

06  
Т78

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

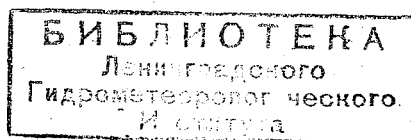
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ТРУДЫ  
ВЫПУСК 31

АВИАЦИОННАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

751718

Под редакцией  
доц. канд. физ.-мат. наук С. В. СОЛОНИНА



ЛЕНИНГРАД  
1967

УДК 551.5 : 629.13 + 656.7.052

#### АННОТАЦИЯ

В сборнике опубликованы работы профессорско-преподавательского состава метеорологического факультета ЛГМИ, посвященные некоторым актуальным проблемам авиационной метеорологии.

Рассматриваются различные аспекты рационального учета влияния ветра на полет самолета, особенности структуры полей метеорологических элементов применительно к задачам метеорологического обеспечения полетов, а также вопросы диагноза и прогноза болтанки самолетов.

Сборник рассчитан на научных работников и специалистов в области авиационной метеорологии, аэроклиматологии, а также на синоптиков АМСГ.

---

*С. В. Солонин*

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С НЕОБХОДИМОСТЬЮ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ ВЕТРА НА ПОЛЕТ САМОЛЕТА**

Исследуется траектория самолета в барическом поле на основе использования квазигеострофического приближения (барический метод). Поле давления предполагается заданным. Барический метод обобщается на трехмерный случай (трехмерная задача).<sup>1</sup>

### **ВВЕДЕНИЕ**

Исследование Беллами [6] о возможности использования показаний радио- и барометрического высотомеров для определения угла сноса и составляющей скорости ветра, нормальной к линии пути (при условии, что путевая скорость самолета известна), положило начало разработке новых методов учета влияния ветра на полет самолета, названных в отечественной литературе изобарическими.

Большой вклад в развитие теоретических и методических основ барической навигации внес Г. Ф. Молоканов. Теоретические и экспериментальные исследования в этом плане были выполнены также Н. И. Вульфсоном, Н. В. Петренко, М. М. Иоффе, М. А. Бабиковым и др.

В 1951 г. автором были сделаны принципиальные уточнения в методику определения ветра в полете по данным радио-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в 1958 г. Опубликование вызвано возрождающимся интересом к барическим методам. При подготовке статьи к печати добавлено заключение и обновлен список литературы. В частности, включена представляющая большой практический интерес статья Г. Ф. Молоканова [3].

и барометрического высотомеров и разработаны типовые схемы применения радио- и барометрического высотомеров совместно со средствами радио- и астрономической навигации.

В ряде последующих исследований автором обосновывалась перспективность более широкого и всестороннего использования данных о поле давления (карт барической топографии) при метеорологическом обеспечении полетов и при выполнении навигационных расчетов, чем это непосредственно следует из упомянутой выше работы Беллами. При этом автор исходил из следующих соображений:

1. С увеличением скоростей полета значительно возрастают абсолютные ошибки измерений.

Согласно Г. Ф. Молоканову [2] точность определения ветра в полете колеблется от 2,5—5% величины воздушной скорости самолета при тщательном измерении навигационных элементов и при разности курсов, близкой к  $90^\circ$ , до 10% при разности курсов, близкой к  $30^\circ$  и  $150^\circ$ . Способ штилевой синхронизации дает точность 2—4% воздушной скорости.

Последнее означает, что для современных транспортных турбореактивных (и особенно для перспективных сверхзвуковых) самолетов абсолютные ошибки измерения ветра в полете в общем превышают ошибки, получающиеся в результате замены в отдельных точках воздушной трассы (маршрута) действительного ветра геострофическим.

2. Характерный масштаб при решении большинства навигационных задач совпадает с масштабом квазигеострофических движений, поэтому при интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих траекторию самолета в барическом поле, ошибки, вызванные заменой фактического ветра геострофическим, должны существенно уменьшаться. По существу в этом случае используется важный физический принцип динамики атмосферы — адаптация поля давления к полю ветра.

Фундаментальными работами А. М. Обухова, И. А. Кибеля, А. С. Мониной, М. И. Юдина установлено, что при нарушении в атмосфере геострофического равновесия (баланса силы барического градиента и силы Кориолиса) возникают быстрые волны, которые обуславливают приспособление поля давления к полю скорости (согласование полей скорости и полей давления).

Следовательно, при интегрировании дифференциальных уравнений траектории самолета в барическом поле происходит переход в новое качество, связанное с основным свойством крупномасштабных атмосферных движений — квазигеострофичностью.

3. Использование геострофических соотношений дает математические преимущества — облегчает решение прикладных задач самолетовождения: определение интегральных характеристик сноса самолета (линейных и угловых) для этапа маршрута с учетом пространственной и временной изменчивости ветра, определение постоянной поправки в курс при полете в поле переменного ветра, построение траектории минимального времени и др.

4. Достижения в области объективного анализа и прогноза полей давления на высотах с применением быстродействующих электронных вычислительных машин и автоматизация управления движением самолетов по воздушным трассам позволяют легко реализовать барические методы учета ветра при метеорологическом обеспечении полетов.

Ниже остановимся на анализе траектории самолета в барическом поле. Основное внимание будет обращено на рассмотрение простейших соотношений, которые тем не менее важны с точки зрения практических приложений.

В нашем исследовании предполагается использование данных о поле давления как для решения задач, связанных с полетом самолета по изобарической поверхности, так и вообще для учета влияния ветра на полет самолета и других летательных аппаратов независимо от режима полета (трехмерная задача).

Именно в этом заключается смысл замены термина «изобарические методы» учета ветра на полет самолета термином «барические методы», произведенной автором в одной из более ранних работ по этому вопросу.

При учете ветра исходят из необходимости, во-первых, выполнения полета по заданной воздушной трассе (требований к точности выдерживания трассы могут быть различными) и, во-вторых, получения оптимального результата. В большинстве случаев в полной мере согласовать эти два условия не представляется возможным. Требование точного выдерживания заданной трассы ограничивает рациональное использование информации о физическом состоянии атмосферы (распределение температуры и давления воздуха) для повышения экономичности воздушных перевозок.

При построении системы дифференциальных уравнений, минимизирующих время полета самолета между двумя пунктами, использован метод, впервые предложенный Е. Цермело в докладе «Аэронавигация как проблема вариационного исчисления» [8] и в дальнейшем развитый им в работе [9].

Везде ниже принимается, что ветер является переносным движением, аэродинамический угол скольжения самолета равен нулю.

## ТРАЕКТОРИЯ САМОЛЕТА В БАРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### § 1. Траектория минимального времени полета самолета в плоскости

Рассмотрим в прямоугольной системе координат полет самолета в горизонтальной плоскости с постоянной воздушной скоростью. При этом полагаем, что во всей рассматриваемой области воздушная скорость больше скорости ветра.

Ось абсцисс направим параллельно прямой, соединяющей начальный  $A (X_0, Y_0)$  и конечный  $B (X_1, Y_1)$  пункты маршрута<sup>1</sup>. Такой выбор осей координат дает нам целый ряд преимуществ. Во-первых, позволяет ввести угловые параметры, применяемые в практике самолетовождения. Во-вторых, облегчает определение искомых величин.

Обозначим  $X, Y$  — прямоугольные координаты самолета,  $t$  — время.

Время полета из точки  $A$  в точку  $B$  является функционалом маршрута полета. Найдем маршрут, обеспечивающий минимум функционалу.

Используя уравнение геострофического ветра, уравнение траектории самолета в барическом поле запишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V \cos(\alpha - \gamma) - \frac{1}{l} \frac{\partial H}{\partial Y} \\ \frac{dY}{dt} &= V \sin(\alpha - \gamma) + \frac{1}{l} \frac{\partial H}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  — путевой угол кратчайшего маршрута;  $\gamma$  — курс следования;  $H = H(X, Y, t)$  — абсолютный геопотенциал изобарической поверхности полета;  $l = 2\omega \sin \varphi$  — кориолисов параметр.

Поделив (I) на  $V$  и обозначив  $\frac{X}{V} = x, \frac{Y}{V} = y, \frac{1}{lV} = kV = c$  (значения коэффициентов  $c = kV$  приведены в табл. 1), перепишем (I) в новых обозначениях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos(\alpha - \gamma) - k \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= \sin(\alpha - \gamma) + k \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

<sup>1</sup> Земля принимается плоской. Можно показать, что кривизна Земли может быть несложным образом учтена при практическом использовании полученных ниже выводов.

Уравнение  $(I')$  однозначно определяет траекторию самолета, если курс следования задан как функция времени. В нашем случае необходимо определить курс  $\gamma = \gamma(t)$ , обеспечивающий минимальное время полета из пункта  $A$  в пункт  $B$ .

Перейдем, как обычно принято в вариационном исчислении, от функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\gamma(t)$ , описывающих какую-то одну траекторию, к однопараметрическому множеству  $x(t, a)$ ,  $y(t, a)$ ,  $\gamma(t, a)$ , характеризующему совокупность («пучок») возможных траекторий полета.

Тогда из уравнения  $(I')$  через частное дифференцирование по независимому от  $t$  параметру  $a$  получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} &= \sin(\alpha - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial a} - k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial a} \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial a} &= -\cos(\alpha - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial a} + k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При полете по любому из возможных маршрутов самолет, вылетев в момент времени  $t = t_1$  из исходного пункта, удовлетворяя уравнению движения, через время  $t = T(a)$  попадет в  $B$ .

Таблица 1

Значения коэффициентов  $c = kV$  [км<sup>1</sup> гн. дкм<sup>-1</sup>] на различных широтах

| Воздушная скорость самолета, км/час | Широта в градусах |      |     |     |     |     |
|-------------------------------------|-------------------|------|-----|-----|-----|-----|
|                                     | 40                | 50   | 60  | 70  | 80  | 90  |
| 300                                 | 12,6              | 10,5 | 9,3 | 8,6 | 8,2 | 8,1 |
| 350                                 | 10,8              | 9,0  | 7,9 | 7,3 | 7,0 | 6,9 |
| 400                                 | 9,4               | 7,9  | 7,0 | 6,5 | 6,1 | 6,0 |
| 450                                 | 8,4               | 7,0  | 6,2 | 5,7 | 5,5 | 5,4 |
| 500                                 | 7,6               | 6,3  | 5,6 | 5,1 | 4,9 | 4,8 |
| 550                                 | 6,9               | 5,7  | 5,1 | 4,7 | 4,5 | 4,4 |
| 600                                 | 6,3               | 5,2  | 4,6 | 4,3 | 4,1 | 4,0 |
| 650                                 | 5,8               | 4,9  | 4,3 | 4,0 | 3,8 | 3,7 |
| 700                                 | 5,4               | 4,5  | 3,9 | 3,6 | 3,5 | 3,4 |
| 750                                 | 5,0               | 4,2  | 3,7 | 3,5 | 3,3 | 3,2 |
| 800                                 | 4,7               | 4,0  | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 3,0 |
| 850                                 | 4,4               | 3,7  | 3,3 | 3,0 | 2,9 | 2,8 |
| 900                                 | 4,2               | 3,5  | 3,1 | 2,8 | 2,7 | 2,7 |
| 950                                 | 3,9               | 3,3  | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,6 |
| 1000                                | 3,8               | 3,1  | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,4 |
| 1050                                | 3,6               | 3,0  | 2,6 | 2,4 | 2,3 | 2,3 |
| 1100                                | 3,5               | 2,8  | 2,5 | 2,3 | 2,2 | 2,2 |
| 1150                                | 3,3               | 2,7  | 2,4 | 2,2 | 2,1 | 2,1 |
| 1200                                | 3,2               | 2,6  | 2,3 | 2,2 | 2,1 | 2,0 |

Так как координаты начального и конечного пунктов маршрута не зависят от параметра  $a$ , дифференцированием по  $a$

для всей совокупности возможных маршрутов запишем следующие граничные условия:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial a} = 0 \quad \text{для } t=t_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dT}{da} = \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dT}{da} = 0 \quad \text{для } t=T(a). \quad (4)$$

Введя в уравнения (2) соответственно произвольные множители  $\lambda = \lambda(t)$  и  $\mu = \mu(t)$ , в результате несложных преобразований будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda \frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} + \lambda \sin(\alpha - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial a} - k\lambda \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial a} \right) \\ \frac{d}{dt} \mu \frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial y}{\partial a} - \mu \cos(\alpha - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial a} + \\ &\quad + k\mu \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Систему уравнений (5) можно существенно упростить, если задать произвольные множители  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} - k\lambda \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + k\mu \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{d\mu}{dt} + k\mu \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - k\lambda \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Сложив уравнения (5) при условии (6), получим

$$\frac{d}{dt} \left( \lambda \frac{\partial x}{\partial a} + \mu \frac{\partial y}{\partial a} \right) = [\lambda \sin(\alpha - \gamma) - \mu \cos(\alpha - \gamma)] \frac{\partial \gamma}{\partial a}. \quad (7)$$

Линейные и однородные относительно  $\lambda$  и  $\mu$  дифференциальные уравнения (6) определяют  $\lambda$  и  $\mu$ , если  $x$ ,  $y$  и  $\gamma$  заданы как функции времени, в форме

$$\lambda = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2; \quad \mu = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.



Произвольные постоянные необходимо подобрать так, чтобы правая часть уравнения (7) обращалась в квадрат, т. е. выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} \lambda \sin(\alpha - \gamma) - \mu \cos(\alpha - \gamma) &= \frac{\partial \gamma}{\partial a} = \eta(t) = c_1 [\lambda_1 \sin(\alpha - \gamma) - \\ &- \mu_1 \cos(\alpha - \gamma)] + c_2 [\lambda_2 \sin(\alpha - \gamma) - \mu_2 \cos(\alpha - \gamma)] = \\ &= c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Проинтегрируем (7) от момента времени  $t=t_1$  до  $t=t_2$ , используя граничные условия (3) и (4) и условие (8).

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \lambda \frac{\partial x}{\partial a} + \mu \frac{\partial y}{\partial a} \right) dt &= \lambda(t_2) \frac{\partial x}{\partial a}(t_2) + \mu(t_2) \frac{\partial y}{\partial a}(t_2) = \\ &= - \frac{\partial T}{\partial a} \left[ \lambda(t_2) \frac{\partial x}{\partial t}(t_2) + \mu(t_2) \frac{\partial y}{\partial t}(t_2) \right] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [\lambda \sin(\alpha - \gamma) - \mu \cos(\alpha - \gamma)]^2 dt. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае экстремума  $\frac{dT}{da} = 0$  и из (9) следует, что курс следования во всем промежутке от  $t_1$  до  $t_2$  должен удовлетворять соотношению

$$\gamma = \alpha - \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\lambda}. \quad (10)$$

Для того чтобы из соотношения (10) исключить множители  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$ , продифференцируем уравнение (10) по времени. Принимая во внимание уравнение (6), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= -k \cos^2(\alpha - \gamma) \left[ \frac{\mu^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - 2 \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right] = \\ &= -k \left[ \sin^2(\alpha - \gamma) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \cos^2(\alpha - \gamma) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \sin 2(\alpha - \gamma) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) связывает изменение курса следования с изменением высоты изобарической поверхности при полете

по траектории минимального времени и совместно с уравнением движения (I') определяет искомую траекторию. Для трех неизвестных функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\gamma(t)$  имеем три общих дифференциальных уравнения. Их интегралы имеют вид:

$$x = x(t/x_0, y_0, \gamma_0);$$

$$y = y(t/x_0, y_0, \gamma_0);$$

$$\gamma = \gamma(t/x_0, y_0, \gamma_0).$$

Начальный курс следования  $\gamma_0$  должен быть подобран так, чтобы траектория минимального времени полета проходила через конечный пункт маршрута.

Достаточным условием достижения функционалом минимума будет неотрицательность функции Вейерштрасса.

Выполнение построения поля экстремалей по методу Вейерштрасса дает достаточные условия существования экстремума (максимума или минимума)<sup>1</sup>. Однако в задачах прикладного характера существование экстремума косвенно устанавливается самой постановкой задачи и нахождение необходимых условий, как правило, дает её решение. Естественные границы поля определяют условие Якоби.

Решение системы дифференциальных уравнений (I'), (11), представляет известные трудности, поскольку производные от геопотенциала описывают изменение геопотенциала с координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$ , т. е. не только в пространстве, но и со временем.

Решение задачи существенно упрощается, если воспользоваться специально построенными для самолетовождения асинхронными прогностическими картами абсолютной топографии. Следует подчеркнуть, что в связи с большими скоростями полетов более важным является учет пространственной изменчивости барического поля.

Временную изменчивость барического поля в большинстве случаев можно с достаточной степенью точности учесть путем использования обычных прогностических карт барической топографии для среднего момента времени полета.

Проанализируем несколько простейших случаев решения задачи.

<sup>1</sup> В зависимости от выбора «остроугольной» или «тупоугольной» экстремалей имеем минимум или максимум полетного времени в пределах всего поля, перекрываемого этими экстремальями.

1. Кривизна изобарической поверхности (изогипс) незначительна.

Принимая

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0,$$

получим из (II)

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

$$\gamma = \gamma_0 = \text{const.}$$

Величину  $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$  можно найти из системы уравнений (I) или (I')

$$\gamma = \alpha + \arcsin \frac{1}{lV^2} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Так как во всей рассматриваемой области  $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}$  являются постоянными, траектория минимального времени будет представлять собой прямую, соединяющую начальный и конечный пункты маршрута. Мы пришли к известному положению, впервые доказанному Р. Мизесом [7]. Внутри области с постоянным ветром конечный пункт маршрута может быть достигнут в кратчайшее время только полетом по прямой.

2. В рассматриваемой области

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \neq 0; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0.$$

Из уравнения (II) имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} = -k \sin^2(\alpha - \gamma) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (12)$$

Проинтегрируем (12) от  $t_1$  до  $t_2$

$$\text{ctg}(\alpha - \gamma) \Big|_{\gamma_0}^{\gamma} = -k \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dt.$$

При  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} > 0$  получим

$$\text{ctg}(\alpha - \gamma) - \text{ctg}(\alpha - \gamma_0) = \frac{\sin(\alpha - \gamma_0)}{\sin(\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \gamma_0)} < 0$$

и, следовательно,

$$\gamma_0 > \gamma > \alpha,$$

т. е. во всей рассматриваемой области курс следования по траектории минимального времени больше путевого угла и удовлетворяет указанным неравенствам (рис. 1).

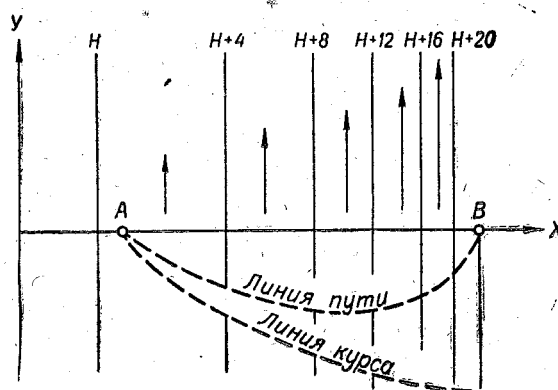


Рис. 1. Траектория минимального времени (линия пути), когда во всей рассматриваемой области  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} > 0$ ,  $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0$ .

3. В рассматриваемой области

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \neq 0; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0.$$

Из уравнения (II)

$$\frac{d\gamma}{dt} = -k \cos^2(\alpha - \gamma) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}. \quad (13)$$

После интегрирования (13) от момента  $t_1$  до  $t_2$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) \Big|_{\gamma_0}^{\gamma} = k \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} dt.$$

Если, например, в рассматриваемой области  $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} < 0$  (рис. 2), то

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) - \operatorname{tg}(\alpha - \gamma_0) = \frac{\sin(\gamma_0 - \gamma)}{\cos(\alpha - \gamma) \cos(\alpha - \gamma_0)} < 0$$

и, следовательно,

$$\alpha > \gamma_0 < \gamma.$$

На рис. 2 дана интерпретация приведенных неравенств. В начальный момент курс следования по траектории минимального времени должен быть меньше путевого угла. По мере полета курс следования увеличивается и становится больше путевого угла.

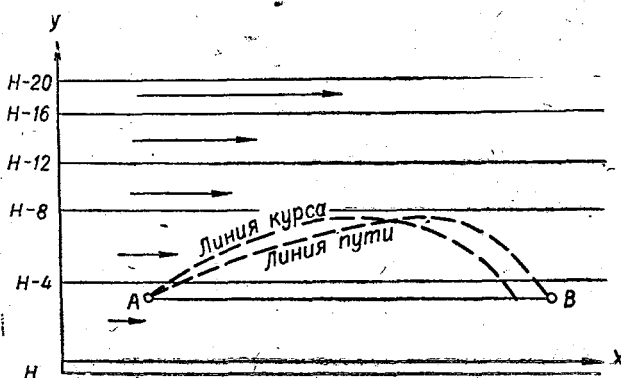


Рис. 2. Траектория минимального времени (линия пути), когда во всей рассматриваемой области

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0.$$

Рассмотрим пример аналитического решения задачи для идеализированного барического поля.

4. Определим траекторию минимального времени при полете на постоянной высоте по барометрическому высотомеру ( $p = \text{const}$ ) через область перемещающегося циклона. Для задания поля давления воспользуемся теоретической моделью перемещающегося циклона Н. Е. Кочина [1]. Если ось абсцисс направить с запада на восток по параллели, а ось ординат — на север, то уравнение изобарической поверхности в этом случае можно записать в виде

$$[X - q_1(t)]^2 + [Y - q_2(t) - K]^2 - LH = D, \quad (14)$$

где  $K, L$  — параметры, зависящие от угловой скорости циклона и широты места;  $D = 2C_0[p - p_0(t)]$ , где  $C_0$  — постоянная,

зависящая от угловой скорости циклона и широты места;  $p$  — атмосферное давление на высоте полета;  $p_0(t)$  — атмосферное давление в центре циклона у земной поверхности;  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  — функции, определяющие перемещение центра циклона.

Составляющие скорости перемещения центра циклона вычисляются соответственно по формулам:

$$C_x = \frac{dq_1(t)}{dt}; \quad C_y = \frac{dq_2(t)}{dt}.$$

Предположим, что циклон, не заполняясь и не углубляясь, перемещается по параллели с запада на восток с постоянной скоростью  $m$ , т. е.  $q_1(t) = mt$ ;  $q_2(t) = 0$ . Начальный  $A(X_0, Y_0)$  и конечный  $B(X_1, Y_1)$  пункты маршрута находятся на одной и той же широте.

Тогда  $K$ ,  $L$ ,  $D$  являются постоянными, и окончательно уравнение (14) примет вид

$$(X - mt)^2 + (Y - K)^2 - LH = D. \quad (14')$$

Найдя из уравнения (14') вторые и смешанные производные от геопотенциала  $H$  по координатам, подставим их значения в уравнение (11), записанное в первоначальных обозначениях

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{L} \left[ \frac{2}{L} \cos^2(\alpha - \gamma) + \frac{2}{L} \sin^2(\alpha - \gamma) \right] = -\frac{2}{LL}. \quad (15)$$

Обозначив  $\beta = \frac{2}{LL}$ , после интегрирования уравнения (15) от  $t_0 = 0$  до  $t_1 = t$  имеем

$$\gamma = -\beta t + A_1, \quad (16)$$

где  $A_1$  — произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий: в момент  $t_0 = 0$  начальный курс  $\gamma = \gamma_0$ .

Тогда

$$\gamma = \gamma_0 - \beta t. \quad (17)$$

Подставим полученное выражение для  $\gamma$  в уравнение (1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V \cos(\alpha - \gamma_0 + \beta t) - \beta(Y - K) \\ \frac{dY}{dt} &= V \sin(\alpha - \gamma_0 + \beta t) + \beta(X - mt) \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Продифференцируем первое уравнение из системы уравнений (18) по времени и, воспользовавшись вторым уравнением, получим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \beta^2 X = \beta^2 mt - 2V\beta \sin(\alpha - \gamma_0 + \beta t). \quad (19)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$X = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t + mt + Vt \cos(\alpha - \gamma_0 + \beta t), \quad (20)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные.

Из первого уравнения (18) найдем значение  $Y$ .

$$Y = c_1 \beta \sin \beta t - c_2 \beta \cos \beta t + V \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \cos(\alpha - \gamma_0 + \beta t) + \\ + V\beta t \sin(\alpha - \gamma_0 + \beta t) - m + k. \quad (21)$$

Для определения постоянных  $c_1$  и  $c_2$  воспользуемся начальными условиями: в момент  $t=0$   $X=X_0$ ,  $Y=Y_0$ .

Из выражений (20), (21) получим:

$$c_1 = X_0,$$

$$c_2 = \frac{1}{\beta} \left[ V \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \cos(\alpha - \gamma_0) - m + K - Y_0 \right].$$

Тогда уравнение траектории минимального времени полета примет вид:

$$X = X_0 \cos \beta t + \frac{1}{\beta} \left[ V \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \cos(\alpha - \gamma_0) - m + \right. \\ \left. + k - Y_0 \right] \sin \beta t + mt + Vt \cos(\alpha - \gamma_0 + \beta t), \quad (22)$$

$$Y = X_0 \beta \sin \beta t - \left[ V \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \cos(\alpha - \gamma_0) - m + K - Y_0 \right] \times \\ \times \cos \beta t + V \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \cos(\alpha - \gamma_0 + \beta t) + V\beta t \sin(\alpha - \\ - \gamma_0 + \beta t) - m + K. \quad (23)$$

Строго говоря, уравнения (22) и (23) представляют собой семейство экстремалей, зависящих от параметра  $\gamma_0$ . Поэтому начальный курс, т. е.  $\gamma_0$ , необходимо подобрать так, чтобы искомая экстремаль проходила через конечный пункт марш-

рута. Для этого достаточно воспользоваться вторым условием: при  $t=t_1$ ;  $X=X_1$ ,  $Y=Y_1$ . Подставив эти значения в уравнения (22) и (23), получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными, которая позволяет определить значение начального курса для следования по траектории минимального времени и общую продолжительность полета между двумя пунктами.

Приведенный пример показывает, что даже для весьма простой модели барического поля аналитическое решение задачи сопряжено с известными трудностями. Поэтому представляет интерес применить приближенный, графоаналитический способ построения траектории минимального времени для любого вида функции  $H=H(X, Y, t)$ , который можно реализовать на практике. С этой целью, используя квазигеострофическое приближение, исследуем траекторию самолета, совершающего полет с постоянной поправкой в курс в поле переменного ветра.

## § 2. Траектория полета с постоянной поправкой в курс в барическом поле

В практике самолетовождения возникает необходимость определения постоянной поправки, которую необходимо ввести в курс, чтобы самолет, вылетев из одного пункта маршрута, попал в другой заранее заданный пункт. Так как при полете на большие расстояния ветер испытывает значительную пространственную изменчивость, то, следовательно, речь идет об определении постоянной поправки в курс при полете в поле переменного ветра. Для решения этой задачи требуется детальная информация о поле ветра по всему маршруту. Однако использование модели геострофического ветра существенно облегчает получение конечного результата и позволяет установить важные для практики закономерности.

Если направить ось абсцисс параллельно вектору воздушной скорости и предположить, что полет происходит на постоянной высоте по барометрическому высотомеру, то система уравнений (I) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V - \frac{1}{l} \frac{\partial H}{\partial Y} \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{1}{l} \frac{\partial H}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Разделив первое уравнение системы (24) на второе, получим



$$dY = \frac{1}{lV} \left( \frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY \right). \quad (25)$$

Абсолютный геопотенциал изобарической поверхности полета является функцией координат и времени. Полная производная от геопотенциала по времени имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{dY}{dt}. \quad (26)$$

Тогда из выражений (25), (26) следует, что

$$dY = \frac{1}{lV} \left( dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt \right). \quad (27)$$

Проинтегрируем уравнение (27) от момента времени  $t_1$  до  $t_2$

$$Y_2 - Y_1 = L_\delta = \frac{1}{lV} \left[ H_2(t_2) - H_1(t_1) - \int_S \frac{\partial H}{\partial t} dt \right], \quad (28)$$

где  $L_\delta$  — боковое уклонение самолета;  $H_1(t)$  — значение абсолютного геопотенциала в точке  $A$  в момент  $t$ ;  $H_2(t)$  — значение абсолютного геопотенциала в точке  $B$  в момент  $t$ ; символ  $\int_S$  — интеграл вдоль пути самолета.

Следовательно,

$$H_2(t_2) = H_2(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_B dt \quad (29)$$

и соотношение (28) можно записать в виде

$$L_\delta = \frac{1}{lV} [H_2(t_1) - H_1(t_1)] + N, \quad (30)$$

$$\text{здесь } N = \frac{1}{lV} \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_B dt - \int_S \frac{\partial H}{\partial t} dt \right).$$

Формула (30) позволяет определить боковое уклонение самолета от первоначально взятого направления. Величина  $N$  характеризует вклад нестационарности барического поля в его величину. Так как  $dt$  может быть заменено элементом пути, поделенным на скорость полета, величина  $N$  обратно пропорциональна квадрату воздушной скорости. В связи с этим влия-

яние нестационарного члена быстро уменьшается с увеличением скорости полета. Поэтому для современных самолетов можно пренебречь изменением поля давления во времени, т. е. рассматривать барическое поле стационарным.

Тогда выражение (30) примет вид

$$L_s = \frac{1}{\bar{V}} (H_B - H_A) = c (H_B - H_A). \quad (31)$$

Из формулы (31) следует, что боковое уклонение самолета от заданного направления полета не зависит от промежуточного барического поля и определяется разностью высот изобарической поверхности в начальной и конечной точках маршрута.

Это важная особенность барического метода определения постоянной поправки в курс самолета.

Для маршрута большой протяженности изменение барического поля во времени может быть учтено использованием прогностических значений геопотенциала в начальной точке маршрута для момента вылета, а в конечной точке — для момента прилета в нее.

Таким образом, располагая данными о барическом поле на высоте полета, можно построить линию фактического пути (траекторию самолета) и определить постоянный курс в поле переменного ветра.

Постоянная поправка в курс при полете в поле переменного ветра равна

$$\delta\gamma = \arcsin \frac{H_B - H_A}{\bar{V} S}. \quad (32)$$

Соответственно, курс самолета

$$\gamma = \alpha + \arcsin \frac{H_B - H_A}{\bar{V} S} = \alpha + \arcsin \frac{c \Delta H}{S}. \quad (33)$$

Величина  $\Delta H$  может быть определена непосредственно по данным радиозондирования или картам барической топографии. При полете на высотах, значительно отличающихся от высоты стандартных уровней, следует применить интерполирование между двумя смежными уровнями.

На рис. 3 приведена номограмма для определения постоянной поправки в курс. Левая часть номограммы построена методом спрямленных точек. Все шкалы логарифмические. По оси абсцисс отложены значения разности высот изобарической поверхности полета в конечной и исходной точках маршрута в геопотенциальных декаметрах, по оси ординат —

поправки в курс в градусах ( $\delta\gamma_0^\circ$ ) в предположении, что воздушная скорость  $V=1000$  км/час, расстояние  $S=1000$  км. Наклонные линии — изолинии средней географической широты маршрута. Номограмма позволяет определить поправку в курс ( $\delta\gamma^\circ$ ) при полете со скоростями от 250 до 1000 км/час на расстоянии от 200 до 3000 км. Для этого введены шкала скоростей —  $V$  и шкала расстояний —  $S$ .

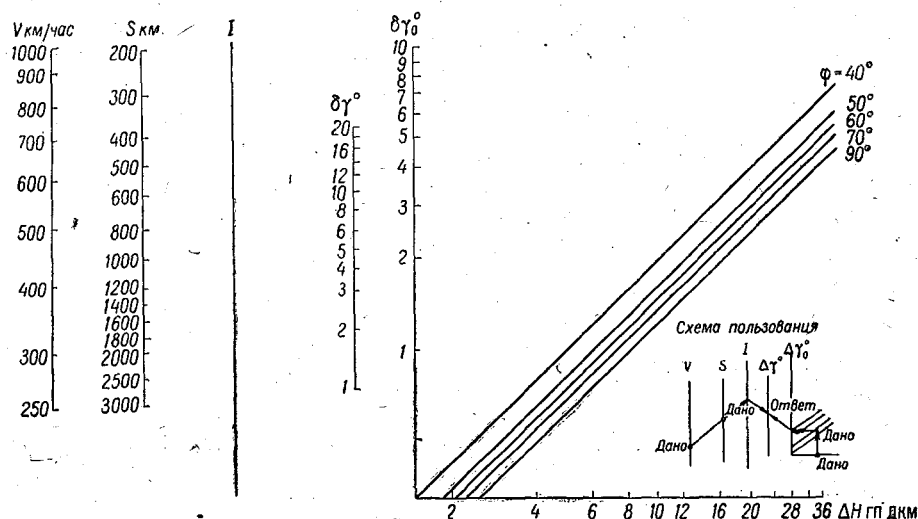


Рис. 3. Номограмма для определения постоянной поправки в курс.

Для определения поправки в курс необходимо от точки, соответствующей значению разности высот  $\Delta H$ , подняться вертикально вверх до изолинии средней широты и, перемещаясь параллельно оси абсцисс, определить  $\delta\gamma_0^\circ$ . Далее, соединив точку  $\delta\gamma_0^\circ$  с точкой на слепой шкале  $I$ , которая получается от пересечения прямой, проходящей через значение воздушной скорости полета  $V$  и расстояние  $S$ , на шкале  $\delta\gamma^\circ$  найдем поправку в курс.

Поправка вводится в лохсодромический или ортодромический путевой угол в зависимости от расстояния полета. Знак поправки совпадает со знаком  $\Delta H$ .

По этой номограмме можно по картам барической топографии определять также угол сноса, который имеет знак, обратный знаку поправки в курс, и находится для меньших расстояний. Для расстояний, не превышающих 400—600 км, вообще неуместно говорить о постоянной поправке в курс, поскольку в последнее понятие обычно вкладывается другой

смысл — определение интегральной характеристики для достаточно протяженных маршрутов, когда обычным способом затруднительно учесть влияние ветра.

Как видно из формул (31) и (32), точность расчетов бокового уклонения самолета и поправки в курс зависят, помимо всего прочего, от точности определения высот изобарической поверхности полета (точности радиозондирования).

Из соотношения (31) средняя квадратическая ошибка в выходе на конечный пункт маршрута равна

$$\sigma(L_0) = \sqrt{2} \sigma H, \quad (34)$$

где  $\sigma H$  — средняя квадратическая ошибка в определении высоты изобарической поверхности.

Подсчеты показывают, что при полете с постоянной поправкой в курс с воздушной скоростью 900 км/час на расстояние 1000 км при средней географической широте маршрута 60° средние квадратические ошибки в выходе на конечный пункт и в поправках в курс не превышают соответственно 30 км и 2° (табл. 2).

Следует заметить, что если рассчитывать поправку в курс по фактическому ветру в исходном пункте маршрута, то средние квадратические ошибки возрастут более чем в два-три раза.

Анализ траекторий в барическом поле позволяет установить, что по сравнению с обычной методикой выполнения полета (введением многократных поправок в курс с целью точного выдерживания заданного маршрута) при полете с постоянной поправкой в курс маршрут удлиняется, однако общая продолжительность полета при этом может существенно уменьшиться. Это объясняется тем, что воздушный путь, определяющий время полета, будет значительно короче, чем при выполнении полета обычным способом с введением многократных поправок на снос при изменении ветра по маршруту.

Таблица 2

Средние квадратические ошибки в выходе на конечный пункт и в поправках в курс при полете с воздушной скоростью 900 км/час на расстоянии 1000 км

| Изобарические поверхности | 850, 700 и 500 мб | 300, 200 мб | 100 мб |
|---------------------------|-------------------|-------------|--------|
| $\sigma L_0$ , км         | 14                | 20          | 30     |
| $\sigma \gamma$ , град    | 0,8               | 1,1         | 1,7    |

Точнее говоря, при полете с постоянной поправкой в курс самолет сносится в зоны возрастающих попутных ветров или

убывающих встречных ветров, т. е. самолет как бы «дрейфует» в поле переменного ветра, и время, необходимое для компенсации влияния боковой составляющей ветра, уменьшается.

Наиболее наглядно это положение можно проиллюстрировать на примере полета самолета через область-циклона.

Для задания поля давления воспользуемся уравнением (14'). Пусть в начальный момент ось абсцисс совпадает с направлением продольной оси самолета и полет совершается с постоянным курсом на постоянной высоте по барометрическому высотомеру. Следовательно, самолет будет перемещаться по изобарической поверхности. Сечение изобарической поверхности вертикальной плоскостью  $XOZ$  есть парабола. В самом деле, так как  $Y=0$ , из уравнения (14') имеем

$$H = \frac{1}{L} [(X - mt)^2 + K^2 - D]. \quad (35)$$

Уравнение (35) для любого фиксированного момента времени представляет собой параболу с вершиной в точке  $[mt; \frac{1}{L}(K^2 - D)]$ .

В сечении изобарической поверхности горизонтальной плоскостью получаем окружность радиуса  $r = \sqrt{LH + D}$  и с центром в точке с координатами  $(mt; K)$ .

Уравнение линии пути самолета проще всего найти, если воспользоваться соотношением (31) и пренебречь изменением барического поля во времени, взяв в уравнении (14') в качестве  $t$  среднее время полета.

Тогда, в соответствии с (14') и (31), ордината линии пути самолета будет равна

$$Y = c(H - H_1) = \frac{c}{L} [(X - mt)^2 + (Y - K)^2 - D] - cH_1, \quad (36)$$

где  $H_1$  — высота изобарической поверхности полета в исходном пункте маршрута.

Из выражения (36) после ряда преобразований, принимая во внимание, что  $c = \frac{1}{LV}$ , получим

$$(X - mt)^2 + \left[ Y - \frac{1}{2} \left( \frac{L}{c} + 2K \right) \right]^2 - Q = 0,$$

$$\text{где } Q = LH_1 + \frac{1}{4} (LV + 2K)^2 - K^2 + D. \quad (37)$$

Уравнение (37), являющееся уравнением линии пути самолета, представляет собой уравнение окружности радиусом  $R = \sqrt{Q}$  и с центром, расположенным в точке с координатами  $\left[ mt, \frac{1}{2} (LIV + 2K) \right]$ .

Из сравнения координат центра циклона с координатами центра окружности линии пути самолета видно, что их абсциссы совпадают, а ординаты отличаются на величину, равную

$$d = \frac{LV}{2}, \quad (38)$$

где  $d$  — расстояние между указанными центрами.

Таким образом, при полете с постоянной поправкой в курс самолет будет перемещаться по окружности, и, следовательно, длина маршрута увеличится. При этом, чем меньше скорость полета, тем значительно будет увеличиваться протяженность маршрута. Если устремить скорость летательного аппарата к нулю, то в пределе линия пути сольется с изобарой (изогипсой), проходящей через начальный и конечный пункты маршрута.

Однако время полета с постоянной поправкой в курс, наоборот, уменьшается по сравнению со временем полета по кратчайшему пути (по ортодромии).

В реальных условиях уменьшение времени полета будет зависеть от вида барического поля и значения величины  $c \text{grad} H$ , поэтому заранее дать какие-либо нормы экономии времени для всего многообразия наблюдающихся полей давления не представляется возможным.

В самом простейшем случае, когда маршрут проходит через две области с равными и имеющими обратный знак градиентами давления, совпадающими с направлением маршрута и делящими маршрут пополам, уменьшение времени полета

$\Delta t = c^2 (\text{grad} H)^2 \frac{t_k}{2}$ , где  $t_k$  — время полета по кратчайшему маршруту.

При величине  $c \text{grad} H = 0,3$  экономия времени составит 4,5%, при  $c \text{grad} H = 0,2$  — 2%. При этом максимальное отклонение самолета от кратчайшего маршрута в первом и втором случаях соответственно составит 15 и 10% общей протяженности маршрута.

### § 3. Графоаналитический способ построения траектории минимального времени полета

Маршрут полета с постоянной поправкой в курс в известной степени является первым приближением к траектории минимального времени полета.

Исходя из штандартов метеорологических элементов и их производных по М. И. Юдину, можно полагать, что для современных самолетов на расстоянии 300—500 км траектория минимального времени полета совпадает с маршрутом полета с постоянной поправкой в курс. Расхождение во времени полета по маршруту с постоянным курсом и по траектории минимального времени при указанных расстояниях не выходит за пределы точности измерения навигационных параметров. Однако при полете на большие расстояния, особенно при наличии заметного горизонтального сдвига ветра в направлении, перпендикулярном курсу полета, разница во времени быстро возрастает. Тем не менее выводы, полученные для маршрута полета с постоянной поправкой в курс, можно использовать для приближенного построения траектории минимального времени полета.

Если ось абсцисс направить вдоль продольной оси самолета, то  $\alpha = \gamma$  и уравнение (11) в первоначальных обозначениях примет вид

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2}. \quad (39)$$

Так как по всему маршруту полета с постоянным курсом направление продольной оси самолета совпадает с направлением оси абсцисс, то соотношение (39) выполняется в каждой точке маршрута с постоянной поправкой в курс.

Записав выражение (39) в конечных разностях, получим формулу, позволяющую определить изменение курса при полете по траектории минимального времени для элементарного участка маршрута,

$$\Delta\gamma = c' \Omega t_i, \quad (40)$$

где  $c' = \frac{1}{l\Delta Y^2}$  (значения коэффициента  $c'$  приведены в табл. 3);

$t_i$  — время пролета участка маршрута длиной  $S_i$ , на которые разбит маршрут полета с постоянной поправкой в курс;  $\Omega = 2H_0 - H_n - H_d$ ,  $H_0$ ,  $H_n$ ,  $H_d$  — абсолютные геопотенциалы изобарической поверхности соответственно в средней точке участка маршрута с постоянным курсом и в точках, распо-

женных на перпендикуляре к линии курса на расстоянии  $\Delta Y$  (справа и слева) по направлению от средней точки.

Учитывая пространственную изменчивость ветра и масштаб карт барической топографии, целесообразно принять  $\Delta Y = 400$  км.

Время  $t_i$  равно

$$t_i = \frac{S_i}{W_i} = \frac{S_i}{V + w}, \quad (41)$$

где  $W_i = V + w$  — путевая скорость (сумма истинной воздушной скорости и эквивалентного ветра [2, 4]).

Без большой погрешности в данном случае можно полагать, что

$$w \approx \frac{1}{l} \frac{\Delta H}{\Delta Y},$$

где  $\Delta H = H_{\text{п}} - H_{\text{л}}$ . Если  $\Delta H > 0$ , то и  $w > 0$  и наоборот.

Таблица 3

Значения коэффициентов  $c^1$  (град<sup>1</sup> гп. дкм<sup>-1</sup> час<sup>-1</sup>) на различных широтах

| Широта места | 40°  | 50°  | 60°  | 70°  | 80°  | 90°  |
|--------------|------|------|------|------|------|------|
| $c'$         | 1,36 | 1,13 | 1,00 | 0,92 | 0,88 | 0,86 |

Для определения эквивалентного ветра ( $w$ ) и времени  $t_i$  построена номограмма № 1 (рис. 4). Эквивалентный ветер находится по значению  $\Delta H$  и широте места ( $\varphi$ ). Знак  $w$ , как отмечалось выше, совпадает со знаком  $\Delta H$ . По значению  $w$  и воздушной скорости  $V$  вычисляется путевая скорость ( $W_i$ ) значение которой позволяет, используя шкалу расстояний для соответствующего  $S_i$ , получить  $t_i$ .

Номограмма № 2 (рис. 5), имеющая логарифмические шкалы, служит для определения величины  $\Delta \gamma$  по значению  $\Omega$ ,  $t_i$  и географической широте места. Схема пользования номограммой показана на рисунке. Знак  $\Delta \gamma$  совпадает со знаком  $\Omega$ .

Пример пользования номограммой: Определить значение  $\Delta \gamma$  для участка маршрута длиной  $S = 500$  км на широте  $\varphi = 50^\circ$ , если воздушная скорость самолета  $V = 850$  км/час, высота полета 9000 м. Значения высот изобарической поверхности, снятые с карты АТ<sub>300</sub>, составляют:  $H_0 = 908$  гп. дкм,  $H_{\text{п}} = 910$  гп. дкм,  $H_{\text{л}} = 902$  гп. дкм.



По номограммам № 1 и 2 находим, что  $\Delta\gamma = +2^\circ$ .  
 Построение траектории (маршрута) минимального времени полета целесообразно выполнять в такой последовательности (рис. 6а). На карте проводится прямая (ортодромия), соеди-

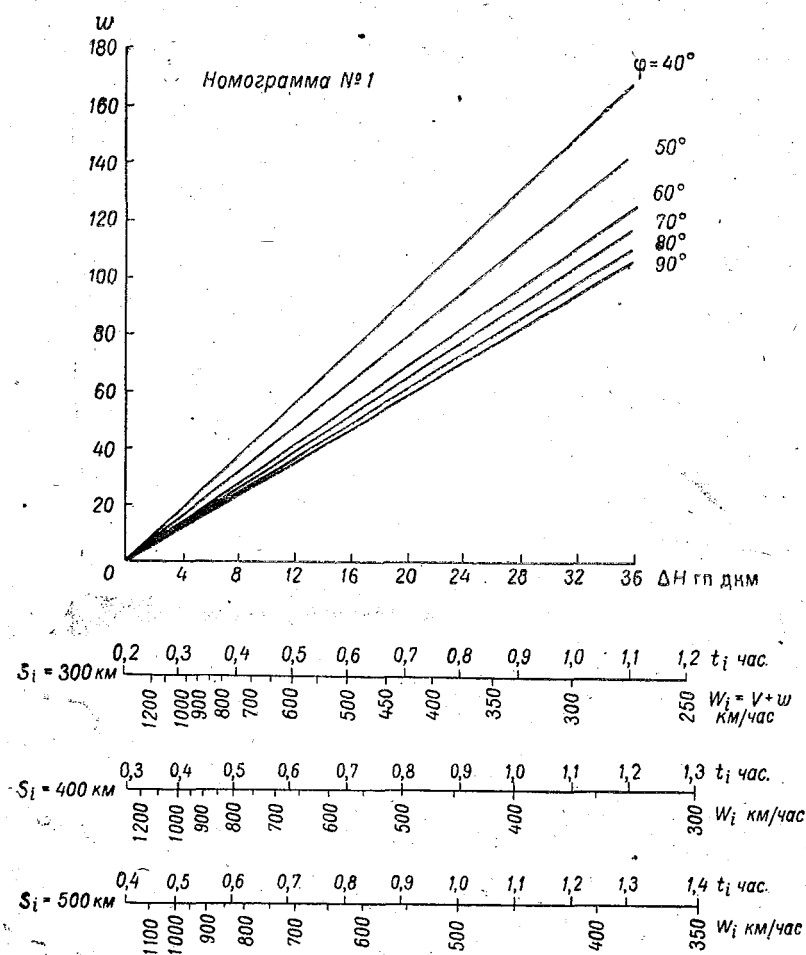


Рис. 4. Номограмма для определения эквивалентного ветра по полю давления.

няющая начальный  $A$  и конечный  $B$  пункты маршрута. Линия  $AB$  разбивается на отрезки длиной в 300—500 км, помечаемые точками 1, 2, 3 и т. д. В точках  $A, 1, 2, 3, 4, \dots, B$  снима-

ются высоты изобарической поверхности ( $H_A, H_1, H_2, H_3, \dots, H_B$ ) и по формуле (31) последовательно определяются боковые уклонения самолета  $L_\delta$ . Если в формулу (31) вместо  $H_B$  подставим значение  $H_1$ , получим соответственно  $L_{\delta_1}$  и т. д.

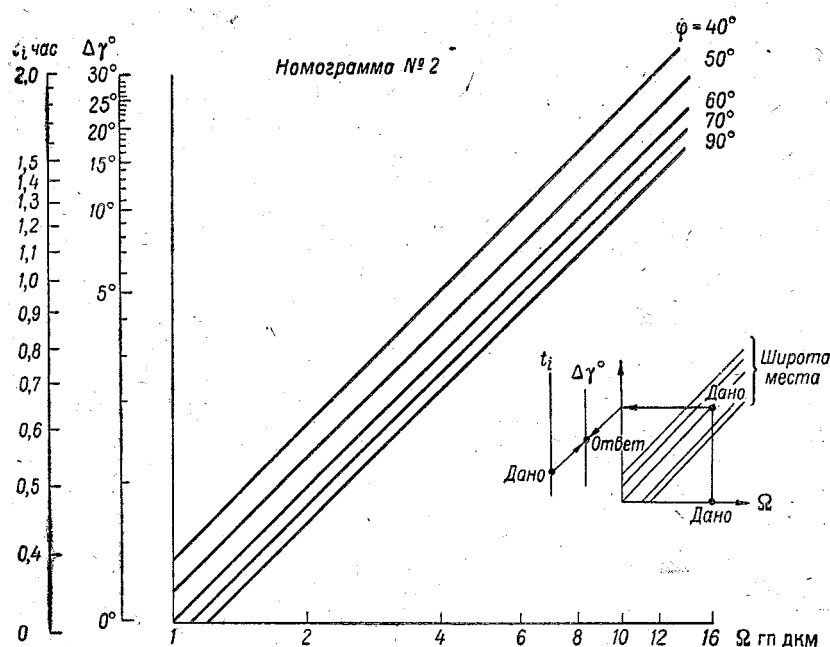


Рис. 5. Номограмма для определения величин  $\Delta\gamma$  при полете по траектории минимального времени.

Далее по номограмме (рис. 3) определяется постоянная поправка в курс  $\delta\gamma$  и проводится линия постоянного курса (при  $\delta\gamma > 0$  линия курса проводится справа от линии  $AB$ ,  $\delta\gamma < 0$  — слева). От линии постоянного курса перпендикулярно (с учетом знака) откладываются величины боковых уклонений. Положительные значения  $L_\delta$  совпадают с положительным направлением оси ординат. Соединив найденные точки ( $A, 1', 2', 3', \dots, B$ ) между собой, получим линию пути самолета при полете с постоянной поправкой в курс  $\delta\gamma$ .

Затем можно приступить к определению  $\Delta\gamma$  для каждого участка линии пути с постоянным курсом, чтобы минимизировать время полета.

Порядок действий при определении  $\Delta\gamma_i$  поясняет рис. 6 и табл. 4.

Таблица 4

Порядок расчета при построении траектории минимального времени полета

| Этап | $H_0$ (гп. дкм) | $H_n$ (гп. дкм) | $H_n$ (гп. дкм) | $Q$ (гп. дкм) | $\Delta H = H_n - H_0$ | $w$ (км/час) | $W_i = V + w$ (км/час) | $S_i$ (км) | $t_i$ (час) | $\Delta \gamma$ (град) |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|------------------------|--------------|------------------------|------------|-------------|------------------------|
| A—1  | 908             | 910             | 902             | +4            | +8                     | +32          | 882                    | 500        | 0,6         | +2                     |

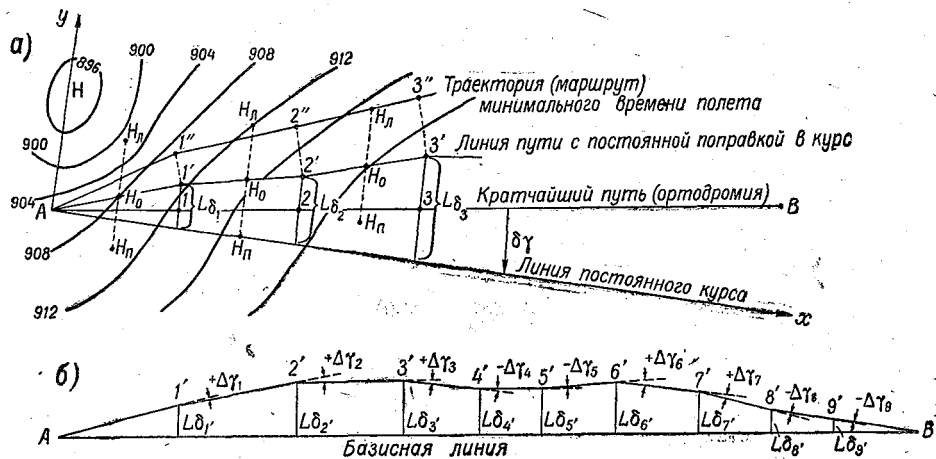


Рис. 6. Принцип построения траектории минимального времени по полю давления.

После того как определено изменение курса  $\Delta\gamma$  на каждом участке маршрута полета с постоянной поправкой в курс, эти изменения необходимо проинтегрировать (просуммировать) по всему маршруту. Это проще всего выполнить при помощи следующего графического построения (рис. 6, б). На листе бумаги проводится линия, на которой в определенном произвольном масштабе откладывается длина первого этапа маршрута (A—1). В конце первого этапа откладывается величина изменения курса (вправо, если величина  $\Delta\gamma$  положительная, или влево, если — отрицательная). И так повторяется для каждого этапа. Таким образом получается ломаная линия, отрезки которой равны длине соответствующих участков маршрута (A—1'; 1'—2'; 2'—3' и т. д.). Построение заканчи-

вается проведением прямой (базисной линии), соединяющей концы ломаной линии. После этого из каждой точки «излома» опускают перпендикуляры к базисной линии и измеряют отклонение точек от базисной линии ( $L_{\delta'1}$ ,  $L_{\delta'2}$ ,  $L_{\delta'3}$  и т. д.). Полученные отклонения следует отложить от соответствующих точек на линии пути с постоянной поправкой в курс<sup>1</sup>. Вновь полученные точки (1'', 2'', 3'' и т. д.) соединяются отрезками прямой, которые в этом случае практически являются участками маршрута минимального времени<sup>2</sup>.

Таким образом, использование геострофического приближения существенно упрощает задачу определения траектории минимального времени полета при условии полета на постоянной высоте.

Точность построения траектории минимального времени указанным способом лежит в пределах точности замены производных конечными разностями и сделанных выше допущений.

#### § 4. Траектория минимального времени полета самолета в трех измерениях

Как и в случае плоскости, воспользуемся правой системой координат, направив ось абсцисс параллельно прямой, соединяющей начальный и конечный пункты маршрута. Для облегчения дальнейших рассуждений будем считать, что плоскость  $XOY$  совпадает с земной поверхностью, т. е. координаты начального и конечного пунктов маршрута соответственно  $A(X_0, Y_0, 0)$ ;  $B(X_1, Y_1, 0)$ .

Введем дополнительные обозначения:

$z = \frac{Z}{V}$  — вертикальная координата самолета;  $\vartheta$  — вертикальный угол (угол между плоскостью горизонта и вектором воздушной скорости);  $H = H(x, y, z, t)$  — абсолютный геопотенциал изобарической поверхности.

Вертикальными движениями воздуха пренебрегаем.

Тогда уравнение траектории самолета, совершающего полет с постоянной воздушной скоростью, примет вид

<sup>1</sup> Если линия пути имеет изломы, то отклонения откладываются по биссектрисе тупого угла.

<sup>2</sup> Можно предложить еще одно более точное приближение, однако, принимая во внимание качество исходной информации, последнее было бы вряд ли целесообразно.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos(\alpha - \gamma) \cos \vartheta - k \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= \sin(\alpha - \gamma) \cos \vartheta + k \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dz}{dt} &= \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Система дифференциальных уравнений (42) однозначно описывает траекторию самолета от исходной точки, если заданы

$$H = H(x, y, z, t); \quad \gamma = \gamma(t); \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

Для нахождения траектории минимального времени полета перейдем от функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $\vartheta = \vartheta(t)$  к однопараметрическому множеству  $x(t, a)$ ,  $y(t, a)$ ,  $z(t, a)$ ,  $\gamma(t, a)$ ,  $\vartheta(t, a)$ , характеризующему совокупность возможных траекторий полета, и получим из (42) через частное дифференцирование по независимому от времени параметру  $a$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= \sin(\alpha - \gamma) \cos \vartheta \delta \gamma - \sin \vartheta \cos(\alpha - \gamma) \delta \vartheta - \\ &\quad - k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \delta y + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} \delta z \right), \\ \frac{d}{dt} \delta y &= -\cos(\alpha - \gamma) \cos \vartheta \delta \gamma - \sin(\alpha - \gamma) \sin \vartheta \delta \vartheta + \\ &\quad + k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \delta y + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} \delta z \right), \\ \frac{d}{dt} \delta z &= \cos \vartheta \delta \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

В уравнения (43) введем соответственно множители  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\nu(t)$ , которые будут определены ниже.

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \lambda \delta x &= \frac{d\lambda}{dt} \delta x + \lambda \frac{d}{dt} \delta x = \frac{d\lambda}{dt} \delta x + \lambda \left[ \sin(\alpha - \gamma) \cos \vartheta \delta \gamma - \sin \vartheta \cos(\alpha - \gamma) \delta \vartheta - k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \delta x + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \delta y + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} \delta z \right) \right], \\
\frac{d}{dt} \mu \delta y &= \frac{d\mu}{dt} \delta y + \mu \frac{d}{dt} \delta y = \frac{d\mu}{dt} \delta y + \mu \left[ \cos(\alpha - \gamma) \times \right. \\
&\quad \times \cos \vartheta \delta \gamma + \sin(\alpha - \gamma) \sin \vartheta \delta \vartheta - k \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \delta y + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} \delta z \right) \right], \\
\frac{d}{dt} \nu \delta z &= \frac{d\nu}{dt} \delta z + \nu \cos \vartheta \delta \vartheta
\end{aligned} \quad (43')$$

Систему (43') можно существенно упростить, если задать  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\nu(t)$  таким образом, чтобы они были связаны линейными однородными относительно  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\nu(t)$  дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dt} - k\lambda \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + k\mu \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{d\mu}{dt} + k\mu \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - k\lambda \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= 0, \\
\frac{d\nu}{dt} - k\lambda \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} + k\mu \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} &= 0,
\end{aligned} \right\} \quad (44)$$

которые позволяют найти указанные множители как функции времени

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3; & \mu(t) &= c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + c_3 \mu_3; \\
\nu(t) &= c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + c_3 \nu_3.
\end{aligned} \quad (45)$$

Сложив уравнения (43') при условии (44), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z) &= [\lambda \sin(\alpha - \gamma) \cos \vartheta - \mu \cos(\alpha - \gamma) \cos \vartheta] \delta \gamma + \\
&+ [-\lambda \sin \vartheta \cos(\alpha - \gamma) - \mu \sin(\alpha - \gamma) \sin \vartheta + \nu \cos \vartheta] \delta \vartheta.
\end{aligned} \quad (46)$$

Постоянные в выражении (45) возьмем такими, чтобы в уравнении (46) выполнялось условие

$$\left. \begin{aligned} \delta\gamma &= \lambda \sin(\alpha - \gamma) \cos \vartheta - \mu \cos(\alpha - \gamma) \cos \vartheta = \Gamma, \\ \delta\vartheta &= -\lambda \sin \vartheta \cos(\alpha - \gamma) - \mu \sin(\alpha - \gamma) \sin \vartheta + \nu \cos \vartheta = \Theta \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

С учетом соотношения (45) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \delta\gamma &= c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2 + c_3 \Gamma_3 \\ \delta\vartheta &= c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2 + c_3 \Theta_3 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

В соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений уравнения (43) однозначно определяют вариации  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  через произвольно задаваемые вариации  $\delta\gamma$ ,  $\delta\vartheta$  при условии, что «основная траектория» задана в виде  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\vartheta(t)$  и при  $t = t_0$   $\delta x_0 = \delta y_0 = \delta z_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \int_{t_0}^t [X_1(t) \delta\gamma + X_2(t) \delta\vartheta] dt = \xi(t), \\ \delta y &= \int_{t_0}^t [Y_1(t) \delta\gamma + Y_2(t) \delta\vartheta] dt = \eta(t), \\ \delta z &= \int_{t_0}^t [Z_1(t) \delta\gamma + Z_2(t) \delta\vartheta] dt = \zeta(t) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Каждой паре  $\Gamma_i, \Theta_i$  (48), определяемой в связи с соответствующими тройками  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$ , с левой стороны уравнения (46) ввиду (49) соответствуют

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3, \\ \eta(t) &= c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3, \\ \zeta(t) &= c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + c_3 \zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Интегрируя (46) по времени и используя (45), (47), (50), получим

$$\begin{aligned} \lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta &= \int_{t_0}^t \{ [\lambda \sin(\alpha - \gamma) \cos \vartheta - \mu \cos(\alpha - \gamma) \cos \vartheta]^2 + \\ &+ [-\lambda \sin \vartheta \cos(\alpha - \gamma) - \mu \sin(\alpha - \gamma) \sin \vartheta + \nu \cos \vartheta]^2 \} dt = \\ &= \int_{t_0}^t [(c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2 + c_3 \Gamma_3)^2 + (c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2 + c_3 \Theta_3)^2] dt = \\ &= Q(c_1, c_2, c_3, t), \end{aligned} \quad (51)$$

как однородную существенно положительную квадратичную форму  $c_1, c_2, c_3$ , коэффициенты которой являются данными функциями времени. Если обозначить через  $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$  координаты траектории минимального времени полета, а

$$x=f(t, \alpha, \beta, \omega); y=g(t, \alpha, \beta, \omega); z=h(t, \alpha, \beta, \omega) \quad (52)$$

ряд смежных траекторий в трех параметрах, которые при  $t=t_0$  исходят из одной и той же точки  $(x_0, y_0, z_0)$  и при  $\alpha=\bar{\alpha}, \beta=\bar{\beta}, \omega=\bar{\omega}$  обращаются в траекторию минимального времени, то функциональный определитель из функций (52) по параметрам  $\alpha, \beta, \omega$

$$D(t) = \frac{D(f, g, h)}{D(\alpha, \beta, \omega)} \quad (53)$$

для траектории минимального времени во всем рассматриваемом интервале обращается в нуль

$$\bar{D}(t) = 0.$$

Вследствие этого

$$\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta = Q(t_1, c_1, c_2, c_3) = 0. \quad (54)$$

Но последнее возможно только в том случае, если оба квадрата под знаком интеграла в уравнении (51) также обращаются в нуль. С учетом сказанного из уравнения (51) после ряда несложных преобразований следует:

$$\gamma = \alpha - \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\lambda}, \quad (55)$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \left[ \cos(\alpha - \gamma) \frac{\nu}{\lambda} \right]. \quad (56)$$

Для исключения множителей  $\lambda(t), \mu(t), \nu(t)$  продифференцируем выражения (55) и (56) по времени и, привлекая (41), (55), (56), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{\lambda} \cos^2(\alpha - \gamma) \left( \frac{\mu}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\mu}{dt} \right) = \\ &= -k \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \cos^2(\alpha - \gamma) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \sin^2(\alpha - \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \sin 2(\alpha - \gamma) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned} \quad (57)$$



$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} = \cos^2 \vartheta \left\{ \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) \operatorname{tg} \vartheta \frac{d\gamma}{dt} + \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{d\gamma}{dt} \cos(\alpha - \gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d\lambda}{dt} \operatorname{tg} \vartheta \right] \right\} = k \cos \vartheta \left\{ \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} \cos(\alpha - \gamma) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} \sin(\alpha - \gamma) \right] \times \right. \\ \left. \cos \vartheta + \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin 2(\alpha - \gamma) \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right] + \right. \\ \left. + \sin \vartheta \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} [\sin^2(\alpha - \gamma) - \cos^2(\alpha - \gamma)] \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

Уравнения (57) и (58) совместно с исходным уравнением (42) определяют искомую траекторию. Для пяти неизвестных функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\vartheta(t)$  получено пять дифференциальных уравнений, которые позволяют найти эти функции в виде:

$$\begin{aligned} x &= x(t/x_0, y_0, z_0, \gamma_0, \vartheta_0); \\ y &= y(t/x_0, y_0, z_0, \gamma_0, \vartheta_0); \\ z &= z(t/x_0, y_0, z_0, \gamma_0, \vartheta_0); \\ \gamma &= \gamma(t/x_0, y_0, z_0, \gamma_0, \vartheta_0); \\ \vartheta &= \vartheta(t/x_0, y_0, z_0, \gamma_0, \vartheta_0). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений, определяющих траекторию минимального времени в барическом поле в трехмерном пространстве.

В частном случае, при полете на постоянной высоте, т. е. при  $\vartheta = 0$ , система уравнений (42), (57), (58) обращается в ранее рассмотренные уравнения (1'), (11).

Если предположить, что полет совершается с постоянным курсом и ветер изменяется во времени и с высотой, то задача о траектории минимального времени в трехмерном пространстве превращается в задачу о профиле минимального времени полета самолета.

Тогда в соответствии с уравнениями (47) и (48) имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = k \cos^2 \vartheta \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} \cos(\alpha - \gamma) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} \sin(\alpha - \gamma) \right]$$

или

$$\gamma = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \vartheta_0 &= \cos(\alpha - \gamma) \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} dt - \sin(\alpha - \gamma) \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} dt = \\ &= \Phi(z, t). \end{aligned}$$

## § 5. Наивыгоднейший профиль полета

При полете на постоянной высоте траектория минимального времени без существенной погрешности может отождествляться с маршрутом, обеспечивающим наибольшую экономию топлива и других материально-технических средств. Однако профиль минимального времени полета с этой точки зрения не является наивыгоднейшим.

Сохранение постоянной воздушной скорости при значительном изменении высоты полета несовместимо с оптимальным режимом работы двигателя. Кроме того, необходимо учитывать изменение километрового расхода топлива за счет изменения плотности воздуха при наборе высоты или снижении. Как известно, при всех прочих равных условиях у самолетов с турбореактивными двигателями с увеличением высоты полета километровый расход топлива уменьшается, достигая минимального значения на расчетной (наивыгоднейшей) высоте крейсерского полета. Поэтому при выборе оптимального профиля полета необходимо учитывать не только влияние ветра, но и влияние плотности воздуха, а также изменение веса самолета и угла атаки в процессе полета. В связи с этим представляет практический интерес рассмотреть задачу с учетом всех перечисленных факторов. Не привлекая полной системы уравнений (42), (57), (58), получим критерии, позволяющие практически выбрать наивыгоднейший профиль полета.

Для этого предположим сначала, что самолет с ТРД совершает полет с постоянной воздушной скоростью на постоянной высоте по барометрическому высотомеру; температура воздуха на уровне изобарической поверхности изменяется незначительно, удельный расход топлива не зависит от числа оборотов двигателя.

Расстояние, которое пройдет самолет за время  $dt$ , равно

$$dL = W dt. \quad (59)$$

За это же время будет израсходовано топлива

$$dG_T = q_r dt = -dG, \quad (60)$$

где  $W$  — путевая скорость,  $q_r$  — часовой расход топлива,  $G$  — вес самолета,  $G_T$  — вес топлива.

Подставив  $dt$  из (60) в (59), получим

$$dL = - \frac{W}{q_r} dG. \quad (61)$$

Если полет самолета с турбореактивным двигателем происходит с тягой двигателя  $P_p$ , то часовой расход топлива равен

$$q_r = c_e P_p, \quad (62)$$

где  $c_e$  — удельный расход топлива.

Поскольку наклон изобарической поверхности мал, можно воспользоваться соотношениями горизонтального полета.

В горизонтальном полете располагаемая тяга равняется потребной —  $P$  и удовлетворяет соотношению

$$P_p = P = \frac{G}{K} = \frac{G}{c_y} c_x. \quad (63)$$

Здесь  $K$  — качество;  $c_x$  и  $c_y$  — соответственно коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы.

Тогда, используя (61), (62), (63), имеем

$$dL = - \frac{W c_y}{c_e c_x} \frac{dG}{G}. \quad (64)$$

Проинтегрировав (64), найдем дальность полета

$$L = \int_{G_1}^{G_0} \frac{W c_y}{c_e c_x} \frac{dG}{G}. \quad (65)$$

Таким образом, дальность полета  $L = f(W, c_x, c_y, G, G_1)$ .

В горизонтальном полете в каждый момент времени выполняется равенство подъемной силы  $J$  и веса самолета, т. е.  $J = G$  или

$$c_y S_p \frac{V^2}{2} = G. \quad (66)$$

Отсюда

$$c_y = \frac{2G}{S_p V^2} = \psi(G). \quad (67)$$

В выражении (67)  $S$  — площадь крыльев.

Из соотношения (67) видно, что в рассматриваемой задаче  $c_y$  зависит только от веса самолета. Так как по мере выгорания топлива в полете вес самолета уменьшается, то, следовательно, должен уменьшаться и коэффициент  $c_y$ . Практически это означает, что для удержания самолета на постоянной высоте при постоянной воздушной скорости в процессе полета летчик должен уменьшать угол атаки.

В выражение (65) наряду с коэффициентом подъемной силы входит коэффициент полной силы лобового сопротивления. При небольших числах  $M$ , когда отсутствует волновое сопротивление, зависимость между  $c_x$  и  $c_y$  (полюру) в первом приближении представляют параболой второго порядка [5].

$$c_x = c_{x_0} + \frac{c_y^2}{\pi \lambda_{эф}}, \quad (68)$$

где  $c_{x_0}$  — коэффициент пассивного сопротивления,  $\lambda_{эф}$  — эффективное удлинение крыльев.

Подставим в (68) вместо  $c_y$  его значение из (67)

$$c_x = c_{x_0} + \frac{4G^2}{\pi \lambda_{эф} S^2 \rho^2 V^4}. \quad (69)$$

Найдем критерии, которые позволили бы установить, при каком поле давления (трехмерном) с целью экономии топлива выгодно набирать высоту или снижаться, лететь на расчетной высоте или ниже нее.

Для этого введем понятие критического распределения эквивалентного ветра с высотой —  $w(z)^*$ . Под критическим распределением эквивалентного ветра с высотой будем понимать такое распределение эквивалентного ветра, при котором дальность полета не зависит от высоты полета, т. е. уменьшение километрового расхода топлива за счет увеличения высоты полета будет скомпенсировано отрицательным влиянием ветра.

Последнее может иметь место в двух случаях: при больших отрицательных значениях эквивалентного ветра на расчетной высоте  $w(z)$ , причем скорость эквивалентного ветра с высотой быстро увеличивается, или при положительном значении эквивалентного ветра, скорость которого с высотой быстро уменьшается.

Полагая, что эквивалентный ветер зависит только от вертикальной координаты и не зависит от расстояния, найдем дальность полета на постоянной высоте с постоянной воздушной скоростью.

В соответствии с соотношениями (65), (67) и (69)

$$L = \frac{V + w(z)}{c_e} \int_{G_1}^{G_0} \frac{c_y}{c_x} \frac{dG}{G} = \frac{[V + w(z)]}{c_e} \times \\ \times \sqrt{\frac{\pi \lambda_{эф}}{c_{x_0}}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2G_0}{\Pi \rho(z)} - \operatorname{arctg} \frac{2G_1}{\Pi \rho(z)} \right), \quad (70)$$

где  $\Pi = \sqrt{\pi \lambda_{эф} c_{x_0}} S V^2$ .

Согласно определению, при критическом распределении эквивалентного ветра дальность полета не зависит от высоты, на которой совершается полет, т. е.

$$L = f(z) = \text{const.}$$

Продифференцировав выражение (70) по  $z$ , после ряда несложных преобразований, получим формулу для определения критического вертикального градиента эквивалентного ветра

$$\left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^* = \frac{2(V + w) \Pi \left[ \frac{G_0}{\Pi^2 \rho^2 + 4G_0^2} - \frac{G_1}{\Pi^2 \rho^2 + 4G_1^2} \right] \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left[ \operatorname{arctg} \frac{2G_0}{\Pi \rho} - \operatorname{arctg} \frac{2G_1}{\Pi \rho} \right]}. \quad (71)$$

Так как при сделанном выше выборе осей координат

$$w = cV \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad (72)$$

то критерий оптимальности по полю давления

$$\left( \frac{\partial^2 H}{\partial Z \partial Y} \right)^* = \frac{1}{cV} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^* = \Psi. \quad (73)$$

Если воспользоваться соотношением (71), то можно записать в развернутом виде выражение для критерия оптимальности по полю давления.

Таким образом, выполнять полет ниже расчетной высоты, снижаться при попадании в зону сильных встречных ветров выгодно лишь тогда, когда фактические вертикальные градиенты будут больше критических. В этом случае увеличение расхода топлива за счет увеличения плотности воздуха при уменьшении высоты полета будет скомпенсировано влиянием ветра.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перспективы внедрения на воздушных трассах сверхзвуковых транспортных самолетов требуют критического отношения к некоторым сложившимся понятиям и представлениям из области воздушной навигации и авиационной метеорологии. Прежде чем экстраполировать многие методы учета влияния метеорологических элементов на полет самолета из дозвуковой в сверхзвуковую область, необходимо провести их тщательное и всестороннее исследование применительно к новым условиям и возможностям. Видимо, это в полной мере относится и к барическим методам. Однако априори можно утверждать, что увеличение скорости полета делает «менее ощутимыми» мезомасштабные агеострофические отклонения ветра и повышает точность (абсолютную и относительную) барических методов.

Широкое применение электронных вычислительных машин и разработка новых методов определения экстремальных значений функций позволяют по-новому решать задачи оптимизации. Наряду с классическими вариационными методами при их решении могут быть использованы результаты, относящиеся к так называемой теории оптимальных процессов, разработанной академиком Л. С. Понтрягиным и его учениками (принцип максимума Л. С. Понтрягина), а также метод динамического программирования Р. Беллмана. При этом во всех случаях, естественно, необходимо учитывать особенности структуры (пространственной и временной) полей метеорологических элементов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Собрание сочинений, т. 1, изд. АН СССР, 1949.
2. Молоканов Г. Ф. Учет ветра в дальних полетах. Воениздат, М., 1957.
3. Молоканов Г. Ф. О законе управления самолетом, перелетающим из одного пункта в другой в кратчайшее время. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 1, 1966.
4. Наровлянский Г. Я., Солонин С. В. Эквивалентный ветер и методы его расчета. Гидрометеониздат, Л., 1962.
5. Остославский И. В. Аэродинамика самолета. Оборонгиз, М., 1957.
6. Bellamy J. C. The use of pressure altitude and altimeter corrections in meteorology. J. Meteorology, vol. 2, № 1, 1945.
7. Mises R. Fluglehre. 3., Aufl., Berlin, 1926.
8. Zermelo E. Über die Navigation in der Luft als Problem der Variationsrechnung. Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker Vereinigung. Bd. 39, Heft 9—12, 1930.
9. Zermelo E. Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 11, Heft 2, 1931.

---

*С. В. Солонин*

## **О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА ФЕРМА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТРАЕКТОРИИ МИНИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ПОЛЕТА САМОЛЕТА**

Разработан алгоритм для определения траектории минимального времени полета самолета на основе использования принципа Ферма.

### **Введение**

В настоящее время многими авторами со всевозрастающей настойчивостью обосновывается возможность и целесообразность рационального использования полей метеорологических элементов, главным образом ветра, для повышения экономичности и рентабельности воздушных перевозок.

Из последних наиболее ярких работ, посвященных этому вопросу, следует прежде всего назвать исследование Г. Ф. Молоканова [1] и предложение М. В. Бурковой, В. А. Джорджио, А. Д. Джураева, А. И. Неушкина, М. А. Петросянца и Н. Н. Романова о многомаршрутной системе полетов самолетов с использованием струйных течений [2].

Г. Ф. Молоканов рассмотрел вариационную задачу о полете между двумя пунктами на постоянной высоте (с учетом сферичности Земли) в минимальное время и количественно оценил экономические выгоды реализации таких полетов.

Предложение указанной выше группы авторов также направлено на сокращение времени полетов по воздушным трассам путем использования струйных течений. Кратко предложение сводится к следующему:

Струйные течения на воздушных трассах значительной протяженности являются довольно обычным явлением и оказывают большое влияние на путевую скорость самолетов. Так как струйные течения редко сохраняют свое географическое положение очень продолжительное время, а, как правило,

смещаются в том или ином направлении, изгибаются, ветвятся и вновь сливаются, то, совершая полет строго по воздушной трассе, не всегда удастся использовать струйные течения в навигационных целях. Однако, если для каждого основного направления полетов разработать 5—7 стандартных воздушных трасс с учетом «статистики конфигураций струйных течений», то выполняя полет по той или иной стандартной трассе, выбранной с учетом конкретных аэросиноптических условий (конфигурации струйного течения), можно использовать благоприятный режим ветра для повышения путевой скорости.

Реальность и экономические выгоды многомаршрутной системы полетов самолетов вполне очевидны. Для того чтобы получить максимальный экономический эффект от реализации этого предложения, необходимо применить рациональную методику выбора стандартных трасс. В этом смысле вопрос о многомаршрутной системе полетов нуждается в дополнительном обсуждении.

В свое время автор обращал внимание на то обстоятельство, что не всегда полет по оси струйного течения даст оптимальный результат [8].

Увеличение протяженности маршрута, вызванное отклонением самолета от ортодромического пути или от основной воздушной трассы в сторону струйного течения, не обязательно будет скомпенсировано соответствующим увеличением путевой скорости. Поэтому в зависимости от конкретных аэросиноптических условий и реальных полей ветра в струйном течении существует предельно допустимое отклонение самолета, при котором использование струйного течения будет давать какой-либо экономический эффект.

Наибольшее расстояние, на которое может удалиться самолет от ортодромического пути в сторону струйного течения, при котором общая продолжительность полета по ортодромическому маршруту будет равна общей продолжительности полета в струйном течении, назовем критическим удалением. Поскольку многомаршрутная система полетов потребует установки дополнительных радиолокационных станций и другого наземного аэронавигационного оборудования по стандартным трассам, то, естественно, реально допустимые отклонения самолета от ортодромического маршрута, при которых еще сохраняются экономические выгоды использования струйных течений, будут меньше критических.

Методической основой при разработке многомаршрутной системы полетов самолетов должны служить соотношения, определяющие траекторию минимального времени полета.



Исходя из специфики этой задачи, необходимо привлечь статистические данные о режиме ветра в районе воздушной трассы, и, по-видимому, в данном случае удобно воспользоваться математической аналогией между распространением света и аэронавигационной задачей, на которую впервые указал Ф. Франк [10, 11]. В дальнейшем на основе этой аналогии Р. Мизес [13] предложил графический способ построения траектории минимального времени в предположении, что полет совершается на постоянной высоте и ветер не изменяется со временем. Однако, несмотря на кажущуюся простоту, графический способ можно применить лишь для идеализированных полей ветра.

Применение электронных вычислительных машин позволяет преодолеть известные трудности использования этой аналогии в интересах самолетовождения.

Попутно заметим, что рассматриваемая аэронавигационная задача сложнее подобных задач кристаллооптики, так как необходимо учитывать не только анизотропность «среды», но и ее неоднородность и изменчивость во времени.

Действительно, скорость ветра в общем случае является функцией координат и времени

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}, t), \quad (1)$$

где  $\vec{r}(x, y, z)$  — радиус-вектор, определяющий положение точки в трехмерном пространстве ( $x, y, z$  — проекции радиус-вектора на соответствующие оси прямоугольной системы координат).

Условие (I) характеризует неоднородность и изменчивость среды во времени. Кроме того, влияние ветра на путевую скорость полета  $\vec{W}$  (скорость полета относительно земной поверхности) зависит от угла ветра  $\varepsilon$ , т. е. угла, заключенного между направлением воздушной трассы (линии пути) и направлением ветра [6, 7].

Поэтому по отношению к летящему самолету среда является не только неоднородной, но и анизотропной

$$\vec{W} = \vec{W}(\vec{r}, \vec{s}, t), \quad (2)$$

где  $\vec{s}$  — единичный вектор в направлении путевой скорости.

При привлечении статистических данных о поле ветра на уровне полета отпадет необходимость учета временной изменчивости неоднородного и анизотропного поля вектора  $\vec{W}$ .

Прежде чем перейти непосредственно к практическим приложениям, кратко остановимся на некоторых соотношениях геометрической оптики.

### Основные соотношения геометрической оптики, вытекающие из принципа Ферма

В соответствии с принципом Ферма действительный путь распространения света есть путь, «для прохождения которого световому лучу потребуется минимальное время по сравнению с любым другим мыслимым путем между теми же точками» [2, 3]. Если воспользоваться понятием оптической длины пути  $E$ , то последнее тождественно утверждению о минимуме криволинейного интеграла

$$E = \int_{L_0} n dS, \quad (3)$$

взятого вдоль этого пути.

В выражении (3)  $n$  — показатель преломления среды,  $S$  — параметр кривой  $L_0$ , вдоль которой распространяется свет.

Пусть  $L(a)$  — однопараметрическое семейство кривых, проходящих через начальную и конечную точки, причем

$$L_0 = L(a=0),$$

то

$$\left. \frac{dE}{da} \right|_{a=0} = 0. \quad (4)$$

В случае неоднородной и анизотропной среды показатель преломления является функцией координат точки  $(x, y, z)$  и направления луча  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , где точкой обозначено дифференцирование по параметру  $S$ .

Функция  $E$  не зависит от выбора параметра  $S$ .

Чтобы показать это, предположим, что  $n$  является однородной функцией первой степени относительно переменных  $x, y, z$ , т. е.

$$n(\lambda \dot{x}, \lambda \dot{y}, \lambda \dot{z}) = \lambda n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \quad (5)$$

Уравнение (5) эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial n}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial n}{\partial z} \dot{z} = n. \quad (6)$$

Перейдем от параметра  $S$  к новому параметру  $S_1$

$$S_1 = f(S); \quad \frac{dS_1}{dS} = f'(S). \quad (7)$$

Тогда согласно (3) имеем

$$\begin{aligned} \int_{L_0} n \left( \frac{dx}{dS_1}, \frac{dy}{dS_1}, \frac{dz}{dS_1} \right) dS_1 &= \int_{L_0} n \left( \frac{dx}{dS}, \frac{dy}{dS}, \frac{dz}{dS} \right) \frac{dS}{dS_1} dS_1 = \\ &= \int_{L_0} n \left( \frac{dx}{dS}, \frac{dy}{dS}, \frac{dz}{dS} \right) dS. \end{aligned} \quad (8)$$

Из соотношения (8) видно, что оптическая длина пути  $E$  не зависит от выбора параметра  $S$ , и, следовательно, его можно выбирать произвольно.

Для упрощения анализа в качестве параметра возьмем единичный вектор  $\vec{s}$ , касательный к кривой  $L_0$ , направление которого совпадает с направлением излучения.

В геометрической оптике используется функция  $Q(x, y, z)$ , называемая эйконалом

$$\text{grad} Q = \vec{N}, \quad (9)$$

где  $\vec{N}$  — лучевой вектор (вектор, перпендикулярный к волновой поверхности и имеющий длину  $n$ ).

Выражение (9) показывает, что «из поверхностных элементов, перпендикулярных к системе лучей, можно всегда образовать ортогональные поверхности, если это возможно в одном каком-либо месте» (теорема Малю) [4].

Представим световые лучи, т. е. кривые, вдоль которых световое возмущение распространяется с одной поверхности волны на другую, как поле единичных векторов  $\vec{s}(\vec{r})$ .

Тогда связь между  $\vec{N}$  и  $\vec{s}$  можно выразить в следующем виде:

$$\vec{N} = \nabla n + \vec{s}(n - \vec{s} \nabla n). \quad (10)$$

Здесь  $\nabla n$  — вектор с проекциями  $\frac{\partial n}{\partial \zeta}$ ,  $\frac{\partial n}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial n}{\partial \xi}$ , причем  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  являются составляющими единичного вектора по прямоугольным осям координат и таким образом

$$\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1. \quad (11)$$

Если световая волна пронизывает поверхность раздела между двумя оптическими средами с различными показателями преломления, то в соответствии с законом преломления [10—12]

$$\vec{N}_1 \tau = \vec{N}_2 \tau, \quad (12)$$

где  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  — лучевые векторы соответственно в первой и второй средах;  $\vec{\tau}$  — единичный вектор, тангенциальный к поверхности раздела.

Соотношение (12) представляет собой по существу уравнение для случая, когда  $\vec{N}(\vec{r})$  является векторным полем с разрывом у поверхности раздела.

Эти соотношения нетрудно распространить на самолет, летящий в поле изменяющегося в пространстве ветра.

### Закон «преломления» для траектории минимального времени полета самолета

Общая продолжительность полета по воздушной трассе, с учетом сделанных выше замечаний, в общем случае определяется криволинейным интегралом вида

$$T = \int_L \frac{d\vec{r}}{W(\vec{r}, \vec{s})}. \quad (13)$$

Если потребовать, чтобы продолжительность полета между двумя пунктами была минимальной, то интеграл (13) на траектории минимального времени  $L_0$  преобразуется к виду (3), принимая во внимание, что

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dS} dS = \vec{r}' dS, \quad (14)$$

$$\vec{s} = \frac{\vec{r}'}{\sqrt{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}}. \quad (15)$$

При этом величина  $\frac{1}{W(\vec{r}, \vec{s})}$  будет иметь такой же смысл, какой имеет показатель преломления в оптике.

В векторной форме выражение для путевой скорости можно записать следующим образом:

$$W\vec{s} = \vec{V} + \vec{U}(\vec{r}),$$

где  $V$  — воздушная скорость самолета,  $\vec{i}$  — единичный вектор в направлении воздушной скорости самолета.

Из выражения (14) нетрудно найти, что величина путевой скорости равна

$$W(\vec{r}, \vec{s}) = \vec{s} \vec{U} + \sqrt{(\vec{s} \vec{U})^2 + V^2 - U^2}. \quad (17)$$

Согласно (10) и (17) при полете по траектории минимального времени вектор  $\vec{N}$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \nabla n + \vec{s} (n - \vec{s} \nabla n) = -\frac{1}{W^2} \left[ \vec{U} + \frac{(\vec{s} \vec{U}) \vec{U}}{\sqrt{(\vec{s} \vec{U})^2 + V_0^2 - U^2}} \right] + \\ &+ \vec{s} \left\{ \frac{1}{W} + \frac{\vec{s}}{W^2} \left[ \vec{U} + \frac{(\vec{s} \vec{U}) \vec{U}}{\sqrt{(\vec{s} \vec{U})^2 + V_0^2 - U^2}} \right] \right\} = \\ &= \frac{-\vec{U} + \vec{s} \sqrt{(\vec{s} \vec{U})^2 + V_0^2 - U^2} + \vec{s} (\vec{s} \vec{U})}{W \sqrt{(\vec{s} \vec{U})^2 + V_0^2 - U^2}} = \\ &= \frac{W \vec{s} - \vec{U}}{W (W - \vec{s} \vec{U})} = \frac{\vec{i}}{W_V}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $W_V$  — проекция путевой скорости на направление вектора воздушной скорости (продольной оси самолета).

Тогда в качестве аналога соотношения (12) на границе двух областей с различными скоростями ветра для самолета имеем

$$\frac{\vec{i}_1}{W_{V1}} \vec{\tau} = \frac{\vec{i}_2}{W_{V2}} \vec{\tau}. \quad (19)$$

Выражению (19) можно придать вид известного закона преломления Снеллиуса для анизотропной среды, если обозначить угол между продольной осью самолета и нормалью к границе раздела двух ветровых областей через  $\psi$ .

Так как

$$\vec{i} \vec{\tau} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) = \sin \psi, \quad (20)$$

то из (19) получим

$$\frac{\sin \psi_1}{W_{V1}} = \frac{\sin \psi_2}{W_{V2}}. \quad (21)$$

Разобьем весь маршрут на участки, в пределах которых пространственной изменчивостью ветра можно пренебречь, тогда для траектории минимального времени полета из выражения (21) имеем

$$C = \frac{\sin \psi_1}{W_{V_1}} = \frac{\sin \psi_2}{W_{V_2}} = \dots = \frac{\sin \psi_n}{W_{V_n}} = \text{const}, \quad (21')$$

где 1, 2, ..., n — номера участков.

С целью облегчения практической реализации «закона преломления» при построении траектории минимального времени целесообразно использовать карту в нормальной равноугольной цилиндрической (меркаторской) проекции. На картах этой проекции параллели и меридианы образуют ортогональную сетку. К тому же в равноугольных проекциях углы, измеренные на карте, равны углам между этими же направлениями на земной поверхности.

Путем проведения дополнительных прямых линий, параллельных меридианам (вертикальных) и параллелям (горизонтальных), несложно построить регулярную сетку с шагом 300—400 км в области между исходным и конечным пунктами трассы.

Вектор ветра определяется в узлах сетки. Путем интерполяции из матрицы дискретных значений вектора ветра создается квазинепрерывное поле ветра.

При этом, если направить ось абсцисс по параллели, а ось ординат по меридиану, то проекцию путевой скорости  $W_V$  можно представить в качестве функции угла  $\psi$  — угла между нормалью к границе раздела двух смежных ветровых областей и направлением вектора воздушной скорости.

На рис. 1 видно, что

$$W_V t = Vt + Ut \cos \beta, \quad (22)$$

где  $t$  — время полета.

Угол  $\beta$  связан с углом сноса  $\varphi$ , углом ветра  $\varepsilon$  и другими угловыми параметрами соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \varphi + \varepsilon, \\ \varphi &= \alpha - \gamma, \\ \gamma &= 90^\circ + \psi, \\ \varepsilon &= \delta - \alpha - 180^\circ, \\ \alpha &= 90^\circ + \psi + \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $\alpha$  — путевой угол,  $\gamma$  — курс самолета,  $\delta$  — направление ветра.

Воспользовавшись соотношениями (23), после элементарных преобразований имеем

$$W_V = V - U \sin(\delta - \psi). \quad (24)$$

При известном поле ветра (скорости и направлении), за-

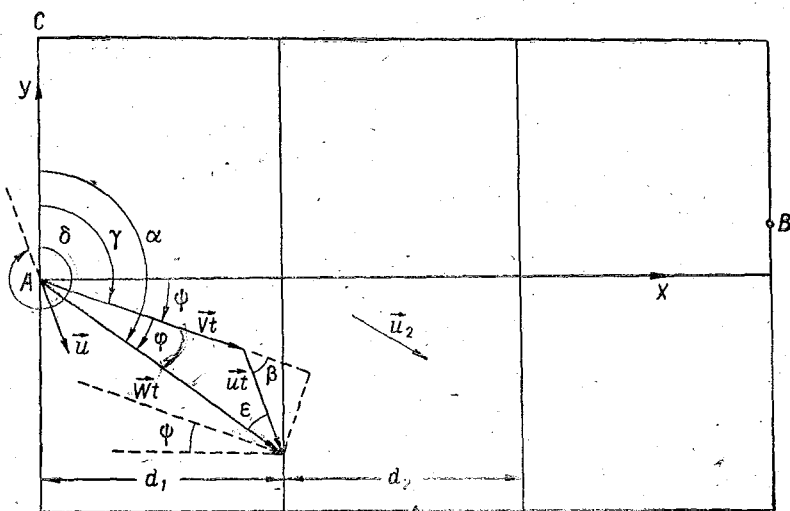


Рис. 1. К методике определения элементов траектории минимального времени полета.

дав первое значение  $\psi$  (в первой ветровой области), из уравнения (21') определяется значение постоянной  $C$  для всей траектории минимального времени:

$$C = \frac{\sin \psi_1}{V - U \sin(\delta_1 - \psi_1)}. \quad (25)$$

Далее нетрудно последовательно определить значения всех остальных углов  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ .

Продолжительность полета для первой ветровой области и приращение ординаты равны

$$t = \frac{d}{W_{x_1}} = \frac{d}{V_1 \cos \psi_1 - U_1 \sin \delta_1}, \quad (26)$$

$$\Delta y = W_{y_1} t = - \frac{d(V_1 \sin \psi_1 + U_1 \cos \delta_1)}{V_1 \cos \psi_1 - U_1 \sin \delta_1}, \quad (27)$$

где  $W_x, W_y$  — проекции путевой скорости на соответствующие оси координат.

Координата конечного пункта, расположенного на разделяющей вертикальной прямой линии, имеющей порядковый номер  $n$ , получается путем последовательного суммирования  $\Delta y_i$

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta y_i = y_1 + \sum_{i=2}^n \Delta y_i = \dots = y_{n-1} + \Delta y_n. \quad (28)$$

Так как  $\psi_1$  был взят произвольно, то траектория минимального времени может пройти на значительном удалении от конечного пункта трассы. Однако три или четыре итерационных цикла достаточно, чтобы получить приемлемый для практики результат. При использовании вычислительной машины весь процесс вычислений займет очень небольшое время.

Так как при разработке многомаршрутной системы полетов предполагается использование статистических данных о поле ветра за более или менее продолжительные промежутки времени (декада, месяц, сезон или полугодие) по длительному ряду наблюдений (по меньшей мере за десять лет), то в результате решения задачи получим множество коммуникаций  $k$  (траекторий минимального времени полета). Однако прежде чем окончательно решить вопрос о целесообразности их использования, надо рассмотреть так называемую задачу о выборе наиболее «экономного маршрута», т. е. учесть не только продолжительность полета, но и затраты, связанные с установкой и эксплуатацией на новых воздушных трассах дополнительных радиолокационных станций и других наземных аэронавигационных средств.

Эту часть задачи можно несложным образом решить методами линейного программирования, применив, например, симплексный метод [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буркова М. В., Джорджио В. А., Джураев А. Д., Неушкин А. И., Петросянц М. А., Ромацов Н. Н. Предложение о многомаршрутной системе полетов самолетов с использованием струйных течений. Научные труды ТГУ, вып. 259, 1964.
2. Дитчберн Р. Физическая оптика. Изд-во «Наука», М., 1965.
3. Ландсберг Г. С. Оптика. Гостехтеориздат, М., 1957.
4. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Физматгиз, М., 1960.
5. Молоканов Г. Ф. О законе управления самолетом, перелетающим из одного пункта в другой в кратчайшее время. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1966.



6. Молоканов Г. Ф. Учет ветра в дальних полетах. Воениздат, М., 1957.
  7. Наровлянский Г. Я., Солонин С. В. Эквивалентный ветер и методы его расчета. Гидрометеиздат, Л., 1962.
  8. Солонин С. В. К вопросу о навигационных проблемах, связанных со струйными течениями. Труды ЛГМИ, вып. 8, 1958.
  9. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. Изд-во «Советское радио», М., 1964.
  10. Frank P. Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und eine Aufgabe aus dem Gebiet der Flugzeugbewegung. Phys. Z. Bd. 19, 1918.
  11. Frank P. Zs. f. Phys. Bd. 80, 1933.
  12. Herzberger M. Strahlenoptik, Berlin, 1931.
  13. Mises R. Zum Navigations problem der Luftfahrt. Z. angew. Math. Mech., Bd 11, 1931.
-

---

С. Н. Каплан

### О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ОБЛАЧНОСТИ

В работе исследуются характеристики временной структуры количества общей облачности, рассчитанные по эмпирическим данным. Приводится оценка точности расчета полученных статистических характеристик. Показана возможность использования статистических характеристик при оценке погрешностей отдельных методов экстраполяции.

Степень закрытости поверхности земли облачным покровом следует учитывать при решении вопросов развития отдельных отраслей сельского хозяйства, при оценке эффективности полетов искусственных спутников Земли и при метеорологическом обеспечении авиации.

Известно, что наряду с существующими и развивающимися гидродинамическими методами прогноза метеоэлементов широко используются также методы статистической экстраполяции, которые в некоторых случаях являются более эффективными.

При статистической экстраполяции существенно решить вопрос о точности метода экстраполяции. При решении этого вопроса возникает необходимость исследования пространственно-временной структуры полей метеоэлементов, так как ошибки различных методов экстраполяции определяются такими статистическими характеристиками, как дисперсия, структурная или корреляционная функции [6, 9, 13, 17]. Исследование облачности как случайного процесса является одним из возможных подходов к решению задачи прогноза данного метеоэлемента. Так как поле облачности формируется под влиянием многих факторов, учесть которые в полном объеме гидродинамическими методами представляет огромную трудность [16]. Рассматривая поле облачности как случайное, можно исследовать его статистические характеристики, описывающие поведение облачности в среднем.

Остановимся на основных статистических характеристиках случайного процесса. Пусть  $f(t)$  — мгновенное значение случайной величины, в нашем случае значение количества общей облачности, выраженное в баллах.

Временные корреляционная и структурная функции определяются следующими формулами:

$$M_f(t_1, t_2) = \overline{f(t_1) \cdot f(t_2)}, \quad (1)$$

$$B_f(t_1, t_2) = \overline{[f(t_1) - \overline{f(t_1)}]^2}, \quad (2)$$

где черта сверху означает осреднение.

При вычислении корреляционных и структурных функций по экспериментальным данным существенным является вопрос о стационарности процесса, так как только в этом случае статистические характеристики довольно просто рассчитываются и анализируются.

При условии стационарности процесса, т. е. при условии постоянства во времени среднего значения метеоэлемента  $\overline{f(t)} = \text{const}$ ,  $M_f(t_1, t_2)$  и  $B_f(t_1, t_2)$  зависят от разности  $(t_2 - t_1) = \tau$ .

$$M_f(\tau) = \overline{f(t) \cdot f(t + \tau)}, \quad (3)$$

$$B_f(\tau) = \overline{[f(t) - \overline{f(t)}]^2}. \quad (4)$$

Многими авторами [3, 4, 6] при исследовании статистической структуры различных метеоэлементов установлено, что свойством стационарности обладают поля не самих метеоэлементов, а их отклонений от нормы.

$$f'(t) = f(t) - \overline{f(t)}, \quad (5)$$

где  $\overline{f(t)}$  — норма, или среднее значение в момент  $t$ .

Структурная функция для отклонений от среднего значения обозначается через  $b_f(\tau)$  и определяется как

$$b_f(\tau) = B_{f'}(\tau) = \overline{[f'(t) - \overline{f'(t)}]^2}. \quad (6)$$

Между структурными функциями  $b_f(\tau)$  и  $B_f(\tau)$  существует простое соотношение, которое получается, если (5) подставить в (4).

Тогда

$$B_f(\tau) = b_f(\tau) + [\overline{f(t)} - \overline{f(t + \tau)}]^2. \quad (7)$$

Очевидно, чем ближе моменты  $t$  и  $t + \tau$  (чем меньше  $\tau$ ), тем меньше разность  $[\overline{f(t)} - \overline{f(t + \tau)}]$  и тем меньше различаются

$(\tau)$  и  $b_f(\tau)$ . Различия между ними становятся заметны с увеличением  $\tau$ . При этом структурная функция самого метеоэлемента  $B_f(\tau)$  больше, чем структурная функция для отклонений от среднего  $b_f(\tau)$ .

Для стационарного процесса  $\overline{f(t)} = \overline{f(t+\tau)}$ , тогда структурная функция самого метеоэлемента равна структурной функции для отклонений от среднего значения, т. е.  $B_f(\tau) = b_f(\tau)$ .

По определению (1) и (6) структурная функция  $b_f(\tau) \geq 0$ . При  $\tau=0$ ,  $b_f(\tau)=0$ , поэтому можно сделать вывод, что с ростом  $\tau$  структурная функция возрастает. Пределом возрастания структурной функции  $b_f(\tau)$  стационарного процесса является  $2\sigma_f^2$  — удвоенная дисперсия случайного процесса. Этот предел можно просто получить из (6).

$$b_f(\tau) = \overline{[f'(t) - f'(t+\tau)]^2} = \overline{[f'(t)]^2} - 2\overline{f'(t)f'(t+\tau)} + \overline{[f'(t+\tau)]^2} = m_f(t, t) - 2m_f(t, t+\tau) + m_f(t+\tau, t+\tau).$$

При наличии стационарности

$$m_f(t, t) = m_f(t+\tau, t+\tau) = \sigma_f^2 = \text{const.}$$

Поэтому

$$b_f(\tau) = 2m_f(0) - 2m_f(\tau) = 2\sigma_f^2 - 2m_f(\tau). \quad (8)$$

Выражение (8) связывает структурную, корреляционную функции и дисперсию случайного стационарного процесса.

Очевидно, предельным значением структурной функции самого метеоэлемента будет на основании (7) величина

$$B_f(\infty) = 2\sigma_f^2 + \overline{[f(t) - \overline{f(t+\infty)}]^2}. \quad (9)$$

Кроме рассмотренных структурных и корреляционных функций, удобно ввести нормированные функции

$$\mu_f(\tau) = \frac{m_f(\tau)}{m_f(0)} = \frac{m_f(\tau)}{\sigma_f^2}, \quad (10)$$

$$\beta_f(\tau) = \frac{b_f(\tau)}{b_f(\infty)} = \frac{b_f(\tau)}{2m_f(0)} = \frac{b_f(\tau)}{2\sigma_f^2}. \quad (11)$$

Нормированные структурная и корреляционная функции  $\beta_f(\tau)$  и  $\mu_f(\tau)$  связаны между собой соотношением, вытекающим из (8),

$$\beta_f(\tau) = 1 - \mu_f(\tau). \quad (12)$$

Преимущество использования нормированных функций определяется тем обстоятельством (как указывается в [3, 4]), что они меньше зависят от условий осреднения. Так, в работе [4] показано, что структурные функции высоты  $AT_{500}$ , рассчитанные для четырех сезонов, оказались различными. Однако с большой степенью точности процессы в различные сезоны описывались одной нормированной структурной функцией.

Остановимся вкратце на источниках погрешностей структурных характеристик, рассчитываемых по эмпирическим данным, поскольку от точности получаемых характеристик зависит и точность результатов экстраполяции метеозлемента.

Известно, что основными источниками ошибок в рассчитываемых структурных характеристиках являются: 1) нарушение стационарности ряда наблюдений, 2) недостаточный объем материала, по которому производится расчет характеристик, 3) недостаточная точность исходных данных.

Влияние указанных факторов на погрешности структурных характеристик подробно рассматривается в работах [3, 13, 14, 15].

Приведем некоторые теоретические оценки погрешностей, вызываемых указанными факторами.

1. Рассмотрим влияние ошибок наблюдений.

Обозначим через  $\tilde{f}(t)$  значение метеозлемента  $f(t)$ , известное с некоторой случайной ошибкой  $\delta_f$ .

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \delta_f, \quad (13)$$

где  $f(t)$  — истинное значение метеозлемента.

Тогда, если подставить (13) в формулы для структурной и корреляционной функций, можно увидеть, насколько изменятся величины этих функций за счет случайных ошибок наблюдений.

$$a) \ m_{\tilde{f}}(t_1, t_2) = m_f(t_1, t_2) + \overline{\delta_f(t_1) \cdot \delta_f(t_2)}. \quad (14)$$

Величина  $\overline{\delta_f(t_1) \delta_f(t_2)} = 0$  при  $t_1 \neq t_2$ , тогда  $m_{\tilde{f}}(t_1, t_2) = m_f(t_1, t_2)$ ;

б) при  $t_1 = t_2$ , т. е.  $\tau = t_1 - t_2 = 0$

$$m_{\tilde{f}}(t_1, t_1) = m_f(t_1, t_1) + \overline{\delta_f^2(t_1)} = \sigma_f^2 + \overline{\delta_f^2(t_1)}, \quad (15)$$

т. е. случайные ошибки не влияют на значение ненормированной автокорреляционной функции, за исключением интервала  $\tau = 0$ , когда автокорреляционная функция равна дисперсии ме-

теоэлемента. В этом случае случайные ошибки приводят к завышению дисперсии на величину  $\overline{\delta_f^2}$ ;

в)

$$b_{\sim f}(\tau) = b_f(\tau) + \overline{\delta_f^2}. \quad (16)$$

Случайные ошибки приводят к завышению структурной функции на  $2\overline{\delta_f^2}$ .  
При  $b_f(0) = 0$

$$b_{\sim f}(0) = 2\overline{\delta_f^2}. \quad (17)$$

На (17) основан косвенный метод оценки средней ошибки исходных данных. Ордината точки при  $\tau=0$  дает  $2\overline{\delta_f^2}$ . Затем, для того чтобы исключить эту величину из структурной функции, достаточно вычесть ее из всех значений структурной функции, т. е. провести кривую параллельно исходной через начало координат. По кривым  $b_{\sim f}(\tau)$  для облачности, как будет показано ниже, такая оценка величины  $2\overline{\delta_f^2}$  может быть произведена.

2. Значительные погрешности в структурных функциях возможны за счет недостаточного объема выборки, т. е. недостаточной длины  $T$  ряда наблюдений. Для фиксированного  $T$  с увеличением интервала между наблюдениями  $\tau$  длина интервала осреднения  $T - \tau$  убывает. Вследствие этого точность расчета  $b_f(\tau)$  снижается. Таким образом, соотношение между  $\tau$  и  $T$  существенно влияет на точность получаемых структурных характеристик. Рассмотрению того вопроса посвящено ряд работ [13, 14, 15], из которых следует, что погрешность структурной функции возрастает пропорционально  $\sqrt{\frac{\tau}{T}}$ , т. е.

при  $\frac{\tau}{T} = 0,1$  относительная погрешность  $\delta_f'$  составляет около 0,30.

Если при этом произвести статистическое осреднение получаемых характеристик по ряду выборок, равному  $n$ , то погрешность может быть уменьшена в  $\sqrt{n-1}$  раз, по формуле

$$\delta_f'' = \frac{\delta_f'}{\sqrt{n-1}}.$$

3. Следующей причиной погрешностей исследуемых структурных характеристик является нарушение стационарности поля метеоэлемента, вызываемое действием некоторых факто-

ров периодического характера. В особенности это относится к влиянию годового и суточного хода метеоэлемента. Годовой ход метеоэлемента оказывает влияние на структурные характеристики в тех случаях, когда они рассчитываются по большому объему выборки, включающему периоды, равные сезону, полугодию, году, тогда наряду с колебаниями, структуру которых изучают, будут еще иметь место периодические колебания, вызванные влиянием годового хода внутри данной выборки.

При дальнейшем применении результатов следует либо исключить влияние этого фактора, либо учитывать величину его вклада в получаемую характеристику. Количественные оценки вклада годового хода, приведенные в работе [3], показывают, что наибольшие искажения корреляционной функции получаются при  $\tau=0$ , т. е. для дисперсии, полученной осреднением за год, полугодие или переходный сезон. В этом случае относительная ошибка дисперсии максимальна и равна

$$\delta_f''' = \frac{(\tilde{f})^2 - (\overline{f'})^2}{a_1^2} = \frac{1}{2}, \text{ где } a_1 \text{ — амплитуда годового хода, } \tilde{f}' \text{ —}$$

искаженное влиянием годового хода значение отклонения метеоэлемента от среднего.

Отсюда вывод, что только при осреднении за более короткий период, к примеру за месяц, завышением дисперсии за счет влияния годового хода можно пренебречь. В [3] показано, что структурная функция в меньшей степени, чем корреляционная, подвержена влиянию годового хода метеоэлемента. Поскольку структурная функция оказывается более надежно рассчитанной в этом смысле, то корреляционную функцию, необходимую при экстраполяции, следует определять через структурную.

Приведем более подробно оценку влияния суточного хода метеоэлемента на его структурную функцию и дисперсию в связи с тем, что, как будет показано далее, этот фактор вносит заметный вклад в полученные нами структурные характеристики. Следуя [3, 10, 11], предположим, что случайная

функция  $\tilde{f}(t)$  представляет собой сумму собственно стационарной случайной функции  $f(t)$  и периодической функции, т. е.

$$\tilde{f}(t) = f(t) + a \sin \omega t, \quad (18)$$

где  $a = \frac{1}{2}$  — амплитуды суточного хода метеоэлемента,  $\omega$  — частота колебаний, равная  $\frac{2\pi}{T_0}$  ( $T_0 = 24 \text{ час}$ ).

В момент  $t + \tau$

$$\tilde{f}(t + \tau) = f(t + \tau) + a \sin \omega(t + \tau). \quad (18')$$

Если подставить (17) и (18) в выражение для структурной функции и произвести некоторые преобразования, то можно получить следующее:

$$b_{\sim f}(\tau) = b_f(\tau) + 2a^2 \sin^2 \frac{\omega \tau}{2}. \quad (19)$$

Таким образом, структурная функция  $b_{\sim f}(\tau)$  представляет собой сумму структурной функции чисто случайного процесса и периодической функции, имеющей частоту  $\omega = \frac{2\pi}{24}$  и амплитуду колебаний  $2a^2$ . При  $\tau = 24 \cdot n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) второй член суммы равен нулю, и тогда

$$b_{\sim f}(\tau) = b_f(\tau). \quad (20)$$

Для рассмотренного случая структурная функция собственно случайного процесса представляет собой огибающую минимумов структурной функции  $b_{\sim f}(\tau)$ . Для интервалов  $\tau = 12,$

36, 60 и т. д.  $\sin \frac{\omega \tau}{2} = 1$  и тогда из (19) может быть определена величина

$$2a^2 = b_{\sim f}(\tau) - b_f(\tau). \quad (21)$$

Подставляя (18) в выражение для дисперсии, можно оценить вклад суточного хода метеоэлемента в величину дисперсии. После несложных преобразований можно получить:

$$\sigma_{\sim f}^2 = \sigma_f^2 + \frac{a^2}{2}. \quad (22)$$

Таким образом, суточный ход метеоэлемента приводит к возрастанию дисперсии на величину  $\frac{a^2}{2}$ , или относительная погрешность дисперсии за счет суточного хода равна  $\frac{\sigma_{\sim f}^2 - \sigma_f^2}{a^2} = 0,5$ . Этот результат соответствует оценкам, приведенным в работе [3].



Перейдем теперь к анализу полученных результатов. Исследовалась временная структурная функция количества общей облачности для Ленинграда за 4 года, с 1951 по 1954 г.

Количество общей облачности выражено, как принято, 10-балльной шкалой, от нуля — при ясном небе, до 10 баллов — при сплошной облачности.

Данные представляют собой непрерывные ежечасные наблюдения облачности, поэтому в течение одного месяца имеем около 720 наблюдений облачности.

Структурная функция рассчитана для каждого месяца, затем произведено осреднение по сезонам, так что за 4 года статистическое осреднение структурной функции для каждого сезона произведено по 12 выборкам. Такое разделение на месячные интервалы выполнено для исключения влияния периодичностей типа годового хода метеозлемента.

Структурная функция рассчитывалась для интервалов  $\tau$  от 1 до 72 час (3 суток), через 1, 2, 3, 4, 6, 8 ... по 25 значениям  $\tau$ . Выбор максимального  $\tau = 72$  час основан на предположении, что «насыщение» структурной функции будет происходить где-то около  $\tau = 2$ —3 суткам.

Расчеты производились на БЭСМ-2М. Полученные структурные функции приведены на рис. 1—4. Кривые представляют собой структурные функции количества общей облачности.

Временные структурные функции, полученные для различных сезонов, существенно различаются. Из сравнения рассчитанных функций следует, что для зимнего сезона характерна наименьшая изменчивость облачности. Насыщение структурной функции достигается при  $\tau = 40$ —44 час. Затем  $B_f(\tau)$  остается практически постоянной и асимптотически приближается к  $2\sigma_f^2 = 19,6$  (балл<sup>2</sup>). Наибольшая изменчивость облачности наблюдается в переходные сезоны: весной и осенью, что связано с неустойчивостью и частой перестройкой атмосферных процессов. Как видно из рис. 2, дисперсия облачности в весенний период значительно больше, чем в остальные сезоны. Структурная функция здесь растет до значения  $2\sigma_f^2 = 32,6$ , т. е. весной дисперсия в 1,7 раза больше, чем в зимний период.

Рассмотрим, насколько отличны полученные структурные функции для самого метеозлемента от структурных функций для отклонений от норм. В качестве норм нами были приняты средние за месяц величины балла общей облачности. Как следует из формулы (7), разница между рассматриваемыми

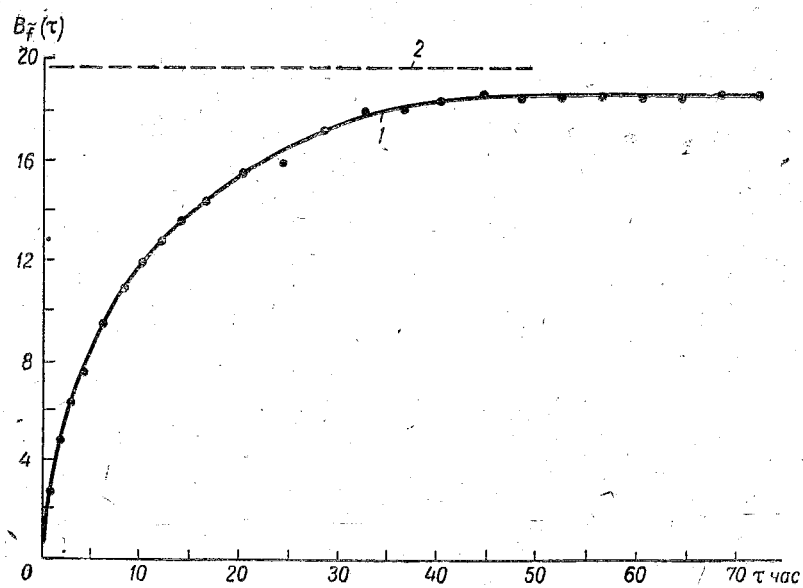


Рис. 1. Структурная функция количества общей облачности в баллах для г. Ленинграда (зима).  
1— $B_f(\tau)$ ; 2— $2\sigma^2_f$ .

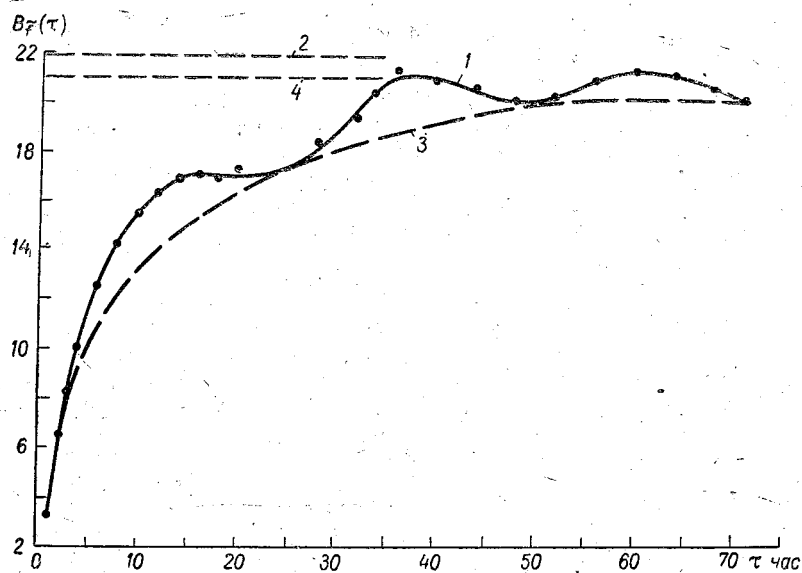


Рис. 2. Структурная функция количества общей облачности для г. Ленинграда (осень).  
1— $B_f(\tau)$ ; 2— $2\sigma^2_f$ ; 3— $B_f(\tau)$ ; 4— $2\sigma^2_f$ .

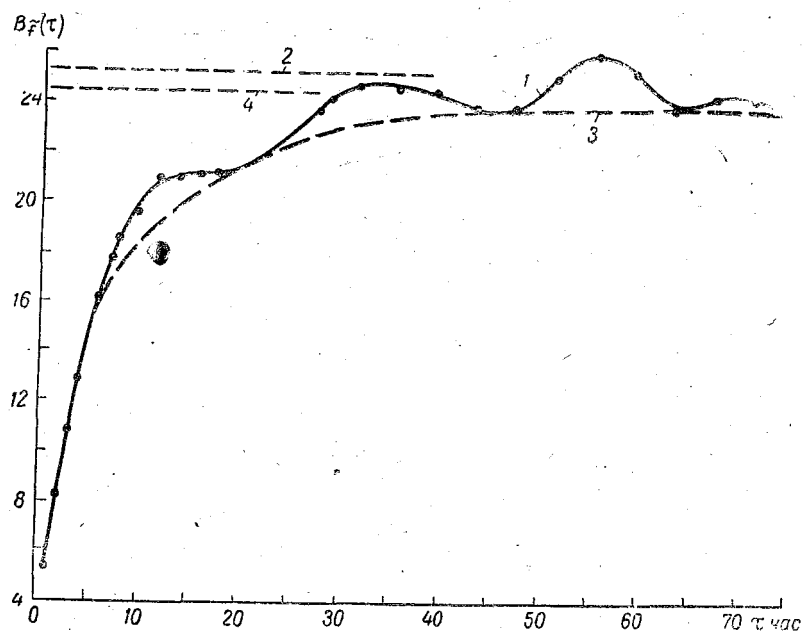


Рис. 3. Структурная функция количества общей облачности для г. Ленинграда (лето).

$$1-B_f(\tau); 2-2\sigma_f^2; 3-B_f(\tau); 4-2\sigma_f^2.$$

структурными функциями  $b_f(\tau)$  и  $B_f(\tau)$  равна квадрату разности между средними значениями метеоэлемента в моменты  $t$  и  $t+\tau$ . Оценки этой величины показывают, что она возрастает с увеличением интервала  $\tau$ . Для малых  $\tau$  величина  $[f(t)-f(t+\tau)]^2$  практически равна нулю. Однако расчеты показали, что для нашего случая максимальные значения этой величины составляют доли процента от величины структурной функции  $B_f(\tau)$ . Для весны наибольшее значение  $[f(t)-f(t+\tau)]^2$  составляет 0,035% от величин структурной функции для самого метеоэлемента.

Таким образом, для поля облачности можно считать структурные функции для значений общей облачности и отклонений ее от средних практически совпадающими. Этот факт свидетельствует о стационарности процесса для выбранного периода осреднения.

На рис. 5 приведены нормированные корреляционные функции  $\mu_f(\tau)$  для всех сезонов, вычисленные по (12). Если

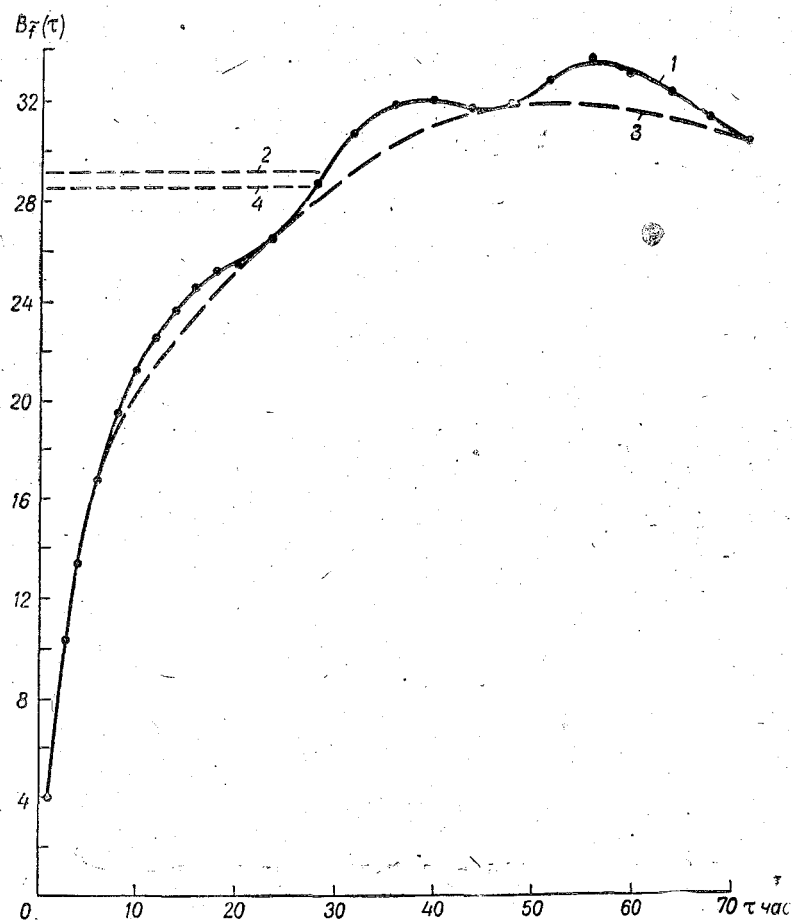


Рис. 4. Структурная функция количества общей облачности для г. Ленинграда (весна).

1— $B_{\sim}(\tau)$ ; 2— $2\sigma_{\sim}^2$ ; 3— $B_f(\tau)$ ; 4— $2\sigma_f^2$ .

принять за минимальное значение коэффициента корреляции 0,5, при котором еще наблюдается связь между величинами облачности, то можно на основании рис. 5 утверждать, что, начиная с  $\tau \cong 4$  час летом и  $\tau \cong 8$  час зимой, фактически отсутствует корреляция между значениями облачности. Этот факт говорит о малой инерционности данного метеоэлемента

в отличие, например, от поля давления [6], для которого  $\mu_f(\tau) = 0,7$  даже при  $\tau = 24$  час.

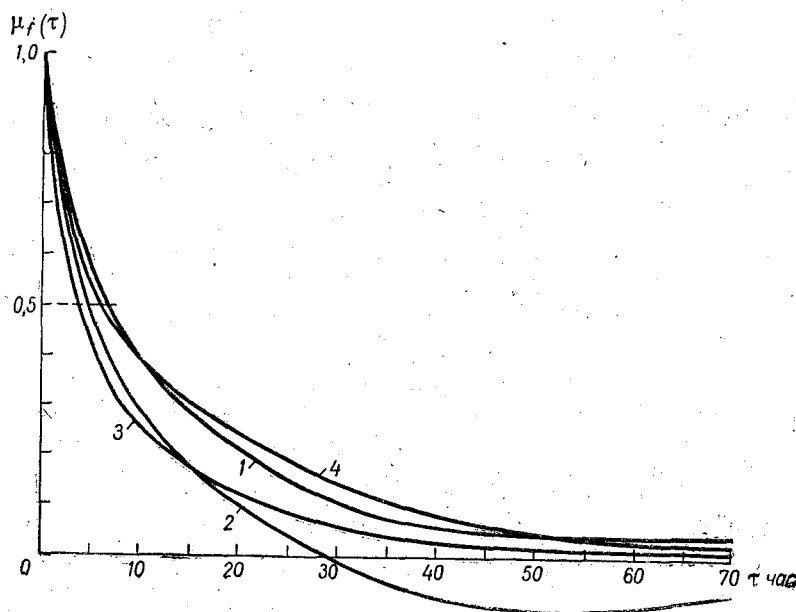


Рис. 5. Коэффициент корреляции  $\mu_f(\tau)$  количества общей облачности для г. Ленинграда.

1—зима; 2—весна; 3—лето; 4—осень.

Приведем оценки погрешностей полученных структурных характеристик поля облачности. Как было показано выше, возникновение погрешностей определяется в основном недостаточной продолжительностью периода осреднения, нарушением стационарности процесса за счет влияния периодических факторов, а также случайными ошибками наблюдений облачности. Оценку величины погрешности, вызванной случайными ошибками наблюдений, можно произвести, анализируя структурные функции количества общей облачности (рис. 1—4).

Ордината точки при  $\tau=0$  дает, согласно формуле (17), величину этой погрешности  $\overline{2\delta^2}$ . Как видно из рисунков,  $\overline{2\delta^2}$  не превышает 1,0—1,5 [балл<sup>2</sup>], т. е. составляет не более 3—5% от  $b_f(\tau)_{\tau \rightarrow \infty}$ .

Из теоретических оценок погрешности, связанной с недостаточным периодом осреднения, следует, что выбором соот-

ношения  $\frac{\tau}{T}$  для данной выборки можно добиваться определенного значения этой погрешности. Для получения структурной функции облачности с погрешностью, не превышающей 20—30% для одной выборки (при предельном  $\tau=3$  суткам), необходимо было длину ряда  $T$  взять равной 30 суткам.

Поскольку для каждого сезона за 4 года мы имеем 12 выборок, то погрешность рассчитанной сезонной структурной функции уменьшается в  $\sqrt{n-1}=\sqrt{11}=3,3$  раза (где  $n$  — число выборок). Таким образом, при выбранном  $\frac{\tau}{T}=0,1$  средняя ошибка временной структурной функции количества общей облачности, связанная с ограничением периода осреднения, для значений  $\tau$ , приближающихся к 3 суткам, составляет  $\sim 5-10\%$ .

Обратимся теперь к оценкам вкладов, вносимых в полученные структурные характеристики, периодическими функциями в виде годового и суточного хода облачности. Как указывалось выше, рассчитывая структурные характеристики с интервалами осреднения, равными одному месяцу, мы в значительной степени исключили влияние годового хода. Вклад же суточного хода облачности исключить не удалось, так как период осреднения много больше суток. Как видно из рис. 1—4, влияние суточного хода облачности зимой не наблюдается, кривая плавно возрастает, достигая насыщения при  $\tau=32-44$  часа. В остальные сезоны  $b_f(\tau)$  имеет явно выраженную периодичность с минимумами при  $\tau \cong 24, 48, 68-72$  час, т. е. период колебания кривых соответствует периоду суточного хода облачности.

Как было показано выше, в первом приближении доля структурной функции, связанная с влиянием суточного хода, определяется выражением  $2a^2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}$  в формуле (19). Для  $\tau=24 \cdot n$  (где  $n=1, 2, 3 \dots$ )  $\sin \frac{\omega\tau}{2}=0$  и тогда  $b_{\sim}(\tau)=b_f(\tau)$ , т. е. структурная функция чисто случайного процесса представляет собой огибающую минимумов нашей эмпирической функции. Для  $\tau=12, 36, 60$  и т. д.  $\sin \frac{\omega\tau}{2}=1$  и тогда получаем (21).

$$2a^2 = b_{\sim}(\tau) - b_f(\tau).$$

По рис. 2, 3, 4 можно получить среднюю амплитуду  $2a$  суточного хода количества общей облачности для разных сезонов (см. табл. 1).

Таблица 1

| Сезон | $2\bar{a}^2$ | $\bar{a}^2$ | $2\bar{a}$ | $\frac{2\bar{a}}{\sqrt{b_f(\infty)}} (\%)$ | $\frac{2\bar{a}^2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{b_f(\infty)} (\%)$ |
|-------|--------------|-------------|------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Весна | 1,28         | 0,64        | 1,6        | 29,0                                       | 4,5                                                               |
| Лето  | 1,50         | 0,75        | 1,7        | 35,0                                       | 6,2                                                               |
| Осень | 1,76         | 0,88        | 1,9        | 40,0                                       | 8,4                                                               |

Значения  $\bar{a}^2$  представляют собой вклады, вносимые суточным ходом величины удвоенной дисперсии  $b \sim (\tau) = 2\sigma^2 \sim$  для разных сезонов (22). На рис. 2—4 линии 4 являются величинами удвоенной дисперсии облачности, как «собственно» случайного процесса, т. е. за вычетом рассеяния, вносимого суточным ходом облачности.

Таким образом, для сезонов, в которых замечен суточный ход облачности, амплитуда его (табл. 1) составляет 30—40% от максимальной изменчивости количества общей облачности  $\sqrt{b_f(\infty)}$ . Вклад, вносимый в структурную функцию суточной периодичностью хода облачности, составляет от 4 до 8%.

Как отмечалось выше, характеристики временной структуры облачности могут быть использованы при разработке схемы статистического прогноза, а также при оценке погрешностей выбранной схемы. В качестве простейшего примера такой оценки укажем, что при инерционном прогнозе, когда в качестве прогнозируемого значения метеоэлемента задается его значение в последний срок наблюдений, средняя квадратическая ошибка такого прогноза равна  $\sqrt{b_f(\tau)}$ .

$$E^2 = [\bar{f}(t+\tau) - \bar{f}(t)]^2 = b_f(\tau), \quad (23)$$

где  $\bar{f}(t+\tau)$  — истинное значение метеоэлемента в момент прогноза  $t+\tau$ ,  $\bar{f}(t)$  — спрогнозированное значение метеоэлемента, равное значению его в последний перед прогнозом момент  $t$ .

Следует отметить, что методы линейной экстраполяции, использующие историю развития процесса (т. е. если в прогнозе используются значения метеоэлемента за несколько предыдущих относительно момента прогноза сроков наблюдений), оказываются точнее рассмотренных выше. Все же, при этом

среднюю квадратическую ошибку экстраполяции, определяемую временной структурой метеоэлемента, нельзя существенно снизить, только увеличивая число используемых предыдущих сроков наблюдений [6].

Ошибки значительно снижаются, если при экстраполяции учитывается пространственно-временная изменчивость метеоэлемента. Это значит, что при экстраполяции используются наблюдения метеоэлемента не только в точке, для которой дается прогноз, но и в соседних точках пространства. Поэтому впоследствии предполагается изучение характеристик пространственно-временной структуры поля облачности и использование их в некоторых схемах статистического прогноза.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин М. И. Некоторые вопросы теории метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 19 (81), 1950.
2. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 21, 1961.
3. Гандий Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоздат, Л., 1963.
4. Гандий Л. С., Багрова Е. И. О структуре поля высот поверхности 500 мб. Труды ГГО, вып. 99, 1959.
5. Гандий Л. С., Кузнецова П. И. О структуре полей давления и ветра в средней тропосфере при разных формах циркуляции. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
6. Борисенков Е. П. Физико-статистические методы анализа и предвычисления метеорологических полей. Труды ААНИИ, т. 263, 1963.
7. Обухов А. М. Статистическое описание непрерывных полей. Труды геофизического института. Изв. АН СССР, № 24 (15), 1954.
8. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Ричардсона. ДАН СССР, т. 30, № 4, 1941.
9. Яглом А. И. Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи математических наук, № 7, вып. 5 (51), 1952.
10. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, М., 1962.
11. Серебрянников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. Изд-во «Наука», М., 1965.
12. Бандат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. Изд-во «Наука», М., 1965.
13. Лайхтман Д. Л., Каган Р. Л. Некоторые вопросы рационализации снегосъемок. Труды ГГО, вып. 108, 1960.
14. Бютнер Э. К. О вычислении структурных и корреляционных функций по конечному интервалу наблюдений. Труды ГГО, вып. 144, 1963.
15. Ариель Н. З. О погрешности расчета структурных характеристик по экспериментальным данным. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
16. Багров Н. А. О возможных подходах к решению задачи прогноза погоды. Труды ЦИП, вып. 116, 1962.
17. Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеоэлементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 13, 1946.



---

*С. В. Солонин*

**О ВЛИЯНИИ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ  
СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА НА РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА  
КЛИМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВЕТРА**

Приводятся результаты численного эксперимента, позволяющие оценить степень влияния эллиптичности в распределении вектора ветра на величину среднего квадратического отклонения эквивалентного ветра за длительный период. Показано, что для достаточно протяженных воздушных трасс замена эллиптического распределения круговым не вносит существенных погрешностей. Дана физическая интерпретация полученных результатов.

При расчете климатических характеристик эквивалентного ветра обычно исходят из нормального кругового закона распределения случайного вектора [2, 3, 7]. Однако обработка и анализ материалов ветрового зондирования над различными географическими районами за длительный период показывает, что вектор ветра является двумерной случайной величиной, подчиняющейся закону нормального эллиптического распределения. Возникает важный для навигационной практики вопрос о погрешностях расчетных значений климатических характеристик эквивалентного ветра за счет пренебрежения эллиптичностью и использования более простых соотношений кругового распределения.

В работах А. С. Марченко [1] и автора [4, 5] были исследованы эти погрешности в отдельных пунктах воздушных трасс.

Результаты расчетов показали, что пренебрежение эллиптичностью иногда приводит к большим ошибкам [1]. Тем не менее на основе простых физических соображений в работах [4, 5] априори был сделан вывод об эффективности и достаточно высокой точности расчетов для воздушных трасс значительной протяженности по круговому закону. Вместе с тем

автор обращал внимание на необходимость более детального изучения этого вопроса.

В данной статье методом численного эксперимента исследуем точность замены эллиптического распределения круговым для воздушной трассы большой протяженности, проходящей в различных физико-географических и климатических районах с хорошо выраженной эллиптичностью в распределении вектора ветра в отдельных ее пунктах. В качестве такой воздушной трассы взята трасса Москва—Гавана.

### 1. Исходные соотношения и их предварительный анализ

Согласно определению, величина эквивалентного ветра в пункте равна разности между путевой  $W$  и воздушной  $V$  скоростями [2, 3, 7].

Опуская элементарные выкладки, можно записать

$$w = V \sqrt{1 - \frac{u^2}{V^2} \sin^2(\delta - \alpha)} - u \cos(\delta - \alpha) - V, \quad (1)$$

где  $u$  — скорость ветра,  $\delta$  — направление ветра,  $\alpha$  — путевой угол.

Если направить ось абсцисс ( $x'$ ) вдоль линии пути, а ось ординат ( $y'$ ) нормально к ней, то мгновенное значение эквивалентного ветра в пункте в такой системе координат, которую назовем навигационной, будет равно

$$w = u_{x'} - V + \sqrt{V^2 - u_{y'}^2}. \quad (2)$$

Новая система координат по отношению к стандартным метеорологическим координатам получается путем поворота координатных осей на угол  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  (угол поворота отсчитывается в направлении, обратном движению часовой стрелки) [1, 4, 5].

Для облегчения анализа перейдем к безразмерным величинам.

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{V} &= \tilde{w}, \\ \frac{u_{x'}}{V} &= -\frac{u}{V} \cos(\delta - \alpha) = \tilde{u}_{x'}, \\ \frac{u_{y'}}{V} &= \frac{u}{V} \sin(\delta - \alpha) = \tilde{u}_{y'}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

из формулы (2) получим

$$\tilde{w} = \tilde{u}_{x'} - \left(1 - \sqrt{1 - \tilde{u}_{y'}^2}\right). \quad (4)$$

Среднее значение эквивалентного ветра в пункте за длительный период [2, 3, 7]

$$\bar{w} = \bar{u}_{x'} - \frac{1}{2V} (\bar{u}_{y'}^2 + \sigma_{y'}^2), \quad (5)$$

где  $\sigma_{y'}$  — среднее квадратическое отклонение  $u_{y'}$  компонента ветра.

Так как

$$\bar{u}_{x'} = u_r \cos \varepsilon,$$

$$\bar{u}_{y'} = u_r \sin \varepsilon,$$

то формулу (5) можно записать в другом виде

$$\bar{w} = u_r \cos \varepsilon - \frac{u_r^2}{2V} \sin^2 \varepsilon - \frac{\sigma_{y'}^2}{2V}, \quad (6)$$

где индексом  $r$  обозначены параметры среднего вектора ветра (результатирующего ветра),  $\varepsilon$  — угол ветра.

Вероятность различных значений эквивалентного ветра, если исходить из того, что его распределение подчиняется нормальному закону, равна

$$f(w) = \frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} (w - \bar{w})^2 \right]. \quad (7)$$

Эквивалентный ветер по воздушной трассе определяется по его значениям в отдельных пунктах трассы, т. е.

$$w_M = \sum_{i=1}^n w_i \frac{t_i}{T} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i, \quad (8)$$

где  $w_M$  — эквивалентный ветер по воздушной трассе,  $t_i$ ,  $T$  — соответственно время пролета участка трассы со значением эквивалентного ветра  $w_i$  и общая продолжительность полета по трассе,  $n$  — число участков, на которые разбита трасса при выполнении расчетов.

Формула (8) справедлива и для расчета среднего значения эквивалентного ветра по воздушной трассе за длительный период, если  $w_i$  заменить на  $\bar{w}_i$ .

При планировании полетов и описании воздушных трасс обычно используются климатические характеристики эквивалентного ветра по воздушной трассе в целом: среднее значение, изменчивость и вероятность его различных значений.

Согласно Сойеру [8], среднее квадратическое отклонение эквивалентного ветра по трассе  $\sigma_{w_M}$  связано со средними квадратическими отклонениями эквивалентного ветра в пунктах соотношением

$$\sigma_{w_M} = K \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{\omega_i}^2}, \quad (9)$$

где  $K$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от протяженности трассы.

Расчет климатических характеристик эквивалентного ветра по воздушным трассам непосредственно по данным наблюдений за ветром сопряжен с очень большим объемом вычислений, однако применение статистических методов сводит их до минимума.

Для анализа погрешностей, возникающих при этом, воспользуемся обозначениями (3).

Так как в самом общем случае распределение вектора ветра как случайной величины подчиняется закону нормального эллиптического распределения, то применительно к проекциям вектора ветра  $\tilde{u}_{x'}$  и  $\tilde{u}_{y'}$  в навигационной системе координат имеем

$$f(\tilde{u}_{x'}, \tilde{u}_{y'}) = \frac{1}{2\pi \tilde{\sigma}_{x'} \tilde{\sigma}_{y'} \sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R^2)} \left[ \frac{(\tilde{u}_{x'} - \bar{\tilde{u}}_{x'})^2}{\tilde{\sigma}_{x'}^2} - \frac{2R(\tilde{u}_{x'} - \bar{\tilde{u}}_{x'})(\tilde{u}_{y'} - \bar{\tilde{u}}_{y'})}{\tilde{\sigma}_{x'} \tilde{\sigma}_{y'}} + \frac{(\tilde{u}_{y'} - \bar{\tilde{u}}_{y'})^2}{\tilde{\sigma}_{y'}^2} \right] \right\}, \quad (10)$$

где  $\tilde{\sigma}_{x'} = \frac{\sigma_{x'}}{V}$ ,  $\tilde{\sigma}_{y'} = \frac{\sigma_{y'}}{V}$ ,  $R$  — коэффициент корреляции между компонентами вектора ветра  $u_{x'}$ ,  $u_{y'}$ .

Коэффициент корреляции  $R$  связан с коэффициентом корреляции  $r$ , определяемым в стандартной метеорологической системе координат, соотношением

$$R = \frac{\xi \sin 2(\psi - \alpha)}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 2(\psi - \alpha)}}, \quad (11)$$

где  $\psi = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$  — угол поворота большой оси эллипса рассеивания от меридиана, отсчитываемый от северного направления меридиана по часовой стрелке,  $\xi$  — параметр эллиптичности.

Согласно (4), значение эквивалентного ветра является функцией от компонент вектора ветра, имеющей вид

$$\tilde{w} = \tilde{u}_{x'} - \varphi(\tilde{u}_{y'}). \quad (12)$$

Поэтому среднее значение эквивалентного ветра и его дисперсия соответственно будут равны

$$\bar{\tilde{w}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{u}_{x'} - \varphi(\tilde{u}_{y'})] f(\tilde{u}_{x'}, \tilde{u}_{y'}) \tilde{d}u_{x'} \tilde{d}u_{y'}, \quad (13)$$

$$\tilde{\sigma}_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{u}_{x'} - \varphi(\tilde{u}_{y'})]^2 f(\tilde{u}_{x'}, \tilde{u}_{y'}) \tilde{d}u_{x'} \tilde{d}u_{y'} - \bar{\tilde{w}}^2. \quad (14)$$

Из теории эквивалентного ветра следует, что понятие эквивалентного ветра имеет смысл лишь при  $|\tilde{u}_{y'}| < 1$ , однако, в выражениях (13) и (14) производится интегрирование по всему бесконечному интервалу измерения  $\tilde{u}_{y'}$ . Этим самым, на первый взгляд, допускается некоторая неточность. Однако опыт полетов показывает, что практически  $\tilde{u}_{y'}$  никогда не бывает больше единицы (воздушная скорость самолета всегда больше скорости ветра). Поэтому значения случайной величины  $\tilde{u}_{y'}$  сосредоточены внутри интервала  $(-1, 1)$ .

Разложив  $\varphi(\tilde{u}_{y'})$  в ряд по степеням малой величины  $\tilde{u}_{y'}$ , пренебрегая степенями выше второй, после интегрирования (13) и (14) имеем

$$\bar{\tilde{w}} = \bar{\tilde{u}}_{x'} - \frac{1}{2} \left( \tilde{\sigma}_{y'}^2 + \bar{\tilde{u}}_{y'}^2 \right), \quad (15)$$

$$\tilde{\sigma}_w^2 = \tilde{\sigma}_{x'}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{y'}^2 \left( \tilde{\sigma}_{y'}^2 + 2\bar{\tilde{u}}_{y'}^2 \right) - 2R \tilde{\sigma}_{x'} \tilde{\sigma}_{y'} \bar{\tilde{u}}_{y'}. \quad (16)$$

Если перейти от безразмерной величины  $\tilde{w}$  к значению эквивалентного ветра, то формулы (15) и (16) примут вид

$$\bar{w} = \bar{u}_{x'} - \frac{1}{2V}(\sigma_{y'}^2 + \bar{u}_{y'}^2), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_w &= \sigma_{x'} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{y'}^2(\sigma_{y'}^2 + 2\bar{u}_{y'}^2)}{2V^2\sigma_{x'}^2} - \frac{2R\sigma_{y'}\bar{u}_{y'}}{V\sigma_{x'}}} \approx \\ &\approx \sigma_{x'} \left( 1 + \frac{\sigma_{y'}^2(\sigma_{y'}^2 + 2\bar{u}_{y'}^2)}{4V^2\sigma_{x'}^2} - \frac{R\sigma_{y'}\bar{u}_{y'}}{V\sigma_{x'}} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Проанализируем полученные формулы. При больших воздушных скоростях самолета и малых значениях скорости ветра влиянием членов, в которые входит значение воздушной скорости, как показывает даже грубая оценка, можно пренебречь, т. е. рассматривать  $w = u_{x'}$ ,  $\sigma_{x'} = \sigma_w$ .

Более внимательно следует проанализировать случаи, когда трасса полета проходит перпендикулярно преобладающим направлениям струйных течений и ветровой режим на трассе характеризуется очень сильно выраженной эллиптичностью.

Величины  $\sigma_{x'}$  и  $\sigma_{y'}$  соответственно равны

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma}{V} \sqrt{\frac{1}{2} [1 + \xi \cos 2(\psi - \alpha)]}, \quad (19)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma}{V} \sqrt{\frac{1}{2} [1 - \xi \cos 2(\psi - \alpha)]}. \quad (20)$$

Поэтому пренебрежение эллиптичностью при расчете среднего значения эквивалентного ветра приводит к ошибке, не превосходящей по абсолютной величине  $\frac{\sigma^2}{4V} \xi$ .

Существенно должна влиять эллиптичность в распределении вектора ветра на изменчивость эквивалентного ветра.

Величина относительной погрешности при вычислении среднего квадратического отклонения эквивалентного ветра за счет неучета эллиптичности, согласно [4, 5], равна

$$\frac{\Delta \sigma_w}{\sigma_w} = \frac{\xi \cos 2(\psi - \alpha)}{2 + \xi \cos 2(\psi - \alpha)}. \quad (21)$$

## 2: Методика расчетов и некоторые результаты численного эксперимента

Для исследования влияния эллиптичности на величину эквивалентного ветра и его квадратического отклонения за длительный период по трассе Москва—Гавана были использованы статистические характеристики высотного ветра над северным полушарием, заимствованные из атласа, изданного Управлением начальника морских операций США [6]. Использование этого атласа вызвано тем, что он является единственным известным нам изданием, в котором приводятся коэффициенты корреляции между составляющими ветра.

В указанном атласе, кроме того, помещены среднесезонные карты распределения среднего вектора ветра  $u_r$  (его модуль и направление), среднего квадратического векторного отклонения  $\sigma_r$ , его составляющих  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и ряда других статистических характеристик на различных уровнях.

По воздушной трассе было выбрано 16 пунктов, в которых с атласа снимались значения  $u_r$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ .

В тексте и таблицах для удобства исследования пункты трассы обозначены согласно их порядковым номерам.

Расчет климатических характеристик эквивалентного ветра производился для воздушной скорости 800 км/час, на уровнях 300, 200 и 100 мб поверхностей, для всех календарных сезонов при путевых углах, указанных в таблице 1.

Таблица 1

| Путевые углы (в градусах) в отдельных пунктах трассы |              |        |              |        |              |
|------------------------------------------------------|--------------|--------|--------------|--------|--------------|
| Пункты                                               | Путевой угол | Пункты | Путевой угол | Пункты | Путевой угол |
| 1                                                    | 356          | 6      | 235          | 11     | 202          |
| 2                                                    | 356          | 7      | 223          | 12     | 255          |
| 3                                                    | 350          | 8      | 218          | 13     | 249          |
| 4                                                    | 275          | 9      | 210          | 14     | 242          |
| 5                                                    | 255          | 10     | 205          | 15     | 235          |

При расчетах  $\sigma_w$  по формуле (9) были использованы уточненные Грейстоуном [6] значения коэффициентов  $K$ .

Сопоставление результатов расчетов среднего значения эквивалентного ветра по воздушной трассе за различные сезоны показывает, что между среднесезонными значениями эквивалентного ветра, определенными по круговому закону и эллиптическому, нет существенных расхождений. Такой ре-

Значения средних квадратических отклонений эквивалентного ветра в различных пунктах воздушной трассы Москва — Гавана, рассчитанных по эллиптическому закону.

| Уровень | Сезон | Пункты воздушной трассы |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|-------|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|         |       | 1                       | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
| 300 мб  | весна | 46,7                    | 39,9 | 34,0 | 40,5 | 47,8 | 50,0 | 61,0 | 60,5 | 61,8 | 63,2 | 60,2 | 57,0 | 56,5 | 45,3 | 39,3 |
|         | лето  | 47,6                    | 44,2 | 33,6 | 32,2 | 39,6 | 47,0 | 51,8 | 51,9 | 55,2 | 58,0 | 49,1 | 36,5 | 30,8 | 27,5 | 26,4 |
|         | осень | 46,5                    | 52,6 | 36,4 | 38,0 | 39,8 | 51,0 | 54,4 | 61,0 | 63,0 | 65,3 | 57,5 | 48,8 | 48,3 | 41,4 | 38,1 |
|         | зима  | 51,5                    | 47,6 | 39,3 | 36,4 | 53,2 | 52,4 | 56,5 | 57,7 | 60,5 | 65,0 | 65,9 | 65,4 | 59,9 | 50,7 | 44,6 |
| 200 мб  | весна | 39,1                    | 36,9 | 34,9 | 33,2 | 38,5 | 43,8 | 48,0 | 45,0 | 48,0 | 54,4 | 57,7 | 61,0 | 61,0 | 53,8 | 48,1 |
|         | лето  | 42,0                    | 36,5 | 29,9 | 28,4 | 27,5 | 32,6 | 37,8 | 51,0 | 47,1 | 50,8 | 50,2 | 42,6 | 39,5 | 37,5 | 36,5 |
|         | осень | 41,9                    | 37,9 | 33,3 | 37,0 | 40,5 | 39,5 | 42,2 | 47,6 | 57,2 | 58,0 | 64,1 | 56,9 | 53,8 | 48,8 | 45,2 |
|         | зима  | 40,9                    | 38,9 | 33,6 | 38,0 | 40,5 | 47,2 | 42,9 | 44,8 | 51,0 | 56,5 | 56,7 | 63,0 | 64,8 | 51,9 | 46,4 |
| 100 мб  | весна | 29,3                    | 28,9 | 23,1 | 23,1 | 31,5 | 31,2 | 32,7 | 32,6 | 29,2 | 30,4 | 35,4 | 36,4 | 36,2 | 32,5 | 31,8 |
|         | лето  | 21,7                    | 20,4 | 17,5 | 14,8 | 16,7 | 18,8 | 19,5 | 23,4 | 28,6 | 30,0 | 27,2 | 25,5 | 22,4 | 20,8 | 20,4 |
|         | осень | 25,8                    | 21,9 | 20,2 | 26,7 | 26,3 | 28,6 | 30,0 | 30,8 | 32,6 | 35,1 | 39,1 | 37,9 | 37,8 | 37,8 | 37,8 |
|         | зима  | 40,5                    | 37,9 | 36,9 | 35,0 | 37,0 | 40,0 | 38,9 | 42,0 | 42,8 | 44,5 | 44,0 | 44,0 | 41,7 | 37,8 | 37,3 |



Таблица 3

Значения средних квадратических отклонений эквивалентного ветра в различных пунктах воздушной трассы  
Москва — Гавана, рассчитанных по круговому закону

| Уровень | Сезон | Пункты воздушной трассы |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|-------|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|         |       | 1                       | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
| 300 мб  | весна | 51,0                    | 47,5 | 38,0 | 38,0 | 44,7 | 47,5 | 60,0 | 63,0 | 64,5 | 66,0 | 62,0 | 54,0 | 54,0 | 45,0 | 38,0 |
|         | лето  | 45,0                    | 46,0 | 34,0 | 33,0 | 43,0 | 50,0 | 53,0 | 53,0 | 57,0 | 59,0 | 47,5 | 37,0 | 33,0 | 29,0 | 26,0 |
|         | осень | 51,0                    | 54,0 | 39,7 | 35,5 | 39,6 | 53,8 | 57,4 | 61,7 | 66,7 | 66,7 | 58,8 | 47,6 | 47,6 | 41,8 | 36,9 |
|         | зима  | 53,9                    | 49,6 | 40,4 | 36,9 | 51,0 | 55,3 | 61,7 | 63,2 | 66,0 | 72,3 | 69,5 | 61,7 | 56,8 | 47,5 | 41,8 |
| 200 мб  | весна | 43,3                    | 40,4 | 36,9 | 32,7 | 35,5 | 40,4 | 47,6 | 48,2 | 51,0 | 56,8 | 58,8 | 56,8 | 57,4 | 54,0 | 48,3 |
|         | лето  | 39,7                    | 35,5 | 31,2 | 27,7 | 29,1 | 34,0 | 38,3 | 51,0 | 47,5 | 51,1 | 49,6 | 41,8 | 38,3 | 36,9 | 35,5 |
|         | осень | 43,3                    | 39,8 | 36,8 | 35,4 | 38,3 | 41,8 | 44,7 | 49,7 | 58,8 | 58,8 | 58,8 | 55,4 | 52,5 | 49,7 | 48,2 |
|         | зима  | 44,7                    | 46,0 | 39,7 | 35,5 | 36,9 | 42,0 | 47,5 | 49,6 | 54,0 | 58,8 | 58,8 | 58,8 | 58,8 | 48,3 | 46,0 |
| 100 мб  | весна | 30,5                    | 27,6 | 23,4 | 23,4 | 29,1 | 32,6 | 32,6 | 31,2 | 30,5 | 31,2 | 34,0 | 36,9 | 39,7 | 36,9 | 32,6 |
|         | лето  | 22,0                    | 19,8 | 17,6 | 15,6 | 15,6 | 19,8 | 21,3 | 24,8 | 29,1 | 30,5 | 27,7 | 24,8 | 23,4 | 22,0 | 21,3 |
|         | осень | 26,2                    | 24,9 | 23,4 | 23,4 | 24,9 | 29,1 | 30,5 | 32,6 | 34,0 | 35,5 | 36,8 | 36,8 | 36,8 | 36,8 | 36,8 |
|         | зима  | 38,3                    | 38,3 | 36,9 | 34,0 | 36,9 | 38,3 | 40,5 | 43,2 | 43,2 | 43,2 | 43,2 | 43,2 | 40,5 | 35,5 | 34,0 |

зультат не является неожиданным и согласуется с проведенным выше математическим анализом расчетных формул.

В табл. 2 приведены расчетные значения средних квадратических отклонений эквивалентного ветра с учетом эллиптичности в различных пунктах воздушной трассы Москва — Гавана на уровнях 300, 200 и 100 мб в различные сезоны.

Для сопоставления приведены значения средних квадратических отклонений в этих же пунктах трассы и за эти же сезоны по круговому закону (табл. 3).

Однако, как указывалось выше, в оперативной практике важно знать режимные характеристики эквивалентного ветра по воздушной трассе в целом, поэтому сравним средние квадратические отклонения эквивалентного ветра по исследуемой трассе. Результаты расчетов  $\sigma_{w_M}$  по трассе по круговому и эллиптическому законам представлены в табл. 4.

Таблица 4

Средние квадратические отклонения эквивалентного ветра, рассчитанные по круговому и эллиптическому законам

| Уровень | Сезон | По круговому<br>закону | По эллиптическому<br>закону |
|---------|-------|------------------------|-----------------------------|
| 300 мб  | весна | 22,0                   | 21,7                        |
|         | лето  | 18,6                   | 17,9                        |
|         | осень | 21,7                   | 21,1                        |
|         | зима  | 23,6                   | 23,4                        |
| 200 мб  | весна | 20,1                   | 20,0                        |
|         | лето  | 16,7                   | 16,8                        |
|         | осень | 20,2                   | 20,1                        |
|         | зима  | 20,6                   | 20,4                        |
| 100 мб  | весна | 13,4                   | 13,0                        |
|         | лето  | 9,6                    | 9,3                         |
|         | осень | 13,3                   | 13,4                        |
|         | зима  | 16,6                   | 16,9                        |

Из таблицы видно, что между результатами расчетов по эллиптическому и круговому законам имеется хорошее согласие. Физически это можно объяснить тем, что в различных точках протяженной трассы оси эллипсов (большая и малая) рассеивания вектора ветра имеют различную ориентацию, а поэтому при пространственном осреднении «эффект эллиптичности» будет ослабляться. Кроме того, имеет место дополнительное сглаживание, связанное с проявлением зависимости коэффициента Сойера  $K$  от расстояния [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко А. С. Влияние эллиптичности рассеивания вектора ветра на климатические характеристики эквивалентного ветра. Труды НИИАК, вып. 25, 1964.
2. Молоканов Г. Ф. Учет ветра в дальних полетах. Воениздат, М., 1957.
3. Наровлянский Г. Я., Солонин С. В. Эквивалентный ветер и методы его расчета. Гидрометеиздат, Л., 1962.
4. Солонин С. В. Расчет климатических и навигационно-метеорологических характеристик ветра с использованием методов математической статистики. Труды ЛГМИ, вып. 19, 1963.
5. Солонин С. В. О применимости нормального кругового закона распределения случайных величин при расчете режимных и навигационно-метеорологических характеристик ветра. Труды НИИАК, вып. 25, 1964.
6. Crutcher H. L. Upper wind statistics charts of the Northern Hemisphere. Vol. 1, 2, 1959.
7. Grauston P. Equivalent headwinds at heights of 30 000, 40 000 feet along air routes. Air Ministry Met. Office. Met. Rep., № 20, London, 1958.
8. Sawyer J. S. Equivalent headwinds application of upper-wind statistics to rout planning. Met. Rep. № 6, London, 1950.

---

С. В. Солонин

## ПОЛУЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ О БАРИЧЕСКОМ ПОЛЕ И ВЕТРЕ НА ВЫСОТАХ ПО ДАННЫМ РЕЙСОВЫХ САМОЛЕТОВ

Обсуждается вопрос об использовании бортовой погоды, получаемой с транспортных самолетов, совершающих регулярные рейсы, для восполнения метеорологической информации. Анализируются соотношения между навигационными элементами, барическим полем и ветром.

### Введение

В настоящее время создается глобальная система сбора метеорологических данных, которая должна объединить наземную, аэрологическую и спутниковую информации. И тем не менее в этой системе имеется существенный пробел. Огромная территория Земли (более  $\frac{3}{4}$ ) — Мировой океан, труднодоступные районы — слабо освещена в метеорологическом отношении.

Все это создает серьезные трудности при исследовании общей циркуляции атмосферы и процессов планетарного масштаба, а также при разработке методов прогноза погоды, особенно, большой заблаговременности. Поэтому перед Всемирной метеорологической организацией (ВМО) стоит сложная задача — изыскать способы и средства восполнения недостающей метеорологической информации. На это, в частности, в своем докладе особое внимание обратил Генеральный секретарь ВМО профессор Д. А. Дэвис<sup>1</sup>.

Нам представляется, что один из наиболее доступных и эффективных путей частичного решения этой задачи — широкое использование наблюдений с рейсовых самолетов (борто-

---

<sup>1</sup> Доклад Генерального секретаря ВМО в ЛГУ им. А. А. Жданова 3 февраля 1966 г.

вой погоды). Многочисленные воздушные трассы, пересекающие Мировой океан в различных направлениях, и существующая система эшелонирования самолетов при полетах по трассам значительно облегчают последнее.

Бортовая погода (главным образом визуальные наблюдения) широко используется авиационными синоптиками. Однако эта информация является достоянием лишь тех лиц, которые непосредственно осуществляют метеорологическое обеспечение экипажей и поддерживают с ними двухстороннюю радиосвязь. По-видимому, назрела необходимость централизации сбора и анализа бортовой погоды в глобальном масштабе. Создаваемые во многих странах общегосударственные системы регулирования и управления воздушным движением и навигацией, а также применение электронных вычислительных машин в метеорологической практике позволяют преодолеть известные организационные трудности, связанные с реализацией такой системы.

В работах [1, 2, 4, 5] обсуждались отдельные аспекты сбора и использования бортовой погоды в метеорологической практике. Не рассматривая проблему в целом, проанализируем возможности получения данных о полях давления и ветра на высотах на основе навигационной информации. При этом будем исходить, что на борту самолета имеется самое необходимое навигационно-пилотажное оборудование. Само собой разумеется, привлечение более совершенной самолетной навигационной аппаратуры позволит получить более детальную метеорологическую информацию.

## **§ 1. Общие соотношения между навигационными элементами и барическим полем**

При выполнении полета по воздушной трассе пилот поддерживает постоянную высоту по барометрическому высотомеру  $z_p$  в соответствии с заданным эшелоном. Так как показания барометрического высотомера, работающего на принципе измерения атмосферного (статического) давления, изменяются только при изменении давления, то постоянство высоты по барометрическому высотомеру означает, что самолет совершает полет на уровне постоянного давления, т. е. вдоль изобарической поверхности.

Если бы можно было точно выдержать заданную высоту полета, то самолет следовал бы строго по изобарической поверхности, описывая ее профиль  $p = p(z_p = \text{const}) = \text{const}$ . При этом действительная высота полета (абсолютная и относительная) зависела бы только от распределения давления по

воздушной трассе, т. е.  $z(p)$ . Последнее в свою очередь, согласно барометрической формуле, является функцией давления на исходном (нулевом) уровне  $p_0$  и распределения температуры воздуха в слое между  $p_0$  и  $p$ .

Практически высота по прибору выдерживается с какой-то точностью, и самолет совершает колебания около изобарической поверхности, в среднем оставаясь на ее уровне. Принимая во внимание связь поля геострофического ветра с полем давления и пренебрегая небольшими отклонениями самолета от заданной изобарической поверхности, можно записать уравнение траектории самолета в неподвижной системе координат без учета кривизны Земли в следующем виде:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(x, y, z_p = \text{const}) - \frac{g}{l} \nabla z \times \vec{k}, \quad (1)$$

где  $\vec{V}$  — воздушная скорость самолета, являющаяся в общем случае функцией координат  $x, y, z_p = \text{const}$ ;  $d\vec{r}(dx, dy)$  — элементарный путь, пройденный самолетом за время  $dt$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $l$  — параметр Кориолиса;  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$  — оператор Гамильтона;  $z$  — абсолютная высота полета (при полете над морем — высота по радиовысотомеру).

В общем случае  $z = z(x, y, p, t)$  и при  $z_p = \text{const}$ <sup>1</sup> ее изменение в полете определяется соотношением

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \left( \nabla z, \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \quad (2)$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение.

Локальное изменение высоты изобарической поверхности, а следовательно, и абсолютной высоты полета  $\frac{\partial z}{\partial t}$  при современных скоростях турбореактивных самолетов, как показывает оценка, находится в пределах точности радиозондирования атмосферы, поэтому им можно также пренебречь, считая барическое поле стационарным.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = \nabla z \cdot \vec{W}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> При полете на заданном эшелоне высота в СА относительно уровня с давлением 1013,3 мб.

Здесь  $|\vec{W}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$  — скорость перемещения самолета относительно земной поверхности, называемая в самолетовождении путевой скоростью.

Обратим внимание на важное свойство навигационного треугольника скоростей в поле геострофического ветра, которое ниже будет нами использовано. Подставив в выражение (3) вместо вектора  $\vec{W}$  его значение из (1), получим

$$\frac{dz}{dt} = \nabla z \cdot \left( \vec{V} - \frac{g}{f} \nabla z \times \vec{k} \right). \quad (4)$$

Если воспользоваться свойством дистрибутивности скалярного произведения, то так как векторы  $\nabla z$  и  $\nabla z \times \vec{k}$  компланарны и  $\nabla z \cdot (\nabla z \times \vec{k}) = 0$ , соотношение (4) можно записать в виде

$$\frac{dz}{dt} = \nabla z \cdot \vec{V}. \quad (5)$$

На первый взгляд может показаться, что между соотношениями (3) и (5) имеется противоречие. В действительности они выражают физически очевидный факт, что в поле геострофического ветра через концы векторов воздушной и путевой скоростей проходит одна и та же изогипса. В поле действительного ветра это условие, естественно, не выполняется.

Введем новый параметр, получивший название параметра  $D$  и представляющий собой разность показаний радио- и барометрического высотомеров при полете над морем или большими водными бассейнами<sup>1</sup>.

$$D = z - z_p. \quad (6)$$

При  $z_p = \text{const}$ ,  $D = D(x, y, z_p = \text{const})$ . Дифференцируя по времени, получим

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dz}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \left( \nabla D, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{\partial z}{\partial t} + \left( \nabla z, \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \quad (8)$$

$$\nabla D = \nabla z. \quad (9)$$

<sup>1</sup> Необходимо, чтобы показания радиовысотомера не были искажены влиянием неровностей рельефа.

Таким образом, изменение параметра  $D$  во время полета тождественно изменению высоты изобарической поверхности, соответствующей  $z_p = \text{const}$ , а градиент параметра  $D$  характеризует составляющую градиента барического поля вдоль линии пути.

При полете в размытых барических полях, когда градиенты давления неизмеримо малы, или параллельно изобарам (изогипсам)  $\nabla D = 0$ ;  $D = \text{const}$ . (10)

Преобразуем соотношение (6), для чего продифференцируем его по  $z_p$

$$\frac{\partial D}{\partial z_p} = \frac{\partial z}{\partial z_p} - 1. \quad (11)$$

Согласно уравнению статики атмосферы,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho; \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z_p} = -g\rho_{\text{ст}}; \quad (13)$$

Подставив уравнения (12) и (13) в (11) и воспользовавшись уравнением состояния, получим

$$\frac{\partial D}{\partial z_p} = \frac{\rho_{\text{ст}} - \rho}{\rho} = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_{\text{ст}}} = S, \quad (14)$$

где  $S$  — так называемая относительная температурная аномалия, являющаяся функцией  $T$  и  $\rho$  (между  $T_{\text{ст}}$  и  $\rho$  в СА в пределах всей тропосферы имеется однозначная связь) и используемая Беллами [7, 9] в качестве одной из координат предложенной им термодинамической диаграммы — пастаграммы. Второй координатой является  $z_p$ .

$$z_p = Rg^{-1} \bar{T}_{\text{ст}} \ln \frac{p_0}{p}, \quad (15)$$

где  $R$  — газовая постоянная сухого воздуха,  $\bar{T}_{\text{ст}}$  — средняя температура воздуха в СА в слое между  $p_0$  и  $p$ .

$$z = Rg^{-1} \bar{T}_V \ln \frac{p_0}{p} = \frac{\bar{T}_V}{\bar{T}_{\text{ст}}} z_p, \quad (16)$$

где  $\bar{T}_V$  — фактическая средняя виртуальная температура указанного выше слоя.



Остановимся на некоторых приложениях приведенных соотношений.

## § 2. Использование данных о траектории самолета для получения информации о барическом поле на высотах

Представим векторное уравнение траектории самолета (1) в виде двух скалярных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \psi - \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \psi + \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (18)$$

где  $\psi$  — угол между осью абсцисс и вектором воздушной скорости. В общем случае  $\psi = \psi(x, y, t)$ . Однако при постоянном курсе самолета  $\gamma = \text{const}$  этот угол также постоянен. Если обозначить угол между северным направлением географического меридиана и осью абсцисс через  $\zeta$ , то

$$\psi = \zeta - \gamma. \quad (19)$$

Применим подвижную систему координат, при этом пусть ось абсцисс всегда совпадает с линией пути самолета. Тогда соответственно путевой угол  $\alpha$  и  $\zeta$ ,  $\psi$  и угол сноса  $\varphi$  будут тождественно равны между собой, то есть

$$\psi = \varphi = \zeta - \gamma = \alpha - \gamma. \quad (20)$$

Так как в этом случае  $\frac{dy}{dt} = 0$ , то система уравнений (17) и (18) преобразуется к виду

$$\text{grad}_y H = \frac{l}{A_0} (V \cos \varphi - W), \quad (17')$$

$$\text{grad}_x H = \frac{l}{A_0} V \sin \varphi, \quad (18')$$

где  $A_0$  — постоянная, зависящая от единиц измерения геопотенциала. Остальные обозначения пояснялись выше.

Эти уравнения в силу принятой методики измерения навигационных элементов являются конечно-разностными. Однако при переходе от производных к конечным разностям их точность по сравнению с уравнениями (17) и (18) не только не понижается, а наоборот, возрастает, так как геострофические соотношения при пространственном осреднении выполняются лучше, чем в точке. Это следует из теоретических работ

А. М. Обухова, А. С. Мони́на и др. об адаптации поля давления к полю ветра и анализа эмпирических данных [6, 8]. Например, в работе [6] показано, что агеострофические составляющие в движущемся воздухе (использовался метод Лагранжа) знакопеременны и распределяются случайным образом (подчиняются нормальному закону распределения случайных величин), поэтому при осреднении действительный ветер приближается к геострофическому.

Таким образом, если в полете экипаж определил путевую скорость и угол сноса (эта информация регистрируется в бортовом журнале), то можно найти градиент геопотенциала на уровне полета.

Из соотношений (17') и (18') получаем

$$\text{grad } H = \frac{l}{A_0} \sqrt{V^2 + W^2 - 2VW \cos \varphi}. \quad (21)$$

В частном случае, когда  $\varphi = 0$ , выражение (21) приобретает вид

$$\text{grad } H = \frac{l}{A_0} \omega.$$

где  $\omega$  — эквивалентный ветер.

Заметим, что величина  $\text{grad } H$  могла быть определена также на основании формулы (3). Действительно, если вычислить скалярное произведение в правой части уравнения (3) с учетом сделанных допущений, то получим

$$\text{grad}_x H = \frac{g(z_2 - z_1)}{A_0 W t}. \quad (3')$$

Однако если в полете путевая скорость неизвестна и ее нельзя определить, число неизвестных в системе уравнений (17') и (18') становится больше числа уравнений. Тем не менее по значению угла сноса и других навигационных элементов и в этом случае можно получить некоторые характеристики барического поля.

Направим ось абсцисс вдоль вектора воздушной скорости, тогда из уравнений (17) и (18) имеем

$$\frac{dx}{dt} = V - \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (22)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (23)$$

Поделив уравнение (22) на (23) и выполнив элементарные преобразования, получим

$$dy = \frac{g}{lV} \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right). \quad (24)$$

Так как в правой части соотношения (24) в скобках имеем полный дифференциал, то после интегрирования уравнения (24) от 0 до  $L$  ( $y_0=0$ ,  $y_1=L$ ), учитывая выбранное направление осей координат, получим

$$\text{grad}_x H = \frac{lL}{A_0 t}, \quad (25)$$

где  $L$  — боковое уклонение самолета относительно линии курса (первоначального направления) за время  $t$ .

Или, если воспользоваться эквивалентной угловой характеристикой бокового уклонения самолета — поправкой в курс  $\Delta\gamma$ , имеем

$$\text{grad}_x H = \frac{lV \text{tg} \Delta\gamma}{A_0}. \quad (26)$$

Таким образом, можно определить составляющие барического градиента на высоте полета, если известны боковое отклонение самолета, поправка в курс или угол сноса.

Определив составляющие градиента геопотенциала на двух различных курсах<sup>1</sup>, и в этом случае найдем значение градиента геопотенциала.

Для удобства определения составляющих градиента геопотенциала в зависимости от величины угла сноса и бокового отклонения самолета построены специальные номограммы (рис. 1 и 2).

Номограмма, представленная на рис. 1, построена по формуле (25).

По оси абсцисс вправо отложены боковые отклонения самолета, влево — значения градиента геопотенциала в *гп. дкм* на 100 км. Наклонные линии справа представляют собой семейство изолиний времени, а слева — изолиний географической широты места. Порядок работы с номограммой следующий: от значения бокового отклонения на оси абсцисс поднимаемся вертикально вверх до изолинии, соответствующей времени полета, а далее перемещаемся параллельно оси абсцисс

<sup>1</sup> Необходимо выполнить специальный маневр или использовать данные двух самолетов, выполняющих полет в интересующем районе на различных курсах.

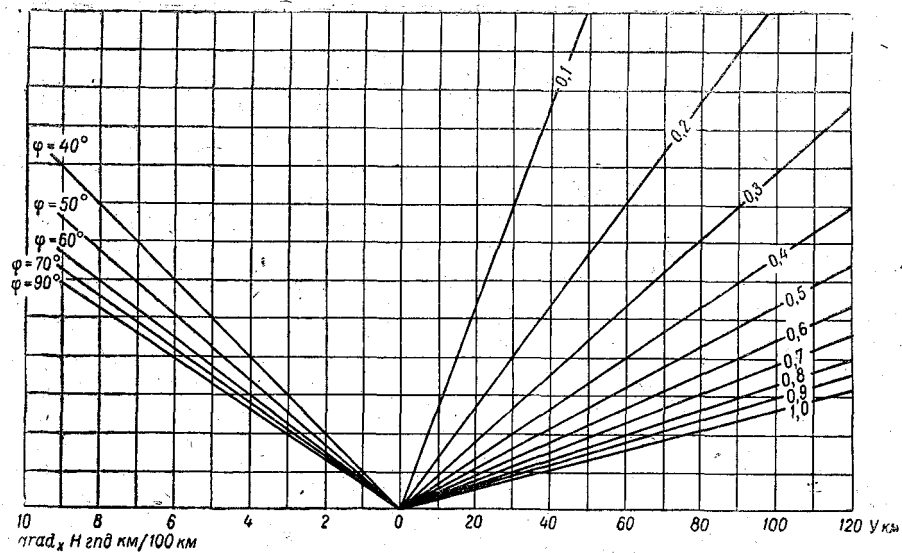


Рис. 1. Номограмма для определения градиента геопотенциала по значению бокового уклона самолета.

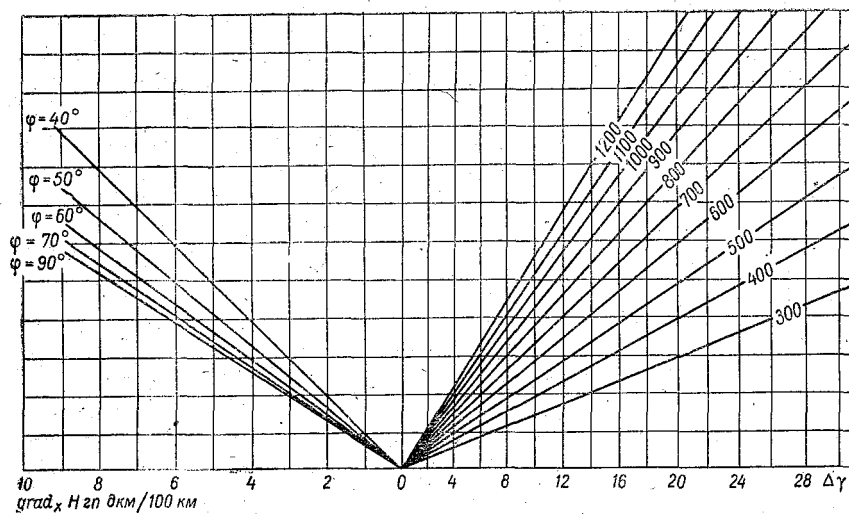


Рис. 2. Номограмма для определения градиента геопотенциала по значению поправки в курс (угла сноса).

до значения средней географической широты маршрута. Опускаясь от полученной точки вертикально вниз, на оси абсцисс находим значение градиента геопотенциала.

Номограмма на рис. 2 предназначена для определения составляющей градиента геопотенциала по значению поправки в курс (угла сноса). Номограмма построена по формуле (26).

Исходными величинами для определения составляющей градиента геопотенциала являются: воздушная скорость, значение угла сноса и широта места.

Номограмма аналогична рассмотренной выше.

Порядок работы с номограммой: от значения поправки в курс (угла сноса) на оси абсцисс поднимаемся вертикально вверх до изолинии воздушной скорости, затем перемещаемся параллельно оси абсцисс влево до значения средней широты маршрута полета и, опускаясь от полученной точки вертикально вниз, на оси абсцисс слева читаем значение градиента геопотенциала.

Знание барического градиента позволяет нанести изогипсы по маршруту полета через определенные интервалы. Однако этих данных еще недостаточно для суждения о поле давления на высоте полета: изогипсы необходимо обозначить. Для этого достаточно знать абсолютную высоту соответствующей изобарической поверхности в какой-либо точке интересующего района.

Абсолютную высоту изобарической поверхности полета в одной или нескольких точках можно определить при помощи барометрического высотомера, если ввести поправки на отклонение температуры и давления воздуха от стандартных значений, или при помощи радиовысотомера.

Основное достоинство рассмотренного способа получения информации о поле давления на высотах заключается в том, что в качестве исходных данных используются такие навигационные элементы, которые не требуют специального оборудования на самолете и практически всегда известны экипажу.

Недостаток — большая вероятность значительных систематических ошибок, поскольку ошибка в определении высоты опорной точки скажется на всем поле. Однако следует иметь в виду, что общая картина барического поля при этом не будет нарушена. Таким образом, даже при грубом просчете синоптик получает в целом весьма полезные сведения.

### § 3. Определение высот основных изобарических поверхностей при помощи радио- и барометрического высотомеров

В связи с тем, что на современных самолетах устанавливаются радио- и барометрические высотомеры, открываются дополнительные возможности для получения данных о поле давления на высотах.

Проинтегрируем соотношение (14) для слоя между уровнем полета и ближайшей основной изобарической поверхностью. Для этого введем среднюю температуру рассматриваемого слоя и допустим замену отношения средних температур отношением их локальных значений на уровне полета.

После интегрирования будем иметь

$$D_s - D = \frac{T}{T_{\text{ст}}}(z_{p_s} - z_p) - (z_{p_s} - z_p). \quad (27)$$

Здесь индексом  $s$  обозначены параметры, относящиеся к основной (стандартной) изобарической поверхности.

Используя равенство (6), получим

$$z_s = z + \frac{T}{T_{\text{ст}}}(z_{p_s} - z_p). \quad (28)$$

Для каждого основного (стандартного) уровня величина  $z_{p_s}$  является постоянной. Температура воздуха в стандартной атмосфере однозначно связана с высотой  $z_p$ . Следовательно, значение  $T_{\text{ст}}$  можно определить в зависимости от показаний барометрического высотомера  $z_p$ .

Если выразить высоту основной изобарической поверхности в геопотенциальных декаметрах, то формула (28) примет вид

$$H_s = \frac{g}{98} [z + F(T, z_p)], \quad (29)$$

где  $H_s$  — высота основной изобарической поверхности в геопотенциальных декаметрах;

$$F(T, z_p) = \frac{T}{T_{\text{ст}}}(z_{p_s} - z_p).$$

Однако принимая во внимание, что геопотенциал, выраженный в геопотенциальных метрах, численно достаточно близок к линейной высоте, измеренной в метрах, равенство (29) можно записать в виде

$$H_s = 0,1z + F(T, z_p). \quad (30)$$

Для сокращения расчетов при определении высот основных изобарических поверхностей по данным, сообщаемым с борта самолета, удобно заранее составить таблицы функций  $F(T, z_p)$ , задаваясь возможными значениями температуры воздуха на высоте полета и показаниями барометрического высотомера.

Оценим априори возможную точность определения высот основных изобарических поверхностей при помощи радио- и барометрического высотомеров.

При выводе формулы (30) мы приняли, что  $g=9,8$  м/сек<sup>2</sup> и пренебрегли изменением ускорения силы тяжести при изменении широты места. Ошибки за счет этого допущения представлены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, ошибки при вычислении высоты 850, 700 и 500 мб поверхностей на широтах 50°, 60°, 70° по упрощенной формуле не превышает 1,1 гп. дкм. Для 300 и 200 мб изобарических поверхностей ошибки лежат в пределах от 0,4 гп. дкм до 3 гп. дкм.

Таблица 1

Ошибки (в гп. дкм) при определении высот изобарических поверхностей за счет пренебрежения изменением силы тяжести с широтой

| $\varphi$ , град | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   | 80   |
|------------------|------|------|------|------|------|------|
| $p$ , мб         |      |      |      |      |      |      |
| 850              | -0,2 | -0,1 | +0,1 | +0,2 | +0,3 | +0,4 |
| 700              | -0,4 | -0,2 | +0,1 | +0,4 | +0,6 | +0,7 |
| 500              | -0,8 | -0,3 | +0,2 | +0,7 | +1,1 | +1,4 |
| 300              | -1,3 | -0,5 | +0,4 | +1,2 | +1,8 | +2,3 |
| 200              | -1,7 | -1,6 | +0,5 | +1,5 | +2,4 | +2,9 |

При интегрировании уравнения (14) средняя температура слоя воздуха, заключенного между уровнем полета и уровнем основной изобарической поверхности, была заменена ее локальным значением на высоте полета. Так как в полете определяется высота близлежащей изобарической поверхности, то толщина слоя не превышает 2000 м. Приняв вертикальный градиент температуры 6,5° на 1 км, получим, что средняя температура слоя будет отличаться от температуры на высоте полета на 6—7°.

Следовательно, погрешность при замене средней температуры слоя локальной лежит в пределах точности измерения самой температуры.

Ошибки за счет замены средней температуры слоя локальной с учетом точности измерения температуры воздуха бортовыми термометрами приведены в табл. 2.

Таблица 2

Абсолютные ошибки (в гп. дкм) при определении высот изобарических поверхностей за счет замены средней температуры слоя локальным значением на высоте полета

| $z$<br>полета,<br>м | $T_{\text{ср}} - T$<br>град<br>$p$ , мб | 1   | 3   | 5   | 7   | 9   | 11  |
|---------------------|-----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                     |                                         |     |     |     |     |     |     |
| 1000                | 850                                     | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 1,1 | 1,5 | 1,8 |
| 2000                | 850                                     | 0,2 | 0,6 | 1,0 | 1,4 | 1,8 | 2,1 |
| 3000                | 700                                     | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 4000                | 700                                     | 0,4 | 1,1 | 1,8 | 2,6 | 3,3 | 4,1 |
| 5000                | 500                                     | 0,2 | 0,7 | 1,1 | 1,6 | 2,0 | 2,5 |
| 6000                | 500                                     | 0,2 | 0,7 | 0,8 | 1,2 | 1,5 | 1,9 |
| 7000                | 500                                     | 0,6 | 1,7 | 2,8 | 4,0 | 5,1 | 6,2 |
| 8000                | 300                                     | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,6 | 4,6 | 5,6 |
| 9000                | 300                                     | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 |
| 10000               | 300                                     | 0,4 | 1,1 | 1,8 | 2,6 | 3,3 | 4,1 |
| 11000               | 200                                     | 0,4 | 1,1 | 1,8 | 2,5 | 3,3 | 4,0 |
| 12000               | 200                                     | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 |

Вычисления производились при различной высоте полета для близлежащих основных изобарических поверхностей. Как видно из таблицы, при наиболее вероятных отклонениях локальной температуры от средней в 3—5° С, ошибка не превышает 1 гп. дкм.

Ошибки увеличиваются с увеличением толщины слоя и увеличением разности между средней температурой слоя и температурой на высоте полета. Так, в полете на высоте 7000 м и при разности между средней температурой слоя и температурой, измеренной на высоте полета, в 11° высота 500 мб изобарической поверхности определяется с точностью в 6,2 гп. дкм.

Однако в практике такие случаи маловероятны, так как они предполагают наличие сверхadiaбатических градиентов температуры во всем слое. Точность определения высот изобарических поверхностей можно повысить, если при определении средней температуры слоя исходить из средних значений вертикального градиента температуры.

При полете выше определяемого уровня основной изобарической поверхности температура на высоте полета ниже средней и, следовательно, высота изобарической поверхности получится заниженной. При полете ниже высоты изобарической поверхности результат будет противоположный.



В формулу (30) входят показания радиовысотомера. Для определения высот изобарических поверхностей в большинстве случаев приходится пользоваться радиовысотомером больших высот, поскольку полеты происходят на высотах свыше 1000 м. Точность определения высот радиовысотомером малых высот равняется  $\pm (2 м + 0,05 z)$  при измерении высот от 0 до 1200 м; точность измерения высоты радиовысотомером больших высот составляет  $\pm (15 м \pm 0,0025 z)$ .

Ошибки в определении высот изобарических поверхностей за счет погрешностей в показаниях радиовысотомера приведены в табл. 3.

Как видно из таблицы, погрешности за счет данных радиовысотомера лежат в пределах точности показаний самого прибора.

В выражение (30) входят также и показания барометрического высотомера. Погрешности в определении высот изобарических поверхностей за счет использования барометрического высотомера определяются точностью отсчетов по этому прибору.

Таблица 3

Ошибки в определении высот изобарических поверхностей  
за счет погрешностей радиовысотомера

| $z$ полета, км         | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\Delta H_s$ в гп. дкм | 1,7 | 2,0 | 2,2 | 2,5 | 2,8 | 3,0 | 3,3 | 3,5 | 3,8 | 4,0 |

Для оценки точности определения высот изобарических поверхностей указанным способом в целом после логарифмирования и дифференцирования выражения (29) имеем

$$\Delta H_s = H_s \left( \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta z \cdot T_{ct} + \Delta T(z_{ps} - z_p) + T \Delta z_p}{z T_{ct} + T(z_{ps} - z_p)} \right), \quad (31)$$

где значком  $\Delta$  обозначены значения соответствующих погрешностей входящих в формулу величин.

Результаты расчетов по формуле (31) представлены в табл. 4. Ошибки в определении высот изобарических поверхностей имеют порядок десятков метров и колеблются в интервале от 2,1 до 8,0 гп. дкм.

Так, ошибка в определении высоты 850 мб изобарической поверхности составляет 3,5 гп. дкм при полете на высоте 1 км и 2,2 гп. дкм — при полете на высоте 2 км.

Из анализа ошибок в определении высот других изобарических поверхностей видно, что при полетах на высотах, превышающих высоту основного уровня, точность метода повышается.

Анализ приведенных результатов расчетов показывает, что точность рассматриваемого метода определения высот основных изобарических поверхностей в общем вполне сравнима с точностью радиозондирования атмосферы.

Таблица 4

Наибольшие ошибки при определении высот изобарических поверхностей методом радио- и барометрического высотомеров

| z полета, км    | 1   | 2   | 2   | 3   | 4   | 4   | 5   | 6,5 | 7   | 8   | 9,5 | 10  | 11  | 12  | 13  |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| p, мб           | 850 | 850 | 700 | 700 | 700 | 500 | 500 | 500 | 500 | 300 | 300 | 300 | 200 | 200 | 200 |
| ошибка, %       | 2,3 | 1,5 | 1,5 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 0,6 |
| ошибка, гп. дкм | 3,5 | 2,2 | 4,5 | 3,0 | 3,0 | 5,5 | 4,3 | 4,4 | 4,4 | 6,3 | 5,4 | 5,4 | 6,8 | 6,2 | 7,0 |

#### § 4. Определение ветра при помощи радиовысотомера

Ветер в полете может быть определен обычными навигационными способами: по путевой скорости и углу сноса, измеренным на одном курсе, по двум (трем) углам сноса на двух (трех) разных курсах; по двум путевым скоростям на двух разных курсах [3]. Наличие на борту самолета более совершенных технических систем значительно облегчает процесс определения ветра в полете и позволяет его полностью автоматизировать. Такие системы основаны, как правило, на использовании эффекта Доплера (радиотехнические системы) или интегрировании ускорений (инерциальные системы). Однако, если самолет не оборудован такими системами, то при полете над морем определение ветра очень сильно усложняется. В этих условиях использование радио- и барометрического высотомеров может явиться единственной возможностью получения интересующих данных.

Как отмечалось выше, при выдерживании постоянной высоты по барометрическому высотомеру самолет совершает полет по изобарической поверхности. Так как радиовысотомер показывает истинную (абсолютную) высоту, то изменение показаний радиовысотомера будет характеризовать наклон изобарической поверхности.

Изменение высоты в полете определяется соотношениями (2) и (3), а в поле геострофического ветра также формулой (5).

После элементарных преобразований из формул (3) и (5) получим

$$u_W = \frac{g}{lW} \frac{dz}{dt}, \quad (3')$$

$$u_V = \frac{g}{lV} \frac{dz}{dt}, \quad (5')$$

где  $u_W$ ,  $u_V$  — проекции вектора ветра, нормальные к линии пути и к линии курса соответственно.

Таким образом, по изменению показаний радиовысотомера во времени (в полете) и значению воздушной и путевой скоростей самолета можно определить проекции вектора ветра, нормальные к линии курса и к линии пути.

По значениям проекций вектора ветра и навигационных элементов можно определить скорость и направление ветра.

Расчетные формулы имеют вид:

$$u = \sqrt{W^2 + V^2 - 2W \sqrt{V^2 - u_W^2}}, \quad (32)$$

$$\delta = \alpha + \arcsin \frac{u_W}{u} \pm 180^\circ. \quad (33)$$

Если путевая скорость неизвестна, то при помощи радио- и барометрического высотомеров можно вычислить только одну составляющую скорости ветра, нормальную к линии курса, а также определить приближенное значение  $\varphi$ .

#### § 5. Некоторые результаты экспериментальной проверки качества информации о высотном барическом поле по самолетным данным

Возможность использования навигационных элементов для получения информации о барическом поле на высотах проверялась В. Н. Козловым и Г. И. Мазуровым с участием автора на материале 55 исследовательских полетов самолетов ТУ-104 на высотах 9—11 км.

Вычисленные по навигационным параметрам градиенты геопотенциала сравнивались с фактическими градиентами, которые определялись по картам барической топографии АТ<sub>300</sub> или АТ<sub>200</sub> в зависимости от высоты полета.

В отдельных случаях высота полета не совпадала со стандартными уровнями карт барической топографии. При высоте полета 9—10 км для определения фактического градиента гео-

потенциала использовалась карта барической топографии  $AT_{300}$ , а при высоте 10—11 км —  $AT_{200}$ .

Для всех рассмотренных полетов получилось достаточно удовлетворительное совпадение расчетных значений градиента геопотенциала с фактическими.

Результаты оценки точности определения высот 200 и 300 мб поверхностей приведены в табл. 5.

Таблица 5

Повторяемость различных градаций ошибок при определении высот изобарических поверхностей  $AT_{300}$  и  $AT_{200}$

| Градаций ошибок,<br>гп. дкм | 0—4 | 5—9 | >10 | Всего |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-------|
| Количество случаев          | 81  | 43  | 3   | 127   |
| Повторяемость, %            | 64  | 34  | 2   | 100   |

Вычисление производилось для точек, в которых на картах имелись фактические данные.

Приведенные данные подтверждают высказанные выше соображения о целесообразности использования навигационных элементов для получения информации о барическом поле и ветре на высотах.

В заключение автор считает необходимым выразить глубокую признательность В. Н. Козлову и Г. И. Мазурову за анализ материала исследовательских полетов и выполнение расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буторин М. М. Измерение высот изобарических поверхностей с помощью высотомеров для составления карт барической топографии. Метеорология и гидрология, № 1, 1957.
2. Билялов Р., Буркова М. В., Джорджио В. А., Джураев А. Д., Левина П. З., Миляковская Н. М., Неушкин А. И., Петросянц М. А., Романов Н. Н. и Эйвазова И. Л. Предложение об использовании штурманских донесений рейсовых турбореактивных и турбовинтовых самолетов в аэросиноптическом анализе. Научные труды ТГУ. Новая серия, вып. 259. 1964.
3. Молоканов Г. Ф. Учет ветра в дальних полетах. Воениздат, М., 1957.
4. Петренко Н. В. Определение ветра с помощью самолета, имеющего радиоальтиметр. Гидрометеиздат, Л., 1949.
5. Солонин С. В., Тараканов Г. Г. Методика исследования облачности верхнего яруса с самолета и некоторые вопросы ее пространственной структуры. Труды ЛГМИ, вып. 14, 1963.

6. Солонин С. В., Мальцева А. А., Ружило В. С. Исследование агеострофических отклонений ветра по экспериментальным данным. Труды ЛГМИ, вып. 19, 1963.
  17. Халтинер Д., Мартин Ф. Динамическая и физическая метеорология. М., 1960.
  8. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеиздат, Л., 1963.
  9. Bellamy J. C. The use of pressure altitude and altimeter corrections in meteorology. J. Meteorology, vol 2, № 1, 1945.
-

Ю. М. Либерман

### ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ВОПРОСЫ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ АЭРОЛОГИЧЕСКОЙ СЕТИ

Обсуждается методика и результаты численных опытов по априорной оценке точности анализа конечных разностей в полях геопотенциала и температуры. На основании полученных результатов предлагаются варианты размещения дополнительных аэрологических станций и оценивается соответствующий эффект повышения точности анализа.

В выполненных ранее работах [1, 2] обсуждались вопросы точности определения дифференциальных характеристик метеорологических полей и предлагался соответствующий способ оценки. Этот способ был реализован в ряде численных опытов с помощью электронной машины большого быстродействия применительно к первой конечной разности поля геопотенциала над территориями СССР и северного полушария, что позволило сформулировать некоторые рекомендации по рационализации существующей аэрологической сети. Методика опытов и полученные результаты изложены в работе [3]. В настоящей статье продолжается обсуждение указанных вопросов и приводятся результаты следующей серии численных опытов.

До сих пор в качестве основного показателя точности определения дифференциальных характеристик мы употребляли безразмерную величину  $D$ , представляющую собой средний квадрат ошибки  $\beta$  определения соответствующего конечно-разностного аналога, отнесенный к дисперсии  $m_f(0)$  элемента  $f$  и умноженный на некоторую константу, зависящую от рода дифференциальной характеристики и выбранного значения шага дифференцирования  $r$ . Применительно к первой конечной разности величина  $D$ , вычисленная по результатам анализа в узлах  $k, l$  регулярной сетки, может быть записана в виде

$$D = \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ll} - 2\varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{kl}$  описывает корреляционную связь между ошибками анализа в тех же узлах, а  $\varepsilon_{kk}$ ,  $\varepsilon_{ll}$  — значения меры ошибки интерполяции в эти узлы.

Константа, входящая в выражение для  $D$ , в таком случае оказывается квадратом шага дифференцирования:

$$D = \frac{r^2 \bar{\rho}^2}{m_f(0)}. \quad (2)$$

Если исходными данными для расчета величины  $D$  служат сведения о статистической структуре поля элемента и координаты всех аэрологических станций, расположенных на определенной территории, то местоположение максимального значения  $D$  показывает, в какой именно части рассматриваемой территории дифференциальная характеристика определяется наименее точно. Тем самым находится выгоднейшее с известной точки зрения положение дополнительной станции. Повторяя алгоритм вычисления  $D$  достаточное число раз и каждый раз учитывая уже «расставленные» дополнительные станции, можно заранее оценить возможное повышение точности определения дифференциальной характеристики.

Однако указанному способу расстановки дополнительных станций свойственен существенный недостаток. В самом деле, показатель  $D$  представляет собой величину, отнесенную к дисперсии элемента. Поэтому его использование в качестве критерия для расстановки новых станций приводит к тому, что особенности климатического поля изменчивости исследуемого элемента в процессе расстановки учитываются лишь в малой степени. В результате дополнительные станции помещаются главным образом в районах, где аэрологическая сеть наиболее редкая, хотя, быть может, вследствие особенностей изменчивости элемента абсолютная ошибка определения дифференциальной характеристики в этих районах сравнительно невелика. Так, одинаковым значениям относительной ошибки определения первой конечной разности в поле геопотенциала соответствуют весьма различные значения абсолютной ошибки в зависимости от географического района: в низких широтах абсолютная ошибка  $\alpha$  может быть сравнима с систематической ошибкой радиозондирования, а в средних широтах — превышать последнюю в несколько раз. Действительно, как показали выполненные опыты [3], новые станции помещаются прежде всего в тропических зонах Тихого и Атлантического океанов, в районах, где изменчивость геопотенциала минимальна и потому текущая информация сравнительно мало значима для внетропического численного прогноза.

Указанный недостаток устраняется, если распределение точности описывать посредством величины

$$B = \sqrt{\overline{\alpha^2}} = \sqrt{D \cdot m_f(0)}, \quad (3)$$

имеющей размерность элемента  $f$ .

Значение  $B$  дает, очевидно, среднюю квадратическую абсолютную ошибку вычисления соответствующей дифференциальной характеристики и связано с ошибкой  $\beta$  определения первой конечной разности простым соотношением

$$\overline{\beta^2} = \frac{B^2}{r^2}. \quad (4)$$

Алгоритм, предусматривающий анализ поля абсолютной (а не относительной) ошибки с помощью величины  $B$  и расстановку дополнительных станций по результатам такого анализа, является, вероятно, предпочтительным по сравнению с аналогичным алгоритмом, в основу которого положено использование величины  $D$ . Основанием для такого суждения является то обстоятельство, что успешность численного прогноза зависит от точности, с которой известны исходные значения самого элемента и его дифференциальных характеристик в узлах сетки безотносительно к климатической изменчивости элемента. Показателем этой точности и является средняя квадратическая абсолютная ошибка  $B$ . С другой стороны, общепринятым показателем правильности начального анализа и успешности выполненного прогноза является соответствующая ошибка в узле, отнесенная к изменчивости, т. е. характеристика, аналогичная величине  $D$ . Поскольку при расстановке дополнительных станций мы исходим из потребностей практики численного прогнозирования, естественно использовать в качестве основного критерия для расстановки величину, занимающую «промежуточное» в указанном смысле положение между  $B$  и  $D$ . Предложить такой критерий на основании каких-либо физических соображений не представляется возможным. Поэтому мы использовали величину

$$\bar{F} = D \cdot \sqrt{m_f(0)} = \frac{B^2}{\sqrt{m_f(0)}}, \quad (5)$$

имеющую, как и  $B$ , размерность исследуемого элемента.

Все три указанные величины —  $D$ ,  $B$  и  $F$  — использовались нами в численных опытах по оценке точности определения первой конечной разности полей геопотенциала и температуры поверхности 500 мб при шаге дифференцирования  $r=600$  км. Программа вычислений изложена в работе [3], поэтому здесь



мы ограничимся описанием двух внесенных в программу усовершенствований.

Программа предусматривает вычисление основной расчетной величины ( $D$ ,  $B$  или  $F$ ) для каждого узла квадратной сетки, покрывающей территорию северного полушария, ограниченную параллелью  $10^\circ$ . Ради простоты будем далее оперировать с величиной  $D$ , поскольку различия в расчетах  $D$ ,  $B$  и  $F$  незначительны.

Исходной информацией для расчета  $D$  в узле сетки (точка 3 на рис. 1) служат координаты 15 ближайших к этому узлу станций («влияющие» станции), поиск которых осуществляется специальной подпрограммой. В результате решения системы уравнений оптимальной интерполяции отыскиваются

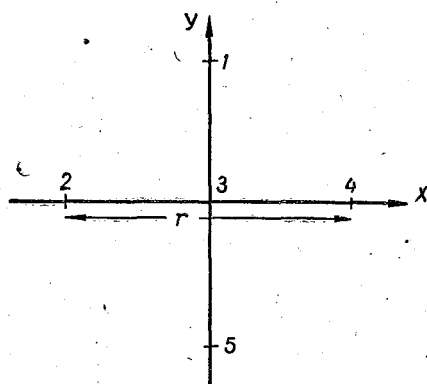


Рис. 1. К вычислению конечных разностей.

интерполяционные веса, а затем и меры ошибок интерполяции  $\varepsilon_{kl}$  в пункты 1, 2, 4, 5 (рис. 1). После этого по формуле (1) находятся значения  $D_x$  и  $D_y$ , соответствующие первым конечным разностям в направлениях осей  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат. Наконец последовательным сравнением определяется максимальное по всему полю значение  $D_x$ ,  $D_y$  и в соответствующий узел сетки «помещается» дополнительная станция. В дальнейшем алгоритм повторяется с учетом новой станции, причем в каждом туре вычислений максимальное значение  $D$  снижается.

Предположим теперь, что дополнительная станция помещена непосредственно в один из пунктов  $k$ ,  $l$ , по результатам анализа в которых вычисляется конечная разность. Нетрудно показать, что в этом случае эффект повышения точности (снижение  $D$ ) будет больше, чем в описанном выше случае, когда

станция помещалась в центр отрезка, соединяющего пункты  $k, l$ . Так, например, если новая станция является единственной влияющей станцией, то при совпадении ее с любым из пунктов  $k, l$  значение нашей характеристики равно  $D=1-\mu(r)$ , что в 2 раза меньше значения, соответствующего нахождению станции в центре отрезка. Очевидно, и при наличии нескольких влияющих станций дополнительную станцию выгоднее поместить в один из крайних пунктов, хотя трудно определить заранее, в какой именно.

Исходя из указанных соображений, мы усовершенствовали программу, описанную в [3], следующим образом. После того, как определен узел сетки, имеющий наибольшее по всему полю значение характеристики  $D$ , и выяснено, какое из двух значений —  $D_x$  или  $D_y$  — является наибольшим, машина выполняет две пробы. В процессе этих проб происходит замена самой удаленной станции влияющего комплекса дополнительной станцией. При первой пробе дополнительная станция помещается в пункт  $k$ , а при второй — в пункт  $l$  нужной координатной оси. Сравнением двух вычисленных значений величины  $D$  устанавливается, какое положение дополнительной станции обеспечивает максимальный эффект повышения точности; координаты соответствующего пункта заносятся в список станций.

Второе усовершенствование, внесенное в программу, имеет целью уточнение местоположения максимального значения  $D_{\max}$  в пределах рассматриваемой территории. Выбранный первоначально шаг квадратной сетки узлов равен 25 мм и эквивалентен на карте масштаба 1:30 000 000 расстоянию 750 км на широте  $60^\circ$ . Ясно, что такая «разрешающая способность» при определении положения  $D_{\max}$ , а тем самым и положения дополнительной станции, недостаточна. Однако уменьшению шага на всей территории северного полушария препятствует быстрый рост потребного машинного времени, пропорциональный числу узлов сетки (заметим, что расчет для одного узла занимает примерно 2 сек). Эта трудность может быть уменьшена, если для определения положения максимума применить метод последовательных приближений. Существо метода заключается в следующем. Узел сетки, имеющий максимальное значение  $D_{\max}$ , окружается квадратной окрестностью, в пределах которой рассчитываются значения  $D$  для узлов более густой сетки. Таким образом максимум уточняется по положению, а также по величине. Затем вполне аналогично выполняется второе приближение по еще более густой сетке. При необходимости процесс последовательных приближений легко продолжить. В наших опытах были при-

няты следующие значения шагов сеток: для основной сетки — 25 мм, для сетки первого приближения — 5 мм, для сетки второго приближения — 1 мм. Стороны квадратных окрестностей в первом и втором приближениях равнялись соответственно 30 и 6 мм (рис. 2). Описанным способом удалось повысить разрешающую способность при определении положения максимума до 1 мм карты (30 км на широте  $60^\circ$ ). Для выполнения одного тура вычислений требовалось 24 мин машинного времени, в том числе 20 мин — для расчета по основной сетке и по 2 мин — для каждого из двух последующих приближений.

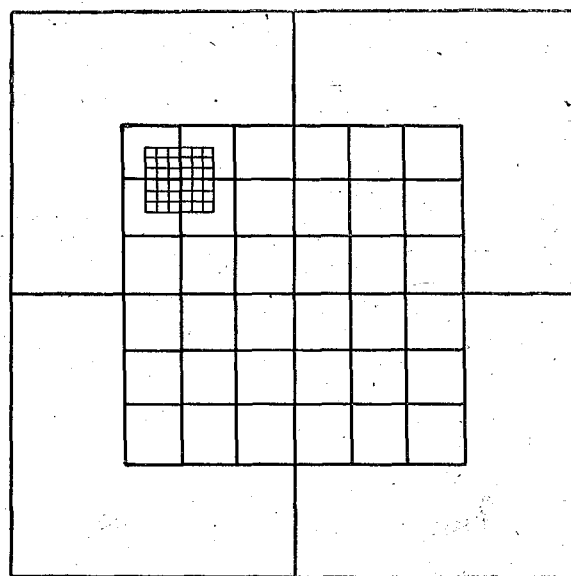


Рис. 2. Сетки узлов для определения положения максимума методом последовательных приближений.

Перейдем к анализу полученных результатов. Распределение характеристики  $D$  для поля геопотенциала подробно рассмотрено в работе [3]. Применение усовершенствованной методики расчета позволило точнее определить положение семи дополнительных станций в тропических широтах Тихого и Атлантического океанов. Учет этих станций снижает значения  $D_{\text{макс}}$  с 0,220 до 0,194 и уменьшает число случаев, приходящихся на высшую градацию значений  $D_x, D_y$  ( $\geq 0,180$ ), с 10,7 до 2,7% (со 117 до 29 случаев). В работе [3] отмечен вредный «эффект густой аэрологической сети», приводящий

к формированию ложных максимумов в поле  $D$  над Европой. Чтобы избежать действия этого вредного эффекта, расчет для территории Европы выполнялся с использованием системы поиска влияющих станций, в которой сторона квадрата поиска была уменьшена до 15 мм, т. е. в два раза по сравнению с остальной территорией северного полушария. Кроме того, шаг сетки узлов уменьшался с 25 до 10 мм. При таких условиях указанный эффект не сказывается: значения  $D$  над большей частью Европы не превышают 0,020.

На рис. 3 представлено соответствующее существующей аэрологической сети распределение величины  $B$  — среднего

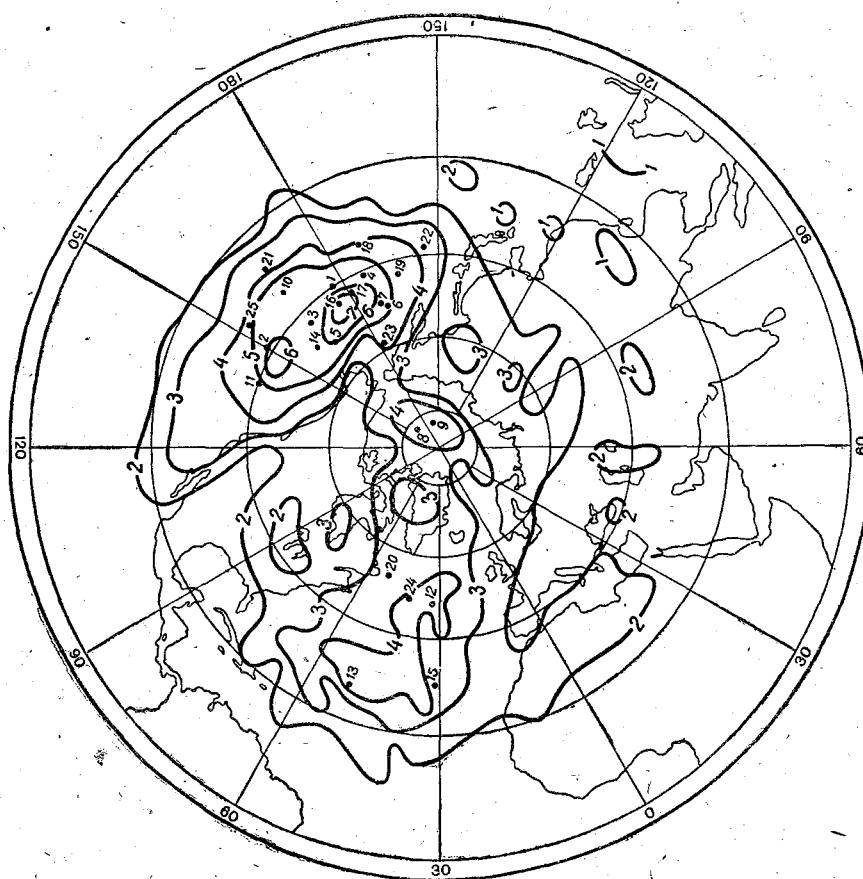


Рис. 3. Распределение величины  $B$  для геопотенциала. Точки 1—25 обозначают дополнительные станции в порядке их расстановки.

Таблица 1

Результаты расчета поля  $B$  для геопотенциала

| № тура | $B_{\text{макс}},$<br>гп. дкм | $\epsilon$ в узле<br>с $B_{\text{макс}}$ | $\epsilon_{\text{макс}}$ | Распределение $B_x, B_y$ по градациям, % |             |             |             |             |             |             |             |
|--------|-------------------------------|------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|        |                               |                                          |                          | 0,0—<br>1,0                              | 1,0—<br>2,0 | 2,0—<br>3,0 | 3,0—<br>4,0 | 4,0—<br>5,0 | 5,0—<br>6,0 | 6,0—<br>7,0 | 7,0—<br>8,0 |
| 0      | 7,836                         | 0,216                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 23,7        | 12,4        | 6,1         | 3,0         | 0,8         | 0,3         |
| 1      | 6,810                         | 0,296                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 23,7        | 12,6        | 6,7         | 2,7         | 0,7         | —           |
| 2      | 6,487                         | 0,095                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 23,9        | 12,7        | 7,2         | 2,2         | 0,4         | —           |
| 3      | 6,344                         | 0,187                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 23,9        | 12,7        | 8,0         | 1,6         | 0,1         | —           |
| 4      | 5,629                         | 0,042                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,1        | 12,9        | 8,0         | 1,3         | —           | —           |
| 5      | 5,785                         | 0,030                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,2        | 13,0        | 7,8         | 1,4         | —           | —           |
| 6      | 5,785                         | 0,030                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,3        | 12,9        | 8,0         | 1,2         | —           | —           |
| 7      | 5,509                         | 0,117                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,2        | 13,1        | 8,0         | 1,0         | —           | —           |
| 8      | 5,509                         | 0,117                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,3        | 13,5        | 7,5         | 1,0         | —           | —           |
| 9      | 5,493                         | 0,186                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,3        | 13,7        | 7,4         | 0,9         | —           | —           |
| 10     | 5,350                         | 0,029                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,8        | 13,8        | 7,1         | 0,6         | —           | —           |
| 11     | 5,292                         | 0,048                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 24,8        | 14,3        | 6,8         | 0,5         | —           | —           |
| 12     | 5,282                         | 0,162                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,8        | 25,0        | 14,4        | 6,5         | 0,5         | —           | —           |
| 13     | 5,251                         | 0,033                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,9        | 25,1        | 14,4        | 6,3         | 0,4         | —           | —           |
| 14     | 5,079                         | 0,297                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 51,9        | 25,4        | 14,7        | 5,9         | 0,2         | —           | —           |
| 15     | 5,001                         | 0,071                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,0        | 25,6        | 14,9        | 5,6         | 0,1         | —           | —           |
| 16     | 4,982                         | 0,019                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,0        | 25,6        | 15,4        | 5,2         | —           | —           | —           |
| 17     | 4,907                         | 0,086                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,0        | 25,6        | 15,7        | 4,8         | —           | —           | —           |
| 18     | 4,802                         | 0,034                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,0        | 26,0        | 15,4        | 4,7         | —           | —           | —           |
| 19     | 4,784                         | 0,020                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,1        | 26,1        | 15,7        | 4,2         | —           | —           | —           |
| 20     | 4,681                         | 0,058                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,1        | 26,1        | 15,9        | 4,0         | —           | —           | —           |
| 21     | 4,676                         | 0,050                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,2        | 26,1        | 16,1        | 3,8         | —           | —           | —           |
| 22     | 4,667                         | 0,039                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,4        | 26,1        | 16,0        | 3,7         | —           | —           | —           |
| 23     | 4,662                         | 0,031                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,4        | 26,1        | 16,3        | 3,4         | —           | —           | —           |
| 24     | 4,571                         | 0,081                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,4        | 26,2        | 16,4        | 3,2         | —           | —           | —           |
| 25     | 4,499                         | 0,168                                    | 0,788                    | 1,8                                      | 52,4        | 26,4        | 16,5        | 2,8         | —           | —           | —           |

арифметического из значений  $B_x, B_y$  (в гп. дкм). Это распределение характеризует абсолютную ошибку определения первой конечной разности в поле геопотенциала в зависимости от двух факторов: густоты сети и изменчивости геопотенциала. Поэтому естественно, что очаги максимумов (от 4,0 до 7,7 гп. дкм) расположены в умеренных широтах Тихого и Атлантического океанов и в Центральной Арктике, т. е. в районах редкой сети и большой изменчивости. Именно в этих районах оказались расставленными 25 дополнительных станций. В экваториальных же и тропических широтах значения  $B$  минимальны в отличие от значений  $D$ . Результаты расчета поля  $B$  иллюстрируются табл. 1. Данные «нулевого» тура относятся к существующей сети. Как видно из таблицы, расстановка 25 дополнительных станций снижает максимальное значение  $B$  с 7,8 до 4,5 гп. дкм, т. е. на 42%. Одновременно число случаев, приходящихся на верхнюю половину всего интервала значений

$B_x, B_y$  (4,0—8,0 *гп. дкм*) уменьшается почти в четыре раза с 10,3 до 2,8% (со 112 до 31 случая). Значения  $B_{\text{макс}}$  уменьшаются особенно быстро при постановке первых дополнительных станций. Поле  $B$ , построенное с учетом 25 дополнительных станций, показано на рис. 4. Расстановка этого сравнительно небольшого числа новых станций привела к существенному снижению значений  $B$  на большой территории. В частности, площадь, на которой значения  $B$  превышают 4,0 *гп. дкм*, составлявшая до расстановки станций 6% территории полушария, в результате расстановки уменьшилась в 10 раз, причем значения более 4,3 *гп. дкм* теперь отсутствуют

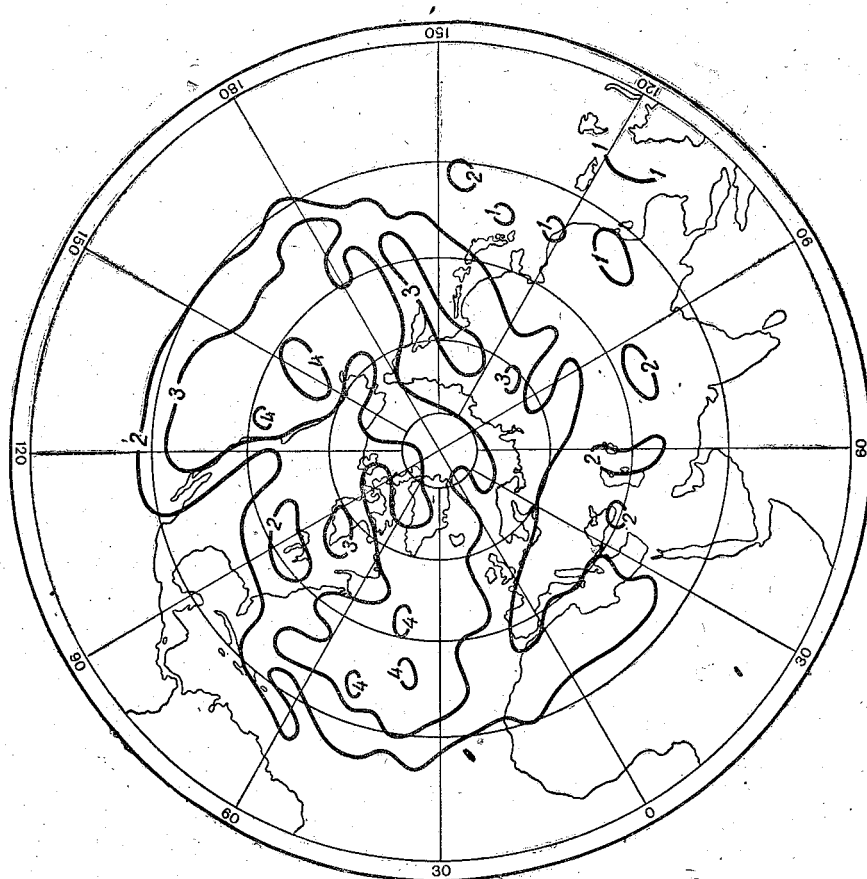


Рис. 4. Распределение величины  $B$  для геопотенциала с учетом дополнительных станций.

В одном из вариантов расчета для геопотенциала в качестве основной характеристики точности конечной разности использовалась величина  $F$  (табл. 2). Интересно, что из пяти расставленных в этом варианте дополнительных станций три — первая, вторая и четвертая — совпадают по положению с соответствующими станциями, расставленными на основании анализа характеристики  $B$ . Это обстоятельство подтверждает, что абсолютная ошибка определения конечной разности очень сильно зависит не только от густоты сети, но и от изменчивости элемента.

Таблица 2

Результаты расчета поля  $F$  для геопотенциала

| №<br>тура | $F_{\text{макс.}}^{\text{гл. окм}}$ | $\varepsilon$ в узле<br>с $F_{\text{макс}}$ | $\varepsilon_{\text{макс}}$ | Распределение $F_x, F_y$ по градациям, % |             |             |             |             |             |             |
|-----------|-------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|           |                                     |                                             |                             | 0,0—<br>0,5                              | 0,5—<br>1,0 | 1,0—<br>1,5 | 1,5—<br>2,0 | 2,0—<br>2,5 | 2,5—<br>3,0 | 3,0—<br>3,5 |
| 0         | 3,282                               | 0,216                                       | 0,788                       | 40,9                                     | 38,8        | 12,4        | 4,3         | 2,8         | 0,5         | 0,2         |
| 1         | 2,999                               | 0,296                                       | 0,788                       | 40,9                                     | 38,9        | 13,2        | 4,8         | 1,9         | 0,3         | —           |
| 2         | 2,278                               | 0,162                                       | 0,788                       | 40,9                                     | 39,2        | 13,4        | 4,9         | 1,6         | —           | —           |
| 3         | 2,251                               | 0,187                                       | 0,788                       | 40,9                                     | 39,9        | 13,2        | 5,0         | 1,1         | —           | —           |
| 4         | 2,233                               | 0,049                                       | 0,788                       | 40,9                                     | 40,2        | 13,4        | 4,6         | 0,9         | —           | —           |
| 5         | 2,202                               | 0,117                                       | 0,788                       | 40,9                                     | 40,3        | 14,3        | 4,3         | 0,3         | —           | —           |

Рассмотрим теперь результаты оценки точности определения первой конечной разности в поле температуры. При выполнении этого расчета использовалась корреляционная функция температуры, аппроксимированная формулой

$$\mu_T(r) = J_0 (1,16r) e^{-0,35r^{1,02}}, \quad (6)$$

где  $r$  — расстояние в тысячах километров.

Распределение значений  $B$  для поля температуры показано на рис. 5 (в градусах). Оно отличается от соответствующего распределения для поля геопотенциала (см. рис. 3) большей сглаженностью. Это различие объясняется особенностями изменчивости двух метеоэлементов. Действительно, среднее квадратическое отклонение от нормы для температуры меняется в пределах северного полушария от 3 до 7°, т. е. несколько более чем вдвое, тогда как аналогичный показатель для геопотенциала возрастает от 4 до 22 гл. окм — более чем в 5 раз. Что касается относительного географического положения максимумов  $B$  для температуры и геопотенциала, то в умеренных широтах Тихого океана эти максимумы почти совпадают, а в Атлантическом океане первый из них несколько смещен к северу по отношению ко второму. Всего с использованием корреляционной функции температуры было расстав-

лено пять дополнительных станций. Как видно из табл. 3, уменьшение значений  $B$  в этом случае происходило медленнее, чем при использовании корреляционной функции геопотенциала. Отмеченное обстоятельство является следствием более быстрого затухания корреляционной функции температуры с расстоянием, что ведет к уменьшению «зоны влияния» каждой дополнительной станции.

Изложенные результаты показывают, что точность определения дифференциальных характеристик метеорологических полей может быть существенно повышена путем рациональ-



Рис. 5. Распределение величины  $B$  для температуры. Точки 1—5 обозначают дополнительные станции в порядке их расстановки.



Таблица 3

Результаты расчета поля  $B$  для температуры

| № тура | $B_{\text{макс}}$<br>град | $\epsilon$ в узле<br>с $B_{\text{макс}}$ | $\epsilon_{\text{макс}}$ | Распределение $B_x, B_y$ по градациям, % |             |             |             |             |             |             |             |             |  |
|--------|---------------------------|------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--|
|        |                           |                                          |                          | 0,0—<br>0,5                              | 0,5—<br>1,0 | 1,0—<br>1,5 | 1,5—<br>2,0 | 2,0—<br>2,5 | 2,5—<br>3,0 | 3,0—<br>3,5 | 3,5—<br>4,0 | 4,0—<br>4,5 |  |
| 0      | 4,257                     | 0,514                                    | 0,961                    | —                                        | 3,7         | 17,2        | 29,3        | 24,9        | 13,2        | 10,0        | 1,4         | 0,4         |  |
| 1      | 4,111                     | 0,113                                    | 0,961                    | —                                        | 3,7         | 17,3        | 29,2        | 25,1        | 13,2        | 10,0        | 1,4         | 0,2         |  |
| 2      | 4,026                     | 0,280                                    | 0,961                    | —                                        | 3,7         | 17,3        | 29,2        | 25,1        | 13,3        | 10,1        | 1,3         | 0,1         |  |
| 3      | 3,753                     | 0,136                                    | 0,961                    | —                                        | 3,7         | 17,3        | 29,3        | 25,0        | 13,4        | 9,9         | 1,4         | —           |  |
| 4      | 3,734                     | 0,248                                    | 0,961                    | —                                        | 3,7         | 17,3        | 29,3        | 25,1        | 13,4        | 9,9         | 1,4         | —           |  |
| 5      | 3,725                     | 0,197                                    | 0,961                    | —                                        | 3,7         | 17,3        | 29,3        | 25,3        | 13,7        | 9,5         | 1,3         | —           |  |

ного размещения ограниченного числа дополнительных аэрологических станций. Вместе с тем некоторые существующие станции, вероятно, могут быть закрыты без ущерба для практики численного прогнозирования. При разработке соответствующих рекомендаций необходимо, очевидно, исходить из статистической структуры всех наблюдаемых метеорологических элементов. Крайне желательно принять во внимание и соображения экономического характера. Однако экономическая сторона проблемы рационализации сети до сих пор остается совершенно неразработанной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С., Ильин Б. М., Либерман Ю. М., Юдин М. И. О точности определения конечных разностей при анализе метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
2. Либерман Ю. М. Оценка точности определения дифференциальных характеристик метеорологических полей. Труды ЛГМИ, вып. 22, 1964.
3. Либерман Ю. М. О точности определения конечных разностей при анализе поля геопотенциала по данным существующей аэрологической сети. Изв. АН СССР, серия физика атмосферы и океана, т. 1, № 11, 1965.

---

С. В. Солонин

### **К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ БОЛТАНКИ САМОЛЕТОВ В СТРАТОСФЕРЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ ПОЛЕТА**

На основе использования понятия одиночного порыва (пульсации) ветра дан анализ формулы вертикальной перегрузки самолета при полете в турбулентной атмосфере с учетом флуктуаций температуры и плотности воздуха.

Обращается внимание на необходимость более корректной постановки задачи при исследовании явления болтанки сверхзвуковых самолетов.

По мере увеличения скоростей и высот полета прогрессирует интерес к вопросам устойчивости и управляемости самолетов в турбулентной атмосфере. Это объясняется тем, что, с одной стороны, изучение реакций самолета на атмосферную турбулентность важно для решения задач динамики полета, обеспечения безопасности и комфорта пассажиров, с другой стороны, исследование явления болтанки самолетов, вызываемой турбулентностью, измерение перегрузок (ускорений), испытываемых самолетом, является практически единственной возможностью получения информации о полях микротурбулентности на различных высотах и их связи с мезо- и макромасштабными атмосферными процессами.

При изучении движения самолета в турбулентной атмосфере поле скоростей ветра представляют в виде суммы осредненного установившегося движения и наложенных на него турбулентных флуктуаций. Спектр турбулентных флуктуаций имеет достаточно широкий диапазон, однако обычно принимают во внимание лишь возмущения, соизмеримые с самолетом [1, 9].

Другое предположение касается изменения турбулентных флуктуаций во времени и заключается в том, что статистические характеристики возмущающего входного сигнала, воздей-

ствующего на самолет, слабо зависят от временной изменчивости поля скоростей, т. е. турбулентность рассматривается как бы «замороженной» в пространстве.

В пределах ограниченного пространства турбулентность считается гомогенной (статистические свойства турбулентности одинаковы в каждой точке поля) и изотропной (статистическое описание поля скорости не зависит от ориентации осей координат).

Так как турбулентность описывается только в статистическом смысле, то, безусловно, наибольший интерес представляет определение статистических характеристик поведения самолета при полете в турбулентной атмосфере (среднеквадратичных значений соответствующих возмущений, спектров их энергии и вероятного распределения). Использование спектрального анализа позволяет получить результаты, в целом удовлетворительно совпадающие с экспериментальными данными. Однако, к сожалению, в настоящее время нет достаточной информации, чтобы применить спектральный анализ при исследовании условий полета самолета со сверхзвуковой скоростью в стратосфере.

Между тем в связи с проектированием сверхзвуковых транспортных самолетов и перспективой их метеорологического обеспечения необходимо иметь хотя бы ориентировочные представления по этому вопросу [18].

С этой целью анализируем уравнения движения самолета, исходя из того, что наибольший интерес с точки зрения прочности самолета и комфорта для пассажиров (плавности полета) представляет нормальное ускорение (вертикальная перегрузка).

Уравнения движения самолета в прямоугольной системе координат, связанной с летательным аппаратом (рис. 1), в векторной форме можно представить в следующем виде [15]:

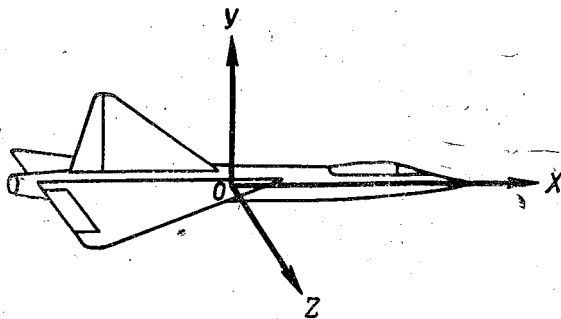


Рис. 1. Связанная с самолетом система координат.

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_0}{dt} = m \left( \frac{\delta \vec{v}_0}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{v}_0 \right); \quad (1)$$

$$\vec{Q} = \frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{h}. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{F}$  — равнодействующая внешних сил, действующих на самолет,  $m$  — масса самолета,  $\vec{v}_0 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  — скорость центра масс самолета со своими проекциями,  $t$  — время,  $\vec{\omega} (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  — угловая скорость вращения осей координат со своими проекциями,  $\vec{Q}$  — главный момент внешних сил относительно центра масс,  $\vec{h}$  — момент количества движения самолета;

$$\frac{\delta \vec{A}}{\delta t} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы;  $A_x, A_y, A_z$  — проекции вектора  $\vec{A}$  на соответствующие оси координат.

Уравнения (1) и (2) могут быть представлены в виде шести скалярных уравнений. Однако поскольку нас будет интересовать только нормальное ускорение, то ограничимся записью скалярного уравнения для проекции равнодействующей внешних сил на вертикальную ось

$$F_y = m(\dot{v}_{0y} + \omega_z v_{0x} - \omega_x v_{0z}) = Y - G \cos \beta \cdot \cos \gamma, \quad (3)$$

где  $\beta$  — угол тангажа,  $\gamma$  — угол крена,  $Y$  — подъемная сила,  $G$  — вес самолета.

Подъемная сила самолета в свою очередь связана с определяющими ее параметрами соотношением

$$Y = c_y S \rho \frac{V^2}{2} = 0,7 c_y S \rho M^2, \quad (4)$$

где  $c_y = c_y(\alpha, \delta, M, Re)$  — коэффициент подъемной силы самолета, величина которого зависит от угла атаки  $\alpha$ , угла отклонения руля высоты  $\delta$ , чисел Маха и Рейнольдса;  $V$  — воздушная скорость,  $S$  — площадь крыла,  $\rho$  — плотность воздуха,  $p$  — атмосферное давление.

Коэффициент перегрузки

$$n = \frac{\ddot{Y}}{G}. \quad (5)^1$$

Приближенно можно принять, что нормальное ускорение равно ускорению центра тяжести самолета вдоль оси  $y$ , т. е.

$$j_{0y} = \frac{F_y}{m} = \dot{v}_{0y} + \omega_z v_{0x} - \omega_x v_{0z}. \quad (6)$$

Если предположить, что самолет совершает малые отклонения от исходных условий установившегося полета, а основное движение симметрично и угловая скорость отсутствует, то в соответствии с теорией малых возмущений для продольного движения выражение (6) примет вид

$$j_{0y} = \dot{v}'_{0y} - V\omega'_z = \frac{V}{t^*}(D\alpha - \zeta), \quad (7)$$

где  $v'_{0y}$  — возмущение составляющей  $v_{0y}$ ,  $V$  — скорость движения (невозмущенного),  $\omega'_z$  — возмущение угловой скорости тангажа,  $t^*$  — постоянная времени ( $t^* = \frac{\bar{b}}{2V}$ , где  $\bar{b}$  — величина средней аэродинамической хорды крыла),  $\alpha$  — угол атаки,  $\zeta = \frac{\omega'_z \bar{b}}{2V}$  — безразмерный коэффициент вращения,  $D = \frac{d}{d\hat{t}} = t^* \frac{d}{dt} \left( \hat{t} = \frac{t}{t^*} \text{ — безразмерное время} \right)$ .

Принимая во внимание, что в авиационной метеорологии интенсивность болтанки определяется по величине перегрузки  $\Delta n$ , численно равной ускорению центра тяжести самолета, выраженному в долях ускорения силы тяжести  $g$ , из соотношения (7) следует, что

$$\Delta n = \frac{2V^2}{g\bar{b}}(D\alpha - \zeta). \quad (8)$$

Преобразование Лапласа для перегрузки имеет вид

$$\bar{\Delta n}(s) = \frac{2V^2}{g\bar{b}} [s\bar{\alpha}(s) - \bar{\zeta}(s)]. \quad (8')$$

<sup>1</sup> В литературе по аэродинамике выражение (5) обычно называют перегрузкой [2, 15]. Перегрузкой также называют величину  $\Delta n = n - 1$ . Какие возникают неудобства из использования одного и того же термина для обозначения по существу различных величин, особенно хорошо видно из книги Б. Эткина [15]. Чтобы четко разграничить  $n$  и  $\Delta n$ , для обозначения  $n$  использован термин коэффициент перегрузки, употребляемый, в частности, И. В. Остославским [7].

Отсюда несложно перейти к выражению для передаточной функции ускорения и спектра энергии перегрузки [15].

Однако, как отмечалось выше, отсутствие экспериментальных данных о частотных характеристиках возмущенного движения самолета в стратосфере затрудняет анализ. Вместе с тем исходная система уравнений позволяет довольно тривиальным образом получить совсем не тривиальные выводы.

При выполнении горизонтального полета без крена ( $\gamma=0$ ) с зажатými рулями с постоянной воздушной скоростью  $V$  в спокойной атмосфере (установившееся движение) все значения возмущений равны нулю. В этом случае уравнение (3) примет вид

$$F_y = 0 \quad (9)$$

или

$$Y = G. \quad (9')$$

Коэффициент перегрузки и перегрузка соответственно будут равны

$$n = \frac{Y}{G} = 1;$$

$$\Delta n = n - 1 = 0.$$

В турбулентной атмосфере происходит непрерывное нарушение равновесия сил, самолет получает знакопеременные ускорения, и уравнения (9) и (9') характеризуют лишь среднее состояние. Так как равновесие сил нарушается вследствие воздействия на аэродинамические силы турбулентных пульсаций, эффект воздействия их на самолет можно приближенно оценить исходя из понятия одиночного порыва ветра. При этом целесообразно распространить это понятие на турбулентные пульсации других метеорологических элементов, влияющих на величину подъемной силы.

Из простых физических соображений очевидно, что вертикальные перегрузки могут вызываться воздушными вихрями с горизонтальной осью (восходящие и нисходящие движения воздуха), воздушными вихрями с вертикальной осью (горизонтальные пульсации скорости ветра), флуктуациями температуры и плотности воздуха. Причем температурные флуктуации воздействуют на самолет через изменение числа Маха и плотности воздуха.

Продифференцируем соотношение (5), используя выражение (4) и приняв во внимание равновесие сил для среднего движения,<sup>1</sup> а также пренебрегая зависимостью  $c_y$  от числа Рейнольдса. Получим

$$dn = \frac{1}{G} \left( Sp \frac{V^2}{2} \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} d\alpha + Sp \frac{V^2}{2} \frac{\partial c_y}{\partial M} dM + \right. \\ \left. + c_y S \frac{V^2}{2} d\rho + c_y Sp V dV \right). \quad (10)$$

Или

$$dn = \frac{1}{G} \left( 0,7 Sp M^2 \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} d\alpha + 0,7 Sp M^2 \frac{\partial c_y}{\partial M} dM + 1,4 c_y Sp M dM + \right. \\ \left. + 0,7 c_y S M^2 p \frac{dT}{T} + 0,7 c_y S M^2 R T d\rho \right) = \frac{1}{c_y} \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} d\alpha + \\ + \frac{1}{c_y} \frac{\partial c_y}{\partial M} dM + \frac{2 dM}{M} + \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}. \quad (10')$$

Если в выражениях (10) и (10') перейти к конечным разностям, то получим формулы, позволяющие по величинам турбулентных пульсаций метеорологических элементов рассчитать перегрузки самолета.

\* При этом надо иметь в виду, что вертикальные токи оказывают влияние на угол атаки, изменяя его на величину

$$\Delta \alpha = \arctg \frac{w}{V} \approx \frac{w}{V}, \quad (11)$$

где  $w$  — скорость вертикальных порывов.

Горизонтальные пульсации скорости ветра вызывают изменение скорости обтекания самолета воздушным потоком, т. е. непосредственно воздушной скорости и числа Маха

$$\Delta V = -u_v', \quad (12)$$

$$\Delta M = - \frac{u_v'}{V \sqrt{RT}}, \quad (13)$$

<sup>1</sup> Мы не вводим специальных обозначений для среднего движения, так как в дальнейшем рассматривается только горизонтальный полет на постоянной высоте с постоянным режимом работы двигателя. Турбулентные пульсации выражены соответствующими приращениями метеорологических и аэродинамических параметров.

где  $u_v'$  — проекция горизонтальной пульсации вектора ветра на направление вектора воздушной скорости самолета (продольной оси самолета),  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — температура воздуха в абсолютной шкале.

Тогда из выражений (10) и (10') имеем

$$\Delta n = \frac{1}{2G} \left( S_p V w \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} + c_y S V^2 \Delta \rho - \frac{S_p V^2 u_v' \frac{\partial c_y}{\partial M}}{2 \sqrt{\kappa R T}} - 2 c_y S_p V u_v' \right), \quad (14)$$

$$\Delta n = \frac{w}{V} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln c_y + \Delta M \frac{\partial}{\partial M} \ln c_y - \frac{2 u_v'}{M \sqrt{\kappa R T}} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (14')$$

В частности, если в формуле (14) пренебречь горизонтальными пульсациями скорости ветра, а также флуктуациями плотности и температуры воздуха, как обычно поступают, то придем к известной формуле перегрузки [2, 9, 12].

Однако при скорости полета, значительно превышающей скорость звука, такое априорное допущение нуждается в тщательной экспериментальной проверке. Здесь уместно напомнить об исследовании А. П. Юргенсона [17], который обращает внимание на возрастающую роль горизонтальных пульсаций скорости ветра при увеличении воздушной скорости самолета.

Переход в формулах (14) и (14') от производных к конечным разностям будет корректным при условии, что метеорологические элементы изменяются мгновенно, т. е. флуктуации (порывы) метеорологических элементов имеют прямоугольную форму. Однако в действительности всегда имеет место более или менее постепенное нарастание величины порыва. Последнее можно учесть введением в формулу поправочного множителя, который в общем случае будет являться сложной функцией многих параметров.

Очевидно, что этот коэффициент должен зависеть от динамических свойств самолета, которые в свою очередь определяются формой крыла, степенью жесткости («аэроэластичности») его конструкции, числа Маха и т. д., и особенностей структуры турбулентного поля.



Представляет теоретический и практический интерес установление прямой связи между коэффициентом турбулентности и величиной перегрузки.

В соответствии со структурно-кинематической формулой Ляпина-Дубова [3] коэффициент турбулентности

$$k = \frac{b_{\infty} V |\overline{\Delta n}| \tau}{2}, \quad (15)$$

где  $b_{\infty} = \frac{2G}{S_{\rho} V \frac{\partial c_y}{\partial \alpha}}$ ;  $\tau$  — среднее время сохранения вертикаль-

ной перегрузки одного знака.

Введя в формулу (15) критерий подобия по сжимаемости воздуха  $M$ , после элементарных преобразований с учетом высказанных выше соображений имеем

$$k = \frac{\kappa R T M^2 |\overline{\Delta n}| \tau}{2 \eta \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln c_y}, \quad (16)$$

где  $\eta = \frac{b_{\infty}}{b(\omega)}$  — поправочный коэффициент ( $b(\omega)$  — передаточная функция самолета, зависящая от частоты турбулентных возмущений, высоты полета и типа самолета).

Формула (16) позволяет по известному значению коэффициента турбулентности оценить величину вертикальной перегрузки.

$$|\overline{\Delta n}| = \frac{2 k \eta \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln c_y}{\kappa R T M^2 \tau}. \quad (17)$$

Если воспользоваться связью между вертикальным распределением ветра и температуры и коэффициентом турбулентности (диффузия энергии турбулентности во внимание не принимается), установленной Д. Л. Лайхтманом [4], то формула (17) примет вид

$$|\overline{\Delta n}| = \frac{0,32 \operatorname{ctg}^2 \alpha \eta \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln c_y}{\kappa R T M^2 \tau \Phi^{\frac{1}{2}}}, \quad (18)$$

$$\text{где } \text{ctg } a = \left( \frac{d}{dz} \Phi^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1}; \quad \Phi = \left( \frac{d\vec{u}}{dz} \right)^2 - a_T \frac{g}{\Theta} \frac{d\Theta}{dz}.$$

Здесь  $z$  — вертикальная координата (высота рассматриваемой точки);  $\vec{u}$  — скорость ветра;  $a_T$  — величина, равная отношению коэффициентов турбулентности перемешивания для тепла и количества движения;  $\Theta$  — потенциальная температура.

Численный анализ приведенных выше формул перегрузок сверхзвуковых самолетов в предположении, что в стратосфере могут наблюдаться вертикальные порывы такой же интенсивности, как в тропосфере, показывает, что наибольший вклад в величину перегрузки принадлежит вертикальным порывам.

Но такое предположение не имеет никаких физических оснований. Хотя в последние годы и ниспровергнута, говоря словами известного автора, «великая термическая устойчивость» стратосферы, тем не менее нельзя отрицать, что термическая устойчивость здесь значительно выше, чем в тропосфере.

Если учесть это обстоятельство и исходить из меньших значений турбулентных пульсаций, то разница между вкладом пульсаций различных метеорологических элементов в величину перегрузки быстро нивелируется, и горизонтальные пульсации скорости ветра, и температурные флуктуации начинают играть такую же роль, как и вертикальные порывы. Получающиеся при этом абсолютные значения перегрузок становятся небольшими, не превышающими  $0,1-0,2g$ , что по шкале интенсивности соответствует слабой болтанке. Однако в настоящее время уже достаточно данных, чтобы утверждать, что в стратосфере может наблюдаться болтанка самой различной интенсивности от слабой до сильной.

По-видимому, интенсивность болтанки сверхзвуковых самолетов зависит не только от турбулентного состояния атмосферы, но и от особенностей их аэродинамики. При исследовании явления болтанки необходимо учитывать, что в стратосфере при больших числах  $M$  естественное демпфирование собственных колебаний самолета значительно ослабевает, поэтому последствие от атмосферных возмущений сохраняется в течение более продолжительного времени. В особой степени это относится к продольным короткопериодическим и боковым колебаниям самолета. Согласно [8] «самолет имеет тенденцию к раскачиванию». Таким образом, сочетание высокой скорости полета и малой плотности воздуха в стратосфере будет проявляться в значительно более низких уровнях затухания колебаний, чем в тропосфере и при дозвуковых скоростях полета.

Все это дает основание полагать, что решение проблемы диагноза и прогноза болтанки сверхзвуковых транспортных самолетов в стратосфере может быть достигнуто путем углубленного изучения метеорологических условий, при которых может наблюдаться интенсивная турбулентность, с одной стороны, и более корректного исследования динамической устойчивости самолета при полете в турбулентной атмосфере — с другой стороны.

В решении первого круга вопросов накоплен достаточный опыт при исследовании болтанки турбореактивных (дозвуковых) самолетов в тропосфере. Обстоятельные обобщения по этому вопросу имеются, например, в работах И. Г. Пчелко [11], Н. З. Пинуса [1, 9, 10], С. М. Шметера [1, 14], В. А. Джорджио, М. А. Петросянца, Н. Н. Романова [13], Л. Т. Матвеева [6] и многих других.

В теоретическом плане много нового и перспективного внесено Д. Л. Лайхтманом и его учениками [4, 5].

При решении второго круга вопросов научной и методической основой может служить известная работа М. И. Юдина [16], ставшая классической.

Можно надеяться, что подобно тому, как внедрение турбореактивной (дозвуковой) авиации на воздушных трассах оказало добрую услугу развитию метеорологии, значительно обогатило знания об атмосферных процессах в верхней тропосфере и нижней стратосфере, освоение стратосферы сверхзвуковыми лайнерами явится новым, не менее плодотворным этапом в научных достижениях метеорологии. Масштаб этих достижений будет зависеть от того, насколько метеорологи смогут реализовать технические возможности авиации в своих интересах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Атмосферная турбулентность, вызывающая болтанку самолетов. Под ред. Н. З. Пинуса. Гидрометеониздат, М., 1962.
2. Гошек И. Аэродинамика больших скоростей. ИЛ, М., 1954.
3. Дубов А. С. Определение коэффициента турбулентного обмена по ускорению самолета. Труды ГГО, вып. 98, 1959.
4. Лайхтман Д. Л., Альтер-Залик Ю. Ж. Об использовании аэрологических данных для определения болтанки самолетов в свободной атмосфере. Физика атмосферы и океана. Изв. АН СССР, № 5, 1966.
5. Лайхтман Д. Л., Шнайрман В. С. Критерии установившейся турбулентности в струйных течениях. Метеорология и гидрология, № 12, 1960.
6. Матвеев Л. Т. Количественные характеристики турбулентного обмена в верхней тропосфере и нижней стратосфере. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1958.

7. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Оборонгиз, М., 1963.
8. Пашковский И. М. Особенности устойчивости и управляемости скоростного самолета. Воениздат, М., 1961.
9. Пинус Н. З. Современное состояние вопроса о турбулентности свободной атмосферы, вызывающей болтанку самолетов. Труды ЦАО, вып. 34, 1960.
10. Пинус Н. З., Литвинова В. Д. Об интенсивности турбулентности в облаках. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1962.
11. Пчелко И. Г. Аэросиноптические условия болтанки самолетов в верхних слоях тропосферы и нижней стратосфере. Гидрометеиздат, М., 1962.
12. Солонин С. В., Яковлева М. В. Результаты исследования атмосферной турбулентности применительно к вопросам диагноза и прогноза болтанки самолетов. Труды ЛГМИ, вып. 19, 1963.
13. Физика атмосферы и авиационная метеорология. Под ред. В. А. Джорджо. Труды ТГУ, вып. 225, 1963.
14. Шмелер С. М. Турбулентность в облаках верхней тропосферы. Труды ЦАО, вып. 34, 1960.
15. Эткин Б. Динамика полета. Машиностроение. М., 1964.
16. Юдин М. И. Вопросы теории турбулентности и структуры ветра с приложением к задаче о колебаниях самолета. Труды НИУ ГУГМС, сер. I, вып. 35, 1946.
17. Юргенсон А. П. Исследование структуры турбулентных движений. Метеорология и гидрология, № 10, 1960.
18. Reiter E. R. Development of a practical technique to predict clear-air turbulence will be a milestone in supersonic transport conquest of the lower stratosphere. Astronautics and Aeronautics. May, 1964.

Ю. Ж. Альтер-Залик

### МЕТОДИКА РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО АЭРОЛОГИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Дается методика расчета характеристик турбулентности (масштаб турбулентных движений, кинетическая энергия турбулентности, коэффициент турбулентности), основанная на теории Лайхтмана — Зилитинкевича. Исходными данными для расчета могут служить все типы зондирования атмосферы, позволяющие получить вертикальное распределение скорости и направления ветра и температуры. Приводятся градиентная линейка и номограммы, в значительной мере уыстрающие и упрощающие процесс вычисления.

1. В настоящей инструкции излагается методика расчета характеристик турбулентности, основанная на теории, развитой Д. Л. Лайхтманом и С. С. Зилитинкевичем [1].<sup>1</sup> Окончательные расчетные формулы записываются следующим образом [2]:

$$k=0,160\bar{\Phi}^{-1/2} \operatorname{ctg}^2\alpha, \quad (1)$$

$$l=0,185\bar{\Phi}^{-1/2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (2)$$

$$b=0,75 \operatorname{ctg}^2\alpha. \quad (3)$$

Здесь

$$\operatorname{ctg} \alpha = \left( \frac{d}{dz} \bar{\Phi}^{-1/2} \right)^{-1}, \quad (4)$$

$$\Phi = \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 - \alpha_T \frac{g}{T_0} \left( \frac{dT}{dz} + \gamma_a \right), \quad (5)$$

где  $k$  — коэффициент турбулентности ( $\text{м}^2/\text{сек}$ );  
 $l$  — масштаб турбулентных движений ( $\text{м}$ );  
 $b$  — кинетическая энергия турбулентности ( $\text{м}^2/\text{сек}^2$ );

<sup>1</sup> Работа выполнена под руководством проф. Д. Л. Лайхтмана.

$u, v$  — горизонтальные компоненты скорости ветра (м/сек);

$g$  — ускорение силы тяжести;

$T_0$  — температура воздуха (в °К) у поверхности земли;

$\alpha_T$  — универсальная постоянная ( $\approx 1$ );

$z$  — высота (м),

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \gamma_a \text{ (град/м)}; \quad (6)$$

$T$  — температура воздуха (в °К);

$\gamma_a$  — сухоадиабатический градиент температуры.

2. Методика предусматривает определение характеристик турбулентности (1), (2) и (3) поэтапно.

Первым этапом обработки аэрологических данных является расчет величины функции  $\Phi$ . Для этой цели выражение (5) представим в другом виде.

Компоненты скорости ветра равны

$$\left. \begin{aligned} u &= C \cos \alpha, \\ v &= C \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставив (6) и (7) в (5), получим

$$\Phi = \left( \frac{dC}{dz} \right)^2 + \frac{\bar{C}^2}{3282,14} \left( \frac{d\alpha}{dz} \right)^2 - \frac{g}{T_0} \left( \frac{dT}{dz} + \gamma_a \right), \quad (8)$$

где  $C$  — горизонтальная скорость ветра (м/сек),  $\alpha$  — направление ветра (град),  $\bar{C}$  — средняя скорость ветра в некотором слое

$$\bar{C} = \frac{C_n + C_k}{2} \quad (9)$$

$C_n$  и  $C_k$  — начальная и конечная скорости ветра в данном слое, соответственно.

3. Далее необходимо построить графики распределения температуры, скорости и направления ветра, пользуясь аэрологическими таблицами ТАЭ-3. Как известно, при аэрологических зондированиях неизбежны некоторые ошибки в измерении характеристик атмосферы, связанные с недостатками метода зондирования. Для того, чтобы в некоторой степени уменьшить их влияние при вычислении производных, необходимо построить сглаженные профили вышеуказанных характеристик по высоте. Для этого на графиках, где по оси ординат откладывается высота (км), а по оси абсцисс — температура  $t$  (°С), скорость (м/сек) и направление (градусы) ветра, производится сглаживание вертикальных распределений  $C, \alpha$

и  $t$ . Однако, целью сглаживания является только уменьшение ошибок, но не осреднение. При осреднении учитываются все нанесенные на график точки, а при сглаживании некоторые явно выскочившие точки, связанные с ошибками измерений или с пульсациями, исключаются из рассмотрения, и вертикальный профиль делают плавным, не допуская очень резких изменений с высотой рассматриваемых элементов, которые вряд ли отражают реальные профили средних полей. Примеры сглаживания и осреднения иллюстрируются рис. 1.

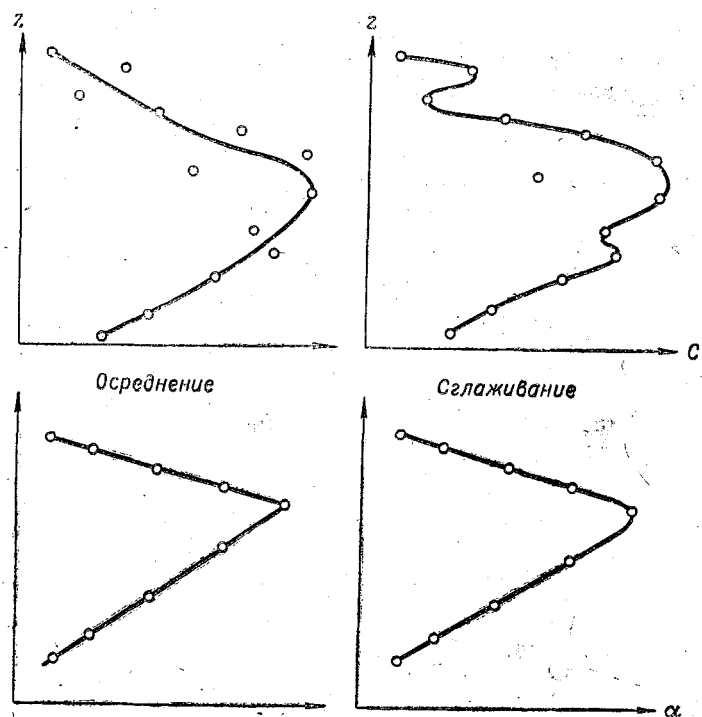


Рис. 1. Сглаживание и осреднение вертикального поля метеозадающих.

4. После построения сглаженных кривых состояния, необходимо выбрать слои с практически постоянными градиентами всех трех параметров атмосферы. Для каждого такого слоя определяется среднее значение скорости ветра  $\bar{C}$  (9) и далее рассчитываются величины  $\frac{1}{3282,14} \left( \frac{d\alpha}{dz} \right)^2$ ,  $\left( \frac{dC}{dz} \right)^2$  и  $g \frac{d\theta}{dz}$ ,

входящие в выражение (8). Для облегчения этих расчетов предлагается специальная градиентная линейка (рис. 2), пользование которой возможно лишь при построении вертикальных профилей в определенных масштабах.

Масштабы: Высота ( $z$ ) 1 км : 2 см или 5 км : 10 см.

Скорость ( $C$ ) 1 м/сек : 0,5 см или 5 м/сек : 2,5 см.

Направление ( $\alpha$ )  $1^\circ$  : 0,5 см или  $5^\circ$  : 2,5 см.

Температура ( $t$ )  $1^\circ$  : 0,5 см или  $5^\circ$  : 2,5 см.

5. Для определения значений градиентов используется градиентная линейка. Градиенты находятся последовательно для каждого слоя, удовлетворяющего указанным выше требованиям. Удобно линейку изготовлять из тонкого, прозрачного целлулоида с нанесением (фотографированием) на нее всех шкал. Градиентная линейка имеет 4 шкалы. В натуральную величину линейка представлена на рис. 2.

Для нахождения значений величин  $\frac{1}{3282,14} \left( \frac{d\alpha}{dz} \right)^2$  и  $\left( \frac{dC}{dz} \right)$  необходимо левый нижний внутренний край линейки (точка А) совместить с соответствующей кривой распределения ( $\alpha$ ) и ( $C$ ) таким образом, чтобы горизонталь линейки была параллельна оси абсцисс, как это показано на рис. 3. Далее остается лишь снять с соответствующих шкал значения искомых величин<sup>1</sup>. Для нахождения значения величины  $g \frac{d\theta}{dz}$

график температуры совмещается с точкой В градиентной линейки и на верхней шкале делается отсчет искомой величины<sup>2</sup>.

Дальнейший расчет значений функции  $\Phi$  по формуле (5) не представляет серьезной трудности.

6. Следующим этапом обработки является непосредственное нахождение характеристик турбулентности: коэффициента турбулентности  $k$ , масштаба турбулентных движений  $l$  и кинетической энергии турбулентности  $b$  по формулам (1), (2) и (3) соответственно.

Для этого строится вертикальный сглаженный профиль функции  $\Phi$ , расчет которой мы рассмотрели выше. Сглаживание профиля  $\Phi$  производится таким же образом, как и сглаживание характеристик атмосферы ( $C$ ,  $\alpha$  и  $t$ ). Далее вы-

<sup>1</sup> Градиентная линейка рассчитана для положительных градиентов  $C$  и  $\alpha$ . Однако, ее можно использовать и при отыскании отрицательных градиентов. Для этого необходимо перевернуть линейку и далее все делать аналогично.

<sup>2</sup> Линейка рассчитана для слоя толщиной 1 км. Для нахождения градиентов в слоях с меньшей мощностью, необходимо продлить кривые состояния ( $C$ ,  $\alpha$  и  $t$ ).



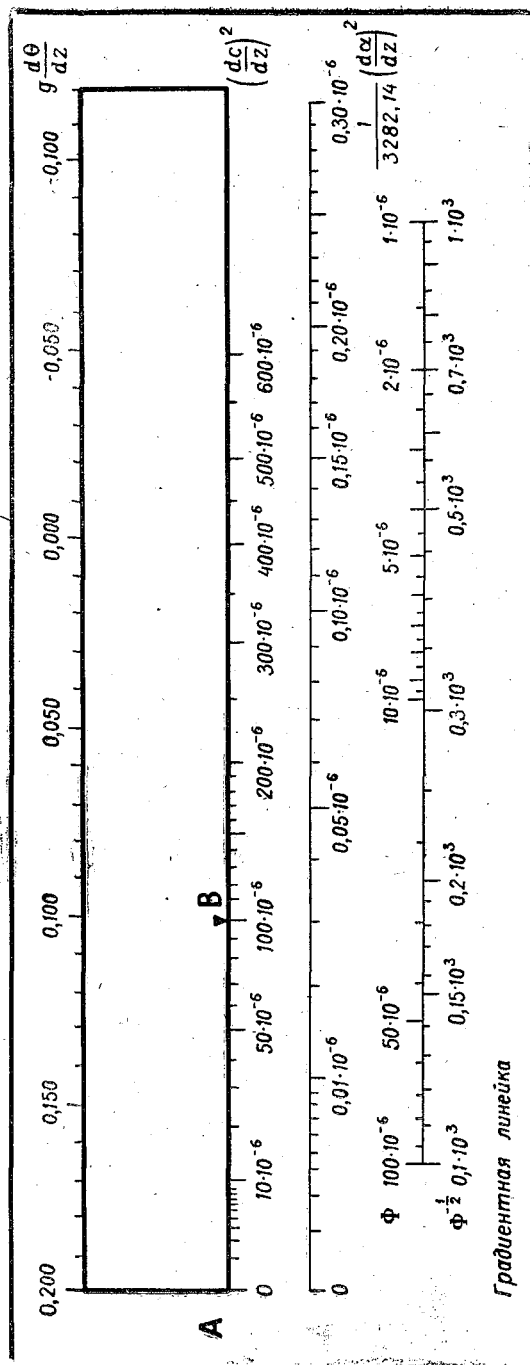
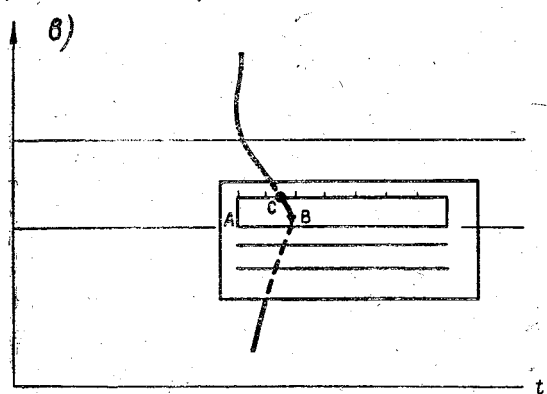
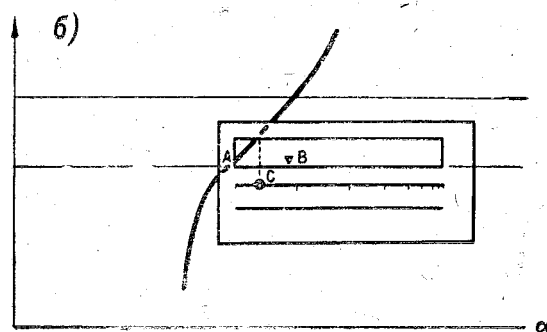
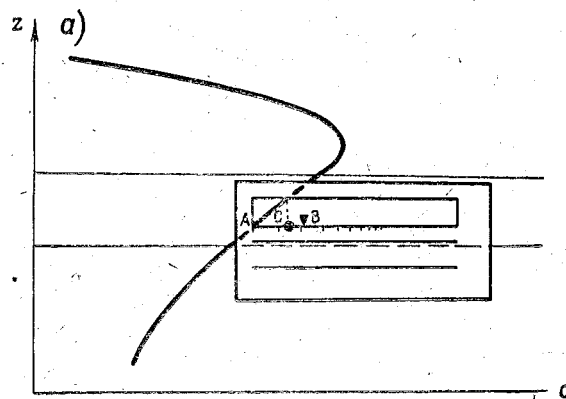


Рис. 2. Градиентная линейка в натуральную величину.



$c(\bullet)$  - отсчет

Рис. 3. Пользование градиентной линейкой.

деляют слои с неизменяющимися градиентами функции  $\Phi$  и для каждого слоя находят

$$\bar{\Phi} = \frac{\Phi_n + \Phi_k}{2}, \quad (10)$$

где  $\Phi_n$  и  $\Phi_k$  — начальное и конечное значения величины  $\Phi$  в данном слое, соответственно.

Для каждого такого слоя по известному  $\Phi$  находят величину  $\operatorname{ctg} \alpha$  (4). Значение  $\Phi^{-1/2}$  находят по градиентной линейке (нижняя шкала, рис. 2)<sup>1</sup>.

Окончательное отыскание характеристик турбулентности ( $k$ ,  $l$  и  $b$ ) производится по номограммам (рис. 4, 5, 6 и 7), рассчитанным по формулам (1), (2) и (3).

#### 7. Пример.

Рассчитать коэффициент турбулентности  $k$ , масштаб турбулентности  $l$  и кинетическую энергию турбулентности  $b$  по данным температурноветрового зондирования за 26/VIII 1960 г. за 09 час. на ст. Николаевск.

Таблица 1

| Исходные данные                                   | $z$ , км | $C$ , м/сек | $\alpha^\circ$ | $t^\circ$ |
|---------------------------------------------------|----------|-------------|----------------|-----------|
| $T_0 = 237,1^\circ$<br>( $t^\circ = 14,1^\circ$ ) | 7,0      | 13          | 235            | —27,5     |
|                                                   | 7,5      | 15          | 230            | —28,5     |
|                                                   | 8,0      | 17          | 228            | —30,0     |
|                                                   | 9,0      | 28          | 219            | —37,0     |
|                                                   | 9,3      | 30          | 218            | —39,0     |
|                                                   | 10,0     | 40          | 216            | —42,8     |
|                                                   | 10,4     | 50          | 214            | —44,0     |
|                                                   | 11,0     | 38          | 208            | —45,0     |
|                                                   | 12,0     | 43          | 214            | —45,9     |
|                                                   | 13,0     | 22          | 209            | —46,7     |

По этим данным строим вертикальные сглаженные профили  $C$ ,  $\alpha$  и  $t$  (рис. 8).

Теперь с помощью градиентной линейки находим значения величин  $\left(\frac{dC}{dz}\right)^2$ ,  $\frac{1}{3282,14} \left(\frac{dz}{dz}\right)^2$ ,  $g \frac{d\Theta}{dz}$ . Эти величины заносим в табл. 2 и по формуле (5) находим значения функции  $\Phi$ .

По найденным значениям  $\Phi$  строим сглаженный профиль этой функции (рис. 9). Причем, как это указывалось выше,

<sup>1</sup> Во внимание принимаются лишь положительные значения функции  $\Phi$ , так как в дальнейшем расчете необходимо искать величину  $\Phi^{-1/2}$ , которая мнимая при отрицательных значениях  $\Phi$ .

Таблица 2

| $z, \text{ км}$ | $\bar{C}$<br>$\text{м/сек}$ | $\left(\frac{dC}{dz}\right)^2$ | $\frac{1}{3282,14} \left(\frac{da}{dz}\right)^2$ | $g \frac{d\theta}{dz}$ | $(2)^2 \times (4)$    | $(5) : T_0$          | $(3) + (6)$          | $\Phi (8) - (7)$      |
|-----------------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1               | 2                           | 3                              | 4                                                | 5                      | 6                     | 7                    | 8                    | 9                     |
| 8,0             | 15,0                        | $17 \times 10^{-6}$            | $0,022 \times 10^{-6}$                           | 0,075                  | $5,0 \times 10^{-6}$  | $261 \times 10^{-6}$ | $22 \times 10^{-6}$  | $-239 \times 10^{-6}$ |
| 9,5             | 25,0                        | $94 \times 10^{-6}$            | $0,014 \times 10^{-6}$                           | 0,030                  | $8,7 \times 10^{-6}$  | $102 \times 10^{-6}$ | $103 \times 10^{-6}$ | $1 \times 10^{-6}$    |
| 10,3            | 41,0                        | $325 \times 10^{-6}$           | $0,009 \times 10^{-6}$                           | 0,052                  | $15,0 \times 10^{-6}$ | $180 \times 10^{-6}$ | $340 \times 10^{-6}$ | $160 \times 10^{-6}$  |
| 10,6            | 50,0                        | $0 \times 10^{-6}$             | $0,009 \times 10^{-6}$                           | 0,090                  | 0                     | $314 \times 10^{-6}$ | 0                    | $-314 \times 10^{-6}$ |
| 11,1            | 48,0                        | $180 \times 10^{-6}$           | $0,008 \times 10^{-6}$                           | 0,090                  | $19,0 \times 10^{-6}$ | $314 \times 10^{-6}$ | $199 \times 10^{-6}$ | $-115 \times 10^{-6}$ |
| 12,0            | 41,5                        | $180 \times 10^{-6}$           | $0,008 \times 10^{-6}$                           | 0,090                  | $13,0 \times 10^{-6}$ | $314 \times 10^{-6}$ | $193 \times 10^{-6}$ | $-121 \times 10^{-6}$ |
| 13,0            | 29,5                        | $230 \times 10^{-6}$           | 0                                                | 0,090                  | 0                     | $314 \times 10^{-6}$ | $230 \times 10^{-6}$ | $-84 \times 10^{-6}$  |

Таблица 3

| $z, \text{ км}$ | $\bar{\Phi}$        | $\bar{\Phi}^{-1/2}$ | $\Phi$               | $\Phi^{-1/2}$       | $\text{ctg } \alpha$ | $k, \text{ м}^2/\text{сек}$ | $l, \text{ м}$ | $b, \text{ м}^2/\text{сек}^2$ |
|-----------------|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|-----------------------------|----------------|-------------------------------|
| 10              | 11                  | 12                  | 13                   | 14                  | 15                   | 16                          | 17             | 18                            |
| 9,6             | $85 \times 10^{-6}$ | $0,107 \times 10^3$ | $9 \times 10^{-6}$   | $0,333 \times 10^3$ | 2,74                 | 140                         | 50             | 5,6                           |
| 10,3            | $85 \times 10^{-6}$ | $0,107 \times 10^3$ | $160 \times 10^{-6}$ | $0,078 \times 10^3$ | 1,95                 | 70                          | 40             | 2,8                           |
| 10,8            |                     |                     | $9 \times 10^{-6}$   | $0,333 \times 10^3$ |                      |                             |                |                               |

в дальнейшем расчете принимаются во внимание лишь положительные значения функции  $\Phi$ .

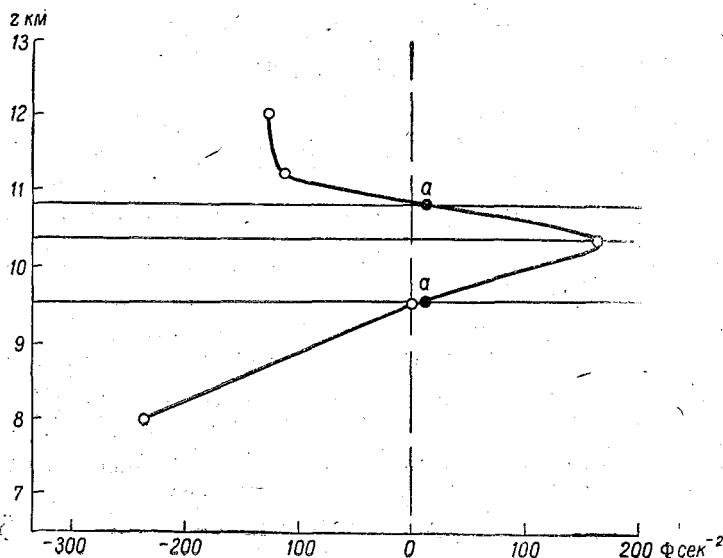
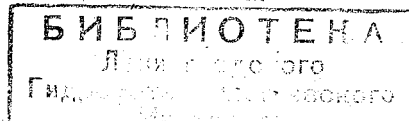


Рис. 9. Сглаженный профиль функции  $\Phi$  за 26/VIII 1960 г. п. Николаевск.

Выберем на положительной половине сглаженного профиля функции  $\Phi$  некоторые начальные точки (безразлично какие, так как в данном слое градиент постоянен). Пусть они соответствуют значению  $\Phi$ , равному  $9 \text{ сек}^{-2}$  (точки  $a$ ). Найдим в каждом слое среднее значение  $\bar{\Phi}$  (10). По нижней шкале градиентной линейки находим соответствующие значения  $\Phi^{-1/2}$ . С помощью последних рассчитываем значение  $\text{ctg} \alpha$  и по номограммам находим значение коэффициента турбулентности  $k$ , масштаба турбулентности  $l$  и кинетической энергии турбулентности  $b$  (рис. 4, 5, 6 и 7). Все результаты расчетов сведены в табл. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. О замыкании системы уравнений турбулентного движения для пограничного слоя атмосферы. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
2. Лайхтман Д. Л., Альтер—Залик Ю. Ж. Об использовании аэрологических данных для определения болтанки самолетов в свободной атмосфере. Изв. АН СССР, № 5, 1966.



## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| С. В. Солонин. Использование квазигеострофического приближения при решении задач, связанных с необходимостью учета влияния ветра на полет самолета . . . . . | 3   |
| С. В. Солонин. О применении принципа Ферма при определении траектории минимального времени полета самолета . . . . .                                         | 39  |
| С. Н. Каплан. О временной структуре облачности . . . . .                                                                                                     | 50  |
| С. В. Солонин. О влиянии эллиптичности в распределении случайного вектора на результаты расчета климатических характеристик эквивалентного ветра . . . . .   | 65  |
| С. В. Солонин. Получение информации о барическом поле и ветре на высотах по данным рейсовых самолетов . . . . .                                              | 76  |
| Ю. М. Либерман. Точность определения конечных разностей метеорологических полей и вопросы рационализации аэрологической сети . . . . .                       | 94  |
| С. В. Солонин. К вопросу об определении интенсивности болтанки самолетов в стратосфере при сверхзвуковой скорости полета . . . . .                           | 106 |
| Ю. Ж. Альтер—Залик. Методика расчета характеристик турбулентности по аэрологическим данным . . . . .                                                         | 117 |

---

Редактор *И. Г. Максимова*

Тип. ВВМУПП им. Лен. комс.  
М 22300. Подп. к печ. 22.11.67 г. Зак. 934. Т. 500. Печ. л. 8. Цена 80 коп.