависимость от видимости RVR коэффициента захода на посадку

$$P_{\text{зах}}=\frac{З_{\text{ф}}}{З_{\text{о}}},\tag{9}$$

где $З_{\text{ф}}$ — число фактически совершенных заходов на посадку в зависимости от видимости в аэропорту Хитроу (при принятии решения на вылет с посадкой в данном аэропорту); $З_{\text{о}}$ — общее число заходов на посадку, которое могло бы иметь место, если бы к моменту подхода к аэропорту соблюдалось условие $RVR \geqslant RVR_{\text{доп}}$.

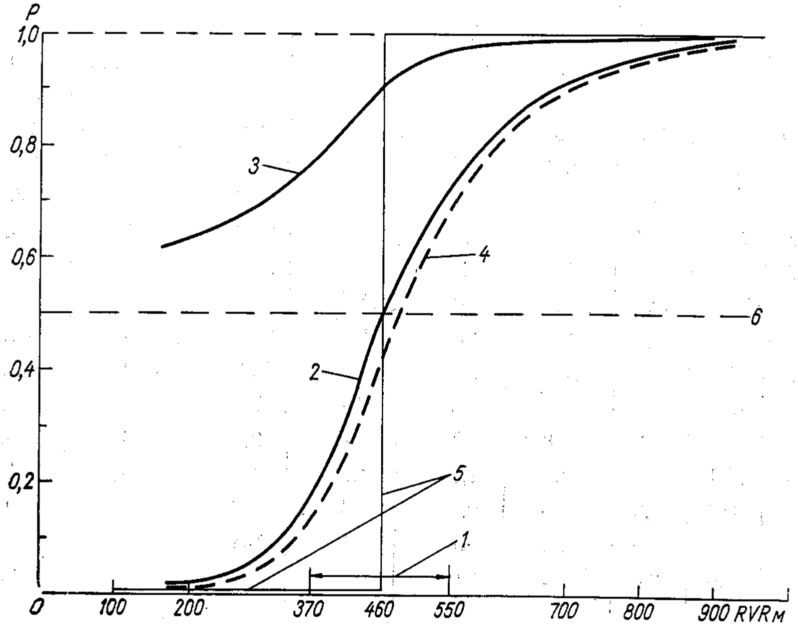


Рис. 1. Зависимость успешности посадки от видимости RVR [3, 4].

1 — минимумы по видимости RVR, 2 — успешность захода на посадку (коэффициент захода на посадку в благоприятных условиях), 3 — условная успешность посадки, 4 — безусловная успешность посадки, 5 — распределение посадок при идеальном метеорологическом фильтре, 6—$P=0{,}5$.

Кривая 3 — зависимость от видимости RVR коэффициента успешности посадки при условии захода на посадку. Условный коэффициент успешности посадки

$$P_{\text{пос/зах}}=\frac{П_{\text{ф}}}{З_{\text{ф}}},\tag{10}$$

где $П_{\text{ф}}$ — число фактически совершенных посадок.

Кривая 4 — зависимость от видимости RVR безусловного коэффициента успешности посадки

$$P_{\text{пос}} = P_{\text{зах}} P_{\text{пос/зах}} = \frac{П_{\text{ф}}}{З_0} = \frac{П_{\text{ф}}}{П_0}, \tag{11}$$

где $П_0$ — общее число посадок, которое могло бы быть выполнено в благоприятных условиях.

Как следует из рис. 1, вследствие естественной изменчивости и ошибок измерений дальности видимости только 50% всех рейсовых самолетов, выпущенных по расписанию с расчетом посадки в аэропорту Хитроу, при $RVR = RVR_{\text{доп}} = 460$ м, фактически заходили на посадку (кривая 2). Однако в связи с отклонениями видимости RVR от посадочной видимости и в результате того, что не все самолеты были выведены в область максимально допустимых отклонений от глиссады снижения, $P_{\text{пос/зах}} = 0{,}86$ (кривая 3). Фактически совершили посадку с первого захода 43% самолетов (кривая 4).

Анализ кривой 2 показал, что она очень точно описывается формулой (1) при $RVR_{\text{доп}} = 460$ м и $\sigma_{RVR} = 0{,}28$. Из рисунка нетрудно видеть, что при $\sigma_{RVR} \to 0$ или идеальном метеорологическом фильтре зависимость $P_{\text{зах}}$ (кривая 2) должна приближаться к кривой 5. Увеличение значения σ_{RVR} ведет к тому, что во всем диапазоне RVR зависимость $P_{\text{зах}} \to 0{,}5$ (кривая 6).

Учитывая, что самолеты компании ВЕА [2] обслуживают короткие линии, связывающие Лондон с крупными городами Европы, продолжительность полета $t_{\text{п}} \approx 1{,}5 \div 2$ ч.

Пусть ошибка измерения видимости $\sigma_{RVR,\,\text{и}} = 0{,}05\, RVR$, тогда, записывая σ^2_{RVR} в виде

$$\sigma^2_{RVR} = \sigma^2_{RVR}(t_{\text{п}}) + \sigma^2_{RVR,\,\text{и}}, \tag{12}$$

получаем $\sigma_{RVR}\,(t_{\text{п}} = 1{,}5 \text{ ч}) = 0{,}27\, RVR$.

Отсюда ясно, что влияние на регулярность полетов ошибки измерения видимости RVR, при $t_{\text{п}} \geqslant 1{,}5$ ч, пренебрежимо мало, а значения $P_{\text{зах}}$ и $P_{\text{пос}}$ определяются в основном видимостью у земли в момент вылета и ее естественной изменчивостью.

С другой стороны, полет в тумане может рассматриваться как полет в облаке, нижняя граница которого опустилась до земли.

Учитывая, что изменчивость нормального процесса полностью описывается структурной функцией, запишем

$$2\sigma^2_W(t) = 2c^2(t)\overline{W}^2 = B_W(t) = 2\sigma^2_\infty(\overline{W})\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right) =$$

$$= 2c^2_{\infty,\,W}\overline{W^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right), \tag{13}$$

где $B_W(t)$ — временна́я структурная функция горизонтальной дальности видимости W, $\sigma^2_\infty(\overline{W})$ — дисперсия дальности видимости при $t \to \infty$, $c_{\infty,\,W}$ — коэффициент, t_0 — интервал корреляции.

В соответствии с [4] структурные функции видимости для тумана, мороси, метели, дождя и дымки уже при $t \geqslant 1$ ч практически достигают насыщения. Рассмотренному выше случаю соответствует $t_п \geqslant 1{,}5$ ч, следовательно, должно соблюдаться равенство

$$c_W(t_п \geqslant 1{,}5 \text{ ч}) = c_{\infty,\,W} = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Анализ экспериментальных данных, использованных для получения структурных функций дальности видимости [4, 5], позволяет судить о справедливости (14) при $\overline{W} = 240$ м $= L_б$ — базе наблюдений (рис. 2).

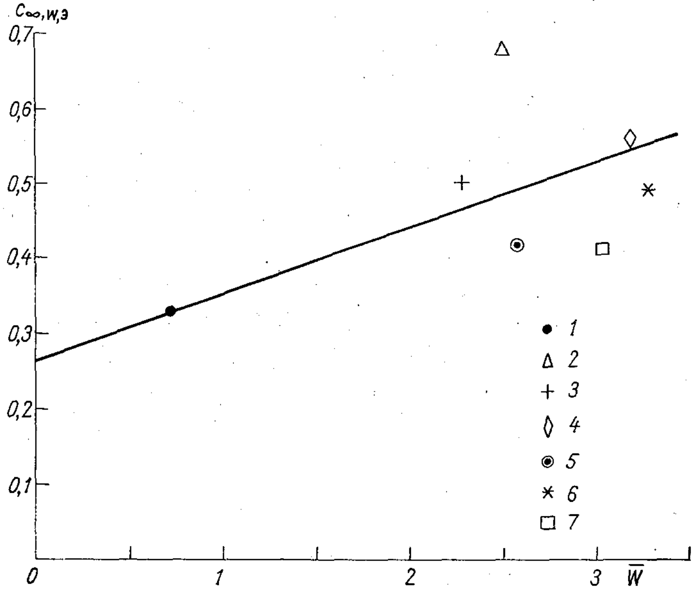


Рис. 2. К уточнению структуры горизонтальной дальности видимости.

1 — туман, *2* — дымка с туманом, *3* — метель, *4* — мгла, *5* — морось с туманом, *6* — снегопад, *7* — дымка.

В общем случае экспериментальные значения коэффициента $s_{\infty,\,W,\,э}$ описываются формулой

$$c_{\infty,\,W,\,э} = 0{,}26 + 0{,}022\,\frac{\overline{W}}{L_б}. \tag{15}$$

Увеличение коэффициента $c_{\infty,\,W,\,э}$ с ростом $\overline{W}$ объясняется локальностью базовых измерений, поэтому для структурной функции необходимо принять $c_{\infty,\,W} = 0{,}27$. С этим коэффициентом структурная функция в виде (13) может быть использована для вероятностного прогноза посадки самолета в благоприятных условиях, т. е. при видимости $W \geqslant W_{доп}$.

Выводы

1. Анализ фактического распределения результатов измерений высоты нижней границы облаков и распределения Стьюдента в интервале $[0, \infty]$ показал, что для вычисления вероятности $P(H_{\text{доп}} \leqslant \leqslant H < \infty)$ допустимо применение нормального закона распределения при числе измерений $n \geqslant 15$.

2. Из анализа реального распределения заходов на посадку и структурных функций для горизонтальной дальности видимости следует, что флуктуации видимости описываются нормальным законом распределения, а уточненная структурная функция может быть использована для оценки вероятности захода на посадку в благоприятных условиях.

3. Истинные дисперсии дальности видимости для аэропорта Хитроу и пос. Воейково примерно равны $0{,}27^2\,\overline{W}^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Круглов Р. А., Мидруев Е. В. О результатах исследования возможностей наземных автоматических станций погоды по определению высоты нижней границы облаков. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 292, с. 82—90.

2. Ormonroyd F. Instrument approach criteria an operators view.—"J. Inst. Navig", 1968, 21, N 2, p. 207—220.

3. Кэлверт, Спарк, Моррелл. Безопасность и регулярность воздушного движения при критических метеоусловиях. М., Пер. с англ. № 42054 материалов 15-й техн. конф. международной ассоциации воздушного транспорта. Изд. ВИНИТИ, 1964. 46 с.

4. Довгялло Е. Н. О погрешностях осреднения данных по видимости и о временной дискретности наблюдений.—«Тр. ГГО», 1974, вып. 324, с. 106—111.

5. Бартенева О. Д., Довгялло Е. П., Полякова Е. А. Экспериментальные исследования оптических свойств приземного слоя атмосферы.— «Тр. ГГО», 1967, вып. 220. 244 с.

Л. П. Афиногенов

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СТАРЕНИЯ

Длительное хранение информации является одной из важных задач для многих областей деятельности человека. В учреждениях Гидрометслужбы накапливаются и хранятся большие массивы гидрометеорологической информации, которые используются для обслуживания народного хозяйства и в научной работе по разработке методов прогноза погоды, теории климата и др. Разработка теоретических основ длительного хранения информации позволяет правильно, на научной основе организовать хранение в современных системах, базирующихся на технических носителях и ЭВМ.

Процессы длительного хранения информации всегда сопровождаются старением технических носителей. В данной статье исследуются свойства выведенного в работе [1] уравнения, описывающего процесс старения технических носителей при длительном хранении информации. Пусть

$$M = \|p_{ij}\| - (i = 1 \div n; \quad j = 1 \div m) \tag{1}$$

— стохастическая матрица, элементы которой определяют условные вероятности появления событий b_j во вторичной системе B_m при условии, что в первичной системе A_n возникло событие a_i. Системы A_n и B_m связаны статистической причинно-следственной связью. Это означает, что события b_j возникают после (и вследствие) появления событий a_i.

Применительно к процессам хранения информации события a_i представляют собой символы входного алфавита (т. е. записываемые на носитель), а события b_j — символы выходного алфавита (т. е. символы, считываемые с носителя). Элементы p_{ij} матрицы (1) в этом случае представляют собой вероятности того, что через время t будет считан символ b_j, если в начале $|t=0|$ был записан символ a_i. Обычно $i=j$ и множества $\{a_i\}$; $\{b_j\}$ совпадают, хотя в общем случае (даже для процессов, связанных с хранением информации) это не обязательно.

Основная особенность хранения информации состоит в том, что элементы матрицы (1) являются функциями времени, но сама матрица, разумеется, остается стохастической для любого момента t. Матрицу можно представить, как точку в $n \cdot m$-мерном пространстве, координаты которой зависят от времени. Таким образом, с течением времени точка описывает некоторую траекторию, которая должна удовлетворять условиям, естественным для любой стохастической матрицы:

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \tag{3}$$

Эти выражения, однако, являются не единственными ограничениями, накладываемыми на траектории, описывающие реальные процессы старения.

В [1] формулируются дополнительные требования, которым должна удовлетворять модель старения и в результате сравнительного анализа выбирается модель, которая в наибольшей степени соответствует поставленным требованиям. Это дает возможность вывести матричное дифференциальное уравнение старения, имеющее следующий вид:

$$\|p'_{ij}(t)\| = \|p_{ij}(t)\| \, \|g_{ks}(t)\| \tag{4}$$

$$(i = 1 \div n; \quad j = 1 \div m; \quad k; \quad s = 1 \div m).$$

Здесь $\| p_{ij}(t) \|$ — стохастическая матрица, описывающая процесс старения; $\|p'_{ij}(t)\|$ — матрица, полученная из $\| p_{ij}(t) \|$ дифференцированием каждого ее элемента; $\| q_{ks}(t) \|$ — квадратная матрица $m \cdot m$ с элементами, зависящими от времени и удовлетворяющими условиям

$$\left.\begin{aligned} g_{ks}(t) \geqslant 0 \quad & \text{при } k \neq s; \\ g_{ks}(t) \leqslant 0 \quad & \text{при } k = s; \\ \sum_{k=1}^{m} g_{ks}(t) = 0 \quad & \text{при любом } t. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В остальном элементы матрицы $\|q_{ks}(t)\|$ являются произвольными функциями времени. Матрица $\|q_{sk}(t)\|$ определяет характер процесса старения и потому может быть названа *определяющей*.

Начальные условия в уравнении (4) задаются с помощью матрицы начальных условий: при $t=0$

$$\|p_{ij}(t)\| = \|p^{(0)}_{ij}\|. \tag{6}$$

Наряду с *матрицей старения* $\|p_{ij}(t)\|$[1] вводятся *функции старения*, зависящие от времени и описывающие процесс старения в обобщенной форме. Роль таких функций выполняют рассмотрен-

[1] В дальнейшем для сокращения записи аргумент t часто будет опускаться.

ные в [2] информационные характеристики матриц; $\eta(t)$ — относительное количество информации, передаваемой из первичной системы (A_n) во вторичную (B_m) при фиксированном распределении вероятностей на входе (p_i); $\chi(t)$ — относительная пропускная способность матрицы старения. Относительные величины $\eta(t)$ и $\chi(t)$ связаны с соответствующими абсолютными характеристиками $I_{a/в}(t)$ и C зависимостями

$$\eta_{a/b}(t) = \frac{I_{a/b}(t)}{\min\{H_a;\ H_b\}}; \tag{7}$$

$$\chi(t) = \frac{C(t)}{\min\{\log n;\ \log m\}}. \tag{8}$$

В (7) H_a — энтропия первичной системы, которая при фиксированном входном распределении не зависит от времени; $H_b = H_b(t)$ — энтропия вторичной системы, которая может меняться при изменении матрицы (1) и потому является функцией времени.

Отметим, что $\eta_{a/в}(t)$ зависит как от элементов матрицы старения, так и от распределения входных вероятностей p_i и различным входным распределениям, вообще говоря, соответствуют различные функции $\eta(t)$, в то время как $\chi(t)$ определяется только пропускной способностью матрицы C и не меняется при изменении вероятностей на входе.

Объектом уравнения (4) является неизвестная матрица $\|p_{ij}(t)\|$ и для решения надо найти все элементы этой матрицы. Разлагая матричное равенство (4) по элементам матрицы $\|p'_{ij}\|$, можно представить уравнение в виде системы из $n \cdot m$ линейных однородных уравнений

$$p'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \cdot g_{ik}, \tag{9}$$

$$(i = 1 \div n; \quad j = 1 \div m),$$

причем эта система разделяется на n совершенно одинаковых подсистем (по одной для каждой строки матрицы $\|p'_{ij}\|$), состоящих из m уравнений относительно m неизвестных. Например, для i-той строки в развернутом виде эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} p'_{i1} &= p_{i1}g_{i1} + p_{i2}g_{21} + \ldots + p_{im}g_{m1}; \\ p'_{i2} &= p_{i1}g_{i2} + p_{i2}g_{22} + \ldots + p_{im}g_{m2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p'_{im} &= p_{i1}g_{im} + p_{i2}g_{2m} + \ldots + p_{im}g_{mm}. \end{aligned} \tag{10}$$

Системы (10) отличаются друг от друга только набором неизвестных (соответствующие строки матриц $\|p'_{ij}\|$ и $\|p_{ij}\|$) и начальными условиями (аналогичная строка матрицы $\|p^0_{ij}\|$).

Из теории дифференциальных уравнений известно [3], что при непрерывных (а значит, и ограниченных) коэффициентах $q_{ks}(t)$

и любых начальных условиях система (10) (и, следовательно, уравнение (4)) имеет единственное решение, представляющее собой систему непрерывных и дифференцируемых функций времени $p_{ij}(t)$. Условия непрерывности $q_{ks}(t)$ мы будем считать выполненными.

Специфика уравнений (10) и матричного уравнения (4) по сравнению с общим случаем систем однородных уравнений состоит, во-первых, в том, что элементы матрицы коэффициентов $\|g_{ks}(t)\|$ подчинены условиям (5), и, во-вторых, в том, что матрица начальных условий (6) — стохастическая. Эти особенности приводят к ряду специфических свойств решений, которые мы сформулируем в виде нескольких теорем.

Теорема 1. Решение уравнения (4) при любой матрице $\| g_{ks}(t) \|$ с элементами, удовлетворяющими условиям (5), и стохастической начальной матрицей (6) представляет собой стохастическую матрицу для любого момента t.

Сложив все равенства (10) и учитывая (5), получим

$$\sum_{j=1}^{m} p'_{ij} = p_{i1}\sum_{j=1}^{m} g_{1j} + p_{i2}\sum_{j=1}^{m} g_{2j} + \ldots + p_{im}\sum_{j=1}^{m} g_{mj} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t) = \mathrm{const} = 1, \tag{11}$$

поскольку матрица начальных условий — стохастическая и при $t=0$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(0) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(0)} = 1.$$

Равенство (11), очевидно, справедливо для любой строки ($i=1\div n$) матрицы $\|p_{ij}\|$. Остается доказать, что каждый элемент матрицы $\|p_{ij}\|$ (решения) для любого t удовлетворяет также условию

$$p_{ij}(t) \geqslant 0. \tag{12}$$

Предположим, что это не так: некоторые из функций p_{ij} могут принимать отрицательные значения. Имея в виду конкретную систему (10), при которой некоторые из неравенств (12) пе выполняются, рассмотрим множество значений t, для которых хотя бы одна из функций $p_{ij}<0$. Это, ограниченное снизу множество, имеет точную нижнюю границу; обозначим ее t_0. Значение t_0 в то же время является аналогичной точной нижней границей не только для всего множества $\{p_{ij}\}$, но и для отдельных функций — одной или сразу нескольких. Не ограничивая общности можно считать, что t_0 — нижняя граница для первых $k \geqslant 1$ функций из ряда p_{i1}; p_{i2}; ..., p_{ik}; $p_{i(k+1)}$; ...; p_{im}. Поскольку все эти функции — непрерывные, должны выполняться следующие условия.

1. При $t \leqslant t_0$ все p_{ij} удовлетворяют неравенству (12).

2. Существует такое значение Δt, что для всякого t в области $t_0 < t \leqslant t_0 + \Delta t$ каждая из первых k функций p_{ij} отрицательна:

$$p_{ij}(t) < 0 \quad \text{при } j = 1 \div k. \tag{13}$$

3. При $t = t_0$ каждая из первых k функций равна нулю:

$$p_{ij}(t_0) = 0 \qquad (j = 1 \div k). \tag{14}$$

4. Каждая из последних $m-k$ функций p_{ij} в области $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$ неотрицательна:

$$p_{ij}(t) \geqslant 0 \qquad (j = k + 1;\ m).$$

Подчеркнем, что сформулированные четыре условия с необходимостью вытекают из непрерывного характера функций $p_{ij}(t)$ — решений системы (10) и предположения, что некоторые из этих функций могут принимать отрицательные значения. Рассмотрим теперь сумму первых k функций

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}(t). \tag{15}$$

Из условий (2) и (3) следует:

$$5.\ u_k(t) < 0 \qquad \text{при } t_0 < t \leqslant t_0 + \Delta t. \tag{16}$$

$$6.\ u_k(t_0) = 0. \tag{17}$$

Сложим первые k равенств (10):

$$\sum_{j=1}^{k} p'_{ij} = u'_k = p_{i1} \sum_{j=1}^{k} g_{1j} + \ldots + p_{ik} \sum_{j=1}^{k} g_{kj} + \\ + p_{i(k+1)} \sum_{j=1}^{k} g_{(k+1)j} + \ldots + p_{im} \sum_{j=1}^{k} g_{mj}. \tag{18}$$

В этом равенстве суммы в первых k слагаемых содержат диагональные (отрицательные) элементы g_{11}; g_{22}; ...; g_{kk} матрицы $\|g_{ks}\|$, а суммы в последних $m-k$ слагаемых диагональных элементов не содержат и все их члены неотрицательны. Поэтому в силу условий (5) для каждой из первых k сумм

$$\sum_{j=1}^{k} g_{pj} \leqslant \sum_{j=1}^{m} g_{pj} = 0 \qquad (p = 1 \div k). \tag{19}$$

Учитывая условие (13), отсюда следует, что в области $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$ все слагаемые в правой части (18) неотрицательны и

$$\sum_{j=1}^{k} p'_{ij} = u'_k \geqslant p_{i1} \sum_{j=1}^{k} g_{1j} + \ldots + p_{ik} \sum_{j=1}^{k} g_{kj}. \tag{20}$$

Построим неположительную функцию $g_0(t)$, которая для каждого t в бласти $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\Delta t$ равна наибольшей из сумм:

$$g_0(t) = \max\left\{\sum_{j=1}^{k} g_{1j}(t);\ \ldots;\ \sum_{j=1}^{k} g_{kj}(t)\right\} \leqslant 0. \tag{21}$$

Очевидно, $g_0(t)$ сама является непрерывной функцией, удовлетворяющей в рассматриваемой области неравенствам

$$0 \geqslant g_0(t) \geqslant \sum_{j=1}^{k} g_{1j}(t);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 \geqslant g_0(t) \geqslant \sum_{j=1}^{k} g_{kj}(t).$$

Заменив все суммы $\sum\limits_{j=1}^{k} g_{pj}(t)$; $(p=1\div k)$ в (20) на $g_p(t)$, мы можем только усилить неравенство. Таким образом,

$$u'_k \geqslant g_0(t) \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = g_0(t)\, u_k. \tag{22}$$

Дифференциальному уравнению

$$u'_{k1} = g_0(t)\, u_{k1} \tag{23}$$

при начальном условии $u_k(t_0)=0$ удовлетворяет функция, тождественно равная нулю (единственное решение):

$$u_{k1}(t) = 0. \tag{24}$$

Составляя (22), (23), (24) и рассматривая функцию $u_k(t) = \sum\limits_{j=1}^{k} p_{ij}(t)$ на участке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\Delta t$, мы видим, что в начальной точке участка $(t=t_0)$ $u_k(t_0) = uk_1(t_0) = 0$, а во всех остальных точках $u'_k(t) \geqslant u'_{k_1}(t)$. Отсюда следует, что на всем участке

$$u_k(t) \geqslant u_{k1}(t) = 0. \tag{25}$$

Неравенства (25) и (16) противоречат друг другу. Это является следствием сделанного предположения о том, что решения $p_{ij}(t)$ системы (10) могут принимать отрицательные значения.

Таким образом, всякое решение системы (10), а значит и уравнения старения (4) при стохастической матрице начальных условий удовлетворяет условиям

$$p_{ij}(t) \geqslant 0; \quad \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t) = 1,$$

и следовательно, матрица $\|p_{ij}(t)\|$, являющаяся решением уравнения (4), для любого момента t остается стохастической.

Найдем множитель k_{uv} при некотором элементе g_{uv}. В первой сумме выражения (35) это соответствует значениям $k=u$; $j=v$, а во второй сумме $j=u$; $s=v$. Таким образом,

$$k_{uv}=\sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{q_v} - \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iu}}{q_u} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{p_{iu}} \frac{q_u}{q_v} \tag{37}$$

$$(u;\quad v=1 \div m;\quad u \neq v).$$

Покажем, что $k_{uv} \leqslant 0$, для чего используем неравенство

$$\ln x \leqslant x-1;$$

$$\log x = \ln x;\quad \log e \leqslant (x-1)\log e;$$

$$k_{uv} \leqslant \log e \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu}\left(\frac{p_{iv}}{p_{iu}} \frac{q_u}{q_v} - 1\right) =$$

$$= \log e\left(\frac{q_u}{q_v} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iv} - \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu}\right) = \log e(q_u - q_u) = 0. \tag{38}$$

Отметим, что равенство $k_{uv}=0$ достигается только при

$$x = \frac{p_{iv}}{p_{iu}} \frac{q_u}{q_v} = 1.$$

Учитывая, что, согласно (5), все недиагональные элементы g_{uv} $(u \neq v)$ определяющей матрицы неотрицательны, а также учитывая неравенство (38), получим, используя (36), неравенство (26). Из приведенного доказательства видно, что это условие выполняется для любого момента времени и любого распределения вероятностей на входе.

Для доказательства неравенства (27) рассмотрим две матрицы, M_1 и M_2, с одинаковыми множествами входных событий $\{a_i\}$ и сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если при любом распределении входных вероятностей матрица M_1 с пропускной способностью C_1 передает на выход большее (не меньшее) количество информации, чем матрица M_2 $(I_1 \geqslant I_2)$ с пропускной способностью C_2, то $C_1 \geqslant C_2$.

Это утверждение, несмотря на его интуитивную «очевидность», нуждается в доказательстве, поскольку при изменении элементов матрицы меняется и входное распределение, при котором реализуется ее пропускная способность.

Обозначим входные распределения, при которых реализуется пропускная способность M_1 и M_2, через $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$. Тогда

$$C_1 = I_1(p^{(1)}) \geqslant I_1(p^{(2)}) \geqslant I_2(p^{(2)}) = C_2. \qquad (39)$$

Отсюда $C_1 \geqslant C_2$.

Заметим, что если для любого распределения соблюдается строгое неравенство $I_1 > I_2$, то $C_1 > C_2$.

Используем теперь известное из анализа (см., например, [4]) предельное свойство неравенств, которым удовлетворяют члены сходящейся последовательности x_1; x_2; ...; x_n...: если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и для любого $n \geqslant N$ $a \leqslant x_n \leqslant b$, то $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Рассмотрим матрицу $\| p_{ij}(t) \|$, удовлетворяющую уравнению (4) в моменты времени t, $t+\Delta t$. Из $I'(t) \leqslant 0$ следует, что при любом входном распределении

$$I(t) \geqslant I(t + \Delta t),$$

а отсюда, согласно лемме 1,

$$C(t) \geqslant C(t + \Delta t).$$

Таким образом, для любых t и Δt

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} \leqslant 0,$$

и, следовательно,

$$C'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} \leqslant 0.$$

В теореме 2 расматривались абсолютные характеристики матрицы старения $I(t)$ и $C(t)$. Аналогичное свойство справедливо и для относительных характеристик $\eta(t)$ и $\chi(t)$.

Теорема 3. Если стохастическая матрица $\|p_{ij}(t)\|$ является решением уравнения старения (4), то относительная пропускная способность $\chi(t)$ и, при любом входном распределении, относительное количество передаваемой матрицей информации $\eta(t)$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{d\,\chi(t)}{dt} \leqslant 0; \qquad (40)$$

$$\frac{d\,\eta(t)}{dt} \leqslant 0. \qquad (41)$$

Неравенство (40) является прямым следствием неравенства (27), поскольку, согласно (8), $\chi(t)$ отличается от $C(t)$ только постоянным множителем $\frac{1}{\log n}$ или $\frac{1}{\log m}$.

Неравенство (41) требует доказательства, поскольку входящая в (7) вторичная энтропия H_b при изменении элементов матрицы $\|p_{ij}(t)\|$ может меняться и, в частности уменьшаться вместе с $I(t)$. Ниже будет показано, что для матриц, являющихся решением уравнения (4), всегда выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt}\frac{I(t)}{H_b(t)} \leqslant 0. \tag{42}$$

Отсюда следует

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{I(t)}{\min\{H_a;\ H_b\}} \leqslant 0,$$

т. е. неравенство (41), поскольку энтропия первичного распределения H_a от t не зависит.

Перейдем к доказательству неравенства (42):

$$\frac{d}{dt}\frac{I(t)}{H_b(t)} = \frac{I'H_b - IH_b'}{H_b^2}. \tag{43}$$

Обозначим

$$A = I'H_b - IH_b'. \tag{44}$$

Знак производной (43) определяется знаком A, так как $H_b \geqslant 0$. Используя значения g_i (30) и равенство

$$H_b = -\sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j, \tag{45}$$

найдем производную H_b':

$$H_b'' = -\sum_{j=1}^{m} (\log q_j + \log e)\frac{dq_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{m} (\log q_j)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}'\right), \tag{46}$$

поскольку

$$\log e \sum_{j=1}^{m} \frac{dq_j}{dt} = \log e \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{m} q_j = 0.$$

Подставляя в (46) значения p_{ij}', согласно (32), и исключая диагональные элементы определяющей матрицы g_{jj} на основании (34), получим

$$H_b' = -\sum_{j=1}^{m} (\log q_j) \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} p_{ik} g_{kj} - p_{ij} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} g_{jk} \right) \right]. \tag{47}$$

Это выражение, как и значение I' (35), входящее в A (44), является линейной однородной функцией относительно принятых за независимые недиагональных элементов определяющей матрицы g_{uv} ($u \neq v$). Поскольку другие входящие в (44) множители, H_b и I, элементов g_{uv} не содержат (см. равенства (45), (28), (29), (30)), то величина A также является линейной однородной функцией g_{uv} и может быть представлена в форме

$$A=\sum_{u=1}^{m}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq u}}^{m} h_{uv}\,g_{uv}. \tag{48}$$

Так как все g_{uv} $(u\neq v)$ неотрицательны и независимы, то для того чтобы выполнялось неравенство $A\leqslant 0$ и, следовательно, неравенство (42), необходимо и достаточно, чтобы $h_{uv}\leqslant 0$ для всех u; $v=1\div m$; $u\neq v$. Из (48) и (44), учитывая, что H_b и I не содержат g_{uv}, получим

$$h=\frac{dA}{dg_{uv}}=H_b\frac{d}{dg_{uv}}I'-I\frac{d}{dg_{uv}}H_b'. \tag{49}$$

Величина $\frac{d}{dg_{uv}}I'$ была уже определена раньше (формулы (36), (37)) и было показано, что всегда $\frac{d}{dg_{uv}}\quad I'\leqslant 0$.

Используя (47), найдем

$$\frac{d}{dg_{uv}}H_b'=-\sum_{j=1}^{m}(\log q_i)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{m}p_{ik}\right)\Bigg|_{\substack{k=u\\ j=v}}+\sum_{j=1}^{m}(\log q_j)\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}p_ip_{ij}\right)\Bigg|_{\substack{j=u\\ k=v}}=-(\log q_v)\left(\sum_{i=1}^{n}p_ip_{iu}\right)+(\log q_u)\left(\sum_{i=1}^{n}p_ip_{iu}\right)=$$

$$=-q_u\log q_v+q_u\log q_u=q_u\log\frac{q_u}{q_v}. \tag{50}$$

Подставляя $\frac{d}{dg_{uv}}I'$ из (37) и $\frac{d}{dg_{uv}}H_b'$ из (50) в (49), получим

$$h_{uv}=\frac{dA}{dg_{uv}}\Bigg|_{u\neq v}=\left(-\sum_{j=1}^{m}q_j\log q_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_ip_{iu}\log\frac{p_{iv}}{p_{iu}}\,\frac{q_u}{q_v}\right)-$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\log p_{ij}\right)-\sum_{j=1}^{m}q_j\log q_j\right]\left(q_u\log\frac{q_u}{q_v}\right)=$$

$$=\left(-\sum_{j=1}^{m}q_j\log q_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_ip_{iu}\log\frac{p_{iv}}{p_{iu}}\right)-\left(\sum_{j=1}^{m}q_j\log q_j\right)q_u\log\frac{q_u}{q_v}-$$

$$-q_u\left(\log\frac{q_u}{q_v}\right)\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\log p_{ij}\right)+\left(\sum_{j=1}^{m}q_j\log q_j\right)q_u\log\frac{q_u}{q_v}=$$

$$=-\left(\sum_{j=1}^{m}q_j\log q_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_ip_{iu}\log\frac{p_{iv}}{p_{iu}}\right)-$$

$$-q_u\left(\log\frac{q_u}{q_v}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\log p_{ij}\right). \tag{51}$$

Можно показать, что полученное выражение неположительно: $h_{uv} \leqslant 0$. Отсюда, учитывая сказанное ранее (формулы (48), (44), (43), (42)), вытекают неравенства:

$$A \leqslant 0; \quad \frac{d}{dt}\frac{I}{H_b} \leqslant 0; \quad \eta' \leqslant 0.$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Величины I и C, являющиеся функциями времени, а также относительные характеристики η и χ в самой общей форме выражают сущность процессов старения и поэтому могут быть названы *функциями старения.*

Теорема 4. Если $\|p_{ij}(t)\|$ — решение уравнения (4) при начальных условиях $\|p_{ij}^{(0)}\|$, то существует квадратная $(m \times m)$ стохастическая матрица $\|d_{sh}(t)\|$, которая удовлетворяет уравнению

$$\|p_{ij}(t)\| = \|p_{ij}^{(0)}\| \, \|d_{kl}(t)\| \quad (i = 1 \div n; \ j; \ k; \ l = 1 \div m). \tag{52}$$

Рассмотрим квадратную $(m \times m)$ матрицу $\|d_{kl}(t)\|$, которая является решением уравнения вида (4)

$$\|d_{kl}\|' = \|d_{kl}\| \, \|g_{sh}\| \quad (k; \ l; \ s; \ h = 1 \div m) \tag{53}$$

при единичной матрице начальных условий

$$\|d_{kl}(0)\| = \|d_{kl}^{(0)}\| = \|1\|. \tag{54}$$

Существует единственная матрица $\|d_{kl}\|$, удовлетворяющая уравнению (53) с начальными условиями (54), которая, согласно теореме 1, является стохастической для любого t. Рассмотрим теперь также стохастическую матрицу $(n \times m)$, равную

$$\|q_{ij}\| = \|p_{ij}^{(0)}\| \, \|d_{kl}\| \quad (i = 1 \div n; \ j, \ k, \ l = 1 \div m), \tag{55}$$

и покажем, что она совпадает с матрицей $\|p_{ij}\|$, определяемой уравнением (4).

При $t=0$ матрица $\|q_{ij}\|$ равна

$$\|q_{ij}(0)\| = \|p_{ij}^{(0)}\| \, \|d_{kl}(0)\| = \|p_{ij}^{(0)}\| \, \|1\| = \|p_{ij}^{(0)}\|, \tag{56}$$

что совпадает с начальными условиями для матрицы $\|p_{ij}\|$. Дифференцируя (55) с учетом (53), получим

$$\|q_{ij}\|' = \|p_{ij}^{(0)}\| \, \|d_{kl}\|' = \|p_{ij}^{(0)}\| \, \|d_{kl}\| \, \|g_{sh}\| = \|q_{ij}\| \, \|g_{sh}\|. \tag{57}$$

Таким образом, матрица $\|g_{ij}\|$ удовлетворяет тому же самому уравнению (4), включая и начальные условия. Отсюда в силу единственности решения уравнения (4) вытекает, что матрицы $\|q_{ij}\|$ и $\|p_{ij}|$ совпадают. Сопоставляя (55) с (52), заключаем, что определенная выше квадратная матрица $\|d_{kl}\|$ удовлетворяет уравнению (52).

Теорема 5. Если стохастическая матрица $M_{nm}(t)=\|p_{ij}(t)\|$ с элементами, зависящими от времени, удовлетворяет условию: для любых двух моментов t_1; $t_2>t_1$ существует решение матричного уравнения

$$\|p_{ij}(t_2)\|=\|p_{ij}(t_1)\|\,\|d_{ks}(t_1,\ t_2)\| \tag{58}$$

в виде квадратной $(m\times m)$ стохастической матрицы $\|d_{ks}(t_1,\ t_2)\|$, то матрица $\|p_{ij}(t)\|$ удовлетворяет некоторому уравнению вида (4) с начальной матрицей $\|p_{ij}(0)\|=\|p_{ij}^{(0)}\|$ и с определяющей матрицей, удовлетворяющей условиям (5).

Элементы матрицы $\|d_{ks}\ (t_1,\ t_2)\|$, о которой идет речь в условии теоремы, являются непрерывными и дифференцируемыми функциями t_1 и t_2, поскольку все $d_{ks}\ (t_1,\ t_2)$ линейно выражаются через элементы матриц $\|p_{ij}(t_1)\|$; $\|p_{ij}(t_2)\|$, которые мы предполагаем непрерывными и дифференцируемыми функциями t_1 и t_2. Введем обозначения $t_1=t$; $t_2=t+\Delta t$ и рассмотрим матрицу

$$\|q_{ks}(t;\ t+\Delta t)\|=\|d_{ks}(t,\ t+\Delta t)\|-\|1\|. \tag{59}$$

Здесь $\|1\|$ — единичная квадратная матрица $m\times m$ и под вычитанием матриц понимается поэлементное вычитание. Легко видеть, что в силу непрерывности и дифференцируемости $d_{ks}(t_1,\ t_2)$ по t_1 и t_2 существуют пределы

$$g_{ks}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q_{ks}(t;\ t+\Delta t)}{\Delta t}; \tag{60}$$

Элементы $g_{ks}\ (t;\ t+\Delta t)$ и предельные значения $g_{ks}\ (t)$ удовлетворяют условиям

$$q_{ks}(t;\ t+\Delta t)\geqslant 0,\quad g_{ks}(t)\geqslant 0\quad \text{при } k\neq s;$$
$$q_{kk}(t;\ t+\Delta t)\leqslant 0;\quad g_{kk}(t)\leqslant 0;$$
$$\sum_{s=1}^{m}q_{ks}(t;\ t+\Delta t)=\sum_{s=1}^{m}g_{ks}(t)=0. \tag{61}$$

Таким образом, квадратная $m\times m$ матрица, составленная из элементов $g_{ks}(t)$.

$$G(t)=\|g_{ks}(t)\|, \tag{62}$$

может играть роль определяющей. Рассмотрим теперь производную от матрицы $\|p_{ij}(t)\|$ с учетом равенств (58), (60):

$$\|p_{ij}(t)\|'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\|p_{ij}(t+\Delta t)\|-\|p_{ij}(t)\|}{\Delta t}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\|p_{ij}(t)\|\,\|d_{ks}(t;\ t+\Delta t)\|-\|p_{ij}(t)\|}{\Delta t}=$$

$$= \|p_{ij}(t)\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|d_{ks}(t;\ t+\Delta t)\| - \|1\|}{\Delta t} = \|p_{ij}(t)\| \, \|g_{ks}(t)\|. \qquad (63)$$

Равенство (63) и является тем уравнением вида (4), которому должна удовлетворять матрица $\|p_{ij}(t)\|$ согласно теореме 5, с определяющей матрицей, которая может быть найдена по формулам (60), (62).

Равенство (58) выражает сущность тех условий, которые были положены в основу модели старения при выводе уравнения (4). Таким образом, теорема 5 устанавливает соответствие между множеством стохастических матриц с элементами, зависящими от времени, «траектории» которых удовлетворяют модели старения, и множеством решений уравнения (4).

Представляет интерес поведение матриц старения при $t \to \infty$. Факторы, вызывающие старение, отражаются определяющей матрицей $\|g_{ks}(t)\|$ $(s,\ k = 1 \div m)$, содержащей $m(m-1)$ независимых элементов, в качестве которых удобно выбрать недиагональные элементы $g_{sk}(t) \geqslant 0$; $s \neq k$. Если начиная с некоторого момента $t = t_0$ все элементы матрицы $\|g_{sk}\|$ обратятся в нуль, в силу условий (4), (9) производные $p^{i}_{ij}(t)$ от всех элементов матрицы старения также обратятся в нуль. Поэтому начиная с момента t_0 процесс старения (и вообще всякое изменение матрицы $\|p_{ij}\|$) прекратится. Обратимся теперь к случаю, когда факторы, вызывающие старение, действуют неограниченно долго.

Теорема 6. Если каждый недиагональный элемент определяющей матрицы для любого t удовлетворяет условию $g_{sk}(t) \geqslant g_0(t)$ $s \neq k$, где $g_0(t) \geqslant 0$ — некоторая неотрицательная функция, интеграл от которой

$$G_0 = \int_0^\infty g_0(t)\, dt \qquad (64)$$

расходится, то при $t \to \infty$:

1. Разность между любыми двумя элементами одного столбца матрицы $\|p_{ij}(t)\|$, являющейся решением уравнения (4), стремится к нулю.

2. Разность между соответствующими элементами двух решений уравнения (4), отличающихся только начальными условиями, при общей определяющей матрице стремится к нулю.

3. Количество информации $I(t)$, передаваемое матрицей при любом распределении на входе, и пропускная способность $C(t)$ также стремятся к нулю.

Сформулированная теорема утверждает, что в процессе старения матрица, как и следовало ожидать, становится «все более линейной» и ее информационная пропускная способность неограниченно уменьшается. Этот процесс происходит независимо от начальных условий, которые с течением времени как бы «забываются».

Доказательство теоремы начнем с третьего утверждения. Рассмотрим, пользуясь формулами (36), (37), производную $I'(t)$ для некоторого фиксированного входного распределения. Поскольку все $k_{uv} \leqslant 0$ и $g_{uv} \geqslant 0$, как показано при доказательстве теоремы (3), количество информации $I(t)$ в процессе старения монотонно убывает:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \sum_{u=1}^{m} \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq u}}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{p_{iu}} \frac{q_u}{q_v} \right) g_{uv} \leqslant 0. \tag{65}$$

В этом выражении $p_{iu}; p_{iv}; q_u; q_v; g_{uv}$ являются функциями времени. Если все g_{uv} в (65) заменить на $g_0(t)$, правая часть выражения уменьшится по абсолютной величине, но останется отрицательной:

$$\frac{dI(t)}{dt} \leqslant g_0 \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq u}}^{m} \sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{p_{iu}} \frac{q_u}{q_v} \leqslant 0. \tag{66}$$

Преобразуем это выражение, для чего рассмотрим сумму

$$\sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{p_{iu}} \frac{q_u}{q_v} = \sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{q_v} +$$

$$+ \sum_{u=1}^{n} (\log q_u) \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{u=1}^{m} p_{iu} \log p_{iu}.$$

Сопоставляя последние два члена полученного выражения с (28), (29), (30), легко видеть, что они представляют собой количество информации $I(t)$, взятое с обратным знаком. Таким образом,

$$\sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{p_{iu}} \frac{q_u}{q_v} = \sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{q_v} - I(t); \tag{67}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} \leqslant -g_0(m-1) I(t) + g_0 \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq u}}^{m} \sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iu} \log \frac{p_{iv}}{q_v}. \tag{68}$$

Можно показать, что второе слагаемое этого выражения не превышает нуля:

$$S_v = g_0 \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq u}}^{m} \sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i p_{iv} \log \frac{p_{iv}}{q_v} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$\frac{dI(t)}{dt} \leqslant -g_0(m-1) I(t) + S_v \leqslant -g_0(m-1) I(t). \tag{69}$$

Интегрирование уравнения

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -g_0(m-1)\,I_1(t) \tag{70}$$

дает

$$\ln I_1(t) = -(m-1)\int_0^t g_0(t)\,dt + C;$$

$$I_1(t) = I_0\, e^{-(m-1)\int_0^t g_0(t)\,dt}, \tag{71}$$

где I_0 — количество информации, передаваемой начальной матрицей $\|p_{ij}^{(0)}\|$. Сопоставляя (71) с неравенством (69), можем записать

$$I(t) \leqslant I_0(t)\, e^{-(m-1)\int_0^t g_v(t)\,dt}. \tag{72}$$

Учитывая, что $I(t) \geqslant 0$; $g_v(t) \geqslant 0$ и интеграл $\int_0^t g_v(t)\,dt$ расходятся по условию теоремы 6, получим окончательно

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0. \tag{73}$$

Поскольку (73) доказано для любого входного распределения, то и для пропускной способности выполняется аналогичное условие

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = 0. \tag{74}$$

Этим доказано третье утверждение теоремы 6.

В [2] показано, что пропускная способность стохастической матрицы C равна нулю в том и только том случае, когда матрица «линейна» и все ее строки совпадают. Поскольку для всякого решения уравнения (4) при условиях теоремы (6) справедливы равенства (73) и (74), то очевидно, что при $t\to\infty$ матрица должна становиться все более «линейной» и разница между любыми двумя элементами одного столбца должна стремиться к нулю.

Для того чтобы это рассуждение превратить в формальное доказательство, достаточно показать, что разница между любыми двумя элементами одного столбца стремится к нулю вместе с C. Пусть $\alpha = |p_{ij} - p_{kj}| > 0$ — разность между какими-либо двумя элементами одного столбца переходной матрицы. Можно доказать, что в этом случае справедлива следующая оценка снизу пропускной способности матрицы:

$$C > \frac{\log e}{48}\,\alpha^3. \tag{75}$$

Оценка (75) является заниженной, но сейчас важна не ее точность, а характер связи между α и C, в силу которой разность α между любыми элементами одного столбца матрицы стремится к нулю одновременно с пропускной способностью C. Этим доказывается первое утверждение теоремы 6.

Второе утверждение легко может быть получено из первого и третьего, на чем мы останавливаться не будем.

Одновременно с I и C при $t \to \infty$ в процессе старения стремятся к нулю и относительные характеристики η и χ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афиногенов Л. П. Матричная модель старения при длительном хранении информации. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 347, с. 30—40.
2. Афиногенов Л. П. Взаимное количество информации как характеристика зависимости между случайными событиями. См. наст. сб., с 92—104.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958. 468 с.
4. Ильин В. А., Позняк Э. К. Основы математического анализа. М., «Наука», 1965. 571 с.
5. Афиногенов Л. П. Информационные свойства цепей вероятностных преобразований. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 347, с. 13—29.

Л. П. Афиногенов

ВЗАИМНОЕ КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ КАК ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ

1. Введение

Обычное определение статистической зависимости между системами случайных событий по соотношению условных и безусловных распределений позволяет установить только факт наличия (или отсутствия) такой зависимости. Однако для многих приложений этого недостаточно и важно определить *степень зависимости* в виде некоторой количественной характеристики. В качестве такой характеристики часто используется коэффициент корреляции r, но как количественная характеристика зависимости он обладает по крайней мере двумя недостатками:

— коэффициент корреляции определен и может быть вычислен только для событий, которым сопоставлена количественная характеристика, т. е. для случайных величин. Между тем, понятие зависимости шире; зависимыми могут быть события, для которых никакая количественная мера не определена;

— даже для случайных величин r определяет только степень *линейной зависимости* и вполне возможны случаи, когда для систем, связанных довольно тесной, но нелинейной зависимостью, $r=0$.

Поэтому коэффициент корреляции не может претендовать на роль универсальной характеристики, количественно выражающей степень стохастической зависимости между системами случайных событий. Более универсальными являются характеристики, в основе которых лежат понятия теории информации: энтропия, количество информации, передаваемое из одной системы в другую, пропускная способность матрицы. Данная статья посвящена выяснению свойств этих характеристик.

Две связанные системы случайных событий A_n (включает n событий a_1—a_n) и B_m (m событий b_1—b_m) могут быть заданы двумя способами: с помощью матрицы совместных вероятностей q_{ij} (вероятность совместного наступления событий a_i и b_j) и с помощью матрицы условных вероятностей p_{ij} событий в одной из систем (например, B_m) при известных событиях в другой системе (A_n), причем в последнем случае для полного описания должно быть задано безусловное распределение вероятностей p_i в системе A_n. Оба способа являются эквивалентными; при любом из них можно перейти к другому и вообще определить все характеристики системы. Отметим, что в первом способе системы событий A_n и B_m выступают как равноправные, а при втором способе одна из систем (A_n) выступает как первичная, а другая (B_m)—как вторичная. Формально в качестве первичной может быть выбрана любая из систем (A_n; B_m), но очень часто такое деление отражает реальные вероятностные причинно-следственные связи и события во вторичной системе возникают под влиянием событий первичной системы.

В дальнейшем мы будем пользоваться вторым способом задания систем A_n и B_m. В этом случае матрица условных вероятностей $\|p_{ij}\|$ $(i=1\div n;\ j=1\div m)$ является *стохастической* и ее элементы удовлетворяют условиям:

$$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1. \tag{2}$$

Удобство второго способа заключается в том, что матрица условных вероятностей $\|p_{ij}\|$, отражая реальные физические связи в системе, не меняется при изменении безусловных вероятностей в первичной системе.

Безусловные вероятности событий q_j (для события b_j) определяются по формуле

$$q_j=\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij}, \tag{3}$$

где p_i $(i=1\div n)$ — безусловные вероятности событий a_i, которые считаются заданными.

Частными случаями стохастических связей и соответствующих им матриц являются: *детерминированная, вырожденная и взаимно-однозначная.* При детерминированной связи каждому первичному событию соответствует одно и только одно вторичное, но одному вторичному может соответствовать несколько первичных событий. В этом случае каждая строка матрицы содержит одну единицу и m—1 нулей, и, зная первичное событие, можно однозначно предсказать вторичное. В случае вырожденной связи каждому вторичному событию соответствует одно и только одно первичное, но одному первичному может соответствовать несколько вторичных событий. При такой связи каждый столбец матрицы содержит n—1 нулей и одну ненулевую вероятность, и, зная вторичное событие, можно однозначно восстановить вызвавшее его первичное событие. Взаимно-однозначная зависимость является детерминированной и вырожденной одновременно. В ней одному первичному соответствует одно вторичное событие, и наоборот. Соответствующая матрица является квадратной ($n=m$) и состоит из n^2-n нулей и n единиц — по одной в каждой строке и каждом столбце. Взаимно-однозначная зависимость, по существу, является не стохастической, а функциональной.

В теории информации используются следующие характеристики подобных систем:

— энтропия первичного (H_a) и вторичного (H_b) безусловных распределений:

$$H(a) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i;$$

$$H(b) = -\sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j; \tag{4}$$

— количество информации, передаваемое из системы A_n в систему B_m, равное разности энтропии $H(a)$ и условной энтропии $H(a/b)$ системы A_n при известном вторичном событии b_j, осредненной по всем вторичным событиям:

$$I(a/b) = H(a) - H(a/b) = H(a) - \sum_{i=1}^{m} q_j H(a/b_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} p(a_i/b_j) \log p(a_i/b_j), \tag{5}$$

где

$$p(a_i/b_j) = \frac{p_i - p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}}; \tag{6}$$

— условная вероятность первичного события a_i, если известно, что во вторичной системе произошло событие b_j.

Аналогично определяется количество информации о системе B_m, содержащееся в системе A_n,

$$I(b/a) = H(b) - H(b/a) = H(b) - \sum_{i=1}^{n} p_i H(b/a_i) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij}, \tag{7}$$

причем справедливо равенство

$$I(a/b) = H(a) - H(a/b) = -I(b/a) = H(b) - H(b/a), \tag{8}$$

позволяющее говорить о взаимном количестве информации, содержащемся в системах A_n и B_m;

— пропускная способность стохастической матрицы C, равная верхней границе $I(a/b)$ по всем возможным первичным распределениям

$$C = \sup_{p_i} I(a/b). \tag{9}$$

Наряду с $I(a/b)$ и C мы будем рассматривать соответствующие относительные характеристики: *относительное количество взаимной информации*

$$\eta = \frac{I(a/b)}{\min\{H(a);\ H(b)\}} \tag{10}$$

и *относительную пропускную способность*

$$\chi = \frac{C}{\min\{\log n;\ \log m\}}. \tag{11}$$

Поскольку взаимная информация системы не может превышать безусловной энтропии каждой системы: $I(a/b) \leqslant H(a)$; $I(a/b) \leqslant H(b)$, а пропускная способность не может превосходить максимально возможной энтропии систем $C \leqslant \log n$; $C \leqslant \log m$, то величины η и χ оказываются нормированными, т. е. они удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1; \tag{12}$$

$$0 \leqslant \chi \leqslant 1. \tag{13}$$

Относительные характеристики η и χ удобны тем, что их диапазон изменения не зависит от размеров матрицы $\| p_{ij} \|$, в то время как $I(a/b)$ и C могут неограниченно расти с увеличением n и m.

Степень статистической зависимости между системами A_n и B_m тесно связана с величиной η, а максимальная зависимость, которая может существовать между этими системами при данной переходной матрице $\| p_{ij} \|$ и при различных первичных распределениях p_i, связана с величиной χ. Это подтверждается группой теорем, доказываемых в п. 3. Однако прежде чем перейти к этим теоремам, докажем ряд свойств переходных матриц.

2. Свойства переходных матриц

При всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что рассматриваемые переходные матрицы не содержат нулевых столбцов, так как соответствующие таким столбцам вторичные события имеют нулевую вероятность и могут быть исключены.

Свойство 1. Для вырожденных и детерминированных матриц выполняются условия $n \leqslant m$ (при вырожденной матрице); $n \geqslant m$ (при детерминированной матрице). При $n = m$ вырожденная матрица является детерминированной и наоборот.

Это свойство вытекает из приведенного выше определения вырожденной, детерминированной и взаимно-однозначной матриц.

Свойство 2. Системы A_n и B_m независимы в том и только в том случае, когда все строки матрицы $\|p_{ij}\|$, соответствующие ненулевым входным вероятностям, равны.

Необходимым и достаточным признаком статистической независимости систем A_n и B_m является равенство всех безусловных вероятностей q_j и условных вероятностей p_{ij} для всех $i=1 \div n$; $j=1 \div m$; $q_j=p_{ij}$. Таким образом, из независимости A_n и B_m вытекает равенство всех строк матрицы $\|p_{ij}\|$, соответствующих ненулевым входным вероятностям, и наоборот, равенство строк гарантирует независимость систем A_n и B_m, поскольку в этом случае для всех j

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij} = p_{ij} \sum_{i=1}^{n} p_i = p_{ij}.$$

Здесь условная вероятность p_{ij} вынесена из-под знака суммы, поскольку при одинаковых строках p_{ij} не зависит от номера строки i. Оговорка в формулировке свойства 2, требующая равенства строк только для таких первичных элементов a_i, которые имеют ненулевую вероятность, связана с тем, что включение в состав системы A_n элементов с нулевой вероятностью (при любых соответствующих им строках матрицы) или их исключение не влияет на характер зависимости между теми элементами A_n и B_m, которые реально могут наблюдаться.

Свойство 3. Системы A_n и B_m независимы при любом входном распределении в том и только в том случае, когда все строки переходной матрицы равны.

Это свойство вытекает из предыдущего: если матрица содержит хотя бы две различающиеся строки (k и s), то для входного распределения, при котором $p_k \neq 0$ и $p_s \neq 0$, A_n и B_m будут зависимы.

Свойство 4. Ранг r стохастической матрицы равен 1 в том и только в том случае, когда все строчки матрицы равны.

Очевидно, $r \geqslant 1$, поскольку стохастическая матрица не может состоять из одних нулей. Если все строки равны, то, очевидно, $r=1$. Аналогично из $r=1$ следует равенство всех строк, так как если хотя бы две строки матрицы различны, то система векторов-строк содержит по крайней мере два линейно-независимых вектора и ранг матрицы $r>1$. Последнее вытекает из того, что между строками стохастической матрицы не может существовать линейное соотношение с $k \neq 1$. В самом деле из $p_{ij}=kp_{sj}$ и (2) следует

$$1 = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} kp_{sj} = k \sum_{j=1}^{m} p_{sj} = k.$$

Свойства 3 и 4 устанавливают связь между рангом r матрицы и статистической зависимостью систем A_n и B_m: эти системы (при любом входном распределении) независимы в том и только в том случае, когда $r=1$.

Свойство 5. При данном входном распределении количество информации, передаваемое матрицей, равно нулю в том и только том случае, когда строки, соответствующие ненулевым входным вероятностям, равны.

Пусть условие относительно равенства строк выполнено. Тогда для всех равных строк $p_{ij}=p_j^{(0)}=q_j$. Воспользуемся формулой (7):

$$I(b/a)=I(a/b)=-\sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j+\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{j=1}^{m} q_j \log q_j\right)=0.$$

Докажем обратное утверждение: из $I(a/b)=0$ следует равенство строк, имеющих ненулевую входящую вероятность, для чего преобразуем выражение (5) с учетом (6):

$$I(a/b)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i+\sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i p_{ij}}{q_j} \log \frac{p_i p_{ij}}{q_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_j}. \qquad (14)$$

(При выводе (14) промежуточные преобразования опущены.) Заметим теперь, что если в матрице есть неравные строки, соответствующие ненулевым входным вероятностям, то в ней найдется по крайней мере два неравных элемента, стоящих в одном столбце и в строках с ненулевыми вероятностями. Обозначим эти элементы $p_{k_1j}>0$; p_{k_2j} $p_{k_1j} \neq p_{k_2j}$, причем очевидно, что хотя бы один из этих элементов не равен нулю, а также хотя бы один не равен q_j. Для дальнейшего воспользуемся известным неравенством

$$\ln x \leqslant x-1 \qquad (15)$$

и вытекающим из него

$$-\log x \geqslant (1-x) \log e; \qquad (16)$$

причем знак равенства в (15) и (16) возможен только при $x=1$. Преобразуем (14) с учетом (16):

$$I(a/b)=-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \log \frac{q_j}{p_{ij}}>\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij}\left(1-\frac{q_j}{p_{ij}}\right) \log e=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m} q_j-\sum_{j=1}^{m} q_j\right) \log e=0. \qquad (17)$$

Знак $>$ (вместо $\geqslant$) в (17) записан на том основании, что, как отмечено выше, среди элементов матрицы есть по крайней мере один, для которого $p_{ij} \neq q_j$.

Таким образом, если среди строк матрицы, соответствующих ненулевым входным вероятностям, есть хотя бы две различные, то $I(a/b)>0$. Отсюда следует, что при $I(a/b)=0$ все строки матрицы, соответствующие ненулевым входным вероятностям, равны между собой.

Свойство 6. Количество передаваемой информации для любого входного распределения, а также пропускная способность матрицы C равны нулю тогда и только тогда, когда все стороны матрицы равны.

Очевидно, из равенства $I(a/b)=0$ для любого входного распределения следует $C=0$, и наоборот. В остальном свойство 6 вытекает из свойства 5: из равенства всех строк следует $I(a/b)=0$ для любого распределения на входе и $C=0$. Если хотя бы две строки матрицы различны, то существует такое входное распределение (любое, у которого неравным строкам соответствуют ненулевые входные вероятности), что $I(a/b)>0$ и, следовательно, $C>0$. Таким образом, из $I(a/b)=0$ при всяком входном распределении и $C=0$ вытекает равенство всех строк матрицы.

Свойство 7. 1. Для вырожденной матрицы при любом входном распределении $H(a/b)=0$. 2. Если матрица, получающаяся после удаления строк, соответствующих нулевым верятностям на входе, невырожденная, то $H(a/b)>0$.

Используем равенства (6) и

$$H(a/b) = -\sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} p(a_i/b_j) \log p(a_i/b_j). \tag{18}$$

При вырожденном преобразовании каждый столбец матрицы $\| p_{ij} \|$ содержит $n-1$ нулей и одно ненулевое число. В этом случае все условные вероятности $p(a_i/b_j)$, определяемые формулой (6), равны 0 (при $p_{ij}=0$) или 1 (при $p_{ij}>0$). Поэтому каждое слагаемое в (18) равно нулю и $H(a/b)=0$.

Если матрица, получающаяся после удаления строк с ненулевыми вероятностями, невырожденная, то найдется хотя бы один вторичный элемент, связанный с двумя или более первичными. Соответственно в матрице найдется столбец, содержащий два или больше ненулевых элемента (p_{ij}; p_{kj}). Поскольку входные вероятности p_i; p_k также не равны нулю, то, согласно (6), условные вероятности $p(a_i/b_j)$, $p(a_k/b_j)$ отличаются от 0 и 1. Отсюда следует, что среди неотрицательных слагаемых в (18) найдется по меньшей мере два ненулевых, следовательно, $H(a/b)>0$.

Свойство 8. Для детерминированной матрицы при любом входном распределении $H(b/a)=0$. 2. Если матрица, получающаяся после удаления строк с нулевыми входными вероятностями, недетерминированная, то $H(b/a)>0$.

Используем равенство

$$H(b/a) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij}. \tag{19}$$

Элементами детерминированной матрицы могут быть только нули и единицы. Поэтому при такой матрице в (19) все слагаемые равны нулю и $H(b/a)=0$.

В недетерминированной матрице найдется хотя бы одна строка, содержащая два ненулевых и, следовательно, не равных 1 элемента, p_{ij}; p_{ir}. В этом случае среди неотрицательных слагаемых в (19) найдется по меньшей мере два ненулевых. Поэтому для недетерминированной матрицы $H(b/a)>0$.

Свойство 9. Для любой вырожденной матрицы относительная пропускная способность χ и при любом входном распределении относительное количество информации η достигают максимального значения, $\eta=1$; $\chi=1$.

Согласно свойству 7, для вырожденной матрицы $H(a/b)=0$ и $I(a/b=H(a)-H(a/b)=H(a)$. С другой стороны, для такой матрицы всегда выполняется неравенство $H(a)\leqslant H(b)$, поскольку $I(a/b)=I(b/a)=H(b)-H(b/a)=H(a)$. Поэтому

$$\eta=\frac{I(a/b)}{\min\{H(a);\ H(b)\}}=\frac{H(a)}{H(a)}=1.$$

Из равенства $I(a/b)=H(a)$ для вырожденных матриц следует, что в них вся первичная информация передается во вторичную систему без потерь.

Рассмотрим равномерное входное распределение $p_i=1/n$. В этом случае $H(a)$ достигает возможного максимума, $I(a)=H(a)=\log n$, и вся эта информация поступает во вторичную систему. Поэтому для вырожденной матрицы $C=\log n$. Учитывая, что в данном случае (свойство 1) $n\leqslant m$; $\log n\leqslant m$, получим

$$\chi=\frac{C}{\min\{\log n;\ \log m\}}=\frac{\log n}{\log n}=1.$$

Свойство 10. Для любой детерминированной матрицы относительная пропускная способность χ и при любом входном распределении η достигают максимального значения, $\eta=1$; $\chi=1$.

В данном случае на основании свойства 8 имеем $H(b/a)=0$; $I(a/b)=I(b/a)=H(b)-H(b/a)=H(b)$. Кроме того, легко видеть, что в этом случае $H(a)\geqslant H(b)$. Отсюда следует, что для детерминированной матрицы при любом входном распределении

$$\eta=\frac{I(a/b)}{\min\{H(a);\ H(b)\}}=\frac{H(b)}{H(b)}=1.$$

Таким образом, детерминированная матрица всегда передает количество информации, равное энтропии вторичной системы.

Поскольку детерминированная матрица состоит из 0 и 1, то, согласно (3), безусловная вероятность каждого выходного элемента b_j равна сумме вероятностей входных элементов, связанных с b_j. Поэтому всегда можно выбрать такое распределение вероятностей на входе, чтобы выходное распределение было равномерным: $q_j=1/m$. При этом через матрицу передается максимально возможное количество информации и реализуется ее пропускная способность:

$$I(a/b)=I(b/a)=H(b)=\log m; \quad C=\log m.$$

Кроме того, для детерминированной матрицы $\log m \leqslant \log n$ (свойство 1). Отсюда

$$\chi=\frac{C}{\min\{\log n;\ \log m\}}=\frac{\log m}{\log m}=1.$$

Свойство 11. 1. Если матрица размером $n\times m$ при $n\leqslant m$ не является вырожденной, то для нее $\chi<1$. 2. Если при заданном входном распределении матрица $n_1\times m$ $(n_1\leqslant n)$, остающаяся после удаления строк с нулевыми входными вероятностями, удовлетворяет неравенству $n_1\leqslant m$ и не является вырожденной, то для нее $\eta<1$.

Из $n\leqslant m$ $(\log n\leqslant \log m)$ и свойства 7 следует, что для рассматриваемой матрицы при равномерном входном распределении (а также при любом другом, удовлетворяющем пункту 2).

$$I(a/b)=H(a)-H(a/b)<H(a)\leqslant \log n. \tag{20}$$

При любом неравномерном распределении

$$H(a)<\log n; \quad I(a/b)\leqslant H(a)<\log n.$$

Следовательно, в любом случае

$$I(a/b)<\log n; \quad C<\log n \text{ и } \chi=\frac{C}{\min\{\log n;\ \log m\}}=\frac{C}{\log n}<1.$$

Для доказательства второго утверждения рассмотрим отдельно два возможных случая: $H(a)\leqslant H(b)$ и $H(a)>H(b)$. При $H(a)\leqslant H(b)$, учитывая (20), получим

$$\eta=\frac{I(a/b)}{\min\{H(a);\ H(b)\}}=\frac{I(a/b)}{H(a)}<1.$$

В случае $H(a)>H(b)$ заметим, что рассматриваемая матрица не может быть детерминированной, так как при $n_1\leqslant m$ детерминированная матрица невозможна (свойство 2), а при $n_1=m$ возможно только совмещение детерминированного и вырожденного характера матриц (также свойство 1), что, однако, противоречит условию. Поэтому (свойство 8)

$$H(b/a)>0 \text{ и } I(a/b)=I(b/a)=H(b)-H(b/a)<H(b).$$

Отсюда следует для η:

$$\eta=\frac{I(a/b)}{\min\{H(a);\ H(b)\}}=\frac{I(b/a)}{H(b)}<1.$$

Свойство 12. 1. Если матрица размером $n\times m$ при $n\geqslant m$ не является детерминированной и не может быть превращена в детерминированную путем изъятия части строк, то $\chi<1$. 2. Если при заданном входном распределении матрица $n_1\times m$, оставшаяся после удаления строк с нулевыми входными вероятностями, удовлетворяет неравенству $n_1\geqslant m$ и не является детерминированной, то $\eta<1$.

Поскольку рассматриваемая матрица недетерминированная и остается недетерминированной для любого распределения, то (свойство 8)

$$I(a/b)=I(b/a)=H(b)-H(b/a)<H(b)\leqslant\log m;\quad C<\log m.$$

Учитывая, что в данном случае $\log m\leqslant\log n$, получим

$$\chi=\frac{C}{\min\{\log n;\ \log m\}}=\frac{C}{\log m}<1.$$

Для доказательства второго утверждения рассмотрим отдельно случаи $H(b)\leqslant H(a)$ и $H(b)>H(a)$. Поскольку в данном случае $I(a/b)<H(b)$, то при $H(b)\leqslant H(a)$

$$\eta=\frac{I(a/b)}{\min\{H(a);\ H(b)\}}=\frac{I(a/b)}{H(b)}<1.$$

В случае $H(b)>H(a)$ необходимо учесть, что рассматриваемая матрица ($n_1\times m$; $n_1\geqslant m$) не может быть вырожденной, поскольку при $n_1>m$ вырожденная матрица невозможна (свойство 2), а при $n_1=m$ возможно только совмещение вырожденного и детерминированного характера матрицы (также свойство 1), что в данном случае противоречит условию. Отсюда на основании свойства 7 следует $H(a/b)>0$; $I(a/b)=H(a)-H(a/b)<H(a)$. Таким образом, и в этом случае

$$\eta=\frac{I(a/b)}{\min\{H(a);\ H(b)\}}=\frac{I(a/b)}{H(a)}<1.$$

3. Связь между параметрами η и χ и степенью стохастической зависимости систем A_n и B_m

В п. 1 отмечалась связь между величинами η, χ и зависимостью систем случайных событий. Здесь мы сформулируем и, опираясь на свойства 1—12, докажем три теоремы, посвященные этому вопросу.

Теорема 1. 1. Относительная пропускная способность χ минимальна и равна нулю в том и только том случае, когда матрица состоит из одинаковых строк. При этом системы A_n и B_m независимы для любого входного распределения. 2. Относительное количество информации, передаваемое матрицей η, минимально и равно нулю в том и только том случае, когда система A_n и B_m независимы. При этом все строки матрицы, соответствующие ненулевым входным вероятностям, одинаковы.

1. Если матрица состоит из одинаковых строк, то $C=0$ (свойство 6) и, следовательно, $\chi=0$. При этом (свойство 3) системы A_n и B_m независимы для любого входного распределения.

Наоборот, из $\chi=0$ следует $C=0$ и (свойство 6) равенство всех строк матрицы, а также (свойство 3) независимость A_n и B_m при любом входном распределении.

2. Если все строки матрицы, соответствующие ненулевым вероятностям на входе, одинаковы, то (свойство 5) $I(a/b)=0$ и, следовательно, $\eta=0$. При этом (свойство 2) системы A_n и B_m независимы.

Из $\eta=0$ следует $I(a/b)=0$ и (свойство 5) равенство всех строк матрицы с ненулевыми вероятностями на входе, а также (свойство 2) независимость A_n и B_m.

Теорема 2. При любом распределении вероятностей на входе относительное количество передаваемой информации η достигает максимального значения $\eta=1$ в том и только том случае, когда матрица $n_1\times m(n_1\leqslant n)$, получающаяся из основной матрицы $n\times m$ путем вычеркивания $n-n_1$ строк, соответствующих нулевым входным вероятностям, является детерминированной (при $n_1\geqslant m$) или вырожденной (при $n_1\leqslant n$).

Если при данном входном распределении матрица $n_1\times m$ является детерминированной (при $n_1\geqslant m$) или вырожденной ($n_1\leqslant m$), то (свойства 9, 10) $\eta=1$. Наоборот, из равенства $\eta=1$ для рассматриваемой матрицы следует, что она имеет либо детерминированный (при $n_1\geqslant m$), либо вырожденный (при $n_1\leqslant m$) характер. Последнее утверждение вытекает из свойств 11, 12.

Теорема 3. Относительная пропускная способность χ достигает максимального значения $\chi=1$ в том и только том случае, когда:

а) при $n\leqslant m$ матрица является вырожденной;

б) при $n\geqslant m$ матрица является детерминированной или может быть превращена в детерминированную путем вычеркивания части строк.

Если рассматриваемая матрица $n\times m$ является вырожденной (при $n<m$) то (согласно свойству 9) $\chi=1$. Если (при $n\geqslant m$) матрица является детерминированной или может быть превращена в детерминированную путем вычеркивания части строк, то, согласно свойству 10, $\chi=1$.

Предположим теперь, что $\chi=1$. Согласно свойствам 11 и 12, при $n\leqslant m$ это возможно только в том случае, когда матрица — вырожденная, а при $n\geqslant m$ — только в том случае, если матрица или сама является детерминированной, или может быть превращена в детерминированную путем вычеркивания части строк.

Из доказанных теорем и свойств вытекают три следствия.

Следствие 1. Для взаимно-однозначных преобразований, когда матрица является одновременно вырожденной и детерминированной, $\chi=\eta=1$.

Следствие 2. Если при заданном входном распределении матрица $n_1 \times m$, получающаяся из основной матрицы $n \times \times m$ путем вычеркивания строк, соответствующих нулевым входным вероятностям, не является ни вырожденной, ни детерминированной, то относительное количество передаваемой информации $\eta < 1$.

Следствие 3. Если при $n \leqslant m$ матрица не является вырожденной, а при $n \geqslant m$ не является детерминированной и не может быть превращена в детерминированную путем вычеркивания части строк, то относительная пропускная способность $\chi < 1$.

Все три следствия вытекают из теорем 2 и 3.

Из сказанного следует, что характеристики η и χ могут достигать максимального значения, равного 1, только в том случае, когда системы A_n и B_m связаны функционально. В области непрерывных функций взаимно-однозначным матрицам соответствуют функции, осуществляющие взаимно-однозначное преобразование областей определения аргумента и функции, детерминированным матрицам — функции, которые могут иметь одно и то же значение для разных значений аргументов (например, $y = \sin x$), вырожденным матрицам— многозначные функции (например, $y = \arcsin x$).

4. Относительная пропускная способность χ как характеристика «степени линейности» матрицы

Любая матрица размером $n \times m$ может рассматриваться как система, состоящая из n m-мерных или m n-мерных векторов. Для матриц важное значение имеет линейная зависимость и их ранг r. Но понятие линейной зависимости является качественным: эта зависимость для данной системы векторов существует либо нет. Ранг матрицы является натуральным числом, равным максимальному количеству линейно-независимых строк (или, что то же самое, столбцов) матрицы. Будем называть матрицу **линейной,** если ее ранг равен единице: $r = 1$. Для стохастических матриц линейность означает равенство всех ее строк (свойство 4). Однако матрица может быть очень близка к линейной, хотя на ее ранге это не отражается. Таким образом, ранг r не может количественно выразить, насколько матрица близка к состоянию линейности. Подходящей для этого характеристикой представляется относительная пропускная способность χ, поскольку $\chi = 0$ только в том случае линейной матрицы ($r = 1$) и $\chi = 1$ только в том случае, когда ранг достигает максимально возможного значения при данных размерах матрицы: $r = n$ при $n \leqslant m$, матрица вырожденная; $r = m$ при $m \leqslant n$, матрица детерминированная.

При любом распределении входных вероятностей p_i относительное количество информации η (как и количество информации $I(a/b)$) является непрерывной функцией элементов матрицы p_{ij}. Относительная пропускная способность χ (как и пропускная способность C) также является непрерывной функцией этих аргументов. Если рассмотреть бесконечную последовательность стохастических матриц одинакового размера, которая стремится к некоторой матрице с $r=1$ как к своему пределу, то величины C и χ для такой последовательности будут стремиться к нулю.

Выводы

1. Всякая стохастическая матрица, за исключением линейной, способна к передаче информации. Эта способность тем меньше, чем ближе матрица к линейной.

2. Существует глубокая связь между зависимостью случайных событий, количеством информации, передаваемой стохастической матрицей, и линейностью системы векторов, образованных строками (столбцами) таких матриц.

Л. П. Афиногенов

ОСОБЕННОСТИ ХРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОМ КОДИРОВАНИИ И ДУБЛИРОВАНИИ

1. Введение

Использование помехоустойчивого кодирования для борьбы с ошибками, возникающими вследствие старения носителей, является необходимым условием, без которого невозможно длительное хранение информации [1, 2, 3]. В современных технических системах хранения всегда используется ЭВМ, через которую осуществляется как запись информации при составлении архивов, так и ее считывание при работе с архивами. Эта ЭВМ обеспечивает различную обработку информации и попутно легко может осуществлять помехоустойчивое кодирование при записи и декодирование с исправлением ошибок при считывании.

Программное кодирование и декодирование позволяет использовать достаточно сложные и эффективные системы кодирования, содержащие десятки и сотни тысяч символов в блоке, способные исправлять в таком блоке сотни ошибок и удовлетворяющие ряду других требований [4]. Это дает возможность уже сейчас [5, 6] организовывать технические системы, рассчитанные на хранение информации в течение любого заданного времени (например, сотни тысяч лет и больше) с любой заданной надежностью (например, с вероятностью потери закодированного блока 10^{-20} и меньше). Избыточность таких систем может составлять 10—30% и используется не столько для обеспечения высокой помехоустойчивости, сколько для упрощения алгоритма декодирования и придания ему ряда других практически важных свойств [4, 5].

Хорошо известно, что дублирование, являясь простейшей формой внесения избыточности и обеспечивая возможность обнаружения и исправления ошибок (при многократном дублировании), не является эффективным средством увеличения помехоустойчивости, и несравненно большей исправляющей способности можно добиться гораздо меньшей ценой (т. е. при значительно меньшей избыточности).

Однако именно в системах длительного хранения информации возникают особые соображения, заставляющие прибегнуть к дублированию крупных информационных массивов **наряду** с использованием эффективной системы помехоустойчивого кодирования. Дело в том, что при хранении в течение очень длительных сроков информации, ценность которой для человечества очень велика и часто даже не может быть выражена с помощью обычных экономических оценок, необходимо считаться с возможностью утраты больших информационных массивов (как отдельных лент, так даже и целых архивов) вследствие таких непредвиденных событий, как утеря, стихийные бедствия (пожары) и т. п. Именно в связи с этой опасностью и возникает все же мысль о необходимости, помимо помехоустойчивого кодирования, осуществлять дублирование информационных массивов и рассредоточенное хранение дубликатов. Но если в силу указанных соображений дублирование должно применяться независимо от помехоустойчивого кодирования и наряду с ним, то возникает возможность так построить алгоритмы обработки, чтобы использовать дублирование для увеличения эффективности применяемой системы кодирования.

Настоящая статья посвящена анализу свойств систем, в которых мощное помехоустойчивое кодирование, защищающее отдельные блоки (зоны) информации, сочетается с дублированием целых лент и архивов.

2. Типовые характеристики систем помехоустойчивого кодирования

Необходимо считаться с тремя возможными результатами декодирования блока, защищенного помехоустойчивым кодом, и соответствующими тремя вероятностями:

а) правильное декодирование (ПД), когда все ошибки исправляются и выдается правильный (неискаженный) результат. Этому случаю соответствует $P_{п.д}$ — вероятность правильного декодирования;

б) ошибочное декодирование (ОД) с вероятностью $P_{п.д}$. Конфигурация возникших в блоке ошибок такова, что программа декодирования их «не замечает», либо же комбинация ошибок понимается неправильно и соответственно производится неверное исправление. В любом случае после декодирования выдается неверный (искаженный) результат;

в) отказ (ОТК) с вероятностью $P_{отк}$. Программа обнаруживает комбинацию ошибок, с которой она не может справиться. В этом случае информационный блок не выдается вообще, а выдается признак отказа от декодирования.

При конкретном коде и алгоритме декодирования все три вероятности, $P_{п.д}$, $P_{о.д}$, $P_{отк}$, зависят от характера и вероятности ошибок. В процессе хранения вследствие старения характеристики системы ухудшаются и вероятность $P_{п.д}$ монотонно уменьшается, а вероятности $P_{о.д}$ и $P_{отк}$ в сумме и, как правило, каждая в отдельности монотонно растут. Несмотря на большое разнообразие условий, определяющих изменение характеристик системы в процессе длительного хранения, можно отметить и на многих примерах проследить определенную закономерность в «поведении» функций $P_{п.д}$; $P_{о.д}$; $P_{отк}$ в процессе хранения, типичную для самых разных систем и условий (рис. 1). Каждая из этих кривых является монотонной функцией времени, $P_{п.д}$ — убывающей, а $P_{о.д}$ и $P_{отк}$ — возрастающими. $P_{п.д}$ начинается от значения $P_{п.д}=1$ (при $t=0$) и сначала, на участке $0 \leqslant t \leqslant t_1$, убывает крайне медленно, оставаясь вблизи значения $P_{п.д} \approx 1$. На этом участке код успешно справляется с возникающими искажениями, а вероятность ошибок,

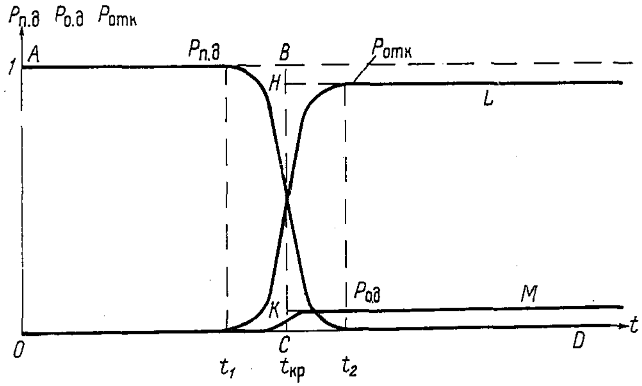


Рис. 1. Типичные характеристики $P_{п.д} = f_1(t)$, $P_{о.д} = f_2(t)$, $P_{отк} = f_3(t)$ для систем хранения информации, использующих помехоустойчивое кодирование.

вызывающих неправильное декодирование или отказ, пренебрежимо мала ($P_{отк} \approx 0$; $P_{о.д} \approx 0$). Но по мере старения вероятность ошибок возрастает и наступает момент $t_{кр}$ (критическое время), когда код перестает справляться с ошибками. Поэтому при некотором $t_1 < t_{кр}$ вероятность $P_{п.д}$ начинает резко падать, а вероятности $P_{о.д}$ и $P_{отк}$ соответственно растут. Через некоторое время ($t_2 > t_{кр}$) $P_{п.}$ падает практически до нуля, а $P_{о.д}$ и $P_{отк}$ достигают сравнительно больших значений. После момента t_2 все вероятности $P_{п.д}$, $P_{о.д}$, $P_{отк}$ уже меняются мало. Участок в районе $t_{кр}$, ограниченный неравенствами $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, можно назвать *зоной перехода.*

Отметим некоторые важные особенности кривых, представленных на рис. 1.

Рабочий участок, при котором может осуществляться надежное хранение, соответствует времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Момент t_1 не является точно фиксированным; он зависит от требований к надежности хранения информации.

Для сложных кодов с большим числом символов в закодированном блоке зона перехода обычно занимает относительно узкий участок (по сравнению с временем хранения $0 \leqslant t \leqslant t_1$), причем по мере увеличения размера блоков (т. е. при усложнении системы кодирования) t_1 и t_2 приближаются к $t_{кр}$, а зона перехода все более сужается. Левее зоны перехода (на рабочем участке) при увеличении размера блоков кривые все быстрее сходятся к своим предельным значениям: 1 для $P_{\text{п.д}}$ и 0 для $P_{\text{о.д}}$ и $P_{\text{отк}}$. Поэтому можно говорить, что для сложных систем кодирования отказ наступает практически

При больших размерах блоков зависимости $P_{\text{п.д}}$; $P_{\text{о.д}}$; $P_{\text{отк}}$ могут быть достаточно хорошо выражены нормальным законом

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_{\text{кр}}}{2\sigma^2}}dt, \tag{1}$$

где роль среднего значения играет $t_{\text{кр}}$, а дисперсия σ^2, определяющая ширину зоны перехода, тем меньше, чем больше размер закодированного блока.

Таким образом,

$$P_{\text{о. д}}(t)+P_{\text{отк}}(t)\approx\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_{\text{кр}}}{2\sigma^2}}dt; \tag{2}$$

$$P_{\text{п. д}}(t)=1-P_{\text{о. д}}(t)-P_{\text{отк}}(t)\approx 1-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_{\text{кр}}}{2\sigma^2}}dt. \tag{3}$$

Каждая из функций $P_{\text{о.д}}(t)$ и $P_{\text{отк}}(t)$ выражается зависимостью, аналогичной (2), а соотношение между ними в области правее $t_{\text{кр}}$ приблизительно равно отношению произведения числа исправляемых кодом векторов ошибок (N_1) на число разрешенных ошибочных комбинаций (2^m-1) (m — число информационных разрядов) к полному числу всех кодовых комбинаций (N) за вычетом исправляемых:

$$k=\frac{P_{\text{о. д}}}{P_{\text{отк}}}\approx\frac{N_1(2^m-1)}{N-N_1(2^m-1)}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует

$$P_{\text{о. д}}(t)\approx\frac{P_{\text{о. д}}(t)+P_{\text{отк}}(t)}{1+\frac{1}{k}}\approx\frac{k}{k+1}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_{\text{кр}}}{2\sigma^2}}dt; \tag{5}$$

$$P_{\text{отк}}(t)\approx\frac{1}{k+1}\left[P_{\text{о. д}}(t)+P_{\text{отк}}(t)\right]\approx\frac{1}{k+1}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_{\text{кр}}}{2\sigma^2}}dt. \tag{6}$$

При увеличении размеров кодовых блоков дисперсия стремится к нулю и функции $P_{\text{п.д}}(t)$; $P_{\text{о.д}}(t)$; $P_{\text{отк}}(t)$ приближаются к ломаным линиям $ABCD$, $OCKM$, $OCHL$ (рис. 1).

Полезно отметить, что в большинстве сложных систем, использующихся на практике, вероятность ошибочного декодирования несравненно меньше, чем вероятность отказа. В таких системах k чрезвычайно мало, $k \ll 1$.

3. Варианты алгоритмов декодирования в системах, сочетающих помехоустойчивые коды и дублирование

От того, как реализуются возможности увеличения помехоустойчивости, возникающие в связи с дублированием, зависит, с одной стороны, сложность соответствующих алгоритмов декодирования, а с другой стороны, их эффективность, причем, как правило, увели-

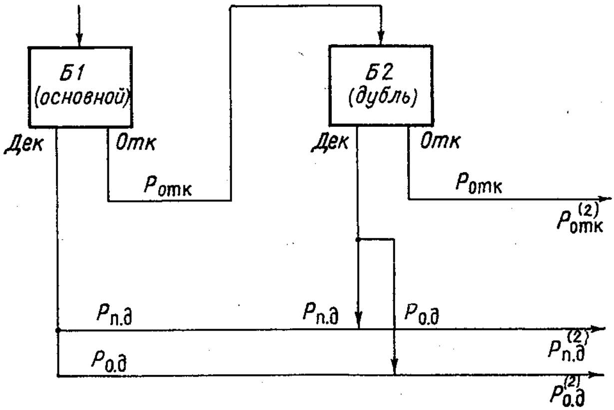


Рис. 2. Алгоритм 1. Обращение к дублирующему блоку происходит в случае отказа при декодировании основного блока.

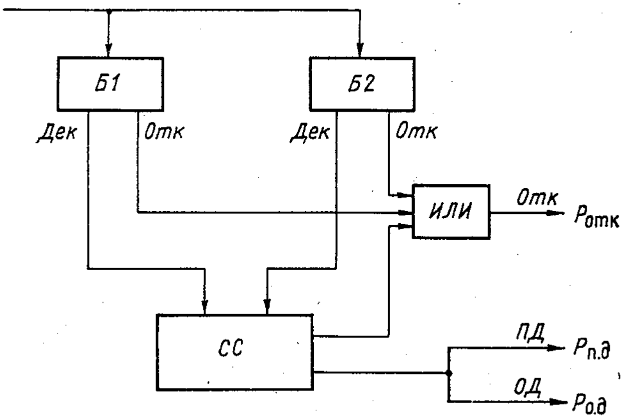


Рис. 3. Алгоритм 2, осуществляющий сравнение результатов декодирования.

чение сложности алгоритмов сопровождается и увеличением их эффективности.

На рис. 2—4 приведены некоторые варианты алгоритмов в порядке возрастания сложности.

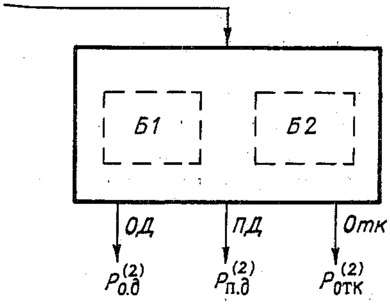


Рис. 4. Алгоритм 3 с одновременным использованием содержания обоих (n) дублирующих блоков в общей декодирующей программе.

Рисунок 2 показывает алгоритм 1, в котором обращение к дублирующему блоку *Б2* происходит только в случае отказа от декодирования первого (основного) блока *Б1*. При этом результат декодирования каждого блока может быть как правильным, так и ошибочным. Таким образом, на выходе алгоритма возможны те же три результата: правильное декодирование с вероятностью $P^{(2)}_{п.д}$; ошибочное декодирование ($P^{(2)}_{о.д}$) и отказ ($P^{(2)}_{отк}$). Аналогичный алгоритм возможен при n-кратном дублировании. Выходные вероятности для такого алгоритма при простом дублировании равны:

$$\left.\begin{aligned} P^{(2)}_{п.\,д} &= P_{п.\,д} + P_{отк}P_{п.\,д};\\ P^{(2)}_{о.\,д} &= P_{о.\,д} + P_{отк}P_{о.\,д};\\ P^{(2)}_{отк} &= P^2_{отк}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

а при n-кратном дублировании:

$$\left.\begin{aligned} P^{(n)}_{п.\,д} &= P_{п.\,д} + P_{отк}P_{п.\,д} + P^2_{отк}P_{п.\,д} + \ldots + P^{n-1}_{отк}P_{п.\,д} = \\ &= P_{п.\,д}(1 + P_{отк} + P^2_{отк} + \ldots + P^{n-1}_{отк});\\ P^{(n)}_{о.\,д} &= P_{о.\,д}(1 + P_{отк} + P^2_{отк} + \ldots + P^{n-1}_{отк});\\ P^{(n)}_{отк} &= P^n_{отк}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

На рис. 3 в виде логической схемы изображен алгоритм 2, в котором всегда происходит декодирование обоих блоков *Б1* и *Б2*. Если хотя бы в одном из блоков возникает отказ, то выдается общий отказ от декодирования. В случае, когда каждый из блоков декодируется (правильно или ошибочно), результаты поступают на схему сравнения *СС*. При различных результатах декодирования в блоках *Б1* и *Б2 СС* выдает отказ, а при совпадении полученная в *Б1* и *Б2* одинаковая кодовая комбинация поступает на выход.

Ошибочное декодирование в этом алгоритме возникает тогда, когда блоки *Б1* и *Б2* выдадут одну и ту же, отличающуюся от исходной, кодовую комбинацию. Вероятность этого события — $P^{(2)}_{о.\,д}$ зависит от конкретного кода и алгоритма декодирования в блоках *Б1* и *Б2* и не может быть определена по зависимостям типа рис. 1. Для сложных кодов с большими размерами кодовых блоков вероятность $P^{(2)}_{\text{о.д}}$ крайне мала. Вопрос о ее оценке будет рассмотрен ниже.

Для правильного декодирования в рассматриваемом алгоритме необходимо правильное декодирование в обоих блоках *Б1* и *Б2*, а отказ возникает в случае отказа хотя бы в одном блоке или когда при отсутствии отказов результаты декодирования различаются.

Таким образом, для данного алгоритма

$$\left.\begin{aligned} P^{(2)}_{\text{п. д}} &= P^{2}_{\text{п. д}};\\ P^{(2)}_{\text{отк}} &= 1 - P^{2}_{\text{п. д}} - P^{(2)}_{\text{о. д}} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$P^{(2)}_{\text{о.д}}$ — весьма малая величина.

В общем случае, когда подобный алгоритм применяется для n блоков:

$$\left.\begin{aligned} P^{(n)}_{\text{п. д}} &= P^{n}_{\text{п. д}};\\ P^{(n)}_{\text{отк}} &= 1 - P^{n}_{\text{п. д}} - P^{(n)}_{\text{о. д}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$P^{(n)}_{\text{о.д}}$ — очень малая величина, равная вероятности одновременной и одинаковой ошибки во всех дублирующих блоках.

Приведем оценку величины $P^{(n)}_{\text{о.д}}$, для чего предварительно докажем одно вспомогательное неравенство. Пусть a и $b_i (i=1 \div m)$ — положительные числа, причем $a > b_i$. Тогда для любых целых положительных n, k справедливо

$$\frac{\left[ka + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i\right]^n}{k^{n-1}} \geqslant ka^n + \sum_{i=1}^{m} b_i^n. \tag{11}$$

В самом деле, учитывая, что $a > b_i$, получим

$$\frac{\left[ka + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i\right]^n}{k^{n-1}} \geqslant \frac{k^n a^n + nk^{n-1}a^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{m} b_i}{k^{n-1}} =$$

$$= ka^n + na^{n-1}\sum_{i=1}^{m} b_i \geqslant ka^n + a^{n-1}\sum_{i=1}^{m} b_i \geqslant ka^n + \sum_{i=1}^{m} b_i^n.$$

Обратимся теперь к оценке $P^{(n)}_{\text{о.д}}$. Рассмотрим множество разрешенных кодовых комбинаций $A = \{a_i\}$ $(i=1 \div M=2^m)$ и обозначим через a_1 исходную комбинацию. Пусть вероятности перехода исходной комбинации в комбинации множества A в результате декодирования равны p_i, причем p_1 — это вероятность правильного декодирования, p_2; p_3; ...; p_M — вероятности переходов комбинации a_1 в другие разрешенные комбинации, a_2; a_3; ...; a_M. Очевидно, вероятность ошибочного декодирования равна сумме:

$$P_{\text{о. д}} = \sum_{i=2}^{M} p_i. \tag{12}$$

Для подавляющего большинства кодов, применяемых на практике, и особенно для сложных систем кодирования элементы множества A (разрешенные комбинации) обладают определенной симметрией по отношению к другим элементам множества. Под симметрией здесь понимается возможность получить все множество разрешенных комбинаций путем поразрядного сложения по mod 2 любой комбинации с фиксированным (т. е. зависящим от выбора разрешенной комбинации) множеством векторов ошибок. Следствием такой симметрии является совпадение множеств вероятностей переходов $\{p_i\}(i=1 \div M)$ для всех разрешенных комбинаций, а также совпадение подмножеств $\{p_i\}(i=1; ..., k<M)$, соответствующих вероятностям переходов любой исходной комбинации в наиболее близкие разрешенные кодовые комбинации, «удаленные» от исходной на минимальное кодовое расстояние. Эти последние вероятности все равны между собой (обозначим их p_0) и превышают вероятности перехода исходной комбинации в другие, более удаленные.

В связи со сказанным сумму (12) можно разбить на две части:

$$P_{\text{о. д}} = \sum_{i=2}^{h} p_i + \sum_{i=h+1}^{M} p_i = (h-1)\,p_0 + \sum_{i=h+1}^{M} p_i, \tag{13}$$

причем $p_0 \geqslant p_i(i=h+1 \div M)$, h — число ближайших кодовых комбинаций.

Вероятность ошибочного декодирования при использовании алгоритма 2 в общем случае (n блоков) равна

$$P_{\text{о. д}}^{(n)} = \sum_{i=2}^{M} p_i^n = (h-1)\,p_0^n + \sum_{i=h+1}^{M} p_i^n.$$

Используя теперь равенства (12), (13) и неравенство (11), в котором $a=p_0$; $b_i=p_i$, получим следующую оценку для $p_{\text{о. д}}^{(n)}$:

$$P_{\text{о. д}}^{(n)} \leqslant \frac{P_{\text{о. д}}^n}{(h-1)^{n-1}} \approx \frac{P_{\text{о. д}}^n}{h^{n-1}}. \tag{14}$$

В частности, при сравнении по двум блокам (рис. 3)

$$P_{\text{о. д}}^{(2)} \leqslant \frac{P_{\text{о. д}}^2}{h-1} \approx \frac{P_{\text{о. д}}^2}{h}. \tag{15}$$

Величина h для сложных систем кодирования и больших блоков очень велика. Так, например, для четырехмерной кодовой матрицы, рассмотренной в [6] и рекомендуемой для защиты гидрометеорологических архивов при размерах координат $33\times32\times8\times8$ $h\approx2\cdot10^8$. Поскольку $P_{\text{о·д}}$ само по себе весьма мало и резко уменьшается при возведении в степень, вероятность ошибочного декодирования при использовании алгоритма 2 уменьшается чрезвычайно сильно.

В двух рассмотренных алгоритмах дублирующие блоки декодировались независимо. Дальнейшего увеличения помехоустойчивости можно достичь, если применить общую программу декодирования, использующую для обнаружения и исправления ошибок содержание всех дублирующих блоков одновременно (рис. 4). В этом случае величины $P^{(2)}_{\text{п.д}}$; $P^{(2)}_{\text{о.д.}}$; $P^{(2)}_{\text{отк}}$ не могут быть получены на основе функций, изображенных на рис. 1, поскольку они зависят от конкретного алгоритма декодирования, который в данном случае совершенно отличается от алгоритма для отдельных кодовых блоков. Однако можно сразу же отметить, что алгоритм 3 является наиболее эффективным и позволяет в наибольшей степени увеличить помехоустойчивость системы.

Кроме трех описанных алгоритмов, можно привести еще много других, однако они занимают промежуточное положение и обладают промежуточными характеристиками по сравнению с рассмотренными.

4. Сравнение алгоритмов 1, 2, 3

Из формулы (7) сразу же видно, что для алгоритма 1 $P_{\text{отк}}$ уменьшается, в $P_{\text{п.д}}$ и $P_{\text{о.д}}$ возрастают по сравнению с исходными характеристиками блоков *Б1* и *Б2*:

$$\left.\begin{aligned} P^{(2)}_{\text{отк}} &= P^{2}_{\text{отк}} < P_{\text{отк}};\\ P^{(2)}_{\text{п. д}} &= P_{\text{п. д}}(1+P_{\text{отк}}) > P_{\text{п. д}};\\ P^{(2)}_{\text{о. д}} &= P_{\text{о. д}}(1+P_{\text{отк}}) > P_{\text{о. д}}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Наибольший интерес для нас представляет рабочий участок левее зоны перехода. На этом участке $P_{\text{отк}}$ достаточно мала и при возведении в квадрат (или в n-ю степень) уменьшается во много раз. За счет уменьшения $P_{\text{отк}}$ увеличиваются $P_{\text{п.д}}$ и $P_{\text{о.д}}$. В «левой» области $P_{\text{п.д}}$ близко к 1, а $P_{\text{о.д}}$ очень мало, поэтому практически все уменьшение $P_{\text{отк}}$ «расходуется» на увеличение $P_{\text{п.д}}$. Сразу же отметим, что малое по абсолютной и относительной величине увеличение близкой к 1 вероятности правильного декодирования $P_{\text{п.д}}$ нельзя считать малосущественным, поскольку помехоустойчивость в этой области определяется величиной $1-P_{\text{п.д}}$.

Для иллюстрации сказанного приведем числовой пример. Пусть при некотором значении $t=t_1$ характеристики одиночных блоков (см. кривые рис. 1) равны: $P_{\text{отк}}=10^{-4}$; $P_{\text{о.д}}=10^{-8}$; $P_{\text{п.д}}=1-10^{-4}-10^{-8}=0{,}99989999\approx 0{,}9999$. Применение двойного дублирования при алгоритме 1 дает: $P^{(2)}_{\text{отк}}=10^{-8}$; $P^{(2)}_{\text{о.д}}=10^{-8}(1+10^{-4})\approx 10^{-8}$; $P^{(2)}_{\text{п.д}}=P_{\text{п.д}}(1+10^{-4})=0{,}999999979999\approx 0{,}99999998$.

Любопытно, что при алгоритме 1 вследствие резкого уменьшения $P_{\text{отк}}$ вероятность $P_{\text{о.д}}$ может сравняться с $P_{\text{отк}}$ и даже превзойти ее.

В области правее зоны перехода $P_{\text{отк}}\approx 1$. Поэтому в этой области относительно большая величина $P_{\text{отк}}$ меняется мало (происходит незначительное уменьшение), а сравнительно небольшие $P_{\text{п.д}}$,

$P_{о.д}$ возрастают примерно в 2 раза. Расположение зоны перехода на оси времени при алгоритме 1 меняется мало: происходит лишь незначительное смещение зоны вправо, причем это смещение тем меньше, чем «круче» кривые рис. 1 в зоне перехода. В пределе, когда характеристики выражены ломаными линиями ($ABCD$ и др.), зона перехода вообще не смещается.

Подводя итог сказанному, можно отметить, что алгоритм 1 позволяет существенно увеличить помехоустойчивость системы левее зоны перехода, т. е. приблизить $P_{о.д}$ к 1 за счет уменьшения $P_{отк}$. При этом $P_{о.д}$ и расположение зоны перехода меняются мало.

Все сказанное справедливо и для многократного (n-кратного) дублирования, при котором все отмеченные особенности алгоритма проявляются еще более резко.

Алгоритм 1 значительно проще двух других, так как он не требует сравнения кодов (рис. 3) или применения усложненного алгоритма декодирования (рис. 4). Полезным качеством этого алгоритма является некоторая адаптивность: в подавляющем большинстве случаев дается правильный ответ уже в первом блоке и декодирование оканчивается. Лишь в сравнительно редких случаях (отказ) приходится обращаться к дублирующему блоку *Б2*, увеличивая время декодирования.

Алгоритм 1 целесообразно использовать в тех случаях, когда ошибочное декодирование не представляет собой опасности и вместе с тем желательно увеличить $P_{п.д}$ возможно простыми средствами.

Обращаясь к алгоритму 2 (рис. 3, формулы (9), (10), (15)), можно отметить, что его характеристики в известном смысле противоположны: вероятности $P_{п.д}$ и $P_{о.д}$ уменьшаются и за счет этого $P_{отк}$ растет:

$$\left.\begin{aligned} P^{(2)}_{п.д} &= P^2_{п.\,д} < P_{п.\,д};\\ P^{(2)}_{о.\,д} &\approx \frac{P^2_{о.\,д}}{n} < P_{о.\,д};\\ P^{(2)}_{отк} &= 1 - P^{(2)}_{о.\,д} - P^{(2)}_{п.\,д} > P_{отк}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

В «левой» области $P_{п.д}$ и $P^{(2)}_{п.д}$ близки к 1, поэтому величина $1-P_{п.д}$ возрастает примерно вдвое:

$$1 - P^{(2)}_{п.\,д} = 1 - P^2_{п.\,д} = 1 - (1-\alpha)^2 = 1 - 1 + 2\alpha - \alpha^2 \approx 2\alpha,$$

где $\alpha = 1 - P_{п.д}$.

Вероятность $P_{о.д}$ уже сама по себе достаточно мала и, как было показано, применение алгоритма 2 уменьшает ее чрезвычайно сильно:

$$P^{(2)}_{о.\,д} \approx \frac{P^2_{о.\,д}}{n} \ll P_{о.\,д}.$$

Справа от зоны перехода $P_{отк}$ близко к 1 и происходит ее незначительное абсолютное и относительное увеличение. Вероятности

$P_{п.д}$ и $P_{о.д}$ в этой области малы и в соответствии с (17) происходит очень значительное (во много раз) их относительное уменьшение. Нетрудно убедиться, что расположение зоны перехода на оси t при алгоритме 2 также меняется мало — происходит небольшой сдвиг влево, тем меньший, чем круче кривые рис. 1 в зоне перехода. Все отмеченные особенности алгоритма 2 при n-кратном дублировании сохраняются и выражены еще более отчетливо.

Основной особенностью алгоритма 2 является резкое уменьшения вероятности ошибок. Во многих случаях после использования этого алгоритма ошибки становятся столь маловероятными, что с ними вообще можно не считаться. Второй алгоритм заметно сложнее первого; он не является адаптивным.

Применение алгоритма 2 целесообразно в тех случаях, когда опасность, связанная с ошибками, велика и необходимо резко уменьшить их вероятность сравнительно простыми средствами.

Третий алгоритм, изображенный на рис. 4, безусловно является наиболее эффективным. Не имея возможности здесь описать формулами его характеристики, поскольку они зависят от конкретного кода и общего алгоритма декодирования, можно отметить, что при рациональном построении алгоритм 3 обеспечивает:

— многократное уменьшение как $P_{отк}$, так и $P_{о.д}$ в «левой» области;

— существенное увеличение $P_{п.д}$ (т. е. многократное уменьшение $1—P_{п.д}$) в той же левой области;

смещение зоны перехода вправо по оси t при одновременном ее «сужении».

Таким образом, алгоритм 3 обеспечивает улучшение всех характеристик. Однако это достается не даром: алгоритм 3 значительно сложнее предыдущих.

Применение третьего алгоритма целесообразно тогда, когда, не считаясь с затратами, необходимо улучшить все характеристики системы. В частности, можно сочетать простые алгоритмы при выдаче информации потребителю и при нескольких идущих подряд регенерациях со сложным третьим алгоритмом для сравнительно редких регенераций, производящихся однократно после нескольких простых.

Описанные выше процессы имеют интересные аналогии с передачей генетической информации в биологических системах. Основной особенностью таких систем является то, что хранение и передача наследственной информации осуществляются параллельно сразу очень большим числом особей.

Алгоритм 1 можно уподобить размножению простейших микроорганизмов путем простого деления клеток. Этот механизм, безусловно, наиболее прост и вместе с тем, по-видимому, наименее надежен. Поэтому у простейших организмов размножение делением периодически сменяется процессом, в котором делению предшествует слияние двух клеток. Это напоминает систему хранения, в которой в простейшие процессы регенерации (например, по алгоритму 1) периодически «вклинивается» более сложный, но и более эффективный алгоритм.

Можно далее предположить, что для более сложных биологических систем — организмов — ошибки при передаче наследственной информации крайне опасны и нежелательны. В то же время отказы в условиях, когда передача информации происходит сразу же по многим параллельным каналам, не представляют никакой опасности.

Вероятно, способ воспроизведения генетической информации при размножении, характерном для организмов, связан именно с этим и его можно уподобить алгоритму 2.

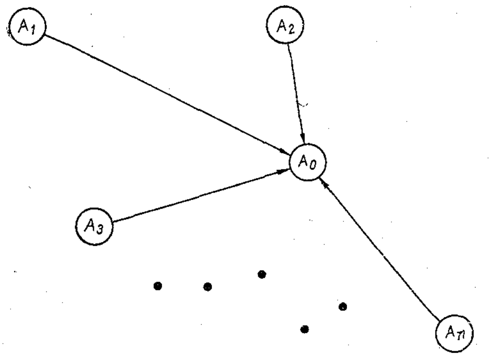


Рис. 5. Система хранения, в которой защита от стихийных бедствий осуществляется без дублирования.

По-видимому, реализация третьего алгоритма декодирования или даже второго, но при $n>2$ оказывается слишком сложной для биологических систем, которым уже не требуются открывающиеся при этих способах возможности увеличения надежности.

Необходимо подчеркнуть, что к аналогии между передачей наследственной информации и алгоритмами декодирования в технических системах надо подходить с большой осторожностью, поскольку модель, пригодная для технических систем хранения, может не учитывать ряд особенностей более сложных биологических систем (параллельная передача информации большим числом особей; роль естественного или искусственного отбора, значение процессов развития).

В заключение следует отметить, что упомянутая в начале статьи основная цель, ради которой вводится дублирование в технических системах,— защита от стихийных бедствий, уничтожающих целые ленты, архивы и т. п., может быть достигнута и другими средствами. Дело в том, что элементами, последовательность которых защищается кодовыми средствами, не обязательно должны быть простейшие символы (например, двоичные или десятичные знаки, буквы и т. п.). С таким же успехом защищаться могут гораздо более крупные объекты — целые ленты, архивы, даже хранилища.

В качестве иллюстрации рассмотрим систему хранения, изображенную на рис. 5. Пусть A_1; A_2; ...; A_n — отдельные архивы, разнесенные территориально таким образом, что одновременное уничтожение вследствие несчастного случая или стихийного бедствия им не грозит. Предположим для простоты рассуждений, что все архивы состоят из одинакового числа (m) лент. Обозначим $Л_{ik}$ i-ю ленту ($i=1 \div m$) k-го архива ($k=1 \div n$). Создадим контрольный архив A_0, также состоящий из m лент следующим образом: пусть i-я лента этого архива $Л_{i0}$ является поразрядной суммой по mod 2 всех i-х лент остальных архивов. В нормальных условиях каждый архив функционирует самостоятельно, пользуясь избыточностью и помехоустойчивым кодированием собственных лент. При несчастных случаях, связанных с утратой целых лент в отдельных архивах, имеется возможность восстановления утраченной ленты, поскольку i-я лента любого архива в этой системе является суммой по mod 2 i-х лент всех остальных архивов. Более того, даже при стихийном бедствии, поражающем целый (k-й) архив, последний может быть весь восстановлен по лентам всех других архивов (включая, конечно, контрольный архив A_0).

Сказанное следует рассматривать как иллюстрацию принципа. Могут быть созданы многочисленные другие конкретные системы, позволяющие защищать целые ленты и архивы от стихийных бедствий и при этом обходиться без дублирования. Такая система с точки зрения стоимости хранения безусловно выгоднее дублирования, однако и использование ее сложнее.

Выводы

1. Необходимость в дублировании лент в системах длительного хранения информации при использовании помехоустойчивого кодирования вызывается опасностью утраты больших массивов (лент, архивов и т. п.) при несчастных случаях и стихийных бедствиях. При этом дублирование попутно может быть использовано для увеличения помехоустойчивости системы кодирования.

2. Могут быть предложены различные алгоритмы декодирования при использовании помехоустойчивых кодов в сочетании с дублированием. При любом алгоритме характеристики системы улучшаются по-разному в зависимости от вида алгоритма (уменьшается либо вероятность отказов, либо вероятность ошибок, либо улучшаются все характеристики). Увеличение эффективности алгоритма сопровождается одновременным увеличением его сложности.

3. Существует заметная аналогия между процессами передачи наследственной информации и алгоритмами регенерации декодирования в технических системах хранения, использующих помехоустойчивые коды в сочетании с дублированием.

4. Имеется принципиальная возможность построения систем хранения, в которых защита информации от стихийных бедствий осуществляется без дублирования. Для таких систем характерно усложнение процесса восстановления утраченных лент, однако, с другой стороны, они могут обеспечивать лучшие экономические характеристики системы в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афиногенов Л. П., Луштак А. С. О надежности длительного хранения информации при введении избыточности. — «Тр. ГГО», 1973, вып. 313, с. 3—17.

2. Афиногенов Л. П. Можно ли длительно хранить информацию на магнитных лентах? — «Метеорология и гидрология», 1974, № 11, с. 104—108.

3. Афиногенов Л. П. Длительное хранение информации при использовании помехоустойчивого кодирования и периодической регенерации. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 347, с. 55—62.

4. Требования к помехоустойчивому кодированию гидрометеорологической информации. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 347, с. 63—67. Авт.: Г. А. Абашев, Л. П. Афиногенов, А. С. Луштак, Е. П. Рыжих.

5. Помехоустойчивость многомерных кодовых матриц. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 347, с. 78—91. Авт.: Г. А. Абашев, Л. П. Афиногенов, С. И. Грушин, А. С. Луштак.

6. Луштак А. С. Матричные способы защиты информации, подлежащей длительному хранению. — «Тр. ГГО», 1973, выш. 313, с. 30—38.

Л. В. Анискин, С. М. Персин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ВЕТРА

Сведения о статистических характеристиках скорости ветра, в частности распределения максимальной скорости за десяти или двухминутные интервалы времени, необходимы для ряда задач, связанных с метеорологическим обеспечением авиации. Экспериментальное определение распределения максимальной скорости ветра за 10-минутные интервалы было проведено Риссаненом [7] в трех аэропортах в 1965 г. Аналогичная работа проводилась также авторами настоящей статьи в 1971—1972 гг. в пос. Воейково. Помимо прямых исследований распределения максимальных скоростей ветра, в разное время проводились различными авторами исследования статистических характеристик скорости ветра, которые можно использовать для нахождения распределения расчетным путем, применяя методы теории выбросов случайных процессов [1, 6].

Представляет большой интерес сравнить данные о распределении максимальной скорости ветра за заданные интервалы времени, полученные различными путями.

В ряде исследований показано, что мгновенную скорость ветра $v(t)$ на интервалах времени от 10 до 60 мин можно считать стационарным процессом с эргодическими свойствами [2, 3]. Более поздние исследования статистических характеристик горизонтальной скорости ветра, в частности, проведенные Н. Ф. Мазуриным [4] на метеорологической мачте в г. Обнинске, показывают возможность экспоненциальной аппроксимации корреляционной функции скорости ветра $R_v(t)$ с использованием значений интервалов корреляции, полученных для разных высот наблюдения и различной стратификации атмосферы:

$$R_v(t) = \sigma_v^2 e^{-a|t|}, \qquad (1)$$

где σ_v^2 — дисперсия скороти ветра, $\tau_k = a^{-1}$ — интервал корреляции процесса $v(t)$.

Для уровня 8 м над поверхностью земли (что примерно соответствует высоте установки датчиков ветра на метеоплощадках) в [4] получено, что интервал корреляции скорости ветра для неустойчивой стратификации лежит в пределах 27—47 с, для безразличной 15—27 с, для устойчивой 12—18 с. Исследования Н. Ф. Мазурина показали также, что распределение скорости ветра имеет коэффициенты асимметрии и эксцесса, отличные от нуля. Поскольку значения этих коэффициентов на уровне 8 м сравнительно невелики, при расчетах принималось, что скорость ветра подчиняется нормальному закону.

При измерениях под максимальным значением скорости ветра $V_{\text{макс}}$ понимается максимальное значение мгновенной скорости ветра $v(t)$, осредненной за интервал $T_1=2\div3$ с (т. е. $V(t)=\frac{1}{T_1}\int\limits_{t-T_1}^{t}v(t)dt$). Корреляционная функция процесса $V(t)$ имеет вид

$$R_V(t)=\begin{cases}\dfrac{\sigma_v^2}{a^2T_1^2}\left[2a(T_1-t)+e^{-a(T_1-t)}+e^{-a(T_1+t)}-2e^{-at}\right] & \text{при } 0<t\leqslant T_1,\\[2ex] \dfrac{\sigma_v^2}{a^2T_1^2}\left[e^{-a(T_1-t)}+e^{-a(T_1+t)}-2e^{-at}\right] & \text{при } 0<T_1\leqslant t.\end{cases}\tag{2}$$

Нетрудно видеть, что процесс $V(t)$ является однократно дифференцируемым. Поэтому для расчета распределения абсолютного максимума H_m процесса $V(t)$ за заданный интервал T может быть использован подход, рассмотренный в [6].

Для дифференциального распределения абсолютного максимума H_m за интервал T имеем

$$W(h_m)=\begin{cases}0 & \text{при } h_m\leqslant C_0,\\[2ex] \dfrac{\mu(T)\,h_m\exp\left(-\dfrac{h_m^2}{2}\right)}{\left[1-\dfrac{\mu(T)}{k}\exp\left(-\dfrac{h_m^2}{2}\right)\right]^{k-1}} & \text{при } h_m>C_0,\end{cases}\tag{3}$$

где $C_0=\sqrt{2\ln\frac{\mu(T)}{k}}$, $\mu(T)=\frac{T\sigma_{\dot v}}{2\pi\sigma_v}$, $h_m=H_m/\sigma_v$, $H_m=V_{\text{макс}}-\overline{V}$, $\sigma_{\dot v}^2$ — дисперсия производной процесса $v(t)$, $\overline{V}$ — математическое ожидание скорости ветра. При расчетах принимаем в (3) $k=5$, а в качестве $\overline{V}$ — среднюю скорость ветра $V_{\text{ср}}$ за 10-минутный интервал.

Рассмотрим теперь экспериментальные распределения и сравним их с расчетными. Данные о распределении максимальной скорости ветра были получены с помощью станции КРАМС [5], установленной в пос. Воейково. Станция КРАМС в выборочные дни с различной скоростью ветра работала по специальной программе 2—3 ч в день. За 2—3 ч работы станция выдавала на печать 60—90 значений $\tilde{V}_{\text{ср}}$ и $\tilde{V}_{\text{макс}}$ за последовательные неперекрывающиеся 2-минутные интервалы и соответственно 12—18 значений $V_{\text{ср}}$ и $V_{\text{макс}}$ за 10-минутные интервалы. Всего за время экспериментальных исследований накопилось 3050 значений $\tilde{V}_{\text{ср}}$ и $\tilde{V}_{\text{макс}}$ за 2-минутные интервалы. Средняя скорость ветра $V_{ср}$ за это время была в пределах 2—10 м/с (большей частью 5—7 м/с), $V_{макс}$ — от 2 до 20 м/с (большей частью 7—12 м/с).

Полученные данные были разбиты на три группы. В первой группе значение $V_{ср}$ составляла 4—6 м/с, во второй 6—8 м/с, в третьей 8—10 м/с. Для каждой из групп были построены гистограммы величин $H_m = V_{макс} - V_{ср}$ и $\tilde{H}_m = \tilde{V}_{макс} - V_{ср}$ (кривые соответственно *1* и *2* на рис. 1 *а*, 1 *б* и 2 *а*). На рис. 2 *б* приведена гистограмма величин при $V_{ср} = 8 \div 10$ м/с, построенная по данным работы [7] (аэропорт Васа). Наблюдаемое на рисунках сужение и смещение кривых *1* вправо относительно кривых *2* согласуется с теоретическими положениями. Физически это объясняется тем, что с увеличением интервала наблюдений T абсолютный максимум в каждой конкретной реализации может только возрастать, причем дисперсия абсолютного максимума будет уменьшаться.

На этих же рисунках приведены расчетные кривые дифференциального распределения максимальной скорости ветра H_m за 10-минутные интервалы, построенные по формуле (3). Необходимое для расчетов среднеквадратическое отклнение максимальной скорости ветра σ_v находилось из соотношения

$$\sigma_v = \frac{\overline{H}_m}{\bar{h}_m},$$

в котором значение $\overline{H}_m$ определяется из гистограмм, а $\bar{h}_m$ — из выражения (3).

В датчике максимальной скорости ветра КРАМС осуществляется дискретно-скользящее интегрирование мгновенной скорости ветра за 3-секундные интервалы. Поэтому при расчете распределения на рис. 1 *а*, 1 *б* и 2 *а* использовалось выражение (2).

При расчете распределения на рис. 2 *б* датчик скорости ветра рассматривался как инерционное звено с постоянной времени $T_ф = 4$ с [7] и считалось, что реализация процесса на выходе датчика имеет корреляционную функцию вида

$$R_V(t) = \frac{\sigma_v^2}{1 - a^2 T_ф^2} \left(e^{-a|t|} - a T_ф \, e^{-\left|\frac{t}{T_ф}\right|} \right).$$

Значения интервала корреляции $\tilde{\tau}_k = a^{-1}$, взятые для расчета распределений, на этих рисунках составляют 50 с (кривые *3*), 25 с (кривые *4*) и 12 с (кривые *5*), т. е. соответствуют середине и крайним значениям τ_k [4].

Из рисунков видно, что теоретическое распределение довольно хорошо совпадает с экспериментальным, особенно при больших скоростях ветра (где $V_{ср} = 8 \div 10$ м/с). Существенное отличие формы экспериментального распределения от теоретического наблюдается на рис. 1 *б* ($V_{ср} = 6 \div 8$ м/с). Недостаточность выборки (218 значений) такое отклонение полностью не объясняет. Кроме того, такая

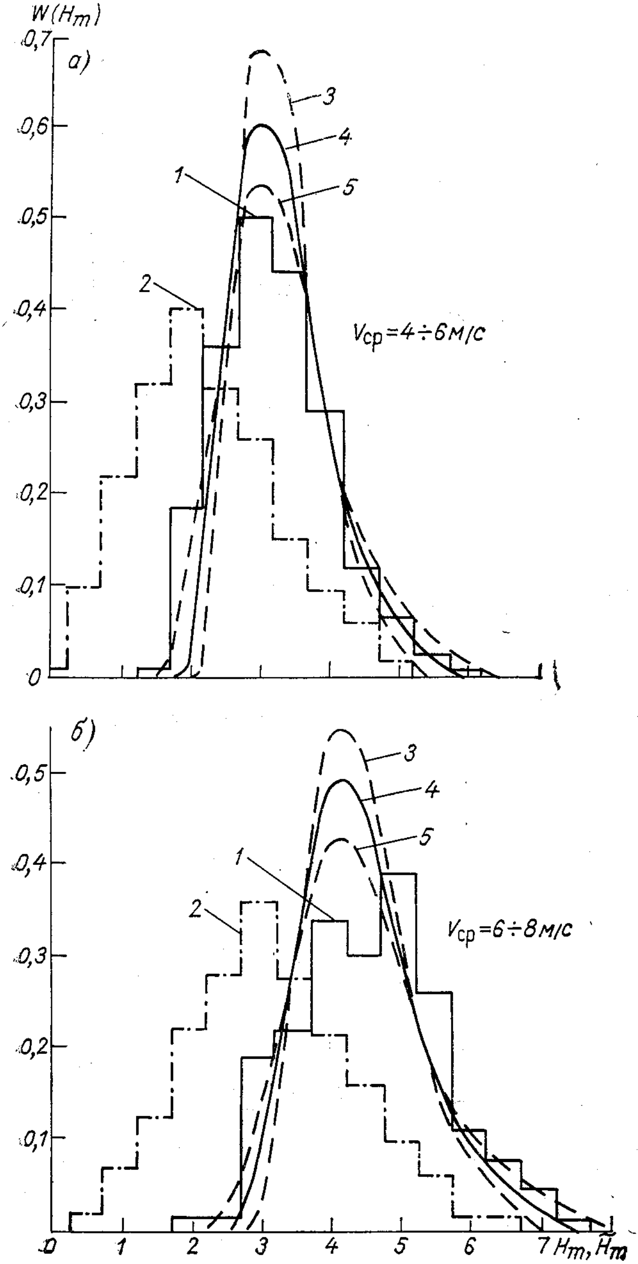

W(Hm)
0,7
а)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
Vср=4÷6 м/с
б)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7 Hm, H̃m
Vср=6÷8 м/с

Рис. 1.

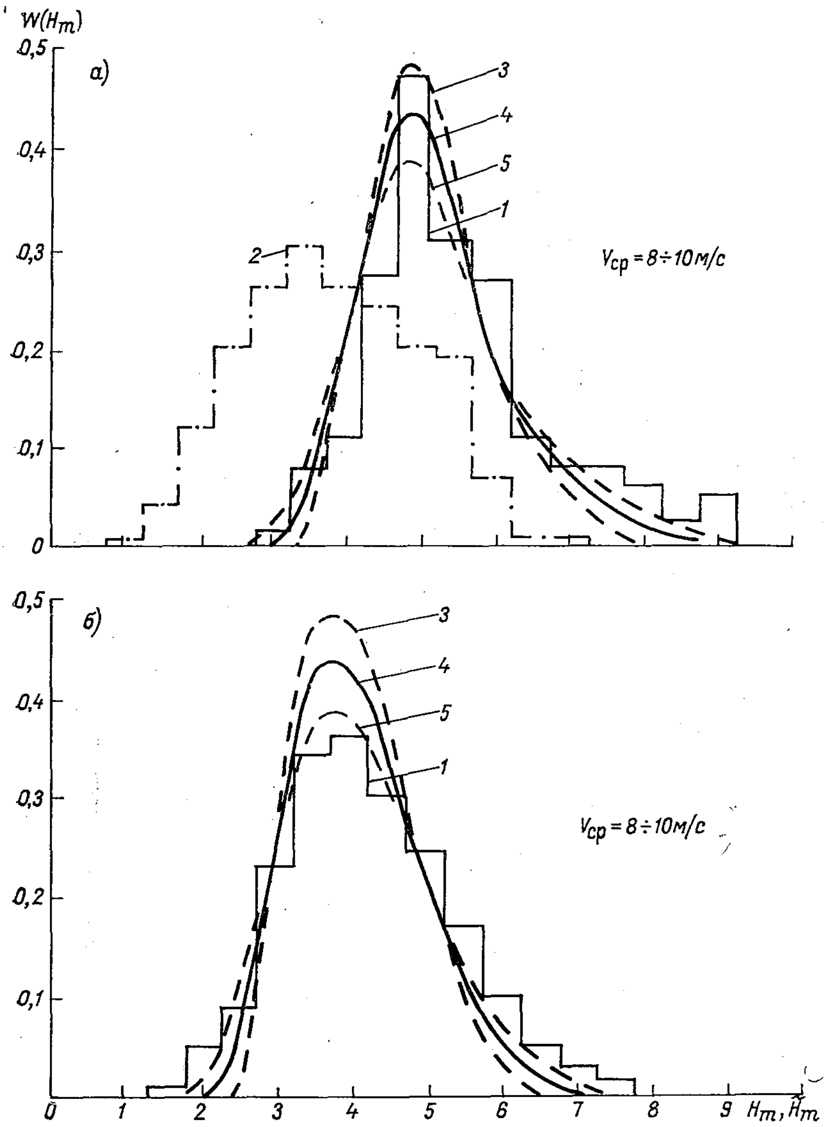

W(Hm)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
a)
3
4
5
1
2
Vср = 8÷10м/с
б)
3
4
5
1
Vср = 8÷10м/с
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Hm, Hm

Рис. 2.

же бимодальная форма распределения H_m для диапазона скоростей $V_{ср}=6\div8$ м/с получается но данным работы [7] для аэропорта Куопио, где для расчета гистограммы была использована выборка из 2620 значений.

В целом, из сравнения полученных данных можно сделать вывод, что использование даже сравнительно неточной информации о статистической структуре скорости ветра позволяет довольно хорошо определять расчетным путем распределение максимальной скорости за заданные интервалы времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970. 392 с.

2. Торочков В. Ю., Суражский Д. Я. Ветроизмерительные приборы. Л., Гидрометеоиздат, 1970. 104 с.

3. Андреев И. Д. Выбор оптимального интервала осреднения скорости ветра. — «Тр. ГГО», 1958, вып. 83, с. 20—29.

4. Мазурин Н. Ф. Статистические характеристики пограничного слоя атмосферы, полученные с помощью автоматизированного комплекса высотной метеорологической мачты. Автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, Обнинск, 1974. 16 с.

5. Автоматическая станция КРАМС. Под ред. М. С. Стернзата, Л. П. Афиногенова. Л., Гидрометеоиздат, 1974. 218 с.

6. Анискин Л. В., Персии С. М. Распределение абсолютного экстремума случайного процесса. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 292, с. 12—25.

7. Rissanen J. On the gustiness of the surface wind at Helsinki, Kuopio, Vasa aerodroms in 1965. Finnish Meteorological Institute Contributions, 1970, Helsinki. 20 p.

Л. В. Анискин, С. М. Персин

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ АБСОЛЮТНОГО ЭКСТРЕМУМА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Для различных прикладных задач значительный интерес представляет прогноз возможных экстремальных значений метеорологических элементов (прогноз заморозков, возможной максимальной скорости ветра, высоты нижней границы облаков и т. д.) по результатам предшествующих наблюдений. Прогноз экстремальных значений нередко занимает основное место в практике оперативной работы, например в аэропортах. При этом представляет интерес прогноз опасных явлений, т. е. возможных экстремальных значений различной заблаговременности начиная от 2—5 мин (время захода самолета на посадку). Оперативные (непрерывные) измерения различных элементов нередко имеют целью решение задачи такого прогноза.

Рассмотрим задачу экстраполяции экстремального значения случайного процесса $x(t)$ в интервале T_0 по результатам измерения значений этого процесса или связанных с ним величин в некотором интервале наблюдения $T_{\text{н}}$, предшествующем T_0. Примем, что процесс $x(t)$ является нормальным и в общем случае нестационарным. Статистическую структуру процесса полагаем известной.

Общее решение задачи экстраполяции экстремальных значений или связанной с ней задачи на достижение процессом заданных границ может быть получено только для марковских процессов. Ниже рассматривается приближенный метод, пригодный для дифференцируемых нестационарных процессов.

Примем, что на интервале $T_{\text{н}}$ имеется n измерений $z_i=z(t_i)$, $i=1, 2, ..., n$, где $z(t_i)$ — некоторые характеристики (в общем случае различные), связанные с $x(t)$ линейными преобразованиями $z(t_i)$ могут быть результатами измерения текущих значений процесса, средних, производных, содержать различные погрешности и т. п.). Найдем условное распределение абсолютного экстремума H_m случайного процесса $x(t)$ на интервале T_0 при известных значениях результатов предшествующих измерений $W(H_m/z_1, z_2, ..., z_n)$. Это позволяет использовать при прогнозе всю имеющуюся исходную информацию о процессе.

Условное двумерное распределение случайных величин $x_1 = x(t_{n+1})$ и $x_2 = x(t_{n+2})$ (где моменты t_{n+1} и t_{n+2} принадлежат к интервалу T_0) при заданных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ может быть представлено в виде

$$W(x_1, x_2/z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{W(z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2)}{W(z_1, z_2, \ldots, z_n)} =$$

$$= \frac{\sqrt{|L|}}{2\pi\sqrt{|D|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+2}\sum_{j=1}^{n+2} d_{ij}(y_i - m_i)(y_j - m_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(y_i - m_i)(y_j - m_j)\right\}. \qquad (1)$$

В выражении (1) для удобства записи введена новая переменная y_i, равная $z(t_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и равная $x(t_i)$ при $i = n+1, n+2$. В (1) $|D|$ и $|L|$ — определители квадратных матриц $D = \{R_{ij}\}_{ij=1}^{n+2}$ и $L = \{R_{ij}\}_{ij=1}^{n}$; $R_{ij} = M[(y_i - m_i)\ (y_j - m_j)] = \sigma_i\sigma_j r_{ij}$ — корреляционный момент величин y_i и y_j; r_{ij} — нормированный коэффициент корреляции этих величин; m_i и σ_i^2 — математическое ожидание и дисперсия величины y_i; d_{ij} и l_{ij} — элементы обратных матриц D^{-1} и L^{-1}.

Перепишем выражение (1) в матричной форме:

$$W(x_1, x_2/z_1, z_2, \ldots, z_n) =$$

$$= \frac{\sqrt{|L|}}{2\pi\sqrt{|D|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\hat{Y}^T D^{-1}\hat{Y} - \hat{Z}^T L^{-1}\hat{Z})\right\}, \qquad (2)$$

где

$$\hat{Z} = Z - M_z, \quad Z = \{y_i\}_{i=1}^{n}, \quad M_z = \{m_i\}_{i=1}^{n},$$

$$\hat{Y} = Y - M_y, \quad Y = \{y_i\}_{i=1}^{n+2}, \quad M_y = \{m_i\}_{i=1}^{n+2},$$

индекс «T» сверху обозначает транспонированную матрицу.

Преобразуем выражение $\hat{Y}^T D^{-1}\hat{Y} - \hat{Z}L^{-1}Z^{-1}$. Запишем матрицы D и $\hat{Y}$ в форме облачных матриц:

$$D = \begin{Vmatrix} L & B^T \\ B & A \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{Y} = \begin{Vmatrix} \hat{Z} \\ \hat{X} \end{Vmatrix},$$

где

$$B = \{R_{ij}\}_{i=n+1,\ j=1}^{n+2,\ n}, \quad A = \{R_{ij}\}_{i,\ j=n+1}^{n+2},$$

$$\hat{X} = X - M_x, \quad X = \{y_i\}_{i=n+1}^{n+2}, \quad M_x = \{m_i\}_{i=n+1}^{n+2}.$$

Используя формулу Фробениуса [1] для обращения блочной матрицы D (матрицы D и L неособенные)

$$D^{-1}=\left\|\begin{matrix} L^{-1}+L^{-1}B^T H^{-1} BL^{-1} & -L^{-1}B^T H^{-1} \\ -H^{-1}BL^{-1} & H^{-1}\end{matrix}\right\|, \tag{3}$$

где

$$H=A-BL^{-1}B^T, \tag{3'}$$

получим

$$\begin{gathered}\hat{Y}^T D^{-1}\hat{Y}-\hat{Z}^T L^{-1}\hat{Z}=\hat{Z}^T L^{-1}B^T H^{-1}BL^{-1}\hat{Z}-\hat{Z}^T L^{-1}B^T H^{-1}\hat{X}-\\ -\hat{X}^T H^{-1}BL^{-1}\hat{Z}+\hat{X}^T H^{-1}\hat{X}=\left(X^T-\widetilde{M}_x^T\right)H^{-1}(X-\widetilde{M}_x),\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\widetilde{M}_x=M_x+BL^{-1}\hat{Z}. \tag{4'}$$

Учитывая, что определитель блочной матрицы D

$$|D|=|L|\cdot|H|, \tag{5}$$

из выражений (2), (4) и (5) запишем

$$\begin{gathered}W(x_1,\ x_2/z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)=\\ =\frac{1}{2\pi\sqrt{|H|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(X^T-\widetilde{M}_x^T\right)H^{-1}(X-\widetilde{M}_x)\right\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Выражение (6) соответствует двумерному нормальному распределению значений x_1 и x_2 с корреляционной матрицей

$$H=\left\|\begin{matrix}\widetilde{R}_{11} & \widetilde{R}_{12}\\ \widetilde{R}_{21} & \widetilde{R}_{22}\end{matrix}\right\|$$

и матрицей математических ожиданий

$$\widetilde{M}_x=\left\|\begin{matrix}\widetilde{m}_1\\ \widetilde{m}_2\end{matrix}\right\|.$$

Заметим, что из (3′) и (4′) нетрудно получить значения условных математических ожиданий:

$$\widetilde{m}_k=m_{n+k}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{kj}\frac{l_{ji}}{|L|}(z_i-m_i),\qquad k=1,\ 2, \tag{7}$$

а из (5) — значения условных дисперсий и корреляционный момент:

$$\begin{gathered}\widetilde{R}_{11}=\frac{D_{(n+1)(n+1)}}{|L|},\qquad \widetilde{R}_{22}=\frac{D_{(n+2)(n+2)}}{|L|},\\ \widetilde{R}_{12}=\widetilde{R}_{21}=\frac{D_{(n+l)(n+2)}}{|L|},\end{gathered} \tag{7'}$$

где L_{ij} — алгебраическое дополнение элемента R_{ij} в определителе $|L|$, $D_{\text{кр}}$ — алгебраическое дополнение элемента $R_{\text{кр}}$ в определителе $|D|$.

В (6) условная корреляционная функция зависит от коэффициентов корреляции значений x_1 и x_2 между собой и с предшествующими измерениями z_i, $i=1, 2, ..., n$, а условное математическое ожидание — также и от результатов предшествующих измерений.

Отметим, что распределение (6) в общем случае соответствует нестационарному процессу $\xi(t)$ (даже при стационарном процессе $x(t)$).

Зная условное двумерное распределение случайного процесса $x(t)$ на интервале экстраполяции T_0, найдем распределение абсолютного максимума H_m процесса на этом интервале. Вероятность того, что значение $x(t)$ превысит некоторый C, складывается из вероятности того, что значение x_0 процесса $x(t)$ в момент начала интервала $T_0 (t=0)$ было больше C (при данных значениях z_1, z_2, ..., z_n) и вероятности превышения процессом $x(t)$ уровня C в интервале T_0 при начальном значении $x_0<C$, т. е.

$$P(H_m>C) = P(x_0>C/z_1, z_2, \dots, z_n) + \\ + P(x_0<0, x(t)>0/z_1, z_2, \dots, z_n) \quad 0<t<t_0. \tag{8}$$

Первое слагаемое в (8) несложно определить, если учесть, что условное распределение $W(x_0/z_1, z_2, ..., z_n)$ есть нормальное распределение с математическим ожиданием $\tilde{m}_1$ и дисперсией $\tilde{R}_{11}$, для определения которых достаточно в (7) и (7′) принять $t_{n+1}=0$. Для приближенного нахождения второго слагаемого в (8) воспользуемся подходом, рассмотренным в [5] для нестационарного дифференцируемого случайного процесса. В соответствии с этим подходом интервал T_0 разбивается на k прилегающих интервалов T_{0i} и для оценки вероятности выброса за большой интервал T_{0i} принимается среднее число выбросов через уровень С за интервал T_{0i}. Для интегрального распределения абсолютного экстремума за большой интервал экстраполяции T_0 получим

$$P(H_m<C) = \begin{cases} 0 & \text{при } C \leqslant C_{0m}, \\ \dfrac{\prod\limits_{i=2}^{m} [1 - N_i(C)]}{[1 - N_1(C) - P(x_0>C/z_1, z_2, \dots, z_n]^{-1}} & \text{при } C>C_{0m}, \end{cases} \tag{9}$$

где $N_i(C)$ — среднее число пересечений уровня C на интервале T_{0i}; C_{0m} — наибольшее из значений C_{0i}, определяемых на интервалах T_{0i} $(i=2, 3, .., k)$ из условия $N_i(C)=1$, а на первом интервале $(i=1)$ из условия

$$N_1(C_{01}) + P(x_0>C/z_1, z_2, \dots, z_n) = 1. \tag{10}$$

Среднее число положительных пересечений нестационарным нормальным дифференцируемым процессом $\xi(t)$ на интервале (t_0, t_0+T) уровня C имеет вид [3].

$$N(C,\ T_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{T_0}\frac{\dot{\sigma}\sqrt{1-r^2}}{\sigma}\exp\left[-\frac{(C-m)^2}{2\sigma^2}\right]\times$$

$$\times\left\{\exp\left(-\frac{I^2}{2}\right)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,I\,\Phi\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)\right\}dt, \qquad (11)$$

где

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left[\frac{\dot{m}}{\dot{\sigma}}+\frac{C-m}{\sigma}r\right],\qquad \Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

$$m=m(t),\qquad \dot{m}=\frac{dm(t)}{dt},\qquad \sigma^2=\sigma^2_{\xi}(t)\ \text{ и }\ \dot{\sigma}^2=\sigma^2_{\dot{\xi}}(t)$$

— математические ожидания, дисперсии процесса $\xi(t)$ и его первой производной $\dot{\xi}(t)$; $r=r_{\xi\dot{\xi}}(t)$ — корреляционный момент значений процесса и его первой производной в совпадающие моменты времени. Входящие в (11) значения m, σ, $\dot{\sigma}$ и r могут быть определены из выражения (6) (по известным $m_{\xi}(t)$ и $R_{\xi}(t_1, t_2)$). Однако более удобно непосредственно воспользоваться выражением (6), приняв в нем $t_{n+2}=t_{n+1}=t$, значение $y_{n+1}=x(t)$, а значение $y_{n+2}=\frac{dx(t)}{dt}$.

В этом случае мы непосредственно получаем условное двумерное распределение значений процесса $x(t)$ и его производной, в совпадающие моменты времени, т. е. распределение $W(\xi(t),\ \dot{\xi}(t))$. При этом корреляционная матрица H прямо содержит значения σ, $\dot{\sigma}$ и r, а матрица $\tilde{M}_x$ — значения m и $\dot{m}$. Выражение для корреляционных моментов R_{ij} в матрице D несложно записать, если известны корреляционная функция процесса $R_x(t, \tau)$ и операторы преобразования процесса при получении измерений z_1, z_2, ..., z_n. Например, если отсчеты z_i взяты по прибору с весовой функцией $h(\tau)$, в матрице D моменты $R_{n+1,\,j}=R_{xz}(t, t_j)$,

$$R_{n+2,\,j}=\frac{dR_{xz}(t,\ t_j)}{dt},\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где

$$R_{xz}=\int\limits_0^{\infty}h(\tau)\,R_x(t,\ \tau)\,d\tau.$$

Для количественной оценки результатов рассматриваемого метода прогноза были получены (путем численного интегрирования) зависимости условных распределений абсолютного экстремума и его моментов случайных процессов с нулевым математическим ожиданием и корреляционными функциями вида

$$R_x(t)=\sigma^2_{x1}(1+a_1|t|)\,e^{-a_1|t|}, \qquad (12)$$

$$R_x(t)=\sigma^2_{x1}(1+a_1|t|)\,e^{-a_1|t|}+\sigma^2_{x2}e^{-a_2^2t^2}. \qquad (12')$$

Соответствующие распределения были получены для разных интервалов экстраполяции и при условии, что в одних случаях известно одно значение x_n мгновенного процесса, измеренное в конце интервала наблюдения, а в других — осредненное за интервал T_1 значение процесса $x(t)$ (также в конце интервала наблюдения). Для процесса с корреляционной функцией вида (12) интервал наблюдения T был много больше интервала корреляции τ_k процесса $x(t)$. Для процесса с корреляционной функцией (12′) соотношение постоянных a_1 и a_2 было подобрано так, чтобы интервал корреляции процесса с корреляционной функцией, определяемой вторым слагаемым в выражении (12′), τ_{k2} был соизмерим с интервалом наблюдения T и намного превышал интервал τ_{k1}, определяемый первым слагаемым в этом выражении, т. е. процесс содержал низкочастотную и высокочастотную составляющие.

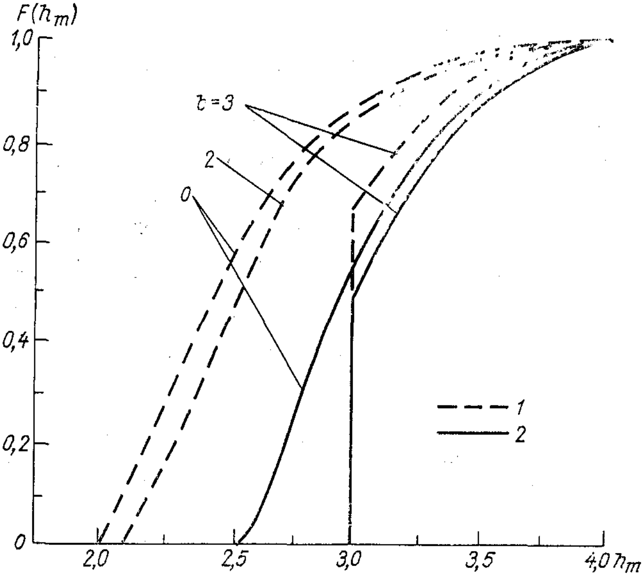


Рис. 1.

На рис. 1 представлены зависимости условного интегрального распределения абсолютного экстремума $h_m = H_m/\sigma_x$ случайного процесса с корреляционной функцией вида (12) для значений $T_0/\tau_k = 38$ и $T_0/\tau_k = 140$ (кривые 1 и 2 соответственно) и при разных величинах последних на интервале наблюдения T мгновенных значений $b = \frac{x_n}{\delta_x}$. При $b = 1 \div 2$ для интервала $T_0 = 38\,\tau_k$ и $b = 2 \div -2$ для $T_0 = 140\,\tau_k$ кривые сливаются с зависимостями для безусловных распределений абсолютного максимума случайного процесса, построенных для тех же значений интервала наблюдения T, что и интервал прогнозирования T_0. Наибольшие отличия условного распределения от безусловного наблюдаются только в случае, если последнее значение стационарного процесса на интервале наблюдения было достаточно велико (т. е. только при $b=3$ и более на условное распределение экстремума влияет учет последнего на интервале T значения процесса $x(t)$. Из приведенного рисунка видно также, что при увеличении интервала экстраполяции T_0 уменьшается влияние учета значений процесса, определяемых на интервале наблюдения.

На рис. 2 представлены зависимости условного интегрального распределения абсолютного максимума случайного процесса с корреляционной функцией вида (12′), построенные для интервала экстраполяции $a_2T_0=0{,}25$, причем постоянные a_2 и a_1 выбраны так, что $T_0/\tau_{k_2}=0{,}3$, $T_0/\tau_{k_1}=40$. Значения $b=z_n/\sigma_x$ выбирались в диапа-

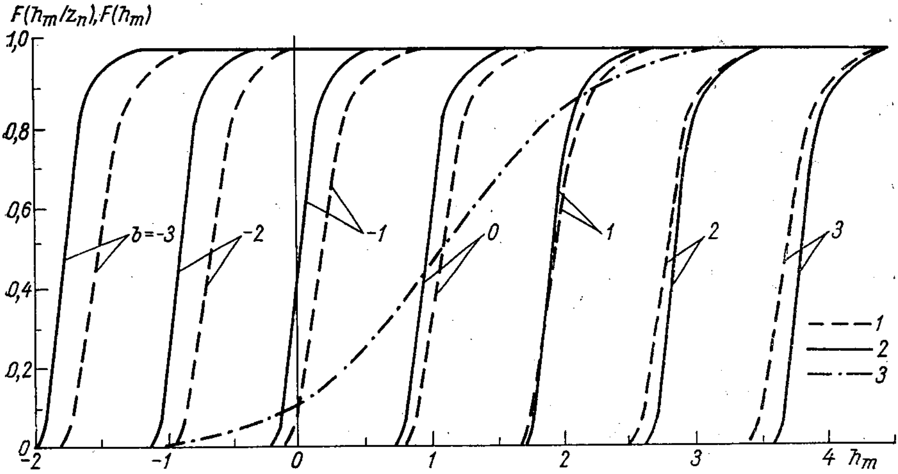


Рис. 2.

зоне $-3\div3$, а известное значение z_n в одном случае означает мгновенное значение процесса в конце интервала наблюдения (кривые *1*), а в другом случае — среднее значение процесса за интервал $I_1/\tau_{k1}=10$, прилегающий к интервалу прогнозирования (кривые *2*). На этом же рисунке для сравнения приведена зависимость безусловного интегрального распределения H_m за рассматриваемый интервал a_2T_0 (кривые *3*). Из рисунка видно, что в рассматриваемом случае характер кривых условного распределения абсолютного экстремума случайного процесса примерно одинаков при разных значениях величины b, но чем больше b, тем более вправо (в сторону больших значений $h_m=H_m/\sigma_x$) смещается распределение. Интересно отметить, что положение кривой условного распределения сравнительно мало зависит от того, что мы используем в качестве известной величины z_n (мгновенное или среднее за интервал $T_1>>\tau_{k1}$ значение случайного процесса). Это можно объяснить тем, что в данном примере отношение среднеквадратических значений составляющих случайного процесса было сравнительно велико ($\sigma_{x2}/\sigma_{x1}=9$).

Для сравнения на рис. 3 построены аналогичные зависимости, с единственным отличием — здесь $\sigma_{x2}=\sigma_{x1}$. В этом случае, как видно из рисунка, учет мгновенного z_n значения процесса или осредненного за интервал T_1 $\left(z_n=\frac{1}{T_1}\int\limits_{t-T_1}^{T_1} x(t)\,dt\right)$ приводит к существенно отличающимся результатам.

Влияние величины интервала экстраполяции T_0 на вид функции условного распределения можно оценить, сравнивая кривые на рис. 2 с аналогичными кривыми на рис. 4 и 5, построенными соот-

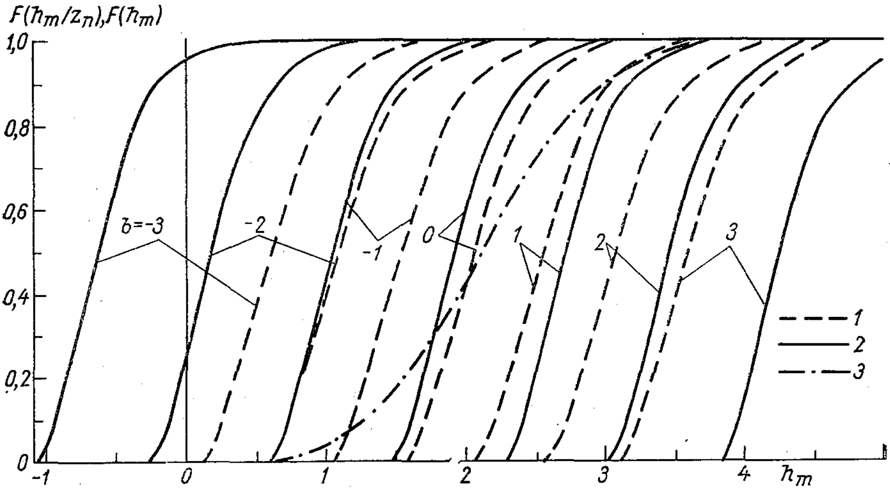


Рис. 3.

ветственно для случаев, когда $T_0=\tau_{k2}$ и $T_0=2\tau_{k2}$ (на рис. 2 $T_0=$ $=0{,}3\tau_{k2}$). Видно, что с увеличением интервала экстраполяции уменьшается влияние на распределение значений процесса, определяемых на интервале наблюдения. Однако даже для интервалов $T_0=2\tau_{k2}$ целесообразно их учитывать.

Приведенные примеры показывают, что использование предлагаемого метода позволяет в ряде случаев существенно уточнить прогнозирование экстремальных характеристик процесса. При практическом использовании данного метода могут встретиться трудности в случаях, когда статистическая структура процесса неизвестна и определяется по результатам предшествующих измерений (на интервале $T_н$). Рассмотрим при таких условиях возможные подходы к прогнозированию.

При неизвестных статистических характеристиках процесса можно использовать ступенчатую экстраполяцию, т. е. в качестве прогнозируемой величины H_m на интервале T_0 выдавать потребителю значение абсолютного экстремума процесса, измеренное на

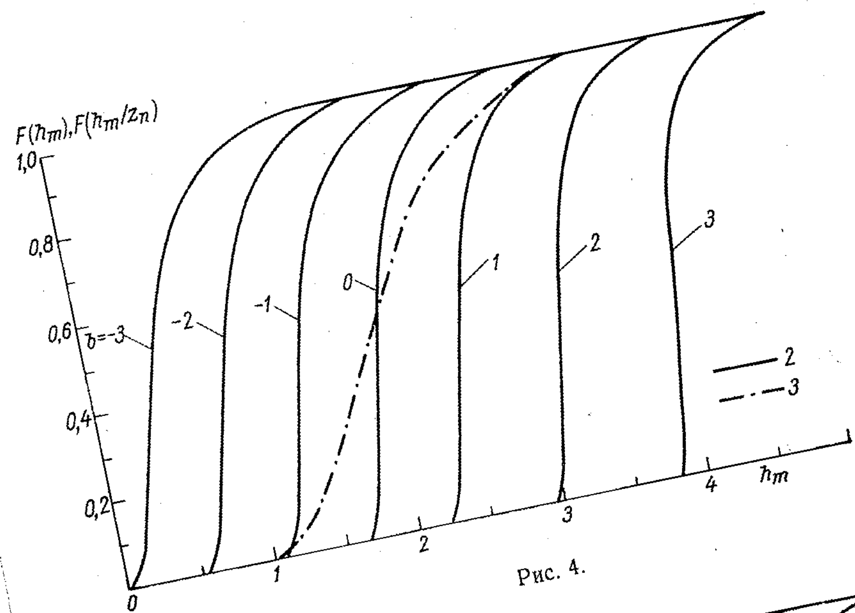

F(ħm),F(ħm/zn)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1
2
3
4
ħm
b=-3
-2
-1
0
1
2
3
2
3

Рис. 4.

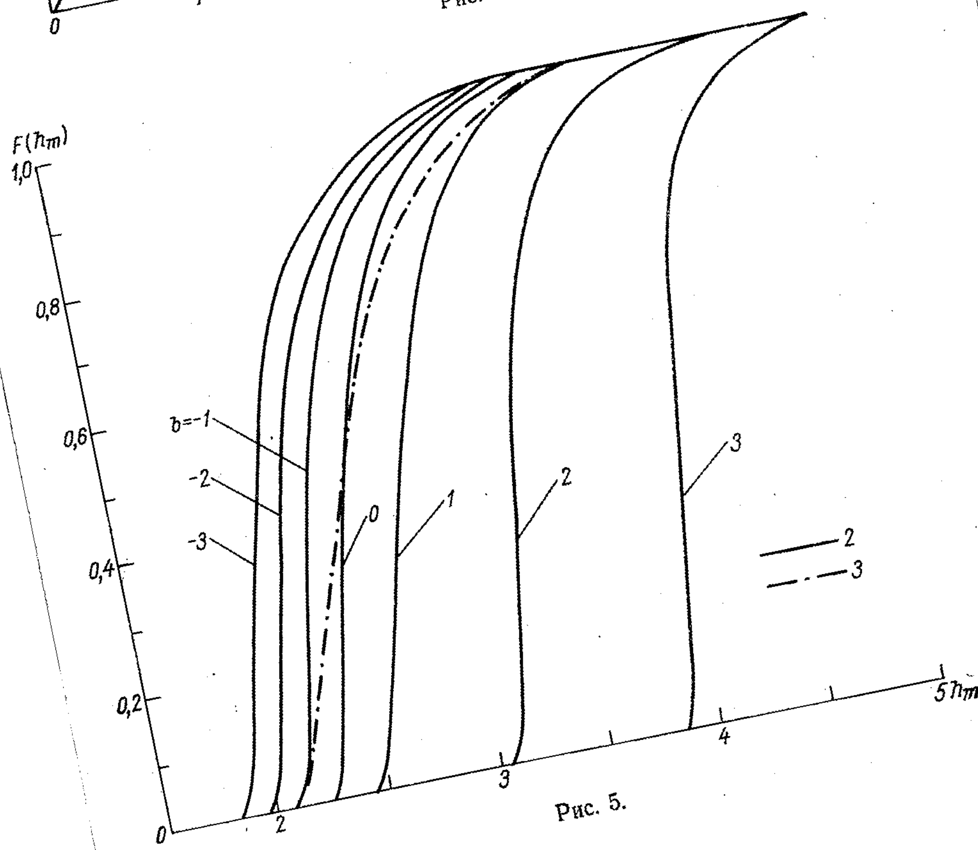

F(ħm)
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
3
4
5 ħm
b=-1
-2
-3
0
1
2
3
2
3

Рис. 5.

интервале $T_н=T_0$. Если процесс $x(t)$ стационарный, то погрешность такого прогноза зависит только от величины дисперсии абсолютного экстремума H_m на заданном интервале $T_н$. Учитывая, что при достаточно большом $T_н$ экстремумы за соседние интервалы практически некоррелированы [2], можно показать, что дисперсия погрешности такой экстраполяции определяется выражением

$$\delta^2 = 2D_{H_m}.$$

Выражения для определения дисперсии D_{H_m} приведены в [3—5]. Такой метод прогноза очень прост, поскольку требует измерения только одной величины H_m на интервале наблюдения, но его нельзя использовать при неравных интервалах $T_н$ и T_0 и для нестационарных процессов.

Прогноз экстремума может осуществляться также расчетным путем, с использованием данных о среднем квадратическом значении метеоэлемента σ_x и числе пересечений $N(c)$ процессом уровня, равного его математическому ожиданию, получаемых по измерениям процесса на интервале $T_н$. Точность этого метода, как показывают расчеты, в общем случае ниже первого. Однако его можно использовать при неравных интервалах $T_н$ и T_0, а также для нестационарных процессов. Последнее условие учитывается путем использования при расчетах H_m на интервале T_0 прогнозируемого значения математического ожидания процесса $x(t)$, определяемого, как и H_m, по данным измерений на интервале наблюдения. В качестве одного из путей для оценки погрешности различных упрощенных методов прогноза и выбора наиболее рационального можно проводить сравнение получаемых результатов прогнозирования с расчетными значениями условного распределения $W(H_m/z_1, z_2, ..., z_n)$ при возможных статистических характеристиках конкретного процесса.

Задача прогнозирования опасных явлений часто ставится в другой форме — как задача на достижение процессом заданных границ. Рассмотренный выше подход может быть использован также для приближенного нахождения распределения (и прогнозирования) времени достижения процессом заданных границ. Метод решения такой задачи на конкретном примере рассмотрен в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966. 576 с.
2. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969. 398 с.
3. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970. 392 с.
4. Анискин Л. В., Персин С. М. Влияние инерционности приборов и дискретности наблюдений на погрешность измерения экстремальных значений случайного процесса.— «Тр. ГГО», 1974, вып. 342, с. 35—45.
5. Анискин Л. В., Персин С. М. Распределение абсолютного экстремума случайного процесса. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 292, с. 12—25.
6. Бендат Д., Пирсол А. Изменение и анализ случайных процессов. М., «Мир», 1971. 408 с.
7. Персин С. М. О распределении погрешности аналого-цифрового преобразования.— См. наст. сб., с. 151—156.

А. А. Боровиков, С. М. Персин

О ВЫБОРЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ФИЛЬТРОВ

В различных задачах, связанных с обработкой измерений, широко используются методы, основанные на приближении результатов измерений алгебраическими многочленами по методу наименьших квадратов. В ряде работ [1, 2 и др.] такие методы применяются для построения скользящих фильтров (непрерывных и дискретных). В работе [3] рассматривалось влияние выбора приближающих многочленов на характеристики скользящих фильтров. В данной статье вопрос о выборе полиномиальных алгоритмов оценки сигнала и их свойствах обсуждается подробнее.

Аппроксимируем многочленом степени l $\hat{u}(t)=\sum_{r=0}^{l}\beta_r t^r$ наблюдения $u(t)$, заданные на дискретном множестве точек. Значения β_r определим из условия минимума квадратичной формы

$$I=(\tilde{u}-B\beta)^{\mathrm{T}}R^{-1}(\tilde{u}-B\beta), \tag{1}$$

где

$$\beta=\{\beta_i\}_{i=0}^{l},\quad B=\{t_i^r\}_{i=1,\ r=0}^{m\ \ l},\quad \tilde{u}=\{u(t_i)\}_{i=1}^{m},\quad R=\{R_{ij}\}_{i,\ j=1}^{m},$$

$\{\ \}^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонированную матрицу.

Находя из (1) вектор β, запишем оценку $\hat{u}(t)$ в виде взвешенной суммы результатов измерений:

$$\hat{u}(t)=D^{\mathrm{T}}(t)\tilde{u}=\sum_{i=1}^{m}d(t_i,\ t)\,u(t_i), \tag{2}$$

где

$$D(t)=\{d(t_i,\ t)\}_{i=1}^{m}=R^{-1}B[B^{\mathrm{T}}R^{-1}B]^{-1}\tilde{T}, \tag{3}$$

$$\tilde{T}=\{t^r\}_{r=0}^{l}.$$

В выражениях (1)—(3) R — некоторая действительная симметричная ($R_{ij}=R_{ji}$) положительно определенная матрица с конечной нормой. Задание этой матрицы определяет дискретный фильтр, т. е. привлекаемые при обработке измерения и их веса. В общем случае число измерений m при построении дискретного скользящего фильтра может быть бесконечным.

Частным случаем (1)—(3) при $m \to \infty$ и интервале дискретизации, стремящемся к нулю, являются выражения для непрерывного фильтра. Здесь

$$\hat{u}(t) = \int_0^{T_0} d(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau. \tag{2'}$$

Важно отметить, что весовые коэффициенты $d_i(t) = d(t_i, t)$, определяемые выражением (3), могут быть получены также из условия минимума величины

$$I_1(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} d_i(t)\, d_j(t)\, R_{ij}. \tag{4}$$

С учетом $(l+1)$ дополнительных условий

$$\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\, t_i^r = t^r, \quad r = 0, \ldots, l. \tag{5}$$

Решая задачу на условный экстремум, из (4) и (5) получим

$$\sum_{j=1}^{m} d_j(t)\, R_{ij} + \sum_{j=0}^{l} \gamma_j\, t_i^j = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

где $\tilde{\gamma} = \{\gamma_l\}_{l=0}^{l}$ — вектор неопределенных множителей Лагранжа. Из (5) и (6) имеем

$$C = \left\| \begin{matrix} D(t) \\ \tilde{\gamma} \end{matrix} \right\| = R_1^{-1} \left\| \begin{matrix} R_2 \\ \tilde{T} \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

где

$$R_1 = \left\| \begin{matrix} R & B \\ B & 0 \end{matrix} \right\|, \quad R_2 = \{0\}_{i=1}^{m}.$$

Используя формулу Фробениуса для обращения блочной матрицы R_1 [4], из (7) для $D(t)$ получим выражение (3), а для $\tilde{\gamma}$ значение

$$\tilde{\gamma} = -[B^T R^{-1} B]^{-1} \tilde{T}. \tag{8}$$

Заметим, что из (6) и (4) получим

$$I_1(t) = \tilde{\nu}^T \tilde{\gamma}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\nu} = \{\nu_l\}_{l=0}^{l}, \quad \nu_l = \sum_{j=1}^{m} d_j(t)_j^t.$$

Минимизация (4) с учетом (5) позволяет в ряде случаев упростить нахождение полиномиальных дискретных и непрерывных фильтров, используя подходы, развитые для решения одной из задач оптимальной фильтрации (задачи Заде—Рагаззини) [5, 6]. Основную трудность в (3) при больших m представляет обращение матрицы R. В ряде случаев (при равномерной дискретизации случаев и определенном задании R_{ij}) решение системы $m+l+1$ уравнений (5) и (6) можно свести к одному разностному уравнению. При этом сложность решения не зависит от m и можно получить аналитическое выражение, удобное для исследования зависимости погрешности от m. Для непрерывного фильтра в (4) и (5) суммирование заменяется интегрированием R_{ij} на $R(\alpha, \tau)$, а оптимальная весовая функция фильтра $d(t, \tau)$ определяется из интегрального уравнения

$$\int_0^{T_0} R(\alpha, \tau) h(\tau, t) d\tau = \gamma_0 + \gamma_1 \alpha + \ldots + \gamma_l \alpha^l, \quad (10)$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant T_0$$

с учетом дополнительных $l+1$ условий

$$\int_0^{T_0} h(\tau, t) \tau^i d\tau = t^i, \quad i = 0, \ldots, l. \quad (10')$$

В (2), (10) и (10′) T_0 — интервал наблюдения фильтра; вид фильтра определяется заданием функции $R(\alpha, \tau)$ (аналогичной матрице R). Весовая функция фильтра $h(\tau, t) = d(T_0 - \tau, t)$.

Следует отметить, что при значениях R_{ij} ($R(\alpha, \tau)$), равных корреляционным моментам обрабатываемых измерений, выражение (1) соответствует методу наименьших квадратов для коррелированных измерений. Из сказанного следует, что выражение (1) для метода наименьших квадратов является частным случаем задачи Заде — Рагаззини, при котором минимизируется дисперсия случайной погрешности $I_1(t)$ с учетом условий несмещенности (5) для входного сигнала в виде многочлена степени l (т. е. условий астатизма системы $l+1$ порядка).

Рассмотренному выше подходу соответствует широкий класс полиномиальных дискретных и непрерывных фильтров, различающихся между собой заданием матрицы R или функции $R(\alpha, \tau)$. Представляет интерес выбор этой функции в виде $R(\alpha, \tau) = R_1(\alpha) R_1(\tau) R_2(|\alpha - \tau|)$ и аналогичное задание матрицы R, что для широкого класса функций $R_1(\alpha)$ и $R_2(\alpha)$ позволяет просто получить аналитические выражения для весовых функций непрерывного и дискретного фильтров.

Для частного случая рассматриваемых алгоритмов, при котором $R_2(\alpha)$ — дельта-функция, из (1) и (3) получим

$$I = \sum_{i=1}^{m} \rho(t_i) [u(t_i - \hat{u}(t_i)]^2, \quad (11)$$

$$D(t) = \tilde{\rho} B \tilde{\mu}^{-1} T, \tag{12}$$

где

$$\tilde{\rho} = \operatorname{diag}\{\rho(t_i)\}_{i=1}^{m}, \quad \tilde{\mu} = \{\mu_{i+k}\}_{i,\ k=0}^{l},$$

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{m} \rho(t_i) t_i^r, \quad \rho(t_i) = R_1^{-2}(t_i).$$

Для непрерывного фильтра в (2) аналогично получим

$$d(\tau,\ t) = \rho(\tau)\, \tilde{\tau}^T \tilde{\mu}^{-1} \tilde{T}, \tag{13}$$

где $\tau = \{\tau^r\}_{r=0}^{l}$, а в выражении для $\tilde{\mu}$ моменты μ_r заменяются на

$$\hat{\mu} = \int_0^{T_0} \rho(\tau)\, \tau^r\, d\tau. \tag{13'}$$

Выражения (12) и (13) следуют также из полученных в [1].

В работе [1] найдены дискретные и непрерывные скользящие фильтры для функций $\rho(\tau)$, соответствующих классическим системам ортонормированных полиномов Лежандра, Лагерра, Чебышева и Эрмита и их дискретным аналогам. Рассмотрим более широкий класс функций $\rho(\tau)$. Заметим, что выражения (12) и (13) позволяют построить непосредственно дискретные и непрерывные фильтры без предварительного нахождения ортогональных полиномов, соответствующих выбранной функции $\rho(t)$ или $\rho(t_i)$; здесь достаточно определить моменты $\hat{\mu}_r$ или μ_r.

Приведем выражения для весовых функций $d(t_i,\ t) = d_i(t)$ при l, равном 0, 1 и 2. При $l=0$

$$d_i(t) = \frac{\rho(t_i)}{\mu_0}. \tag{14}$$

При $l=1$

$$d_i(t) = \frac{\rho(t_i)}{\mu_1^2 - \mu_0 \mu_2} \left[(\mu_1 t - \mu_2) + (\mu_1 - \mu_0 t)\, t_i\right]. \tag{15}$$

При $l=2$

$$d_i(t) = \frac{1}{\Delta} \rho(t_i) \left[K_0(t) + K_1(t)\, t_i + K_2(t)\, t_i^2\right], \tag{16}$$

где

$$K_0(t) = \left[\left(\mu_2 \mu_4 - \mu_3^2\right) + \left(-\mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3\right) t + \left(\mu_1 \mu_3 - \mu_2^2\right) t^2\right],$$

$$K_1(t) = \left[\left(\mu_2 \mu_3 - \mu_1 \mu_4\right) + \left(\mu_0 \mu_4 - \mu_2^2\right) t + \left(\mu_1 \mu_2 - \mu_0 \mu_3\right) t^2\right],$$

$$K_2(t) = \left[\left(\mu_1 \mu_3 - \mu_2^2\right) + \left(\mu_1 \mu_2 - \mu_0 \mu_3\right) t + \left(\mu_0 \mu_2 - \mu_1^2\right) t^2\right],$$

$$\Delta = |\mu| = \mu_0 \mu_2 \mu_4 - \mu_0 \mu_3^2 + 2 \mu_1 \mu_2 \mu_3 - \mu_2^3.$$

Заметим, что определитель Δ не зависит от выбора точки отсчета значений t и t_i.

Соответствующие выражения для весовой функции непрерывного фильтра $d(t, \tau)$ могут быть непосредственно записаны из выражений (14)—(18), если заменить в последних $\rho(t_i)$ на $\rho(\tau)$, t_i на τ и μ_r на $\hat{\mu}_r$.

При симметричном расположении измерений относительно момента t, для которого ищется результат, и выбора функции $\rho(\tau)$ ($\rho(t_i)$) четной, из (16) и получим [3] (здесь $l=3$)

$$d(t_i,\ 0) = \left[\mu_0 \mu_4 - \mu_2^2\right]^{-1} \left(\mu_4 - \mu_2 t_i^2\right) \rho(t_i). \tag{17}$$

В (17) отсчет t_i осуществляется от момента t, т. е. $t=0$.

Приведем также формулу для случая симметричного расположения отсчетов относительно момента $t=0$ и четной функции $\rho(\tau)$ ($\rho(t_i)$) при $l=5$:

$$d(t_i,\ 0) = \frac{1}{\Delta_1} \rho(t_i) \left[\left(\mu_4 \mu_8 - \mu_6^2\right) + \left(\mu_4 \mu_6 - \mu_2 \mu_8\right) t_i^2 + \left(\mu_2 \mu_6 - \mu_4^2\right) t_i^4\right], \tag{18}$$

где

$$\Delta_1 = \mu_0 \mu_4 \mu_8 - \mu_0 \mu_6^2 - \mu_2^2 \mu_8 + 2 \mu_2 \mu_4 \mu_6 - \mu_4^3.$$

Передаточная функция скользящих дискретных фильтров, получаемых из (2) и (12) при равномерной дискретизации ($t_i=iT$), может быть записана в виде

$$H(e^{j\omega T},\ t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d(iT,\ t)\, e^{-j\omega(t+iT)} = e^{-j\omega t} \tilde{\rho}_1(e^{j\omega T}) \tilde{\mu}^{-1} \tilde{T}, \tag{19}$$

где $\tilde{\rho}_1(z)$ — z-преобразование вектора $\{\rho(\tau)\, \tau^r\}_{r=0}^{l}$. Из (19) получаем амплитудно-частотную характеристику фильтра

$$|H(e^{j\omega T},\ t)|.$$

Как отмечалось выше, алгоритмы (2) и (3) соответствуют минимальной дисперсии оценки при выборе матрицы R, равной корреляционной матрице измерений. Алгоритмы (12) и (13) позволяют минимизировать эту дисперсию лишь при некоррелированных измерениях; оптимальным здесь является выбор $\rho(t_i)$ обратно пропорциональным дисперсиям погрешностей измерений. Однако практически необходимо учитывать не только дисперсию оценки, но и ее смещенность (т. е. динамическую погрешность). При этом в (3) или (12) матрицы R или $\tilde{\rho}$ могут выбираться исходя из минимума дисперсии суммарной (динамической и случайной) погрешности

$$D_\varepsilon(t) = R_x(t,\ t) = 2 \sum_{i=1}^{m} d_i(t) R_{xu}(t,\ t_i) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} d_i(t)\,d_j(t)\,R_u(t_i,\ t_j) \qquad (19')$$

с учетом дополнительных условий (5) обеспечения l-го порядка дискретного фильтра. В (19') $u(t_i)=x(t_i)+y(t_i)$ где $x(t)$ — полезный сигнал, $y(t)$ — погрешность измерения, $R_{xu}(t,\ t_i)=\overline{x(t)\,\dot{u}(t_i)}$. Неточное знание статистической структуры $x(t)$ и $y(t)$ часто делает целесообразным использование рассматриваемых алгоритмов вместо оптимальных.

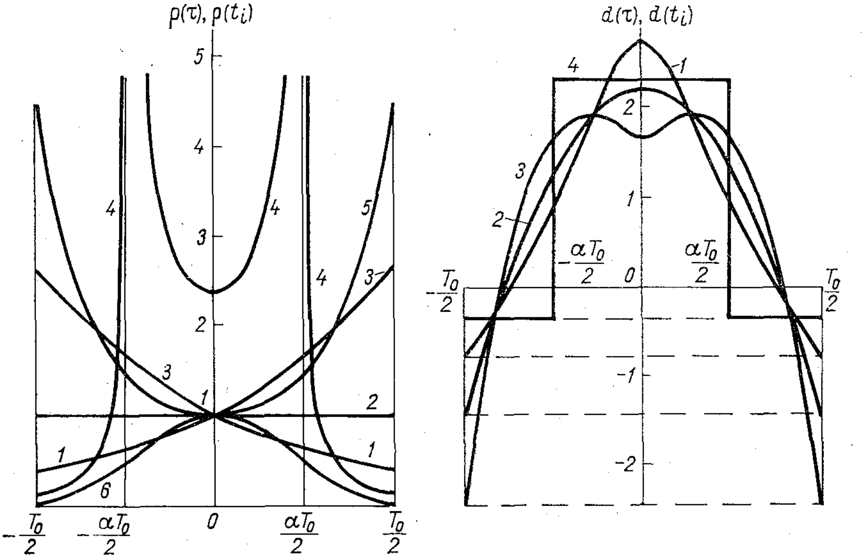


Рис. 1.

Как указывалось выше, выбор матриц $\tilde{R}$ и $\tilde{\rho}$ определяет область привлекаемых при обработке скользящим фильтром измерений и их веса. Рассмотрим влияние выбора функции $\rho(t_i)$ при заданном конечном m, а также при $m\to\infty$ на примере некоторых дискретных и непрерывных фильтров.

Для случая симметричного осреднения примем

$$\rho(\tau,\ 0)=\begin{cases} e^{c\left(\frac{2|\tau|}{T_0}\right)^{\lambda}} & \text{при } |\tau|\leqslant\frac{T_0}{2},\\ 0 & \text{при } |\tau|>\frac{T_0}{2}.\end{cases} \qquad (20)$$

На рис. 1 приведены значения $\rho(\tau)$ и соответствующие веса $d(\tau)$ при $\lambda=1$ (кривые *1* и *3*) и $\lambda=2$ (кривые *5* и *6*) при значениях с разного знака и при $c=0$ (кривая *2*).

При дискретных измерениях, равномерной дискретизации с шагом T и $m=2N+1$ имеем

$$\rho(i,\ 0)=\begin{cases} e^{c\left(\frac{|i|}{N}\right)^{\lambda}} & \text{при } |i|\leqslant N,\\ 0 & \text{при } |i|>N. \end{cases} \tag{21}$$

При $m=2N$ в (21) заменяем i на $i+0{,}5$ $(i=-N, \ldots, N-1)$.

Задаваясь в (20) или (21) различными значениями c и λ, можно существенно менять вид функции $\rho(\tau)$. Аналитические выражения для $d_i(t)$ и $d(t,\ \tau)$ несложно получить лишь при $\lambda=1$ (для μ_r следует учесть соотношение $\sum\limits_{i=1}^{m} e^{-i}\, i^r=\sum\limits_{k=1}^{m}\ \sum\limits_{i=k}^{m} e^{-i}\, i^{r-1}$). Например, в (14), (15) и (17) при $\lambda=1$

$$\hat{\mu}_0=\frac{T_0}{c}(e^c-1), \tag{22}$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{T_0^3}{2c^3}\left[\left(\frac{c^2}{2}-c+1\right)e^c-1\right], \tag{22$'$}$$

$$\hat{\mu}_4=\frac{T_0^5}{8c^5}\left[e^c\left(\frac{c^4}{2}-2c^3+6c^2-12c+12\right)-12\right]. \tag{22$''$}$$

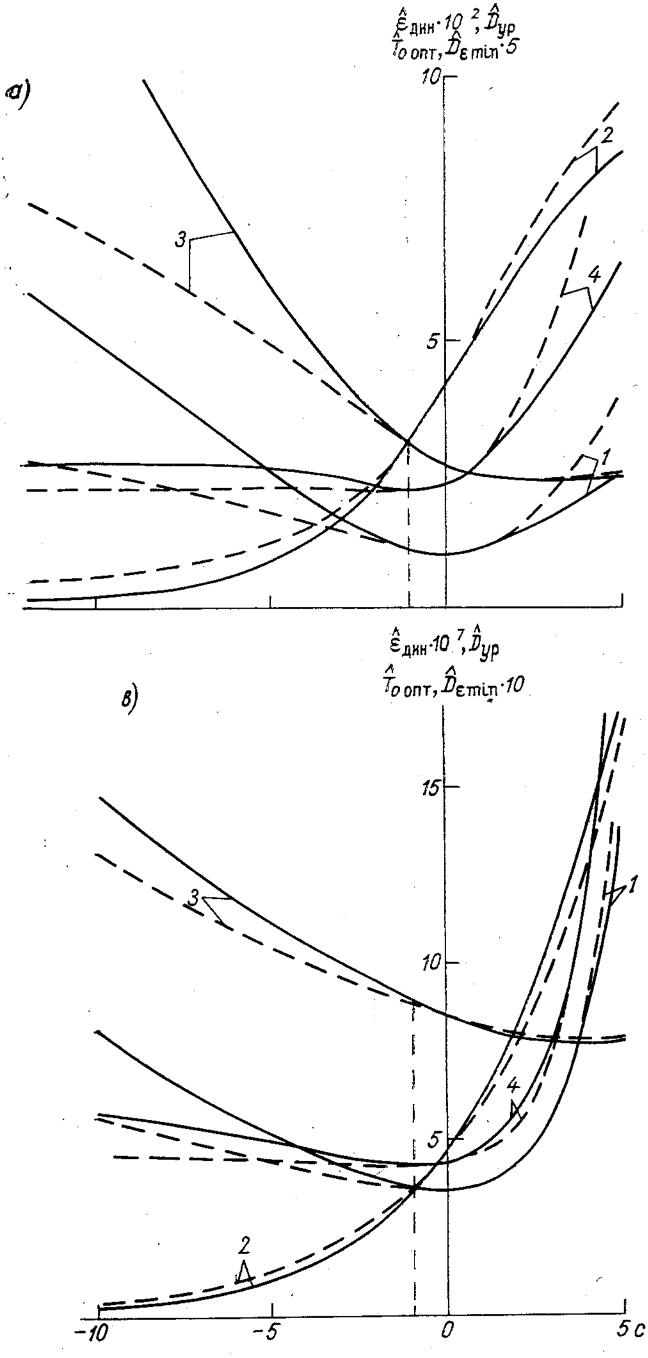
При $\lambda\neq 1$ воспользуемся расчетом μ_r и $\hat{\mu}_r$ на ЭВМ.

Для оценки влияния выбора функции $\rho(\tau)$ $(\rho(t_i))$ на динамическую и случайную погрешности рассматриваемых скользящих фильтров необходимо задаться некоторой структурой сигнала x и погрешности y. Примем случайные погрешности y_i некоррелированными между собой и с сигналом x, а процесс $x(t)$ медленно меняющимся и дифференцируемым $l+1$ раз, тогда из (19$'$) и (5) получим

$$D_\varepsilon\approx\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} t_i^{l+1}\, d_i(t)}{(l+1)!}\right]^2 D_{x(l+1)}+D_y\sum_{i=1}^{m} d_i^2(t), \tag{23}$$

где $D_{x(l+1)}$ — дисперсия $(l+1)$-й производной сигнала, D_y — дисперсия погрешности.

Второе и первое слагаемые в (23) — дисперсии результирующей случайной и динамической погрешностей ($D_{\text{ур}}$ и $D_{\text{дин}}$) — характеризуют фильтрующие свойства и смещенность используемого алгоритма. Для анализа указанных погрешностей удобно рассмотреть случай, когда $T=T_0/m$ достаточно мало. При этом суммы в первом и втором слагаемых в (23) можно заменить интегральными выражениями, а выражения в квадратной скобке и второе слагаемое в (23) приближенно записать в виде $\hat{\varepsilon}_{\text{дин}} T_0^{l+1}$ и $\hat{D}_{\text{ур}}\frac{D_y}{m}$, где $\hat{\varepsilon}_{\text{дин}}$ и $\hat{D}_{\text{ур}}$ — безразмерные коэффициенты, (не зависящие от m и T_0), характеризующие свойства алгоритма.



а)
$\hat{\varepsilon}_{дин}\cdot 10^{2}, \hat{D}_{ур}$
$\hat{T}_{0\,опт}, \hat{D}_{\varepsilon\,min}\cdot 5$
10
5
1
2
3
4
в)
$\hat{\varepsilon}_{дин}\cdot 10^{7}, \hat{D}_{ур}$
$\hat{T}_{0\,опт}, \hat{D}_{\varepsilon\,min}\cdot 10$
15
10
5
1
2
3
4
−10
−5
0
5 c

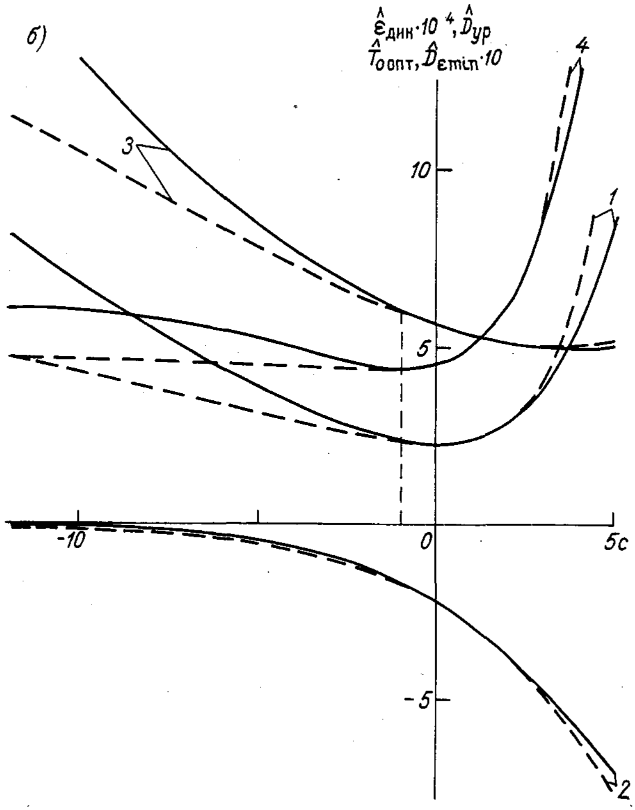


Рис. 2.

На рис. 2 (кривые *1* и *2*) приведены зависимости $\hat D_{ур}$ и $\hat\varepsilon_{дин}$ от параметров l и λ функции $\rho(t_i)$ при значениях $l=1$ (рис. 2 *а*), $l=3$ (рис. 2 *б*) и $l=5$ (рис. 2 *в*); сплошные линии соответствуют значениям $\lambda=1$, пунктирные $\lambda=2$.

Как и следовало ожидать, минимум кривых *1* и *2* имеет место соответственно при $c=0$ и $c\to-\infty$. Учитывая, что $m=T_0/T$, для оптимального интервала $T_{0\,опт}$ (или $m_{опт}=T_{0\,опт}/T$), из (23) получим

$$T_{0\,опт}\approx\sqrt[2l+3]{\frac{\hat D_{ур}D_yT}{(2l+2)\hat\varepsilon^2_{дин}D_{x(l+1)}}}\;\tilde T_0\sqrt[2l+3]{\frac{D_yT}{D_{x(l+1)}}}, \qquad (24)$$

где $\tilde T_{0\,опт}=\sqrt[2l+3]{\dfrac{\hat D_{ур}}{(2l+2)\hat\varepsilon^2_{дин}}}$. Соответствующее $T_{0\,опт}$ значение минимальной дисперсии

$$D_{\varepsilon\min}=\frac{\hat D_{ур}D_yT(2l+3)}{T_{0\,опт}(2l+2)}=\hat D_{\varepsilon\min}\sqrt[2l+3]{D_{x(l+1)}\,(D_yT)^{2l+2}}, \qquad (24')$$

где

$$\hat{D}_{\varepsilon\,\min} = \frac{\hat{D}_{\text{ур}}(2l+3)}{\hat{T}_{0\,\text{опт}}(2l+2)} = \frac{2l+3}{2l+2}\sqrt[2l+3]{(2l+2)\,\hat{\varepsilon}^{2}_{\text{дин}}\hat{D}^{2l+2}_{\text{ур}}}.$$

Зависимости $\hat{T}_{0\,\text{опт}}$ и $\hat{D}_{\varepsilon_{\min}}$ от параметров весовой функции $\rho(t_i)$ вида (21) приведены на рис. 2 (кривые *3* и *4*). Заметим, что для нашего примера оптимальные значения безразмерных величин c и и $T_0(\hat{T}_{0\,\text{опт}})$ не зависят от значений D_y, $D_{x\,(l+1)}$ и T (последние входят в $\hat{T}_{0\,\text{опт}}$ и $\hat{D}_{\varepsilon\,\min}$ лишь как постоянный масштаб). В частности, при $\lambda=1$ и $l=1$ 3 и 5 имеем, что оптимальные значения параметров функции $\rho(t_i)$ равны: $c_{0\,\text{опт}} \approx 1{,}0$ (для всех l), $\hat{T}_{0\,\text{опт}} \approx 3{,}06$, 6,02 и 9,0; при этом $\hat{D}_{\varepsilon\,\min} \approx 0{,}44$ (для всех l). При $\lambda=2$ получаем: $c_{0\,\text{опт}} \approx -1{,}5$ (для всех l), $\hat{T}_{0\,\text{опт}} = 3{,}3$, 6,2 и 9,1; $\hat{D}_{\varepsilon\,\min} \approx 0{,}43$ (для всех l). Как и следовало ожидать, минимум дисперсии D_ε для всех l, T_0 и λ имеет место при $c<0$, однако выигрыш по сравнению с выбором $c=0$ сравнительно мал.

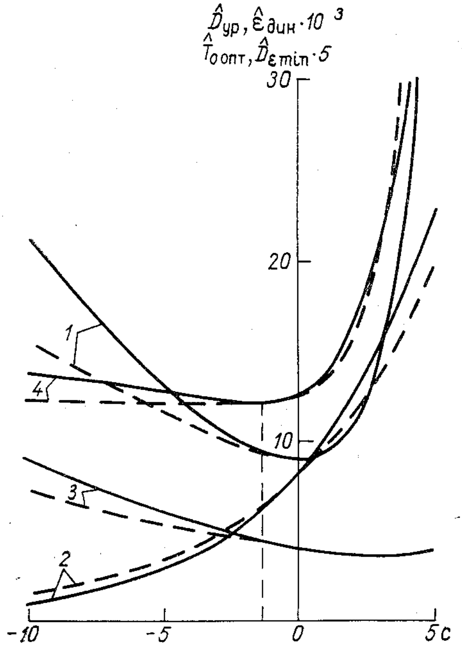


Рис. 3.

Аналогично в общем случае, зная статистическую структуру сигнала x и погрешности измерений y (в данном примере $D_x(l+1)$ и D_y) и интервал дискретизации T, можно осуществить рациональный выбор параметров функции $\rho(t_i)$ (здесь T_0 и λ), т. е. числа обрабатываемых измерений m и их веса, а также порядка скользящего фильтра l. К числу выбираемых параметров может относиться и интервал дискретизации T.

Для несимметричного интервала осреднения рассмотрим пример

$$\rho(\tau) = \begin{cases} e^{c_1\left|\frac{\tau}{T_0}\right|^{\lambda}} & \text{при } -T_0<\tau\leqslant 0, \\ 0 & \text{при } \tau>0 \end{cases} \tag{25}$$

или

$$\rho(t_i) = \begin{cases} e^{c_1|i|^{\lambda}} & \text{при } -N<i\leqslant 0, \\ 0 & \text{при } i>0. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь момент t принят совпадающим с последним отсчетом (обработка без задержки).

На рис. 3 для функции $\rho(t_i)$ вида (25′) и достаточно малого T приведены зависимости 1—4, аналогичные таким же кривым на рис. 2. Здесь для $\lambda=1$ и $l=0$, 1, 2 $c_{1\,\text{опт}}\approx-2$ (для всех l), $\hat{T}_{0\,\text{опт}}=1{,}8$, 3,3 и 4,8, $\hat{D}_{\varepsilon\,\min}=1{,}11$, 1,8 и 2,42; для $\lambda=2$ $c_{1\,\text{опт}}\approx-3$ (для всех l), $\hat{T}_{0\,\text{опт}}=1{,}9$, 3,4 и 4,9, $\hat{D}_{\varepsilon\,\min}=1{,}10$, 1,7 и 2,41.

Отметим, что при $\lambda=1$ и $c=0$ рассматриваемые функции $\rho(\tau)$ и $\rho(t_i)$ соответствуют полученным в [1] непрерывным и дискретным фильтрам, основанным на использовании полиномов Лежандра, при $\lambda=2$, T_0 (или N), стремящемся к бесконечности, и $\frac{c}{T_0^2}=k<0$ — полиномов Эрмита, при $\lambda=1$, $T_0\ (N)\to\infty$, $\frac{c_1}{T_0}=k<0$ — полиномов Лагерра.

В работах [3, 7] был предложен метод построения дискретных или непрерывных фильтров, при котором весовые коэффициенты $d(t_i,\ t)$ или $d(\tau,\ t)$ являются равными для $l+1$ групп измерений (или $l+1$ областей интервала T_0) и выбираются из условий обеспечения $(l+1)$-го порядка фильтра.

Полагая дискретизацию равномерной, запишем

$$d_i(t)=\begin{cases} q_i(t) & \text{при } \sum\limits_{p=0}^{j} m_p - m_j < i \leqslant \sum\limits_{p=0}^{j} m_p, \\ & \qquad j=0,\ \ldots,\ l, \\ 0 & \text{при } i\leqslant 0 \text{ и } i>m, \end{cases} \tag{27}$$

где m_j — число измерений в j-й группе,

$$\sum_{j=0}^{l} m_j=m,\quad \sum_{j=0}^{l} q_j(t)\,m_j=1,\quad \sum_{j=0}^{l} q_j(t)\sum_{k=1}^{m_j}(t_{jk}-t^r)=0,$$

$$t_{jk}=-\left(\sum_{p=0}^{j} m_p-m_j+k-1\right)T,\quad r=1,\ \ldots,\ l,\quad k=1,\ \ldots,\ m_j \tag{28}$$

(отсчет времени, а также нумерацию измерений и групп ведем от последнего измерения). Достоинствами таких фильтров является простота их реализации при большом m.

При $l=0$ в (27) имеем $q_0(t)=1/m$; при $l=1$

$$q_1(t)=\frac{1-m_0-\dfrac{2t}{T}}{m(1-m_0)},\qquad q_0(t)=\frac{m+m_0-1+\dfrac{2t}{T}}{mm_0}. \tag{29}$$

При $l=2$ общее выражение громоздко; выражения для равных групп ($m_0=m_1=m_2$), а также для симметричного осреднения ($m_0=m_2$, $q_0(t)=q_2(t)$) приведены в [3].

Примем, что $T=T_0/m$ достаточно мало. При $l=2$ здесь получим

$$q_0(\bar t)=\frac{1}{m}\,\frac{2\alpha_1+\alpha_1^2+\beta_1+\beta_1\alpha_1+2\bar t(1+2\alpha_1+\beta_1)+3\bar t^2}{\alpha_1(\alpha_1+\beta_1)},$$

$$q_1\bar t=\frac{1}{m}\,\frac{-\alpha_1\left(1+\beta_1+\alpha_1\beta_1+\beta_1^2\right)-2\bar t\left(1+\alpha_1+\beta_1+2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2\right)-3\bar t^2(1+\beta_1)}{\beta_1(\alpha_1+\beta_1)(1-\alpha_1)},$$

$$q_2(\bar t)=\frac{1}{m}\,\frac{1-m[\beta_1 q_1(\bar t)+\alpha_1 q_0(\bar t)]}{1-\alpha_1-\beta_1}, \qquad (30)$$

где

$$\bar t=\frac{t}{(m-1)T},\qquad \alpha_1=\frac{m_0}{m},\qquad \beta_1=\frac{m_1}{m_0}.$$

При $T=\frac{T_0}{m}\to 0$ из (30) перейдем к эквивалентному непрерывному оператору с весовой функцией $d(\tau,\bar t)$.

При $l=4$ для $\bar t=-0{,}5$ (здесь $l=5$) получим (интервал T_0 симметрично разбивается относительно средней точки на пять участков)

$$q_4-q_0=\frac{\alpha_2^2(\alpha_2+\beta_2)^2}{\left(\alpha_2^2-1\right)[(\alpha_2+\beta_2)^2-1]}\,\frac{1}{m},$$

$$q_3=q_1=\frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2+\beta_2)^2-1}\left[\frac{1}{\beta_2(\alpha_2+\beta_2)(2\alpha_2+\beta_2)}+\frac{(\alpha_2+\beta_2)^2}{\alpha_2^2-1}\right]\frac{1}{m},$$

$$q_2=\frac{1-m[q_1\beta_2+q_0(1-\alpha_2-\beta_2)]}{\alpha_2}\,\frac{1}{m}, \qquad (31)$$

где $m_4=m_0$, $m_3=m_1$, $\alpha_2=m_2/m$, $\beta_2=2m_1/m$.

На рис. 4*в* приведены значения случайной и динамической погрешностей рассматриваемых алгоритмов (для $l=2$ и разных $\bar t$). Кривые 1′ и 2′ соответствуют $\hat D_{ур}$ и $\tilde\varepsilon_{дин}\cdot 10^3$ для случая выбора равных групп ($\alpha_1=\beta_1=1/3$), а кривые *1* и *2* — для значений α и β, при которых дисперсия $\hat D_{ур}$ при данном $\bar t$ минимальна (эти значения α и β приведены на рис. 4*д*). На рис. 4*г* пунктиром и сплошными линиями показаны весовые коэффициенты $d_i(t)$ $(q_i(\bar t))$ для двух указанных вариантов выбора значений α и β. Значения $\tilde\varepsilon_{дин}$ и $\hat D_{ур}$ для $t=-0{,}5$, $l=1$, 3 и 5 и случая равных групп (при $l=3$ это $\alpha_1=\beta_1=1/3$, при $l=5$ $\alpha_2=0{,}2$, $\beta_2=0{,}4$) соответственно составляют $4{,}2\cdot 10^{-2}$; $5{,}8\cdot 10^{-6}$; $4{,}46\cdot 10^{-6}$ и 1; 3,53; 6,21, а для случая разбиения измерений на группы, исходя из минимума дисперсии $\hat D_{ур}$, при $l=3$ и 5 соответственно $\varepsilon_{дин}=2{,}1\cdot 10^{-4}$; $4{,}57\cdot 10^{-7}$; $\hat D_{ур}=2{,}61$; 4,04 (здесь $\alpha_1=0{,}64$, $\alpha_2=0{,}41$, $\beta_2=0{,}52$). Значения оптимального интервала $\hat T_{0\,опт}$ (или числа измерений m) и минимальной дисперсии результирующей погрешности $\tilde D_{\varepsilon\,\min}$ для случая равных групп измерений

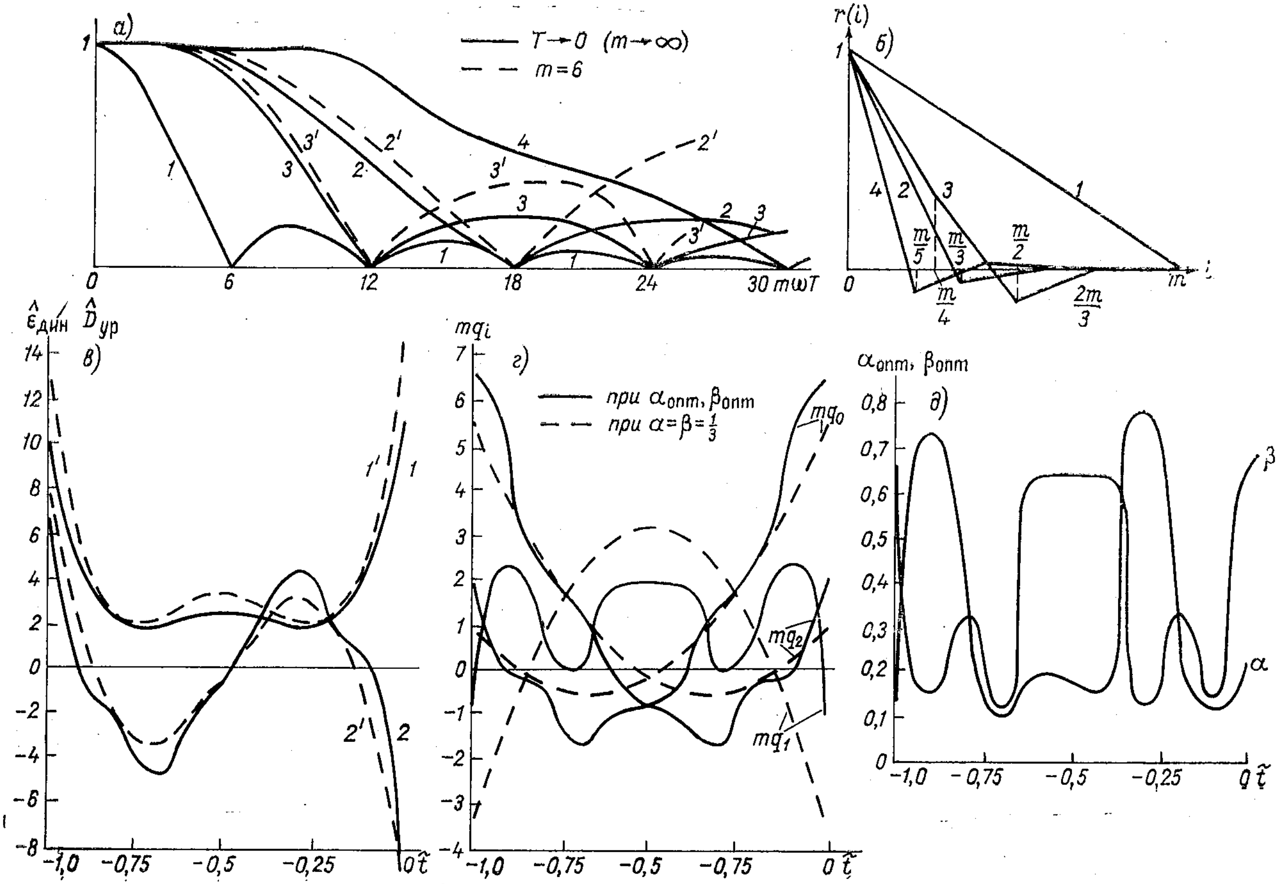


Рис. 4.

при $l=1$, 3 и 5 составляет $\hat{T}_{0\,\text{опт}}=2{,}69$; 8,00; 12,8; $\tilde{D}_{\varepsilon\,\min}=0{,}468$; 0,496; 0,525, а для случая разбиения на группы, исходя из минимума дисперсии $\tilde{D}_{\text{ур}}$, $\hat{T}_{0\,\text{опт}}=5{,}81$; 8,67, $D_{\varepsilon\,\min}\approx 0{,}5$ (для обоих случаев). Для сравнения приведем также соответствующие значения для случая $c=0$. Здесь при $l=3$ и 5 имеем $\hat{T}_{0\,\text{опт}}=5{,}7$; 8,5, $\bar{D}_{\varepsilon\,\min}\approx 0{,}45$ (для всех l); случай $l=1$ совпадает с рассмотренным выше.

Для рассматриваемых алгоритмов задача определения влияющих измерений и их весов сводится к выбору значений $m(T_0)$ и m_j из условия минимума среднего квадрата погрешности D_ε. Например, при $\bar{t}=-0{,}5$ и $l=3$ имеем [3] $\hat{D}_{\text{ур}}=\dfrac{1-2\alpha_1^3+\alpha_1^5}{\alpha_1(1-\alpha_1^2)^2}$, $\tilde{\varepsilon}_{\text{дин}}=\dfrac{\alpha_l^2}{1920}$. Подставляя эти значения в (24′) и минимизируя по α_1, находим оптимальные значения α_1 и $\hat{T}_{0\,\text{опт}}$ (0,46 и 5,7).

Приведенные примеры показывают, что рассматриваемые простые алгоритмы обеспечивают немногим меньшую точность, чем оптимальный выбор $\rho(t_i)$ в (20) или (21).

Интересно отметить, что рассматриваемые алгоритмы могут быть получены из выражений (12) или (13). Примем, например, в выражении, аналогичном (17),

$$\rho(\tau)=\begin{cases} a_1\left[1-\left(\dfrac{2\tau}{\alpha_1 T_0}\right)^2\right]^{-1} & \text{при } |\tau|\leqslant\dfrac{\alpha_1}{2}T_0,\\ a_2\left[\left(\dfrac{2\tau}{\alpha_1 T_0}\right)^2-1\right]^{-1} & \text{при } \dfrac{\alpha}{2}T_0\leqslant|\tau|\leqslant\dfrac{T_0}{2},\\ 0 & \text{при } |\tau|\geqslant\dfrac{T_0}{2},\end{cases}\qquad(32)$$

где $0<\alpha_1<1$. При таком выборе $\rho(\tau)$ моменты $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_4$ и $\hat{\mu}_0$ (как функция $\rho(\tau)$ при $\tau\to\alpha_l\dfrac{T_0}{2}$) стремятся к бесконечности. Рассматривая предельные выражения с учетом условия конечности весов $d(\tau, 0)$, получим

$$d(\tau,\ 0)=\begin{cases} 0 & \text{при } |\tau|>\dfrac{T_0}{2},\\ \dfrac{1}{T_0}\left[1+\dfrac{1}{\alpha_1(1+\alpha_1)}\right] & \text{при } |\tau|\leqslant\alpha_1\dfrac{T_0}{2},\\ -\dfrac{1}{T_0}\,\dfrac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2} & \text{при } \dfrac{\alpha_1 T_0}{2}<|\tau|<\dfrac{T_0}{2},\end{cases}\qquad(33)$$

что совпадает с выражением, приведенным в [3]. Это позволяет рассматривать такой фильтр как частный случай (17) при выборе $\rho(\tau)$, соответствующем кривой *4* на рис. 1. Аналогичный результат можно получить и для других l и t.

Для передаточной функции рассматриваемых дискретных фильтров из (19) и (27) получим

$$H(e^{j\omega T},\ t)=\sum_{r=0}^{l}\sum_{k=1}^{m_r} q_r(t)e^{-j\omega\left[t+\left(\sum_{p=0}^{r} m_p-m_r+k-1\right)T\right]}. \qquad (34)$$

При $t=\frac{-(m-1)T}{3}$, учитывая что число групп l здесь нечетное ($l=2k+1$, $k=0,\ 1,\ 2$ и т. д.), $m_i=m_{l-1-i}$ и $q_i=g_{l-1-i}, i=0, ..., k$, найдем

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\left[q_0\left(z^{\frac{m-1}{2}}-z^{-\frac{m+1}{2}}\right)\right]+$$

$$+\sum_{r=1}^{k}(q_r-q_{r-1})\left(z^{\frac{m-1}{2}-\sum_{i=0}^{r-1}m_i}-z^{-\frac{m+1}{2}+\sum_{i=0}^{r-1}m_i}\right), \qquad (35)$$

$$|H(e^{j\omega T},\ t)|=\left|\frac{q_0\sin\frac{m\omega T}{2}+\sum_{r=1}^{k}(q_r-q_{r-1})\sin\left[\left(\frac{m}{2}-\sum_{i=0}^{r-1}m_i\right)\omega T\right]}{\sin\frac{\omega T}{2}}\right|. \qquad (36)$$

На рис. 4 *а* приведены частотные характеристики рассматриваемых скользящих дискретных фильтров (при одном и том же m). Кривая *1* соответствует $l=1$, кривые *2* и *3* — $l=2$ (при $\alpha_1=1/3$ и $\alpha_1=1/2$), кривая *4* — $l=5$ (при $\beta_2=0{,}4$, $\alpha_2=0{,}2$). Как видно из кривых *2* и *3*, меняя значения $\alpha_1(\alpha_2)$ и $\beta_1(\beta_2)$, можно существенно менять полосу пропускания фильтра при тех же c и m. На рис. 4 *б* приведены нормированные корреляционные функции сглаженного ряда при использовании тех же, что и на рис. 4 *а*, скользящих дискретных фильтров и при тех же некоррелированных погрешностях отсчетов.

Таким образом, в работе рассмотрен широкий класс дискретных и непрерывных алгоритмов, основанных на приближении функции полиномами и отличающихся заданием матриц $\tilde{R}$ или $\tilde{\rho}$; исследованы свойства таких алгоритмов, в частности влияние выбора матриц $\tilde{R}$ или ρ, т. е. числа и веса обрабатываемых измерений при построении скользящих полиномиальных фильтров. Особый интерес для измерительных систем представляют предложенные в [3] алгоритмы обработки измерений с равными весами групп измерений, просто реализуемые как в дискретных, так и в непрерывных измерительных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Катковник В. Я. Методы алгоритмической оптимизации. В кн.: Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М. «Наука», 1975, с. 259—317.
2. Поляк И. П. Численные методы анализа наблюдений. Л., Гидрометеоиздат, 1975. 212 с.

3. Персии С. М. О выборе алгоритмов оценки сигнала и численного дифференцирования в аналого-дискретных системах. — «Тр. ГГО», 1976, вып. 375, с. 116—125.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966. 576 с.
5. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960. 656 с.
6. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., «Наука», 1966. 416 с.
7. Персин С. М. Методы уменьшения случайных погрешностей измерительных систем посредством осреднения результатов измерений.— «Геофизическое приборостроение», 1963, вып. 17, с. 64—78.

С. М. Персин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТИ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Процесс аналого-цифрового преобразования обычно состоит из ряда последовательных операций сравнения измеряемой величины с опорными уровнями, выбора зависимости от алгоритма работы аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и результатов предыдущих операций сравнения. Ход и результат этого процесса, а значит и получаемая погрешность существенно зависят от характера изменения измеряемой величины $x(t)$ и погрешности $y(t)$ за время измерения [1—3, 8].

Остановимся на распределении результирующей погрешности АЦП. Как указывалось в [3], нахождение этого распределения может быть сведено к задаче на достижение заданных границ непрерывным процессом или дискретной последовательностью. Алгоритм отработки входного сигнала определяется алгоритмом АЦП. Непрерывная отработка входного сигнала имеет место в некоторых АЦП (например, время-импульсных).

Заметим, что рассматриваемый ниже подход может быть полезен не только для нахождения распределения погрешности АЦП, но и для других задач, связанных с достижением заданных границ нестационарным процессом или последовательностью.

Условное совместное распределение результата цифрового измерения $W=k\delta$ и погрешности $\varepsilon=k\delta-x(t_0)$ можно записать в виде

$$\omega_{W\varepsilon}(W,\ \varepsilon/X)=\sum_{i=0}^{N}\delta_{\text{ф}}(W-i\delta)\,P(i\delta/X)\,\omega_x(i\delta-\varepsilon/X), \qquad (1)$$

где X — вектор значений $(x_1, ..., x_m)$ входной величины $x(t)$ в моменты сравнений $t_1, ..., t_m$; δ — величина кванта; N — число квантов шкалы; $\delta_{\text{ф}}(\tau)$ — дельта-функция; $\omega_x(x(t_0/X)$ — условное распределение измеряемой величины в момент t_0, к которому относится результат измерения;

$$P(j\delta/X)=\int_0^{\delta}\omega_\alpha(\alpha)\int_{Q_1}\ldots\int_{Q_m}\omega_y(q_1-x_1-\delta+\alpha,\ \ldots$$

$$\ldots,\ q_m-x_m-\delta+\alpha/X)\,dq_m\ldots dq_1 d\alpha \qquad (2)$$

— условная вероятность получения результата измерения $j\delta$. В (2) $\omega_y(Y/X)$ — условное распределение вектора погрешностей сравнений $Y(y_1, ..., y_m)$; $Q_1, ..., Q_m$ — полубесконечные интервалы, определяемые числовым кодом j и алгоритмом АЦП (число сравнений m также может зависеть от j); $\omega_\alpha(\alpha)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \delta)$ — распределение начальной фазы α (положения шкалы).

Из (1), осредняя по X и k, можно получить условное и безусловное распределения погрешности ε и соответствующие моменты. Минимизируя $M(\varepsilon^2)$ или $M(\varepsilon^2/k\delta)$, можно оптимально выбрать значение t_0 (общее для всех результатов измерения или индивидуальное для каждого результата).

Отметим, что обычно задача упрощается, так как изменение x за время измерения сравнительно невелико и может быть представлено, например, рядом

$$\hat{x}(t) = x_н + a_1 t + a_2 t^2. \tag{3}$$

Для этого случая и развертывающего ступенчатого уравновешивания из (2) имеем

$$P(j\delta/\hat{x}(t)) = \int_0^\delta \omega_\alpha(\alpha) \int_0^\infty \ldots \int_{j\delta-\delta}^\infty \int_{-\infty}^{j\delta} \omega_y(q_1 - \hat{x}_1 + \alpha, \ldots$$
$$\ldots, q_{j+1} - \hat{x}_{j+1} + \alpha/\hat{x}(t))\, dq_{j+1} dq_j \ldots dq_1 d\alpha. \tag{4}$$

При непрерывном уравновешивании в (4) квант $\delta \to 0$ (здесь квантование по уровню имеет место при измерении получаемого в результате уравновешивания временно́го интервала).

Частным случаем (4) является вероятность $P(i\delta/x_н)$ при неизменном за время измерения значения $x(t) = x_н$. Распределение $\omega(\varepsilon/x_н)$ и его моменты $M(\varepsilon^r/x_н) = \sum_{i=1}^{N} (i\delta - x_н)^r P(i\delta/x_н)$ могут резко отличаться от получаемых для идеального квантования по уровню. В частности, имеет место смещение математического ожидания погрешности $M(\varepsilon/x_н)$, причем, в отличие от идеального квантования, $M(\varepsilon/x_н)$ при $\delta \to 0$ не стремится к нулю (напротив, может возрастать с уменьшением δ) [3].

Нахождение из (1), (2) и (4) распределений $\omega(\varepsilon/X)$, $\omega(\varepsilon/\hat{x}(t))$ или $\omega(\varepsilon/x_н)$ представляет заметные трудности (тем большие, чем меньше δ), так как требует взятия многомерных интегралов. Задача упрощается, когда имеет место (или важна по характеру задачи) зависимость погрешности последовательных сравнений от малого числа l предыдущих значений. Для процесса $Y(t)$, не зависящего от $x(t)$ в этом случае в (4)

$$\omega_y(y_{j+1}, \ldots, y_1) = \omega_y(y_1, \ldots, y_l) \prod_{i=l+1}^{j+1} \omega_y(y_i/y_{i-1}, \ldots, y_{i-l}). \tag{5}$$

Здесь необходимо вычисление $1+l$-мерных интегралов. Для нормального процесса можно воспользоваться приближенными способобами [4]. Для некоррелированных измерений некоторые результаты приведены в [1, 5, 8].

Как указывалось, нахождение рассматриваемых распределений (в том числе и при $\delta \to 0$) может быть сведено к решению задачи на достижение случайным процессом $\xi(t)$ или случайной последовательностью $\xi(t_i)$ заданных границ. Для развертывающего уравновешивания по закону $u(t) = u_н + b_1 t$ (рис. 1 *а*).

$$\xi(t) = U_н + b_1 t - \hat{x}(t) - y(t), \tag{6}$$

а граничный уровень равен нулю.

Общие методы решения такой задачи разработаны только для марковских процессов. Для дифференцируемого процесса $y(t)$ при медленном по сравнению с интервалом корреляции процесса $\tau_{кор}$

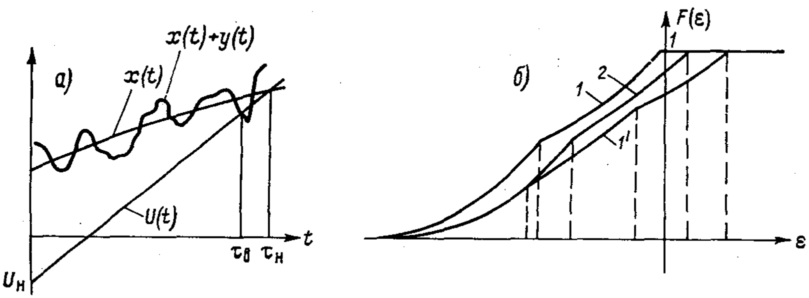


Рис. 1.

уравновешивании ($b_1 \tau_{кор} < \sigma_y$, где σ_y — среднее квадратическое значение погрешности y) используем следующий приближенный метод. Разобьем интервал уравновешивания на участки (τ_{j-1}, τ_j), $j = 1, \ldots, d$, и примем в качестве оценки вероятности того, что процесс $\xi(t)$ в интервале (τ_{j-1}, τ_j) превысил нулевой уровень, среднее число пересечений с этим уровнем $\overline{N}_j$ ($\overline{N}_j < 1$, кроме последнего участка, для которого $\overline{N}_d = 1$). Такой подход используется в [6] для нахождения распределения абсолютного максимума. Полагая превышения нулевого уровня на участках независимыми, для вероятности выброса через нулевой уровень нестационарного процесса $\xi(t)$ приближенно получим

$$P_1(\tau) = \underset{\tau_0 \leqslant t < \tau}{P}[\xi(t) < 0] = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau > \tau_d, \\ (1 - \overline{N}'_j) \prod\limits_{k=1}^{j-1} (1 - \overline{N}_k) & \text{при } \tau \leqslant \tau_d, \end{cases} \tag{7}$$

где $\tau_{j-1} < \tau < \tau_j$ $(j \leqslant d)$; $\overline{N}'_j$ — среднее число выбросов процесса $\xi(t)$ за интервал (τ_{j-1}, τ); $\overline{N}_k$ — среднее число выбросов процесса $\xi(t)$ за интервал (τ_{k-1}, τ_k); $\tau_0 = 0$ — момент начала уравновешивания; τ_d определяется из условия, что $\overline{N}_d = 1$ (значение τ_d зависит от числа участков d). Величина $\overline{N}_k$ (как и $\overline{N}'_j$) определяется из выражения

$$\overline{N_k} = \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \int\limits_0^\infty \xi' \omega'(0, \xi', t) d\xi' dt, \tag{8}$$

где $\omega_1 (\xi, \xi', t)$ — совместное распределение значения процесса $\xi(t)$ и его производной для момента t.

Рассмотрим представляющий интерес случай, когда $\hat{x}(t) = x_н + a_1 t$. При стационарном нормальном процессе $y(t)$ из (8) получим

$$\overline{N}_k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_y}{b_1 - a_1} \sqrt{-\frac{r''_y(0)}{2\pi}} \exp\left[\frac{(b_1 - a_1)^2}{2\sigma_y^2 r''_y(0)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{b_1 - a_1}{\sigma_y \sqrt{-2r''_y(0)}} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi\left[\frac{x_н - U_н - (b_1 - a_1)\tau_{k-1}}{\sqrt{2}\,\sigma_y} \right] - \Phi\left[\frac{x_н - U_н - (b_1 - a_1)\tau_k}{\sqrt{2}\,\sigma_y} \right] \right\}, \tag{9}$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-u^2} du$; $r_y(t)$ — нормированная корреляционная функция погрешности y.

Интегральное распределение момента $\tau_в$ первого выброса процесса $\varepsilon(t)$ через нулевой уровень имеет вид

$$F(\tau_в / x_н, a_1) = 1 - P_1(\tau_в). \tag{10}$$

Распределение погрешности измерения $\varepsilon F(\varepsilon/x_н, a_1)$ получим, если учесть, что

$$\varepsilon = U_н + b_1 \tau_в - x_н - a_1 t_0. \tag{11}$$

Как следует из (7) и (9), распределение погрешности ε при погрешности y, не зависящей от x, и рациональном выборе $U_н$ ($x_н - U_н > 3\sigma_y$ при всех $x_н$) не зависит от $x_н$, но зависит от a_1. Влияние a_1 на распределение погрешности эквивалентно изменению скорости отработки b_1.

Для уменьшения динамической погрешности развертывающих АЦП, связанной с изменением измеряемой величины за время измерения, часто используется отнесение результата к моменту уравновешивания t_0, определяемому по получаемому числовому коду W $\left(t_0 = \frac{W - U_н}{b_1}\right)$. Из (7), (9) и (11) следует что при относительно быстром изменении y за время измерения такой метод не позволяет исключить динамическую погрешность и при $\delta \to 0$.

Рассматриваемый подход позволяет оценить математическое ожидание результирующего распределения и осуществить его коррекцию. При соизмеримых значениях b_1 и a_1 при коррекции следует учитывать производную процесса (например, посредством привлечения результата предшествующего измерения).

При индивидуальном датировании результата по получаемому коду погрешность

$$\varepsilon = (b_1 - a_1)(\tau_в - \tau_и),$$

где $\tau_и = \frac{x_н - u_н}{b_1 - a_1}$ соответствует моменту идеального уравновешивания (при $y \equiv 0$). Характер интегрального распределения погрешности ε для $d=2$ и $d=3$ показан на рис. 1 *б* (кривые *1* и *1'*); кривые *1* и *2* соответствуют $d=2$, но разным a_1 (для кривой *2* a_1 больше).

Как видно из (7) и (9) и рис. 1, распределение погрешности имеет изломы в точках, соответствующих значениям $\tau_в = \tau_j$ ($j=0, 1, ..., d$). Целесообразно неравномерное разбиение интервала (τ_0, τ_d) на участки, например, из условия

$$P_1(\tau_{j-1}) = P_1(\tau_j) = \frac{1}{d}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Заметим, что точность метода зависит от d. Обычно достаточно 2—4 участков.

Аналогично можно получить выражения для случая когда $\hat{x}(t)$ описывается более сложным выражением, и для общего случая, когда $x(t)$ — случайный процесс с известной статистической структурой. При этом не представляет дополнительных трудностей использование условной (при известных результатах предшествующих измерений и т. п.) структуры процесса.

Совершенно аналогично можно получить распределение для дискретной последовательности $\xi(t_i)$. Отличие заключается в том, что распределение погрешности ε здесь является решетчатым (при фиксированной начальной фазе α), а среднее число выбросов дискретной последовательности в (7) равно

$$\overline{N}_k = \sum_i \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{\infty} \omega_\xi(\xi_i, \xi_{i+1})\, d\xi_{i+1}\, d\xi_i, \quad \tau_{k-1} < t_i < \tau_k, \tag{12}$$

где $\omega_\xi(\xi_i, \xi_{i+1})$ — двумерное распределение значений процесса $\xi(t)$ в моменты t_i и t_{i+1}. В ряде случаев удобно воспользоваться приближенной аппроксимационной формулой для двумерного распределения нестационарной последовательности, приведенной в [7].

Рассматриваемый метод тем точнее, чем меньше отношение $\frac{b_1 \tau_{кор}}{\sigma_y}$. При больших значениях этого отношения приближенная оценка может быть получена с учетом выражений (4) и (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Твердохлеб П. Е. Свойства случайных погрешностей цифратора поразрядного уравновешивания с двоичной системой кодирования.— «Автометрия», 1966, № 2, с. 77—89.

2. Ефимов В. М., Рабинович В. И. О погрешности цифрового прибора, обусловленной изменением измеряемой величины за время измерения.— «Автометрия», 1967, № 2, с. 45—53.

3. Персин С. М. Основы теории и проектирования автоматических измерительных систем. Л., Гидрометеоиздат, 1975. 320 с.

4. Судаков Р. С., Чеканов А. А. Приближенный метод вычисления многомерных нормальных интегралов в задачах надежности. — «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1972, № 1, с. 69—75.

5. Персин С. М. Некоторые вопросы статистической обработки результатов измерений. В кн.: Информационные методы в системах управления, измерений и контроля. Владивосток, 1968, с. 406—421.

6. Анискин Л. В., Персин С. М. Распределение абсолютного экстремума случайного процесса. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 346, с. 10—15.

7. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. К расчету вероятности выброса нормальной последовательности. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 348, с. 69—77.

8. Островерхов В. В. Динамические погрешности аналого-цифровых преобразователей. Л., «Энергия», 1975. 174 с.

М. С. Стернзат

О НАЗЕМНЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ СТАНЦИЯХ

Наиболее распространенной дистанционной метеорологической станцией (ДМС) является М-49 [1]. Она была разработана в конце 50-х годов и начала серийно выпускаться в начале 60-х годов как станция широкого применения.

По своим техническим и метрологическим характеристикам ДМС М-49 не удовлетворяет современным требованиям, что вполне естественно, так как за прошедшие 15 лет станция не модернизировалась, а требования существенно изменились. Поэтому ДМС М-49 применяют главным образом в комплекте с другими дистанционными установками, а получаемые с ее помощью данные по отдельным величинам используются в значительной мере как ориентировочные.

Несколько позднее был разработан комплект дистанционных приборов (ДМК) [1], по существу являющейся компактности, легко транспортируемой ДМС. По техническим и метрологическим характеристикам ДМК уступает ДМС М-49. Отсутствие современных ДМС частично объясняется тем, что в течение последних 10 лет основное внимание уделялось разработке и освоению автоматических метеорологических станций. Однако опыт показывает, что автоматизация процессов получения метеорологической информации не исключает и даже требует технического совершенствования сетевых метеорологических станций различного вида и назначения, в том числе и дистанционных средств измерения. Естественно, следует начать с разработки технического задания на наиболее широкий комплекс дистанционных средств — ТЗ на ДМС. При этом следует учесть требования и реальные возможности сети, а также имеющийся опыт НИИ ГУГМС и других ведомств и промышленности в создании ДМС (не только наземных).

В общем виде наземную ДМС (учитывая ее конкретное назначение) следует определить как измерительно-информационную систему, обеспечивающую возможность дистанционных измерений метеорологических величин и формирования на основе этих измерений и визуальных наблюдений метеорологической информации в объеме, получаемом в настоящее время тем или иным видом действующих сетевых метеорологических станций, оснащенных техническими средствами местного и дистанционного действия. Этим определяется назначение ДМС, объем выдаваемой ею информации при возможных вариантах ее использования в качестве различных сетевых станций, например, ДМС второго разряда, аэродромных ДМС и т. д.

В ГГО и на РОЗГМП в последние годы велись работы по созданию дистанционных и полуавтоматических метеорологических станций [2].

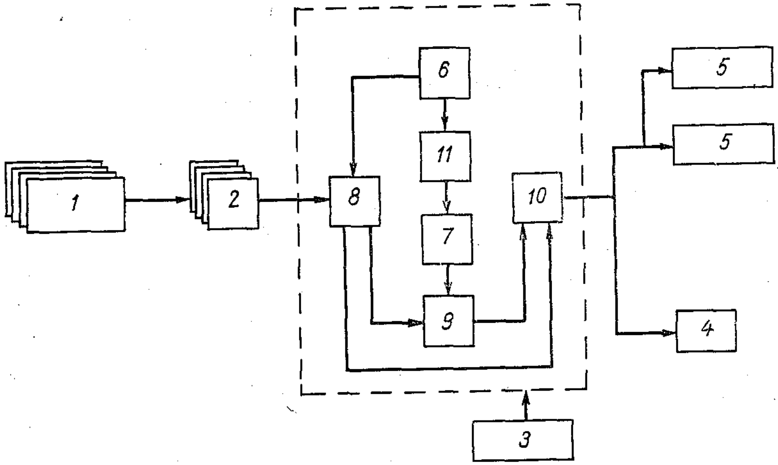


Рис. 1. Структурная схема ДМС.

Здесь приводятся некоторые технические характеристики ДМС, разработанной в ГГО и на РОЗГМП. Она может производить дистанционные измерения до 32 (в настоящее время задействованы 14) величин, а также осуществлять регистрацию измеренных величин в цифровом виде в абсолютных значениях и выдавать их на цифровые индикаторные устройства. Станция обслуживается оператором. Однако она может работать и в автоматическом режиме, осуществляя выдачу информации через определенные интервалы времени (3 ч, 2 ч, 1 ч, 30 мин, 10 мин, 5 мин — по выбору оператора), а также при возникновении некоторых опасных явлений. Кроме того, возможна выдача данных по команде оператора. Оператор может (пользуясь специальным пультом ручного управления) ввести в состав информации дополнительные сведения об опасных явлениях и других характеристиках атмосферы (не измеряемые станцией). С помощью пульта оператор может внести коррективы в выдаваемую информацию.

ДМС работает по одной из трех программ — по выбору оператора, а также в зависимости от возникновения опасных явлений.

Основная программа работы станции включает подготовку датчиков и станции к измерениям, производство измерения, их кодирование и выдачу информации на устройства цифровой печати и индикации. Весь цикл работы ДМС по этой программе занимает 5 мин 30 с (подготовка 5 мин; измерение и выдача информации 30 с) Ускоренная (сокращенная) программа занимает 2 мин 30 с. Работа станции по программе «штормового режима» (при наличии опасных явлений), когда датчики находятся в постоянной готовности, занимает 30 с.

На рис. 1 приведена укрупненная структурная схема станции, которая является типовой для современных управляемых измерительных систем. Она включает в себя датчики *1* со вторичными преобразователями *2*, блок управления (оконтурен пунктирной линией), блок питания *3*, цифровой регистратор *4* и цифровые индикаторные устройства *5* (их может быть несколько).

В ДМС предполагается использовать серийно выпускаемые датчики (главным образом, от станции КРАМС). В качестве регистрирующего устройства может использоваться рулонный телеграфный аппарат, а в качестве индикаторного — МИУ [3]. Блок управления содержит блок времени *6*, программное устройство *7*, коммутатор *8* (на 32 канала), цифровой вольтметр *9*, выводное устройство *10* и пульт ручного управления *11*. Блок управления и блок питания являются единственными специальными устройствами ДМС. Блок управления является радиоэлектронным устройством, построенным главным образом на элементах ИМС серии «Логика», его ориентировочные габариты 600×500×300 мм, масса 20 кг, потребляемая мощность 30 Вт. Блок питания скомпонован из серийно выпускаемых блоков. ДМС в том виде, как она разработана, решает ряд задач по обеспечению единообразия измерений на метеорологической сети и может служить основой для создания серийной ДМС широкого применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по гидрометеорологическим приборам и установкам. Л., Гидрометеоиздат, 1971. 370 с.
2. Автоматические станции для геофизических (теплобалансовых, актинометрических и атмосферно-электрических) измерений в приземном слое атмосферы — АСГИ. Авт.: Л. П. Афиногенов, Н. Н. Ерошкевич, А. И. Мехович, М. С. Стернзат. — См. наст. сб., с. 19—25.
3. Грушин С. И., Петров Ю. П. Индикаторное устройство КРАМС.— См. наст. сб., с. 3—18.

СОДЕРЖАНИЕ

Труды ГГО, вып. 377

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ
МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Редактор *Г. И. Слабкович.* Технический редактор *В. И. Семенова.* Корректор *В. И. Гинцбург*

ИБ № 556

Сдано в набор 17/XI 1976 г. Подписано к печати 3/V 1977 г. М-20156. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бумага тип. № 1. Печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 10,52. Тираж 810 экз. Индекс МЛ-121. Заказ № 131.
Цена 79 коп. Гидрометеоиздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, 23.

Сортавальская книжная типография Управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров Карельской АССР, Сортавала, Карельская, 42.

УДК 551.508 : 629.132

Индикаторное устройство КРАМС. Грушин С. И., Петров Ю. П. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 3—18.

Рассмотрены структурная схема бесконтактного индикаторного устройства аэродромной автоматической метеостанции КРАМС и принципы построения отдельных блоков.

Табл. 1. Илл. 10. Библ. 2.

УДК 551.508

Автоматические станции для геофизических (теплобалансовых, актинометрических и атмосферно-электрических) измерений в приземном слое атмосферы — АСГИ. Афиногенов Л. П., Ерошкевич Н. Н., Мехович А. И., Стернзат С. М. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 19—25.

Приводится описание автоматических станций для геофизических (теплобалансовых, актинометрических, атмосферно-электрических) измерений в приземном слое атмосферы. Дается краткое описание центрального устройства, приведены основные характеристики станций.

Табл. 3. Илл. 2. Библ. 1.

УДК 551.508.824

Опыт эксплуатации КРАМС в аэропортах гражданской авиации. Романов Е. В. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 26—31.

Автоматические метеорологические станции КРАМС устанавливаются в аэропортах гражданской авиации с 1971 г. Приводятся краткие данные об устройстве станции и выработанные на основе опыта эксплуатации рекомендации по размещению ее оборудования на аэродроме, обеспечивающие монтаж в короткие сроки, а также удобство технического обслуживания. Даны предложения по организации технического обслуживания и ремонта станций. Рассмотрены ограничения использования КРАМС в оперативной работе и даны рекомендации по их преодолению.

Табл. 1. Илл. 1. Библ. 2.

УДК 551.508 : 551.591

Функциональный преобразователь датчика метеорологической дальности видимости. Капустин С. А. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 32—36.

Описана схема транзисторного функционального преобразователя датчика метеорологической дальности видимости с линейным выходом по дальности напряжения или частоты. Особенностью схемы является формирование на выходе преобразователя однополярных импульсов прямоугольной формы, амплитуда и длительность которых не зависят от частоты в широком диапазоне изменения управляющего напряжения. Преобразователь обеспечивает дистанционность измерения не менее 5 км.

Табл. 1. Илл. 2. Библ. 4.

УДК 551.508.5

Некоторые вопросы конструирования вращающихся анемометров. Арбузов И. А., Протопопов Н. Г. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 37—43.

Сравниваются основные характеристики анемометров с постоянным углом поворота лопастей (тип А) и постоянным геометрическим шагом (тип В) и находятся оптимальные значения углов поворота лопастей и геометрических шагов анемометров для различных режимов работы.

Библ. 2.

УДК 551.508

Особенности использования акустических анемометров при пульсационных измерениях потока тепла. Афиногенов Л. П., Романов Е. В. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 44—48.

На основе анализа общих формул, определяющих вертикальный турбулентный перенос, показано, что частотный акустический анемометр реагирует на вертикальную компоненту скорости ветра в обычном понимании, а фазовый — на массовую скорость, представляющую собой произведение скорости ветра на плотность воздуха. Отмечается, что по осредненным показаниям частотного акустического анемометра (без датчика температуры) можно рассчитать вертикальный поток тепла.

Библ. 7.

УДК 551.508.92

Определение прозрачности атмосферы по уровню постоянной составляющей сигнала обратного рассеяния. Круглов Р. А. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 49—52.

Рассматривается погрешность измерений средних значений прозрачности атмосферы на исследуемом отрезке трассы зондирования по суммарным значениям эхо-сигналов, накопленных за время прохождения через указанный отрезок трассы переднего и заднего фронтов светового импульса в прямом и обратном направлении. Дана оценка выигрыша в помехоустойчивости измерений при наличии шумов фотопреобразователя. Приводится алгоритм обработки эхо-сигнала, позволяющий определить прозрачность атмосферы по уровню постоянной составляющей эхо-сигнала.

Илл. 1. Библ. 3.

УДК 551.508.92

О связи между прозрачностью атмосферы и постоянной составляющей сигнала обратного рассеяния от импульсного источника света. Круглов Р. А. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 53—56.

Рассматриваются соотношения, отражающие характер функциональной связи осредненных значений огибающей сигнала обратного рассеяния от квазинепрерывного излучателя с прозрачностью исследуемого отрезка трассы зондирования. Приведенные сведения должны явиться исходным материалом для разработки алгоритмов определения прозрачности атмосферы, обеспечивающих высокую надежность обнаружения слабых оптических сигналов в шумах фотоприемника.

Библ. 4.

УДК 347.822.5 : 551.501

Разработка типовой схемы размещения на аэродроме метеорологических датчиков. Б о х а н о в В. Е. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 57—66.

Обосновывается схема размещения на аэродроме пунктов метеорологических измерений с учетом современных требований к объему и точности метеоинформации. Анализируются ошибки инерционного и экстраполяционного прогноза условий посадки.

Показано, что датчики должны устанавливаться на аэродроме равномерно, комплектно и стационарно в 4—5 пунктах. Одновременно пункты измерений образуют штормовые полукольца относительно каждого старта. Это дает возможность быстро получать точные и устойчивые значения обобщенных характеристик метеовеличин в детерминированной и вероятностной формах, в том числе автоматизировать измерение количества облаков, и получать непрерывно точные условия посадки с заблаговременностью до 10—20 мин по результатам экстраполяционного прогноза при любом направлении движения воздушной массы.

Илл. 4. Библ. 12.

УДК 347.822.5 : 551.509

Исследование функций распределения результатов измерений высоты нижней границы облаков и дальности видимости. Б о х а н о в В. Е., Д о в г я л л о Е. Н. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 67—73.

Анализируется распределение результатов измерений высоты нижней границы облаков и фактическое распределение заходов на посадку в зависимости от результатов измерений дальности видимости. Показано соответствие рассмотренных распределений нормальному закону, уточнена структурная функция горизонтальной дальности видимости.

Табл. 1. Илл. 2. Библ. 5.

УДК 519.92

Свойства решений уравнения старения. А ф и н о г е н о в Л. П. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 74—91.

Анализируются свойства решений уравнения, описывающего процессы старения носителей при длительном хранении информации. Показано, что матрица с элементами, зависящими от времени, отражающая процесс старения, остается стохастической, но количество передаваемой ею информации и ее пропускная способность, а также соответствующие относительные характеристики уменьшаются, стремясь к нулю.

Библ. 5.

УДК 519.92

Взаимное количество информации как характеристика зависимости между случайными событиями. Афиногенов Л. П. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 92—104.

Вводятся понятия относительного количества информации η, передаваемой стохастической матрицей, и относительной пропускной способности матрицы χ. Устанавливается связь между величиной η и степенью статистической зависимости между системами случайных событий, а также связь между χ и степенью линейности системы векторов, образованных строками матрицы.

УДК 519.92

Особенности хранения информации при помехоустойчивом кодировании и дублировании. Афиногенов Л. П., Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 105—118.

Необходимость дублирования в системах длительного хранения информации вызывается опасностью уничтожения при стихийных бедствиях или утере лент. В этом случае дублирование может быть использовано для дополнительного увеличения помехоустойчивости.

Рассмотрены три различных алгоритма декодирования для систем с дублированием и сопоставлены характеристики этих алгоритмов. Отмечается аналогия между хранением информации в биологических и технических системах.

Илл. 5. Библ. 6.

УДК 551.501.75

Распределение максимальной скорости ветра. Анискин Л. В., Персин С. М. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 119—124.

Приводятся распределения максимальной скорости ветра за 2- и 10-минутные интервалы при разных значениях средней скорости ветра. Распределения получены с помощью станции КРАМС, установленной в пос. Воейково. Эти данные, а также полученные Риссаненом (1970) сравниваются с кривыми распределений, полученными расчетным путем. Результаты сравнений показывают возможность определения расчетным путем распределений экстремальных характеристик метеорологических элементов за заданные интервалы времени.

Рис. 2. Библ. 7.

УДК 551.501.45

Прогнозирование абсолютного экстремума случайного процесса. Анискин Л. В., Персин С. М. Труды ГГО, вып. 377, с. 125—134.

Рассматриваются различные методы экстраполяции абсолютного экстремума случайного процесса. Предлагается метод приближенного нахождения условного распределения прогнозируемого экстремума по результатам предшествующих измерений. Полученные результаты могут быть полезны для задач измерения и прогнозирования экстремальных характеристик метеорологических процессов.

Рис. 5. Библ. 6.

УДК 621.377 : 62 — 52 : 551.508

О выборе полиномиальных дискретных и непрерывных фильтров. Боровиков А. А., Персин С. М. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 135—150.

Рассмотрен класс дискретных и непрерывных алгоритмов обработки измерений, основанных на приближении функции полиномами. Исследованы свойства таких алгоритмов и, в частности, влияние выбора задающей матрицы (определяющей число и веса обрабатываемых измерений) на фильтрующие свойства и смещенность оценки получаемых скользящих полиномиальных фильтров. Рассмотрены характеристики предложенных простых алгоритмов с равными весами групп измерений и показана их эффективность при построении дискретных и непрерывных полиномиальных фильтров.

Илл. 4. Библ. 7.

УДК 621.377

О распределении погрешности аналого-цифрового преобразования. Персин С. М. Труды ГГО, 1977, вып. 377, с. 151—156.

Рассматривается распределение погрещности аналого-цифрового преобразования, связанной с изменением измеряемой величины и случайной погрешности за время измерения. Рассматривается метод нахождения указанного распределения для быстро меняющейся случайной погрешности, являющейся дифференцируемым процессом, основанный на предлагаемом в работе приближенном методе решения задачи в достижении нестационарным случайным процессом или последовательностью заданных границ.

Илл. 1. Библ. 8.

79 коп.

Труды ГГО, 1977, вып. 377, 1—161.