Министерство высшего и среднего образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ М. И. КАЛИНИНА

Д. Л. ЛАЙХТМАН, Э. Г. ПАЛАГИН

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ К ЗАДАЧАМ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

Учебное пособие

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

ЛЕНИНГРАД
1976

УДК 551.511.3 (075)

Одобрено Ученым советом
Ленинградского гидрометеорологического института

Даются примеры приложений анализа размерностей к задачам гидрометеорологии. Они иллюстрируют главные положения теории размерностей и позволяют на конкретном материале продемонстрировать пути использования методов анализа размерностей.

Учебное пособие предназначено для студентов гидрометеорологических специальностей институтов и государственных университетов.

Работа выполнена в Ленинградском гидрометеорологическом институте.

© Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина, 1976 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой приложение метода анализа размерностей к задачам гидрометеорологии.

По существу анализ размерностей — единственный аналитический аппарат, позволяющий исследовать интересующий процесс, когда описывающие его дифференциальные уравнения неизвестны. Умение использовать указанный метод важен для специалистов-гидрометеорологов, ибо позволяет вести анализ и представить результаты в наиболее компактном и наглядном виде.

Предлагаемый материал является продолжением учебного пособия „Анализ размерностей в задачах динамической метеорологии“, в котором изложены основы теории анализа размерностей и дан ряд иллюстративных примеров.

§ 1. СТРОЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО И ПРИЗЕМНОГО СЛОЕВ АТМОСФЕРЫ

1. Прямолинейные изобары

Рассмотрим стационарный горизонтально однородный пограничный слой атмосферы*. В этом случае мы имеем дело с движением, которое определяется наличием треугольника сил: силы градиента давления $\frac{\partial p}{\partial n}$, силы Кориолиса, характеризующейся параметром Кориолиса $\lambda = 2\omega \sin\varphi$ (ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта) и силы турбулентного трения $\tau = \kappa\rho\left|\frac{d\vec{c}}{dz}\right|$, где κ — коэффициент турбулентности, $\vec{c}$ — скорость ветра. Поскольку с высотой меняются и модуль и направление ветра, то в рассмотрение должны быть введены обе компоненты вектора $\vec{c}$, т. е. $u_1 \equiv u$; $u_2 \equiv v$, и координата z. Будем считать, что коэффициент турбулентности κ является величиной постоянной и известной.

Таким образом, будем искать вид функциональной связи

$$u_i = \varphi_i\left(\lambda, \rho, \kappa, \frac{\partial p}{\partial n}, z\right)^{**}.$$

Вначале воспользуемся системой единиц M, L, T. Тогда матрица размерностей будет иметь вид:

$$\begin{array}{c|c|cccccc}
 & u_i & \lambda & \rho & \kappa & \frac{\partial p}{\partial n} & z \\
\hline
M & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
L & 1 & 0 & -3 & 2 & -2 & 1 \\
T & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0
\end{pmatrix}$$

* Этот слой не зависит от времени и горизонтальных координат.

** Здесь предполагается, что одна из координатных осей направлена по изобаре. Поэтому в число определяющих параметров входит только модуль градиента давления.

Ранг матрицы $r = 3$, ибо, например, определитель, составленный из 2-го, 3-го и 4-го столбцов,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Соответственно величины λ, ρ, κ имеют независимые размерности.

Решая систему уравнений

$$\begin{aligned} &\kappa_2 + \kappa_4 = 0, \\ &\kappa_0 - \kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_5 = 0, \\ &\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_3 + 2\kappa_4 = 0, \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} &\kappa_1 = -\frac{1}{2}\kappa_0 - \frac{3}{2}\kappa_4 + \frac{1}{2}\kappa_5, \\ &\kappa_2 = -\kappa_4, \\ &\kappa_3 = -\frac{1}{2}(\kappa_0 + \kappa_4 + \kappa_5). \end{aligned}$$

П-комплексы получим в виде:

κ_0	κ_4	κ_5	κ_1	κ_2	κ_3	Π_i
1	0	0	$-1/2$	0	$-1/2$	$\frac{u}{\sqrt{\lambda\kappa}}$
0	1	0	$-3/2$	-1	$-1/2$	$\frac{1}{\rho\lambda\sqrt{\lambda\kappa}} \frac{\partial p}{\partial n}$
0	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	$z\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$

Тогда зависимость между величинами может быть представлена следующим образом:

$$u_i = \sqrt{\lambda\kappa}\,\Phi_i\left(\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\lambda\rho\sqrt{\lambda\kappa}},\ z\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}\right).$$

Однако вид найденной связи в данной задаче можно конкретизировать и получить результаты более содержательными, если учесть, что при отсутствии ускорения нет необходимости пользоваться условием пропорциональности между силой и ускорением.

Поэтому можно в качестве первичной единицы, помимо M, L, T, выбрать еще $[f] = F$. (Напомним, что при наличии ускорений необходимо было бы ввести дополнительный аргумент — физическую константу, так как в этом случае $f = Cma$ и $[C] = \dfrac{[f]}{[m]\,[a]}$, что в конечном счете не конкретизировало бы вид искомой функции). Итак, имеем:

$$[u_i] = FTM^{-1}, \quad [\lambda] = T^{-1}, \quad [\rho] = ML^{-3},$$

$$[\kappa] = L^2 T^{-1}, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right] = FL^{-3}.$$

Матрица размерностей задачи:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_i & \lambda & \rho & \kappa & \dfrac{\partial p}{\partial n} & z \\
\hline
M & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
L & 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 1 \\
T & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
F & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $r = 4$, ибо, например, определитель, составленный из 2-го, 3-го, 4-го и 5-го столбцов,

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix} = -2.$$

За величины с независимыми размерностями следует принять λ, ρ, κ, $\dfrac{\partial p}{\partial n}$,

Из системы уравнений

$$\begin{aligned}
-\kappa_0 + \kappa_2 &= 0,\\
2\kappa_3 + \kappa_5 &= 0,\\
\kappa_0 - \kappa_1 - \kappa_3 &= 0,\\
\kappa_0 + \kappa_4 &= 0
\end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \kappa_0 + \frac{1}{2}\kappa_5,\\
\kappa_2 &= \kappa_0,\\
\kappa_3 &= -\frac{1}{2}\kappa_5;\\
\kappa_4 &= -\kappa_0.
\end{aligned}$$

Таким образом, в итоге имеем:

κ_0	κ_5	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	Π_i
1	0	1	1	0	−1	$\dfrac{u_i}{\dfrac{1}{\rho\lambda}\,\dfrac{\partial p}{\partial n}}$
0	1	1/2	0	−1/2	0	$z\sqrt{\dfrac{\lambda}{\kappa}}$.

Поскольку $\dfrac{1}{\rho\lambda}\,\dfrac{\partial p}{\partial n}=C_g$, то, введя еще обозначение $a=\sqrt{\dfrac{\lambda}{\kappa}}$, можно искомую связь представить в виде

$$u_i=C_g\,\Phi_i(az). \qquad (1.1)$$

Эффективный результат в данной задаче может быть получен и другим путем. Дело в том, что из-за отсутствия обмена энергией между вертикальными и горизонтальными компонентами потока здесь можно воспользоваться дифференцированными масштабами — L_z и L_r для вертикальных и горизонтальных длин соответственно. Причем нет необходимости во введении размерной постоянной.

Матрица размерностей имеет вид:

	u_i	C_g	λ	κ	z
L_r	1	1	0	0	0
L_z	0	0	0	2	1
T	−1	−1	−1	−1	0

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размерность κ легко может быть получена на основании следующих соображений. Как известно, $\kappa\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\tau_0}{\rho}\equiv\overline{u'w'}$ (u', w' — пульсации горизонтальной и вертикальной компонент скорости). Отсюда

$$[\kappa]=\frac{[\overline{u'w'}]}{\left[\dfrac{\partial u}{\partial z}\right]}=L_z^2\,T^{-1}.$$

Ранг написанной выше матрицы равен трем, ибо определитель, составленный из 2-го, 3-го и 4-го столбцов,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Следовательно, величины C_g, λ, κ имеют независимые размерности.

Решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \kappa_0 + \kappa_1 &= 0, \\ 2\kappa_3 + \kappa_4 &= 0, \\ -\kappa_2 - \kappa_3 &= 0 \end{aligned}$$

позволяет найти значения:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\kappa_0, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{2}\kappa_4, \\ \kappa_3 &= -\frac{1}{2}\kappa_4. \end{aligned}$$

П-комплексы имеют вид:

κ_0	κ_4	κ_1	κ_2	κ_3	Π_i
1	0	-1	0	0	$\frac{u_i}{C_g}$
0	1	0	1/2	$-1/2$	$z\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$

Отсюда следует выражение (1.1).

Таким образом, скорость ветра, как и ранее, является функцией лишь одного аргумента. Из анализа этой формулы могут быть получены важные результаты. Например, очевидно, что высота пограничного слоя H должна определяться из условия близости ветра к геострофическому, т. е. $\left.\frac{u}{C_g}\right|_{z=H} = 1 - \varepsilon$, где ε — малая величина. Из этого условия и полученной формулы следует равенство $aH = \mathrm{const}$, т. е.

$$H = \frac{C}{a} = C\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}. \tag{1.2}$$

Можно также получить величину турбулентного потока количества движения на подстилающей поверхности

$$\tau_{0i} = \kappa\rho \frac{du_i}{dz}\bigg|_{z=0}.$$

С учетом найденной зависимости запишем

$$\tau_{0i} = \kappa\rho\, C_g \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}\, \Phi_i'(0),$$

т. е.

$$\tau_0 = C\rho \sqrt{\lambda\kappa} \cdot C_g. \qquad (1.3)$$

Нетрудно получить выражение для угла α между направлением ветра и изобарой. Если Ox направлена по изобаре, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{u}\bigg|_{z=0} = \frac{\dfrac{dv}{dz}}{\dfrac{du}{dz}}\Bigg|_{z=0} = \frac{\tau_{02}}{\tau_{01}} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Заканчивая разбор данной задачи, отметим, что она служит хорошей иллюстрацией возможного повышения эффективности метода размерностей. А именно более глубокая физическая информация, закладываемая в основу рассуждений, меняет как подход к решению, так и окончательный результат. При этом выигрыш может быть весьма значительным.

2. Криволинейные изобары

Будем, как и ранее, исходить из предположений, что процесс стационарный, но изобары являются круговыми.

Тогда, помимо перечисленных выше величин, в число определяющих параметров следует дополнительно ввести радиус кривизны изобары R. (В силу симметрии все искомые величины не могут зависеть от полярного угла Θ). По аналогии с предыдущим удобно ввести обозначение $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \lambda C_g$. Тогда, рассуждая так, как и при рассмотрении случая прямолинейных изобар, можем записать, что

$$u_i = \varphi_i(C_g, \lambda, \kappa, z, R); \quad (u_1 = v_r,\ u_2 = v_\Theta).$$

Поскольку в данной задаче все силы действуют только в горизонтальной плоскости (в статическом приближении) и нет обмена кинетической энергией между вертикальными и горизонтальными компонентами скорости, то и здесь допустимо использовать дифференцированные размерности длины L_z и L_R соответственно по вертикали и горизонтали, не вводя размерной постоянной.

Матрица размерностей будет иметь вид:

$$\begin{array}{c|cccccc} & u & C_g & \lambda & \kappa & z & R \\ \hline L_R & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ L_z & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ T & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}.$$

Ранг матрицы равен трем, ибо определитель, составленный из 2-го, 3-го и 4-го столбцов,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, величины C_g, λ, κ имеют независимые размерности.

Из системы уравнений

$$\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_5 = 0,$$
$$2\kappa_3 + \kappa_4 = 0,$$
$$\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0$$

находим:

$$\kappa_1 = -\kappa_0 - \kappa_5,$$
$$\kappa_2 = \kappa_5 + \frac{1}{2}\kappa_4,$$
$$\kappa_3 = -\frac{1}{2}\kappa_4.$$

Следовательно:

κ_0	κ_4	κ_5	κ_1	κ_2	κ_3	Π_i
1	0	0	−1	0	0	$\Pi_1 = \frac{u}{C_g}$
0	1	0	0	1/2	−1/2	$\Pi_2 = z\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$
0	0	1	−1	1	0	$\Pi_3 = \frac{R\lambda}{C_g}$

Итак,

$$\Pi_1 = \Phi_i(\Pi_2, \Pi_3)$$

или

$$u_i = C_g \, \Phi_i \left(az, \ \frac{R\lambda}{C_g} \right), \tag{1.4}$$

где, как и ранее, $a = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$. Легко видеть, что при $R \to \infty$ получается предыдущий результат.

Воспользовавшись уравнением неразрывности, легко получить выражение для вертикальной скорости на верхней границе пограничного слоя

$$w = \frac{C_g}{a \, R} \, \Phi \left(\frac{\kappa\lambda}{C_g} \right). \tag{1.5}$$

Для малых R

$$w = \frac{\lambda}{a} \left[C_0 + C_1 \frac{R\lambda}{C_g} \right] = C_0 \sqrt{\lambda\kappa} \left(1 + C_2 \frac{R\lambda}{C_g} \right).$$

Здесь, как и в предыдущей задаче, нетрудно получить выражения для касательного напряжения и угла отклонения ветра от изобары. А именно, исходя из (1.4), будем иметь

$$\tau_{0i} = \kappa\rho \frac{du_i}{dz} \bigg|_{z=0} = \rho \, C_g \sqrt{\lambda\kappa} \ \psi_i \left(\frac{R\lambda}{C_g} \right). \tag{1.6}$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{02}}{\tau_{01}} = \frac{\psi_2 \left(\frac{R\lambda}{C_g} \right)}{\psi_1 \left(\frac{R\lambda}{C_g} \right)} = \psi \left(\frac{R\lambda}{C_g} \right). \tag{1.7}$$

3. Нейтральная стратификация. Коэффициент турбулентности — функция внешних параметров

Рассмотренные выше случаи строения пограничного слоя атмосферы применимы лишь при отыскании его интегральных характеристик. Вертикальная структура заметно искажается в связи с тем, что переменный по высоте коэффициент турбулентности заменен его средним значением. Упростим постановку задачи, ограничиваясь пока случаем безразличного равновесия. Для этого воспользуемся следующими соображениями. Как известно, турбулентность в пограничном слое при безразличном равновесии связана с наличием больших градиентов скорости. Поэтому параметры турбулентности, в частности и коэффициент $\kappa = \kappa(z)$, определяются теми же величинами, что и градиент скорости. Следовательно, на основании предыдущего материала можно и для коэффициента турбулентности записать, что $\kappa = \kappa(C_g, \lambda, z, z_0)$. Причем здесь список определяющих величин дополнен только параметром шероховатости z_0 (уровнем, на котором скорость ветра обращается в ноль). Заметим, что и в предыдущей задаче следовало бы ввести z_0, ибо он определяет граничное условие $u|_{z=z_0} = 0$. Однако в рассмотренной модели можно пользоваться упрощенным граничным условием $u|_{z=0} = 0$, что достигается простым сдвигом начала координат на величину $z = z_0$. На результатах это обстоятельство отразиться не может.

Совершенно иначе будет обстоять дело при использовании более точной модели, которую мы сейчас рассмотрим, ввиду того, что при $z \to 0$, $\kappa \to 0$. Как будет ясно из дальнейшего, профиль скорости ветра $u = u(z)$ в силу этого имеет логарифмическую особенность при $z \to 0$. Очевидно, что смещение координат в данном случае недопустимо и z_0 должно явно фигурировать в числе определяющих параметров. Поскольку κ и u зависят от одних и тех же величин, то и с учетом турбулентности

$$u_i = \varphi_i(C_g, \lambda, z, z_0).$$

Матрица размерностей принимает вид:

$$\begin{array}{c|ccccc} & u_i & C_g & \lambda & z & z_0 \\ \hline L & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ T & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из решения уравнений

$$-\kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 0,$$
$$-\kappa_0 - \kappa_1 - \kappa_2 = 0$$

найдем:

$$\kappa_1 = -\kappa_0 - \kappa_3 - \kappa_4,$$
$$\kappa_2 = \kappa_3 + \kappa_4.$$

В результате получим:

κ_0	κ_3	κ_4	κ_1	κ_2	П
1	0	0	−1	0	$\frac{u_i}{C_g}$
0	1	0	−1	1	$\frac{\lambda z}{C_g}$
0	0	1	−1	1	$\frac{\lambda z_0}{C_g}$

Величина $\frac{1}{\Pi_3} = \frac{C_g}{\lambda z_0}$ получила в литературе название числа

Россби R_0. Искомая нами связь может быть представлена в виде

$$u_i = C_g \ \Phi_i \left(\mathrm{Ro}, \frac{\lambda z}{C_g} \right). \tag{1.8}$$

На основании тех же соображений

$$\kappa = \frac{C_g^2}{\lambda} \ \Phi \left(\mathrm{Ro}, \ \frac{\lambda z}{C_g} \right). \tag{1.9}$$

Поскольку величина модуля турбулентного трения равна

$$|\tau| = \rho\kappa \sqrt{\left(\frac{du_1}{dz}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{dz}\right)^2},$$

то, исходя из последней зависимости, можно записать, что

$$\frac{|\tau|}{\rho} = C_g^2 \ \tilde{\Phi} \left(\mathrm{Ro}, \ \frac{\lambda z}{C_g} \right).$$

При $z \to z_0$ имеем

$$\frac{|\tau_0|}{\rho} = v_*^2 = C_g^2 \ \tilde{\Phi}_* \ (\mathrm{Ro}),$$

где v_* — динамическая скорость.

Из последней связи видно, что при безразличном равновесии $\mathrm{Ro} = \varphi \left(\frac{v_*}{C_g} \right)$. Поэтому выражение (1.9) можно записать в виде

$$\kappa = \frac{v_*^2}{\lambda} \ \Phi_* \left(\frac{v_*}{C_g}, \ \frac{\lambda z}{v_*} \right). \tag{1.10}$$

Так как $\kappa \to 0$ при $z \to 0$ и $z \to \infty$, то на некоторой высоте $z = z_m$ величина κ достигает максимума. Из (1.10) нетрудно получить, что

$$z_m = \frac{C_g}{\lambda} \ \varphi \left(\frac{v_*}{C_g} \right).$$

Очевидно, что при приближении к земной поверхности параметр $\frac{\lambda z}{v_*}$ становится малым и в области малых z справедливо разложение

$$\kappa = \frac{v_*^2}{\lambda}\left[\Phi_*\left(\frac{v_*}{C_g}, 0\right) + \frac{\lambda z}{v_*}\cdot\frac{\partial\Phi_*\left(\frac{v_*}{C_g}, 0\right)}{\partial z} + \frac{\lambda^2 z^2}{2v_*^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi_*\left(\frac{v_*}{C_g}, 0\right)}{\partial z^2} + \ldots\right].$$

Из условия $\kappa\to 0$ при $z\to 0$ следует, что $\Phi_*\left(\frac{v_*}{C_g}, 0\right) \equiv 0$.

Поэтому, если ограничиться первыми двумя членами разложения, то, введя обозначения

$$\varkappa\left(\frac{v_*}{C_g}\right) \equiv \Phi_*'\left(\frac{v_*}{C_g}, 0\right), \quad \varkappa_1\left(\frac{v_*}{C_g}\right) \equiv \frac{\Phi_*''\left(\frac{v_*}{C_g}, 0\right)}{\Phi_1'\left(\frac{v_*}{C_g}, 0\right)},$$

получим выражение следующего вида:

$$\kappa = \varkappa v_* z\left(1 + \frac{\varkappa_1\lambda z}{v_*}\right). \tag{1.11}$$

В формуле (1.11) второе слагаемое правой части — поправка к линейному закону, обусловленная отклоняющей силой вращения Земли.

Путем совершенно аналогичных рассуждений легко получить выражение для компонент турбулентного трения

$$\frac{\tau_i}{\rho} = v_*^2 F_i\left(0, \frac{v_*}{C_g}\right)\left[1 + \frac{\lambda z}{v_*}\cdot\frac{F_i'\left(0, \frac{v_*}{C_g}\right)}{F_i\left(0, \frac{v_*}{C_g}\right)}\right] = v_{*i}^2\left[1 + \frac{\tilde{\varkappa}_i\lambda z}{v_*}\right], \tag{1.12}$$

где также $\tilde{\varkappa}_i = \tilde{\varkappa}_i\left(\frac{v_*}{C_g}\right)$.

Откуда, учитывая (1.11), получим

$$\frac{du_i}{dz} = \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{v_{*i}^2\left(1 + \frac{\tilde{\varkappa}_i\lambda z}{v_*}\right)}{v_* z\left(1 + \frac{\varkappa_1\lambda z}{v_*}\right)}.$$

Поскольку при малых $z\,\frac{\varkappa_1 \lambda z}{v_*} \ll 1$, то с достаточной точностью

$$\frac{du_i}{dz} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{v_{*i}^2}{z v_*} \left(1 + \frac{\tilde{\varkappa}_i \lambda z}{v_*}\right)\left(1 - \frac{\varkappa_1 \lambda z}{v_*}\right).$$

Отсюда, пренебрегая членами второго порядка малости, для градиента компонент скорости ветра получим выражение

$$\frac{du_i}{dz} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{v_{*i}}{z}\left[1 + (\tilde{\varkappa}_i - \varkappa_1)\,\frac{\lambda z}{v_*}\right]. \tag{1.13}$$

Интегрируя (1.13), будем иметь

$$u_i = \frac{1}{\varkappa} v_{*i}\left[\ln z + (\tilde{\varkappa}_i - \varkappa_1)\,\frac{\lambda z}{v_*}\right] + \mathrm{Const}\,.$$

Постоянную интегрирования определяем из условия

$$u_i\Big|_{z\to z_0} \to 0\,.$$

В итоге выражение для компонент скорости ветра примет вид

$$u_i = \frac{1}{\varkappa} v_{*i}\left[\ln\frac{z}{z_0} + \frac{z - z_0}{L_0}\right]^*, \tag{1.14}$$

где $\quad L_0 = \dfrac{v_*}{\lambda(\tilde{\varkappa}_i - \varkappa_1)}$.

Полученные формулы справедливы для $\frac{z}{L_0} \ll 1$ и если, кроме того, $\ln\frac{z}{z_0} \gg \frac{z}{L_0}$, т. е. $1 \gg \frac{z}{L_0} \gg \frac{z_0}{L_0}$, то

$$K = \varkappa v_* z, \tag{1.15}$$

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \frac{v_{*i}}{\varkappa}\ln\frac{z}{z_0}, \\ \sqrt{u_1^2 + u_2^2} &= \frac{v_*}{\varkappa}\ln\frac{z}{z_0}. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Следовательно, вблизи земной поверхности (в так называемом приземном слое) в случае безразличного равновесия коэффициент турбулентности линейно растет с высотой, а скорость ветра меня-

* Известно, и это будет ниже показано, что отклонения от логарифмического профиля обусловлены стратификацией. Из (1.14), однако, следует, что аналогичные отклонения вызываются и силой Кориолиса.

ется по логарифмическому закону. Из выражений (1.15) и (1.16) ясно, что $\frac{|\tau|}{\rho} = \kappa \frac{du}{dz} = v_*^2$, т. е. величина турбулентного трения от высоты не зависит и сохраняется постоянной в пределах всего слоя. Исходя из соотношения (1.12), легко оценить толщину приземного слоя h, где справедливы законы (1.15) и (1.16). Ясно, что должно иметь место неравенство $\frac{\lambda h}{v_*} \ll 1$, поэтому

$$h = C \frac{v_*}{\lambda}.$$

4. Термически стратифицированный пограничный слой

Более сложно рассмотрение стратифицированного пограничного слоя. В этом случае режим турбулентности определяется дополнительно параметрами, характеризующими стратификацию. В стратифицированном потоке турбулентный обмен может быть более или менее интенсивен по сравнению со случаем нейтральной стратификации. Внешними параметрами, определяющими стратификацию пограничного слоя, могут служить турбулентный поток тепла P_0 вблизи деятельной поверхности и объемная теплоемкость $\rho\, c_p^*$.

Кроме упомянутых величин, необходимо ввести параметр плавучести $\frac{g}{\Theta_0}$, поскольку от него зависит ускорение вихря, а стало быть, и интенсивность турбулентного обмена. Таким образом, для компонент градиента скорости ветра, например, следует искать зависимости вида:

$$\frac{du_i}{dz} = \varphi_i \left(C_g,\ \lambda,\ z,\ z_0,\ P_0,\ \rho c_p,\ \frac{g}{\Theta_0} \right). \tag{1.17}$$

Видно, что в этом случае P_0, ρc_p, $\frac{g}{\Theta_0}$ должны сгруппироваться в виде $\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0}$**, чтобы скомпенсировать размерности тепла и температуры, которые не входят в размерности других величин.

---

* Имеется ввиду стационарный, горизонтально однородный пограничный слой, в котором можно пренебречь лучистым теплообменом.

** Впрочем, это можно было бы получить и обычным путем, используя дополнительно размерности тепла Q и температуры Θ.

2 Зак. 587

Ленинградский
Гидрометеоро[логический] ин-т
БИБ[ЛИ]ОТЕКА
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

Матрица размерностей будет иметь вид:

	$\frac{du_i}{dz}$	C_g	λ	z	z_0	$\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}$
L	0	1	0	1	1	2
T	−1	−1	−1	0	0	−3

Ранг матрицы $r=2$, C_g и λ имеют независимые размерности. Решая систему уравнений

$$\kappa_1+\kappa_3+\kappa_4+2\kappa_5=0,$$
$$-\kappa_0-\kappa_1-\kappa_2-3\kappa_5=0,$$

находим:

$$\kappa_1=-\kappa_3-\kappa_4-2\kappa_5,$$
$$\kappa_2=-\kappa_0+\kappa_3+\kappa_4-\kappa_5.$$

П-комплексы приобретают вид:

κ_0	κ_3	κ_4	κ_5	κ_1	κ_2	Π_i
1	0	0	0	−1	0	$\frac{1}{\lambda}\,\frac{du_i}{dz}$
0	1	0	0	−1	1	$\frac{\lambda z}{C_g}$
0	0	1	0	−1	1	$\frac{\lambda z_0}{C_g}=\frac{1}{\mathrm{Ro}}$
0	0	0	1	−2	−1	$\frac{1}{\lambda C_g^2}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}$

Следовательно,

$$\frac{du_i}{dz}=\lambda\,\Phi_i\left(\mathrm{Ro},\ \frac{\lambda z}{C_g},\ \frac{1}{\lambda C_g^2}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\right). \tag{1.18}$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить выражение для градиента потенциальной температуры в виде

$$\frac{d\Theta}{dz}=\frac{\lambda P_0}{C_g^2\,\rho c_p}\,\Phi_3\left(\mathrm{Ro},\ \frac{\lambda z}{C_g},\ \frac{1}{\lambda C_g^2}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\right), \tag{1.19}$$

а также для градиента удельной влажности

$$\frac{dq}{dz}=\frac{\lambda V_0}{\rho C_g^2}\,\Phi_4\left(\mathrm{Ro},\ \frac{\lambda z}{C_g},\ \frac{1}{\lambda C_g^2}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\right). \tag{1.20}$$

В последнем случае в рассмотрение введен турбулентный поток влаги с поверхности почвы V_0 и плотность воздуха ρ. Величины ρ, V_0, q необходимо должны объединиться в комплекс $g\Big/\frac{v_0}{\rho}$ для компенсации размерности массы воды, отсутствующей среди остальных величин.

Выполнив интегрирование по z, мы можем получить выражение для u_i, Θ и q. Ясно, что они будут зависеть от тех же параметров, от которых зависят и градиенты.

Для коэффициента турбулентности будем иметь зависимость

$$\kappa = C_g\, z\, \Phi\left(\text{Ro},\ \frac{\lambda z}{C_g},\ \frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\cdot\frac{1}{\lambda C_g^2}\right). \tag{1.21}$$

Из соотношений (1.18) и (1.21) следует:

$$\left.\frac{\tau_i}{\rho}\right|_{z\to z_0} = v_{*i}^2 = C_g^2\ \Phi_5\left(\text{Ro},\ \frac{P_0}{\rho c_p}\ \frac{g}{\Theta_0}\ \frac{1}{\lambda C_g^2}\right).$$

Поэтому в стратифицированном потоке

$$\text{Ro} = \chi\left(\frac{v_*}{C_g},\ \frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\cdot\frac{1}{\lambda C_g^2}\right). \tag{1.22}$$

С учетом этого обстоятельства, комбинируя безразмерные комплексы, полученные выше соотношения, можем переписать в виде:

$$\kappa = v_*\, L\, \Phi_\kappa\left(\frac{v_*}{C_g},\ \frac{L_1}{L},\ \frac{z}{L}\right); \tag{1.23}$$

$$\frac{du_i}{dz} = \frac{v_*}{z}\ \tilde{\Phi}_i\left(\frac{v_*}{C_g},\ \frac{L_1}{L},\ \frac{z}{L}\right); \tag{1.24}$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{\Theta_*}{z}\ \Phi_0\left(\frac{v_*}{C_g},\ \frac{L_1}{L},\ \frac{z}{L}\right); \tag{1.25}$$

$$\frac{dq}{dz} = \frac{q_*}{z}\ \Phi_2\left(\frac{v_*}{C_g},\ \frac{L_1}{L},\ \frac{z}{L}\right), \tag{1.26}$$

где

$$L = -\left(\frac{P_0}{\rho c_p}\ \frac{g}{\Theta_0}\ \frac{\varkappa}{v_*^3}\right)^{-1};\quad L_1 = \frac{\varkappa v_*}{\lambda};\quad \Theta_* = -\frac{1}{\varkappa v_*}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p};$$

$$q_* = \frac{V_0}{\varkappa v_* \rho};$$

знак минус и постоянная $\varkappa$ введены для согласования с общепринятыми обозначениями. Величина $\frac{L_1}{L}$ отражает влияние силы Кориолиса.

Важной характеристикой турбулентного потока является число Ричардсона $\mathrm{Ri} = \frac{g}{\Theta_0} \frac{d\Theta}{dz} \Big/ \left(\frac{du}{dz}\right)^2$. По своему физическому смыслу оно представляет собой отношение термических и динамических факторов, порождающих турбулентиось. При нейтральной стратификации $\mathrm{Ri} = 0$. При $\mathrm{Ri} < 0$ стратификация неустойчива и термические факторы (как уже ранее упоминалось) сообщают турбулентным пульсациям дополнительную энергию. При $\mathrm{Ri} > 0$ наблюдается обратная картина, ибо в случае устойчивой стратификации силы плавучести ослабляют турбулентность. Возможна ситуация при значениях Ri, меньших некоторого критического числа $\mathrm{Ri}_{\text{кр}}$, когда турбулентность вообще не может существовать. Последнее означает, что производство энергии турбулентности за счет динамических факторов меньше ее расхода на преодоление эффекта отрицательной плавучести.

Исходя из полученных выше соотношений (1.24), (1.25), можно установить, что

$$\mathrm{Ri} = \frac{z}{L} \Phi_R \left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, \frac{z}{L}\right). \tag{1.27}$$

Особенно простые формулы получаются для условий, близких к термической конвекции. В этом случае $v_* \to 0$, $C_g \to 0$.

Формулу (1.23) с целью удобства анализа перепишем в виде

$$\kappa = v_* z \left(\frac{z}{L}\right)^{1/3} \tilde{\Phi}_\kappa \left(\frac{C_g}{v_*} \cdot \frac{(-L)^{1/2}}{L_1^{1/2}};\ \frac{z}{L} \cdot \frac{L(-L)^{1/2}}{L_1^{3/2}};\ \left(\frac{L}{L_1}\right)^{1/2}\right)$$

или

$$\kappa = \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \frac{g}{\Theta_0}\right)^{1/3} z^{4/3} \tilde{\Phi}_\kappa \left(\frac{C_g}{\lambda \tilde{L}}, \frac{z}{\tilde{L}}, \frac{v_*}{\lambda \tilde{L}}\right).$$

Здесь $\tilde{L} = \left(\frac{\varkappa^2}{\lambda^3} \cdot \frac{g}{\Theta_0} \cdot \frac{P_0}{\rho c_p}\right)^{1/2} > 0; \qquad [\tilde{L}] = L.$

При малых v_* и C_g получаем

$$\kappa = \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0}\right)^{1/3} z^{4/3} \left[\psi_0\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{C_g}{\lambda z} \psi_1\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{v_*}{\lambda z} \psi_2\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)\right]. \tag{1.28}$$

Вид функции $\psi_0\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)$ легко находится. Действительно, при чисто термической конвекции $v_*=C_g=0$. Тогда из формулы (1.28) следует

$$\kappa=\left(\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\right)^{1/3} z^{4/3}\,\psi_0\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right).$$

Но в упомянутом случае $\tilde{L}$ не может входить в результирующие формулы, так как сила Кориолиса не является здесь существенным параметром. Это значит, что $\psi_0(\frac{z}{\tilde{L}})=\mathrm{const}$. И, стало быть,

$$\kappa=A_\kappa\left(\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\right)^{1/3} z^{4/3}\left[1+\frac{C_g}{\lambda\tilde{L}}\,\kappa_1\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{v_*}{\lambda\tilde{L}}\,\kappa_2\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)\right].\qquad(1.29)$$

Точно также могут быть получены выражения для градиентов температуры и влажности при условиях, близких к термической конвекции:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dz}&=A_\Theta\left(\frac{P_0}{\rho c_p}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{\Theta_0}\right)^{-1/3} z^{-4/3}\left[1+\frac{C_g}{\lambda\tilde{L}}\,\Theta_1\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)+\right.\\&\qquad\left.+\frac{v_*}{\lambda\tilde{L}}\,\Theta_2\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)+\dots\right],\\\frac{dq}{dz}&=A_q\,\frac{V_0}{\rho}\left(\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\right)^{-1/3} z^{-4/3}\left[1+\frac{C_g}{\lambda\tilde{L}}\,q_1\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)+\right.\\&\qquad\left.+\frac{v_*}{\lambda\tilde{L}}\,q_2\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)+\dots\right].\end{aligned}\right\}\qquad(1.30)$$

Выражение для $\frac{du_i}{dz}$ непосредственно из (1.24) получить нельзя; будем исходить из того, что для состояний, близких к термической конвекции (v_* и C_g малы, но не равны нулю) остается конечной величиной

$$\frac{\tau_i}{\rho v_*^2}=\Phi_{\tau i}\left(\frac{C_g}{\lambda\tilde{L}},\ \frac{v_*}{\lambda\tilde{L}},\ \frac{z}{\tilde{L}}\right).$$

Ясно, что для рассматриваемых условий ввиду малости первых двух аргументов справедливо разложение

$$\frac{\tau_i}{\rho v_*^2} = \Phi_{\tau i}\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{C_g}{\lambda \tilde{L}} \Phi'_{\tau i}\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{v_*}{\lambda \tilde{L}} \Phi''_{\tau i}\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right) + \ldots$$

Тогда, зная, что $\frac{\tau_i}{\rho} = \kappa \frac{du_i}{dz}$, и учитывая формулу (1.29), будем иметь

$$\frac{du_i}{dz} = v_*^2 \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0}\right)^{-1/3} z^{-4/3} \times$$

$$\times \frac{\Phi_{\tau i}\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{C_g}{\lambda \tilde{L}} \Phi'_{\tau i}\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{v_*}{\lambda \tilde{L}} \Phi''_{\tau i}\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right)}{A_\kappa \left[1 + \frac{C_g}{\lambda \tilde{L}} \Phi_1\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{v_*}{\lambda \tilde{L}} \Phi_2\left(0, 0, \frac{z}{\tilde{L}}\right)\right]} .$$

Поскольку величины $\frac{C_g}{\lambda \tilde{\tilde{L}}}$, $\frac{v_*}{\lambda \tilde{L}}$ в рассматриваемом случае малы, то из написанного выражения вытекает приближенное равенство

$$\frac{du_i}{dz} = v_*^2 \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0}\right)^{-1/3} z^{-4/3} \left[\chi_{0i}\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{C_g}{\lambda \tilde{L}} \chi_{1i}\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right) + \frac{v_*}{\lambda \tilde{L}} \chi_{2i}\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right)\right] . \qquad (1.31)$$

Ясно, что нет достаточных оснований для пренебрежения силой Кориолиса в формуле (1.31). Вид функций χ_0, χ_1, χ_2 может быть определен либо из точного решения задачи, либо из эксперимента. Условие $\frac{C_g}{\lambda \tilde{L}} \ll 1$ позволяет получить предельную скорость геострофического ветра, с которой начинается режим свободной конвекции. Определяя критическое значение равенством $C_g^{\text{кр}} = \lambda \tilde{L} = \left(\frac{\varkappa^2}{\lambda} \frac{P_0}{\Theta_0} \frac{g}{\rho c_p}\right)^{1/2}$, мы убеждаемся, что в экваториальных районах режим свободной конвекции должен наблюдаться чаще, чем в более высоких широтах. Если иметь еще в виду, что размытое барическое поле является характерным для этих районов, то есть основание считать, что указанный режим там типичен.

Очевидно, что при уменьшении z все функции (1.30) — (1.31) вырождаются в постоянные. Тогда, пренебрегая поправочными членами, получим наиболее простые результаты:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_i}{dz} &= A_{ui}\, v_{*i}^2 \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0} \right)^{-1/3} z^{-4/3}, \\
\frac{d\Theta}{dz} &= A_\Theta \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \right)^{2/3} \left(\frac{g}{\Theta_0} \right)^{-1/3} z^{-4/3}, \\
\frac{dq}{dz} &= A_q\, \frac{V_0}{\rho} \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0} \right)^{-1/3} z^{-4/3}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

Или после интегрирования:

$$\left.\begin{aligned}
u_i &= -3\, A_{ui}\, v_{*i}^2 \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0} \right)^{-1/3} z^{-1/3} + \mathrm{Const}, \\
\Theta &= -3\, A_\Theta \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \right)^{2/3} \left(\frac{g}{\Theta_0} \right)^{-1/3} z^{-1/3} + \mathrm{Const}, \\
q &= -3\, A_q\, \frac{V_0}{\rho} \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0} \right)^{1/3} z^{-1/3} + \mathrm{Const}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

На основе первой и второй формул соотношений (1.32) легко получить

$$\mathrm{Ri} = \frac{A_R}{v_*^4} \left(\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{g}{\Theta_0} \right)^{4/3} z^{-4/3}. \tag{1.34}$$

Из (1.34) следует, что величина

$$H = \frac{P_0}{\rho c_p} \left(\frac{g}{\Theta_0} \right)^{-1/2} \left(\frac{dT}{dz} \right)^{-3/2} z^{-2} \equiv \mathrm{Const}.$$

Справедливость этого соотношения была проверена на экспериментальном материале. Соответствующие результаты приведены на рис. 1. Как и следует из теории, H при $\mathrm{Ri} > 0{,}02$ действительно сохраняется постоянным.

Перейдем теперь к общему случаю для области малых значений $\frac{z}{L}$. Совершенно очевидно, что для случая малых величин $\frac{z^*}{L}$ вообще получаются наиболее эффективные результаты. Так, проведя

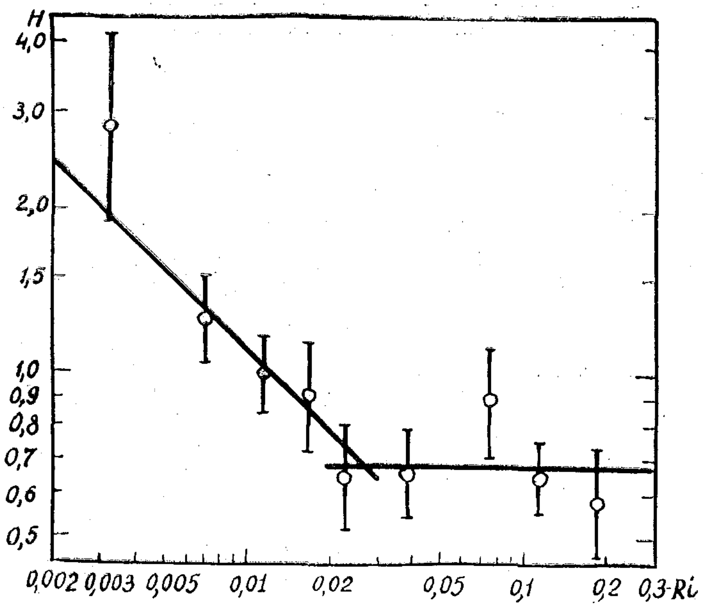

Рис. 1. Безразмерный поток тепла H как функция Ri по измерениям Суинбенка. Средние значения для групп показаны кружками, а стандартные ошибки — вертикальными отрезками линий.

в формуле (1.23) разложение по $\frac{z}{L}$ будем иметь

$$K = \varkappa v_* L \left[\Phi_K\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) + \frac{z}{L} \Phi'_K\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{z^2}{L^2} \Phi''_K\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) + \ldots \right].$$

---

* Малость величины $\frac{z}{L}$ может иметь место как при малых z, так и при приближении к случаю безразличного равновесия, когда при $P_0 \to 0$, $L \to \pm\infty$. Поэтому при весьма малых z и конечных P_0 влияние стратификации становится несущественным. Отсюда ясно, что полученные ниже для $\frac{z}{L} \ll 1$ выводы можно интерпретировать двояко.

Из условия $z \to 0$ $K \to 0$ следует, что $\Phi_K\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) = 0$. Поэтому

$$K = \varkappa v_* z \left(1 + \beta_K \frac{z}{L}\right),$$

где

$$\varkappa = \varkappa\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}\right); \quad \beta_K = \beta_K\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}\right)^*.$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить выражения для потоков количества движения, тепла и пара:

$$\frac{|\tau_0|}{\rho} = v_*^2\left[\Phi_{\tau i}\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) + \Phi'_\tau\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right];$$

$$P = P_0\left[\Phi_P\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) + \Phi'_P\left(\frac{v^*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right];$$

$$V = V_0\left[\Phi_V\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) + \Phi'_V\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right].$$

Поскольку при $z \to 0$ должно $\frac{|\tau|}{\rho} \to v_*^2$, $P \to P_0$ и $V \to V_0$, то очевидно, что

$$\Phi_\tau\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) = \Phi_P\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) = \Phi_V\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right) = 1.$$

Поэтому предыдущие выражения следует переписать в виде:

$$\frac{\tau_i}{\rho} = K\frac{du_i}{dz} = v_*^2\left[1 + \Phi'_{\tau i}\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right];$$

$$P = -K\rho c_p\frac{d\Theta}{dz} = P_0\left[1 + \Phi'_P\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right];$$

$$V = -K\rho\frac{dq}{dz} = V_0\left[1 + \Phi'_V\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right].$$

---

* Возможно, что большой разброс значений β_K, получающийся из опытных данных, связан с тем, что величина β_K отнюдь не константа, как это следует из приведенного анализа.

Учитывая полученное выше выражение для κ, можем перейти к градиентам. Так, например,

$$\frac{du_i}{dz} = \frac{v_*}{\lambda z} \frac{\left[1 + \Phi'_{\tau i}\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right]}{\left[1 + \beta_\kappa \frac{z}{L}\right]}.$$

Поскольку слагаемое $\beta_\kappa \frac{z}{L}$ мало, то справедливо разложение

$$\frac{du_i}{dz} = \frac{v_*}{\varkappa z}\left[1 + \Phi'_{\tau i}\left(\frac{v_*}{C_g}, \frac{L_1}{L}, 0\right)\frac{z}{L} + \ldots\right]\left(1 - \beta_\kappa \frac{z}{L}\right).$$

Или, ограничиваясь членами первого порядка малости, будем иметь

$$\frac{du_i}{dz} = \frac{v_*}{\varkappa z}\left(1 + \beta_{ui}\frac{z}{L}\right).$$

Аналогичным путем можно получить:

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{\Theta_*}{z}\left(1 + \beta_\Theta \frac{z}{L}\right);$$

$$\frac{dq}{dz} = \frac{q_*}{z}\left(1 + \beta_q \frac{z}{L}\right).$$

Ясно, что $\tilde{\beta}_{ui}$, β_Θ, β_q являются некоторыми функциями от $\frac{v_*}{C_g}$ и $\frac{L_1}{L}$.

Интегрируя, получим:

$$u_i = \frac{v_{*i}}{\varkappa}\left(\ln z + \beta_u \frac{z}{L}\right) + \mathrm{Const};$$

$$\Theta = \Theta_*\left(\ln z + \beta_\Theta \frac{z}{L}\right) + \mathrm{Const};$$

$$q = q_*\left(\ln z + \beta_q \frac{z}{L}\right) + \mathrm{Const}.$$

§ 2. ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

1. Поле концентрации примесей от наземных и высотных источников

Примеси, поступающие в атмосферу от источников разного типа, распространяются вследствие турбулентной диффузии и переноса их ветром. Ясно, что этот процесс зависит от высоты источника над земной поверхностью h, его начального размера D, мощности выброса примесей γ и от состояния атмосферы. Для определения поля концентрации примеси необходимо располагать достаточно полной информацией о структуре пограничного слоя, т. е. о ветровом режиме и интенсивности турбулентного обмена.

Изучение турбулентной диффузии дополнительно осложняется тем, что по мере увеличения размеров диффундирующего облака характерный масштаб вихрей, обусловливающих рассеяние, также возрастает. При этом наблюдается резкая неоднородность в скорости вертикального и горизонтального диффузионного переноса. Последнее проистекает от того, что размер вертикальных пульсаций лимитируется расстоянием от земной поверхности, и механизм перемешивания в вертикальном направлении аналогичен механизму молекулярной диффузии и может быть описан с помощью коэффициента турбулентности $\kappa = \kappa(z)$. В условиях горизонтально однородной местности при стационарном процессе, как выяснено выше, он определяется турбулентным потоком тепла P_0, удельной теплоемкостью $c_p \rho$ параметром плавучести $\frac{g}{\Theta_0}$ шероховатостью подстилающей поверхности z_0, величиной геострофического ветра C_g и параметром Кориолиса λ.

В горизонтальном направлении размер вихрей растет неограниченно и введение горизонтального коэффициента турбулентности не является корректным с точки зрения формального описания рассматриваемого процесса. Поэтому в список величин, определяющих концентрацию примесей c, следует включить $\overline{u'c'}$, $\overline{v'c'}$, которые представляют собой обусловленные турбулентностью потоки примеси вдоль осей x и y * соответственно.

Таким образом, для концентрации примесей, поступающих из источника, следует записать

$$c = \varphi\left(x,\ y,\ z,\ h,\ \overline{u'c'},\ \overline{v'c'},\ C_g,\ P_0,\ \rho c_p,\ \frac{g}{\Theta_0},\ \lambda,\ z_0,\ \gamma,\ D\right).$$

В это выражение должны были бы входить величины, характеризующие молекулярную вязкость и диффузию, но при развитом турбулентном режиме молекулярные эффекты не играют существенной роли, и мы их учитывать не будем.

Если ось x направить по ветру, то величиной $\overline{u'c'}$ вполне можно пренебречь, ибо перенос, обусловленный ветром, намного превосходит распространение примеси в этом направлении путем турбулентной диффузии. Далее, вполне естественно предположить, что геометрия и размер источника на значительном удалении от него практически не влияют на процесс, что позволяет игнорировать величину D и считать источник точечным. Поэтому искомая зависимость сведется к виду

$$c/\gamma = \varphi\left(x,\ y,\ z,\ h,\ \overline{v'\,c'},\ C_g,\ \lambda,\ z_0,\ \frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\right),$$

где c/γ — концентрация, отнесенная к единице выброса.

Прежде всего рассмотрим распределение концентрации от наземного точечного источника ($h = 0$). При этом введем величину $S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c\,dy$, которая представляет собой количество вещества, находящегося в параллелепипеде с единичной площадью сечения, расположенного вдоль оси y в пределах $-\infty < y < \infty$. Ясно, что S не может зависеть от y и $\overline{v'c'}$.

Матрица размерностей для S/γ:

	S/γ	C_g	λ	z	z_0	x	$\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}$
L	-2	1	0	1	1	1	2
T	1	-1	-1	0	0	0	-3

* Есть основания предполагать, что локальных параметров $\left(C_g,\ \lambda,\ z_0,\ \frac{P_0}{\rho c_p},\ \frac{g}{\Theta_0}\right)$ недостаточно для описания горизонтального рассеяния и поэтому $\overline{v'c'}$, $\overline{u'c'}$ явно фигурируют в качестве определяющих диффузию величин.

Ранг матрицы $r=2$, причем в качестве базиса можно принять C_g и λ.

Из уравнений

$$-2\kappa_0+\kappa_1+\kappa_3+\kappa_4+\kappa_5+2\kappa_6=0,$$
$$\kappa_0-\kappa_1-\kappa_2-3\kappa_6=0$$

можно найти:

$$\kappa_1=2\kappa_0-\kappa_3-\kappa_4-\kappa_5-2\kappa_6,$$
$$\kappa_2=-\kappa_0+\kappa_3+\kappa_4+\kappa_5-\kappa_6.$$

и соответственно П-комплексы*: $\frac{S}{\gamma}\cdot\frac{C_g^2}{\lambda}$, $\frac{z\lambda}{C_g}$, $\frac{z_0\lambda}{C_g}=\frac{1}{\mathrm{Ro}}$,

$$\frac{x\lambda}{C_g},\ \frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\cdot\frac{1}{\lambda C_g^2}.$$

Вводя вместо Π_0 комплекс $\Pi_0\Pi_3=\frac{S\cdot C_g\, x}{\gamma}$, искомую зависимость можно переписать в виде

$$S=\frac{\gamma}{C_g x}\,\tilde{\Phi}\left(\frac{z\lambda}{C_g},\ \mathrm{Ro},\ \frac{x\lambda}{C_g},\ \frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{g}{\Theta_0}\cdot\frac{1}{\lambda C_g^2}\right)$$

или, с учетом полученной выше связи $\frac{v_*}{C_g}=\chi\left(\mathrm{Ro}\,\frac{P_0\, g}{\lambda C_g^2\,\rho c_p\,\Theta_0}\right)$,

$$S=\frac{\gamma}{v_*\,x}\,\Phi\left(\frac{v_*}{C_g},\ \frac{z}{L},\ \frac{x}{L},\ \frac{L_1}{L}\right)^{**}, \qquad (2.1)$$

где, как и ранее,

$$L_1=\frac{\varkappa v_*}{\lambda};\qquad L=-\left(\frac{P_0}{\rho c_p}\ \frac{g}{\Theta_0}\ \frac{\varkappa}{v_*^3}\right)^{-1}.$$

Этот результат легко распространяется на случай линейного источника, расположенного по оси y $(-\infty,\ \infty)$, а также плоского источника с границами $0\leqslant x\leqslant l$, $-\infty<y<\infty$, $z=0$. Для этого полученное выше соотношение следует переписать в виде

$$c_i=\frac{\gamma_i}{v_*\,x^{2-i}}\,\Phi_i\left(\frac{v_*}{C_g},\ \frac{z}{L},\ \frac{x}{L},\ \frac{L_1}{L},\ \frac{l_i}{L}\right). \qquad (2.2)$$

---

* Учитывая, что техника составления матрицы размерностей и получения П-комплексов достаточно ясна из предыдущих примеров, мы в дальнейшем будем давать готовый результат, подробно не останавливаясь на процедуре.

** Предполагается, что зависимость S/γ от Ro учитывается через параметр v_*/C_g.

Причем здесь c_1 и c_2 представляют собой объемные концентрации ($i=1$ соответствует линейному источнику и $i=2$ источнику конечной ширины; $l_1=0$, $l_2=l$). Для рассматриваемых источников γ_1 и γ_2 представляют собой соответственно количество вещества, поступающего за единицу времени с единицы длины или площади, так что

$$[\gamma_1] = M L^{-1} T^{-1}; \quad [\gamma_2] = M L^{-2} T^{-1}.$$

В приземном слое влиянием силы Кориолиса можно пренебречь. За счет этого величина $\frac{L_1}{L}$ выпадает из рассмотрения. Тогда вместо формулы (2.1) после простейших дополнительных операций получим

$$S = \frac{\gamma}{v_* x} \Phi_S \left(\frac{z}{x}, \frac{x}{L}, \frac{v_*}{C_g} \right). \tag{2.3}$$

Для наземных концентраций ($z=0$) выражение (2.3) упрощается еще больше

$$S = \frac{\gamma}{v_* x} \Phi_S \left(0, \frac{x}{L}, \frac{v_*}{C_g} \right). \tag{2.4}$$

Для больших значений L ($L \gg x$), что соответствует случаю условий, близких к нейтральной стратификации, поскольку S остается ограниченной величиной вне источника, справедливо разложение:

$$S = \frac{\gamma A_S \left(\frac{v_*}{C_g} \right)}{v_* x} \left[1 + B_S \left(\frac{v_*}{C_g} \right) \frac{x}{L} \right].$$

Если L мало ($L \ll x$), то естественно провести разложение по малому параметру $\frac{L}{x}$.

Тогда получим

$$S = \frac{\gamma \tilde{A}_S \left(\frac{v_*}{C_g} \right)}{v_* x} \left[1 + \tilde{B}_S \left(\frac{v_*}{C_g} \right) \frac{L}{x} \right].$$

Можно отдельно рассмотреть случай, близкий к термической конвекции. С этой целью формулу (2.4) удобно переписать в виде

$$S = \frac{\gamma}{v_* x} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^{-1/3} \tilde{\Phi}_S \left(\frac{x}{L}, \frac{C_g}{v_*} \left(\frac{x}{L} \right)^{-1/3} \right)$$

или

$$S = \gamma \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} x^{-4/3} \, \widetilde{\Phi}_S \left(\frac{x}{L}, \quad \frac{C_g}{x^{1/3}} \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \varkappa} \right)^{1/3} \right) .$$

Поскольку при $v_* \to 0$, $L \to \pm 0$ параметр $\frac{L}{x}$ для любых конечных x становится малым, так же как

$$\frac{C_g}{x^{1/3}} \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} \text{ при } C_g \to 0.$$

Поэтому допустимо разложение *:

$$S = A_S \, \gamma \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} x^{-4/3} \left[1 + B_S \frac{L}{x} + \right.$$

$$\left. + D_S \frac{C_g}{x^{1/3}} \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} + \ldots \right],$$

где A_S, B_S, D_S — константы.

Аналогично получаем:

$$c_1 = A_1 \, \gamma_1 \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} x^{-4/3} \left[1 + B_1 \frac{L}{x} + \right.$$

$$\left. + D_1 \frac{C_g}{x^{1/3}} \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} + \ldots \right];$$

$$c_2 = A_2 \, \gamma_2 \left(\frac{\rho c_0 \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} x^{-1/3} \left[1 + B_2 \frac{L}{x} + \right.$$

$$\left. + D_2 \frac{C_g}{x^{1/3}} \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} + \ldots \right],$$

где A_2, B_2, D_2 зависят от $\frac{l_2}{x}$.

При „чистой" термической конвекции будем иметь:

$$S = A_S \, \gamma \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} x^{-4/3};$$

$$c_1 = A_1 \, \gamma_1 \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} x^{-4/3};$$

$$c_2 = A_2 \left(\frac{l_2}{x} \right) \cdot \gamma_2 \left(\frac{\rho c_p \, \Theta_0}{P_0 \, g \, \varkappa} \right)^{1/3} x^{-1/3}.$$

* Здесь имеется в виду то, что при $v_* \to 0$, $C_g \to 0$ S остается ограниченной.

Теперь рассмотрим диффузию от высотного точечного источника, например дымовой трубы. Как правило, выходящая из нее струя дополнительно имеет начальный запас количества движения J, а также перегрев, за счет которых дым на срезе трубы имеет некоторую начальную скорость, а температура отлична от температуры окружающей среды. Как перегрев, так и наличие начальной скорости обусловливает подъем поступающего из трубы дыма.

Поскольку диаметр трубы мал в сравнении с масштабом процесса, то уже на незначительном удалении от среза трубы он перестает влиять на условия подъема и трубу можно заменить точечным источником эквивалентной мощности.

За счет интенсивного перемешивания с окружающим воздухом турбулентность в струе на некоторой высоте $h_э$ * сравнивается с атмосферной. Вслед за этим основной вклад в процесс рассеяния вносится атмосферной турбулентностью. Отсюда следует, что начиная с некоторого расстояния от источника, концентрация частиц дыма c должна зависеть от $\frac{P_0}{\rho c_p}$, $\frac{g}{\Theta_0}$, λ, C_g, $\overline{v' c'}$, $\overline{u' c'}$, x, y, z, γ, $h_э$.

Как и в предшествующем случае, будем рассматривать величину

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} c\, dy.$$

Данная задача отличается от предыдущей только появлением еще одного комплекса, связанного с высотой $h_э$, т. е. $\frac{h_э \lambda}{C_g}$. Тогда для наземной концентрации можно записать

$$S = \frac{\gamma}{C_g x} \Phi_S \left(\frac{x \lambda}{C_g}, \quad \frac{h_э \lambda}{C_g}, \quad \frac{\lambda z_0}{C_g}, \quad \frac{P_0 g}{\rho c_p \Theta_0 \lambda C_g^2} \right).$$

Выражение упрощается для случая нейтральной стратификации ($P_0 = 0$). Если еще учесть, что $\frac{\lambda z_0}{C_g}$ величина малая и на процесс диффузии влияет слабо **, то ею можно также пренебречь.

* $h_э = h + \Delta h$, где h геометрическая высота трубы, а Δh дополнительный подъем поступающей примеси, обусловленный начальным количеством движения в выходящей из трубы струе и ее перегревом по отношению к окружающей атмосфере.

** Существование автомодельности при малых значениях $\frac{\lambda z}{C_g}$ связано с предположением о том, что точка $\frac{\lambda z_0}{C_g}$ не является особой для функции S.

Тогда легко получить, что

$$S = \frac{\gamma\lambda}{C_g^2} \Phi\left(\frac{x\lambda}{C_g}, \frac{h_э\lambda}{C_g}\right). \tag{2.5}$$

Точку максимальной наземной концентрации x_m находим из условия $\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x=x_m} = 0$, что приводит к соотношению $\Phi'\left(\frac{x_m\lambda}{C_g}, \frac{h_э\lambda}{C_g}\right) = 0$.

Откуда получаем

$$x_m = h_э\, \varphi\left(\frac{\lambda h_э}{C_g}\right). \tag{2.6}$$

Соответственно максимальная концентрация

$$S_m = \frac{\gamma}{C_g h_э}\, \psi\left(\frac{\lambda h_э}{C_g}\right). \tag{2.7}$$

При малых значениях $\frac{\lambda h_э}{C_g}$, что на самом деле имеет место, справедливо разложение:

$$x_m = a\, h_э\left(1 + a_1 \frac{\lambda h_э}{C_g} + \ldots\right); \tag{2.8}$$

$$S_m = b\,\frac{\gamma}{C_g h_э}\left(1 + b_1 \frac{\lambda h_э}{C_g} + \ldots\right). \tag{2.9}$$

Здесь a, a_1, b, b_1 — константы.

Рассмотрим поведение выражения (2.5) при малых и больших x. В первом случае $\left(x \ll \frac{C_g}{\lambda}\right)$ справедливо разложение:

$$S = \frac{\gamma\lambda}{C_g^2}\left[\Phi\left(0, \frac{h_э\lambda}{C_g}\right) + \frac{\lambda x}{C_g}\Phi'\left(0, \frac{h_э\lambda}{C_g}\right) + \frac{\lambda^2 x^2}{2C_g^2}\Phi''\left(0, \frac{h_э\lambda}{C_g}\right) + \ldots\right].$$

Ввиду того, что при $x \to 0$, $S \to 0$, $\Phi\left(0, \frac{h_э\lambda}{C_g}\right) = 0$.

Тогда

$$S = \frac{\gamma\lambda^2 x}{C_g^3} a_1\left(\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)\left[1 + \frac{\lambda x}{C_g} b_1\left(\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)\right], \tag{2.10}$$

где

$$a_1\left(\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)=\Phi'\left(0,\frac{h_э\lambda}{C_g}\right);\qquad b_1\left(\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)=\frac{\Phi''\left(0,\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)}{2\,\Phi'\left(0,\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)}.$$

Для $x\gg\frac{C_g}{\lambda}$ разложение следует вести по параметру $\frac{C_g}{x\lambda}$. В итоге, учитывая, что при $x\to\infty$, $S\to 0$, получим

$$S=\frac{\gamma}{C_g\,x}a_2\left(\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)\left[1+\frac{C_g}{x\lambda}b_2\left(\frac{h_э\lambda}{C_g}\right)+\dots\right]. \tag{2.11}$$

2. Поле концентрации примеси при степенной аппроксимации профилей коэффициента турбулентности и скорости ветра

Другого типа анализ может быть проведен для случая, когда коэффициент турбулентной диффузии и скорость ветра заданы аппроксимационными формулами вида:

$$\kappa_z=\kappa_1\,F\left(\frac{z}{z_1}\right),\qquad u=u_1\,F_1\left(\frac{z}{z_1}\right).$$

По своему физическому содержанию такая постановка вполне аналогична только что рассмотренной модели. Будучи связана с определенными ограничениями из-за степенных аппроксимаций (приемлемыми для приземного слоя), она проще, ибо все атмосферные факторы заданы величинами κ_1, u_1, z_1, z. Тогда для выражения S следует искать зависимость вида

$$S=\gamma\varphi_S(x,z,h,\kappa_1,u_1,z_1).$$

Используя дифференцированные размерности длины L_x, L_z, мы приходим к соотношению

$$S=\frac{\gamma}{u_1 h}\Phi_S\left(\frac{x\,\kappa_1}{u_1\,h^2},\ \frac{z_1}{h},\ \frac{z}{h}\right). \tag{2.12}$$

Для наземной концентрации будем иметь

$$S\Big|_{z=0}=\frac{\gamma}{u_1 h}\Phi_S\left(\frac{x\,\kappa_1}{u_1\,h^2},\ \frac{z_1}{h},\ 0\right). \tag{2.13}$$

Точка максимума концентрации x_m:

$$x_m=\frac{u_1\,h^2}{\kappa_1}\,\chi\left(\frac{z_1}{h}\right). \tag{2.14}$$

Величина максимальной концентрации S_m:

$$S_m = \frac{\gamma}{u_1 h} \chi_1 \left(\frac{z_1}{h} \right). \qquad (2.15)$$

Для наземного источника $h = 0$ вместо формул (2.12), (2.13) (при $h \to 0$, $S < \infty$) соответственно получим:

$$S_{\text{н}} = \frac{\gamma}{\sqrt{u_1 \kappa_1 x}} \tilde{\Phi}_S \left(\frac{x \kappa_1}{u_1 z_1^2}, \quad \frac{z}{z_1} \right); \qquad (2.16)$$

$$S_{\text{н}} \Big|_{z=0} = \frac{\gamma}{\sqrt{u_1 \kappa_1 x}} \tilde{\Phi}_S \left(\frac{x \kappa_1}{u_1 z_1^2}, 0 \right). \qquad (2.17)$$

При рассмотрении невысоких или наземных источников, когда процесс диффузии происходит в пределах приземного слоя атмосферы для κ_z и u справедлива степенная аппроксимация вида: $\kappa_z = \kappa_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\varepsilon}$; $u = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m$. При использовании таких формул z_1 может входить в окончательный результат только в комбинациях $\frac{\kappa_1}{z_1^{1-\varepsilon}}$, $\frac{u_1}{z_1^m}$. На этом основании мы вправе в формулах (2.12)—(2.17) уменьшить число аргументов на единицу и, например, выражение (2.12) записать в виде

$$S = \frac{\gamma}{u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m h} \tilde{\psi}_S \left(\frac{x \kappa_1}{u_1 h^2} \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\varepsilon-m}, \frac{z}{h} \right)$$

или после простейших преобразований, введя обозначение $\nu = 1 - \varepsilon - m$, имеем

$$S = \frac{\gamma}{u_1 z_1} \left(\frac{h}{z_1} \right)^{-(m+1)} \psi_S \left(\frac{x \kappa_1}{u_1 h^2} \left(\frac{h}{z_1} \right)^{\nu}, \frac{z}{h} \right). \qquad (2.18)$$

Для наземной концентрации получим:

$$S = \frac{\gamma}{u_1 z_1} \left(\frac{h}{z_1} \right)^{-(m+1)} \Phi \left(\frac{x \kappa_1}{u_1 h^2} \left(\frac{h}{z_1} \right)^{\nu}, 0 \right); \qquad (2.19)$$

$$x_m = C \frac{u_1 h^2}{\kappa_1} \left(\frac{z_1}{h} \right)^{\nu}; \qquad (2.20)$$

$$S_m = \frac{C_1 \gamma}{u_1 z_1} \left(\frac{h}{z_1} \right)^{-(m+1)}. \qquad (2.21)$$

Здесь C и C_1 — константы.

Учитывая, что $\nu \simeq 1$, можно сделать вывод: x_m растет приблизительно прямо пропорционально высоте источника, а S_m уменьшается обратно пропорционально h.

Конкретизируем теперь формулу (2.16), основываясь на указанных степенных аппроксимациях. Для этого ее необходимо так преобразовать, чтобы величина z_1 во все аргументы входила в форме $u_1 z_1^{-m}$ и $\kappa_1 z^{\varepsilon-1}$, но аргумент $\frac{z}{z_1}$ не может входить отдельно. После чего получим:

$$S_{\text{н}} = \frac{\gamma}{\sqrt{u_1 \kappa_1 x}\left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{1-\varepsilon+m}{2}}} \tilde{\psi}_{S\text{н}}\left(\frac{x\kappa_1}{u_1 z^2}\left(\frac{z}{z_1}\right)^{\nu}\right),$$

или

$$S_{\text{н}} = \frac{\gamma}{\sqrt{u_1 \kappa_1 x}} \left(\frac{x\kappa_1}{u_1 z_1^2}\right)^{\frac{\varepsilon-m-1}{(\varepsilon+m+1)^2}} \psi_{S\text{н}}\left(\frac{x\kappa_1}{u_1 z_1^2}\left(\frac{z}{z_1}\right)^{\nu-2}\right). \quad (2.22)$$

Для наземной концентрации

$$S_{\text{н}}\Big|_{z=0} = \frac{C_2\gamma}{\sqrt{u_1 \kappa_1 x}} \left(\frac{x\kappa_1}{u_1 z_1^2}\right)^{\frac{\varepsilon-m-1}{(\varepsilon+m+1)^2}}, \quad (2.23)$$

где C_2 — константа.

Из полученных формул легко выясняется зависимость наземной концентрации от параметров диффузии и скорости ветра.

3. Подъем дыма вследствие перегрева и начальной скорости

Рассмотрим теперь процесс распространения перегретой дымовой струи, поступающей в атмосферу с некоторой начальной скоростью.

Несколько схематизируя явление, его можно себе представить как точечный источник импульса $J = mw_0 = \Pi r^2 \rho_0 w_0^2$, $[J] = MLT^{-2}$ и тепла $Q = mc_p\,\Delta T = \pi r^2 \rho_0 c_0 w_0 \Delta T_0$, который создает возмущения в поле температуры, скорости и интенсивности турбулентного обмена в форме струи. Здесь w_0 — начальная скорость, r — радиус трубы, $\rho_0 c_0$ — объемная теплоемкость газа, ΔT — перегрев.

Рассмотрим начальный участок струи, которым практически ограничивается весь подъем. Здесь можно пренебречь внешней турбулентностью по сравнению с эффектами турбулентности, вызванными самой струей.

Помимо параметров, характеризующих источник, распространение струи зависит от следующих внешних параметров:

1) потока массы через единичное поперечное сечение ρu и ее теплосодержания $\rho u c_p$, которыми определяется начальное разбавление примеси;

2) стратификации атмосферы, которую будем характеризовать градиентом температуры $\frac{d\Theta}{dz}$. Ею обусловлена разность температур смеси и окружающей среды ΔT *;

3) параметра Архимеда g/T_0, так как от него зависит ускорение перегретой смеси и окружающей среды;

4) времени $t_0 = \frac{x}{u}$, за которое примесь проходит расстояние x от источника (разбавление поступающей примеси на пути x пропорционально этому интервалу времени);

5) расстояния от источника x, в связи с тем, что это расстояние ограничивает продольный размер элементов турбулентности. Очевидно, что максимальный продольный размер вихрей в интервале Ox всегда меньше x. Поскольку в рассматриваемом случае допустимо пренебречь турбулентностью, а параметры, определяющие внутреннюю турбулентность, исчерпываются перечисленными, то указанные восемь размерных параметров J, Q, ρu, $\rho c_p u$, Γ, g/T_0, $\frac{x}{u}$, x определяют процесс. Нас будет интересовать высота подъема оси струи h и вертикальная скорость на оси w на расстоянии x от источника.

В данной задаче можно выбрать различные единицы длины по горизонтали (L_S) и по вертикали (L_z). Кроме того, введение калории как отдельной единицы по существу рассматриваемого процесса не требует введения размерной константы. Это связано с тем, что вертикальные ускорения здесь рассматриваются не как следствие превращения тепла в механическую энергию, а как результат заданных температурных различий между поступающим перегретым газом и окружающей средой (в соответствии с третьим уравнением динамики). Матрица размерностей, определяющая рассматриваемый процесс, имеет вид:

---

* Разность температур смеси и окружающей среды на высоте z от источника $\Delta T(z) = T_0' - \gamma_a z - T_0 + \gamma z = \Delta_z T_0 - (\gamma_a - \gamma) z$; ΔT_0—начальный перегрев, им определяется мощность источника Q; $\frac{d\Theta}{dz} = \Gamma = \gamma_a - \gamma$.

	x	Γ	g/T_0	ρu	$\rho c_p u$	J	Q	x/u	h	w
L_S	1	0	0	—1	—1	0	0	0	0	0
L_z	0	—1	1	—1	—1	1	0	1	1	0
H	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
Θ	0	1	—1	0	—1	0	0	0	0	0
M	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
T	0	0	—2	—1	—1	—2	—1	0	—1	1

Две искомые величины h и w в соответствии с П-теоремой можно представить как функции двух безразмерных комплексов Π_Q, $\Pi_{x/u}$. Выполнив несложные расчеты, получим:

$$h = \sqrt{\frac{\tilde{J}}{\omega_0 x}}\, F_1\left(\frac{\tilde{Q}}{\tilde{J}\omega_0};\ \frac{x\omega_0}{u}\right) = \sqrt{\frac{\tilde{J}}{u}}\, \tilde{F}_1\left(\frac{\tilde{Q}}{\tilde{J}\omega_0};\ \frac{x\omega_0}{u}\right); \quad (2.24)$$

$$w = \sqrt{\frac{\tilde{J}\omega_0}{x}}\, F_2\left(\frac{\tilde{Q}}{\tilde{J}\omega_0};\ \frac{x\omega_0}{u}\right) = \omega_0 \sqrt{\frac{\tilde{J}}{u}}\, \tilde{F}_2\left(\frac{\tilde{Q}}{\tilde{J}\omega_0};\ \frac{x\omega_0}{u}\right)^*, \quad (2.25)$$

где

$$\tilde{Q} = \frac{g}{T_0}\,\frac{Q}{\rho c_p u} = \frac{g}{T_0}\cdot\frac{\pi r^2 \rho_0 c_0 w_0 \Delta T_0}{\rho c_p u};$$

$$\tilde{J} = \frac{J}{\rho u} = \frac{\pi r^2 \rho_0 m_0^2}{\rho u};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}}.$$

Если в выражения (2.24) и (2.25) подставить значения Q и J, то найдем:

$$h = \frac{r w_0}{u}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,\tilde{F}_1\left(\sqrt{\frac{g}{T_0\Gamma}}\,\frac{c_0\Delta T_0}{c_p w_0},\ \frac{x}{u}\sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}}\right); \quad (2.26)$$

$$w = \frac{r w_0}{u}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{g\Gamma}{T_0}}\,\tilde{F}_2\left(\sqrt{\frac{g}{T_0\Gamma}}\,\frac{c_0\Delta T_0}{c_p w_0},\ \frac{x}{u}\sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}}\right). \quad (2.27)$$

---

* Легко понять, что в рамках предлагаемой модели, перегрев

$$\Delta T = \Delta T_0\ \tilde{\tilde{F}}_3\left(\frac{\tilde{Q}}{\tilde{J}\omega_0};\ \frac{x\omega_0}{u}\right).$$

Определим высоту подъема дыма h_m как расстояние, на котором

$$\frac{w}{w_1} = \frac{w}{\dfrac{r w_0}{u}\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\rho}\dfrac{g\Gamma}{T_0}}} \ll 1 .$$

На этом расстоянии, как следует из формулы (2.27), $\frac{x}{u}\sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}} = \frac{x_m}{u}\sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}} = \Phi_1\left(\sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}}\,\frac{c_0\Delta T_0}{c_p w_0}\right)$; тогда на основании формулы (2.26) получим

$$h_m = \frac{r w_0}{u}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,\Phi_2\left(\sqrt{\frac{g}{T_0\Gamma}}\cdot\frac{c_0\Delta T_0}{c_p w_0}\right). \tag{2.28}$$

Для двух крайних случаев отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} h_m^{(1)} &= A\,\frac{r w_0}{u}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} && \text{при } \Delta T_0 = 0,\\ h_m^{(2)} &= B\,\frac{r\Delta T_0}{u}\,\frac{c_0}{c_p}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{g}{T_0\Gamma}} && \text{при } w_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

Здесь A, B — универсальные константы.

Интересно отметить, что при малых значениях аргумента, когда ряд для Φ_2 в формуле (2.28) можно оборвать вторым слагаемым,

$$h_m = \frac{r w_0}{u}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,\Phi_2(0) + \Phi_2'(0)\,\frac{\Delta T_0}{u}\cdot\frac{r c_0}{c_p}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{g}{T_0\Gamma}}\,. \tag{2.30}$$

Эта формула близка к эмпирически найденной формуле Холланда.

§ 3. СВЯЗЬ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АТМОСФЕРЫ С ВНЕШНИМИ УСЛОВИЯМИ

Атмосфера является стационарной термодинамической машиной, свойства которой определяются режимом коротковолновой радиации, поступающей на границы атмосферы, и некоторой совокупностью априори заданных параметров. К ним относятся, например, физические константы атмосферного воздуха, угловая скорость вращения и радиус Земли, физические свойства деятельного слоя почвы и т. д. Ясно, что средняя скорость ветра, температура и другие внутренние характеристики атмосферных процессов целиком определяются упомянутыми выше величинами. Имея это в виду, представляется вполне естественной попытка отыскать связь между внутренними характеристиками и внешними условиями, заданными некоторой совокупностью параметров, пользуясь анализом размерностей. Трудности корректного и эффективного решения такой задачи методами теории размерности связаны с необходимостью выделить из большого количества параметров главные, определяющие процесс. Ниже будем в основном исходить из положений, развитых в последнее время Г. С. Голицыным. Естественно, что выбор таких параметров следует из представлений о более или менее адекватной модели атмосферного механизма.

Рассмотрим столб атмосферы единичного поперечного сечения с центром в некоторой точке $M(x, y)$. Пусть $M = \dfrac{p_0}{g}$ — масса столба; u, v — компоненты скорости ветра; p — давление; ρ — плотность; T — температура; D — скорость диссипации кинетической энергии, отнесенная к единице массы; b — кинетическая энергия пульсационного движения; Q — баланс радиации на верхней границе атмосферы.

Обозначим

$$\int\limits_0^\infty f\rho\, dz = \overline{f} \cdot M = \overline{f}\, \frac{p_0}{g}.$$

Достаточно правильное представление об атмосферной машине можно получить, рассмотрев цепь преобразований энергии, происходящих в единичном столбе атмосферы, и причины, благодаря которым она непрерывно возобновляется. На рис. 2 приводится схема преобразований энергии. Четыре вида энергии, если не учитывать эффекты плавучести и фазовых переходов воды, составляют замкнутый процесс. Мощности основных видов энергии (для столба с единичным поперечным сечением) равны: кинетическая $\frac{\partial}{\partial t} \times \times \left(\frac{u^2 + v^2}{2} M \right)$, энтальпия $\frac{\partial}{\partial t}(c_p\ T\ M)$ (сумма внутренней энергии и потенциальной энергии силы тяжести), энергия пульсационного движения $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{b}\ M) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overline{(u')^2 + (v')^2 + (w')^2}}{2} M\right]$ и потенциальная энергия поля давления $\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{p}\ u_i)\ M$. Непрерывно повторяющийся процесс представляется в следующем виде: приток тепла к единичному столбу, меняющийся от точки к точке ($\overline{Q}$, t, x, y) приводит к изменению энтальпии $\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{c_p}\ T\ M\right)$, сжатие или расширение (в зависимости от того, получает ли или отдает рассматриваемая область тепло), происходящее при этом, меняет потенциальную энергию поля давления $\left(+p/\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} M\right)$, часть ее $\left(-u_i/\rho\ \frac{\partial p}{\partial x_i} M\right)$ переходит в кинетическую энергию *, в свою очередь кинетическая энергия диссипируется в вихревую (DM), в процессе распада вихрей последняя превращается во внутреннюю и меняет энтальпию столба воздуха.

Кроме указанных преобразований энергий внутри атмосферного столба, определенный вклад в изменение энтальпии, кинетической энергии и пульсационной энергии может вносить адвекция соответствующих видов энергии. Роль силы Кориолиса сводится к перераспределению энергии между компонентами скорости. При осреднении за длительный промежуток времени состояние атмосферы не изменяется, это означает, что интенсивности упомянутых превращений энергии согласованы.

---

* Полное приращение энергии поля давления

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\,u_i\right)\frac{M}{\rho} = \frac{p}{\rho}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} M - \left(-\frac{u_i}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x_i} M\right).$$

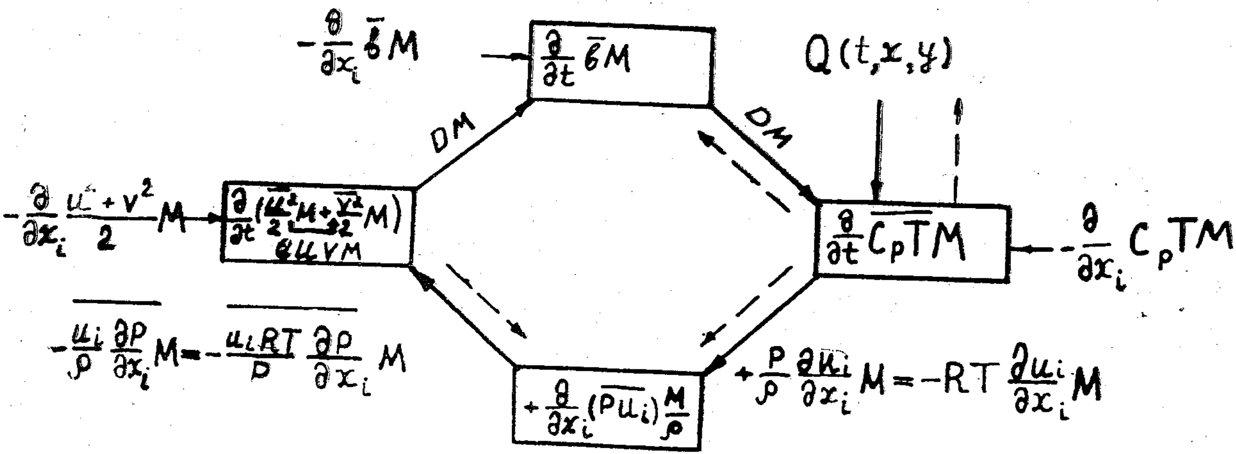

Рис. 2. Схема преобразования энергии в атмосфере.

Рост энтропии, обусловленный необратимостью происходящих в атмосфере в целом процессов, компенсируется неравномерным притоком тепла, чем обеспечивается непрерывность работы «машины».

Изложенная схема охватывает основные звенья атмосферной машины и, следовательно, содержит (в пределах предложенной модели) все внешние параметры, которыми определяются средние значения характеристик единичного столба атмосферы. Выпишем эти параметры, извлекая их из формул для основных видов энергий и интенсивностей преобразований одного вида в другой:

1) $[Q] = MT^{-3}$;
2) $[c_p] = L^2\, T^{-2}\, \Theta^{-1}$;
3) $[M] = M\, L^{-2}$;
4) $[l] = T^{-1}$;
5) $[R] = L^2\, T^{-2}\, \Theta^{-1}$.

Весьма существенным внешним параметром является тепло, поступающее к атмосферному столбу, именно неоднородность этого параметра, как уже указывалось, обеспечивает непрерывность, а его величина — интенсивность атмосферных движений.

При оценке порядка средней скорости атмосферных движений под Q следует понимать средний модуль баланса радиации на верхней границе (поскольку как положительные, так и отрицательные притоки, изменяясь от точки к точке, являются определяющими движение факторами). Если его считать известным, то из анализа размерности легко получить внутренний масштаб атмосферных движений *

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{Q}{M\, l^3}\right)}\, \Phi_2 \left(\frac{R}{c_p}\right); \tag{3.1}$$

скорость

$$v = \sqrt{\frac{Q}{M\, l}}\, \Phi_v \left(\frac{R}{c_p}\right); \tag{3.2}$$

характерное время

$$\tau = \frac{1}{l}\, \Phi_\tau \left(\frac{R}{c_p}\right) \tag{3.3}$$

и т. д.

Поскольку $\dfrac{R}{c_p} = \text{const}$, то порядок приведенных величин определяется этими формулами с точностью до константы. Однако ре-

* Здесь предполагается, что неоднородности поля радиации определяются главным образом атмосферными процессами, в противном случае следовало бы ввести внешний масштаб длины (см. ниже).

жим радиационного баланса на верхней границе атмосферы в известной степени связан с особенностями атмосферных процессов, поскольку уходящая радиация зависит от температуры столба и ее изменчивости и, вообще говоря, не должна задаваться априори. В связи с этим привлекаются некоторые соображения, из которых можно было бы оценить параметр Q. Простейшую радиационную модель атмосферы можно представить как результат динамического равновесия между поступающей коротковолновой радиацией и излучением. Если воспользоваться приближением, согласно которому атмосфера излучает как серое тело, то естественно предположить, что Q зависит от среднего для земного шара потока коротковолновой радиации, от масштаба, равного радиусу земного шара, характеризующего неоднородность распределения ее по земному шару (на экваторе радиация почти перпендикулярна к горизонтальной поверхности, на полюсе почти параллельна), от постоянной Стефана — Больцмана $\sigma([\sigma] = MT^{-3}\,\mathrm{K}^{-4})$, поскольку она связывает режим уходящей радиации с эффективной температурой столба. К числу этих размерных величин следует добавить уже выписанные выше, так как они определяют величину и изменчивость температуры столба, а стало быть, и поле Q. Таким образом,

$$Q = Q\left[\frac{J_0}{4}(1-A),\ r,\ \sigma,\ c_p,\ M,\ l,\ R\right].$$

Эти же семь размерных величин определяют и все остальные внутренние, средние по высоте характеристики атмосферы.

Обычные методы анализа размерности дают следующие выражения:

для скорости $$v = \left(\frac{J c_p^4}{\sigma}\right)^{1/8} \Phi_v(\Pi_M,\ \Pi_l)\,; \tag{3.4}$$

для характерного времени

$$\tau = r\left(\frac{\sigma}{J c_p^4}\right)^{1/8} \Phi_\tau(\Pi_M,\ \Pi_l)\,; \tag{3.5}$$

для масштаба длины $$r_0 = r\ \Phi_r(\Pi_M,\ \Pi_l), \tag{3.6}$$

где $$\Pi_M = \frac{M c_p^{3/2}}{J^{5/8} r\, \sigma^{3/8}}\,; \qquad \Pi_l = \frac{l\, r\, \sigma^{1/8}}{J^{1/8}\ c_p^{1/2}}\,;$$

для энергии $$\varepsilon = \sigma^{-1/8}\, c_p^{-1/2}\, J^{7/8}\, r^3\, \Phi_\varepsilon(\Pi_M,\ \Pi_l), \tag{3.7}$$

Здесь

$$J = \frac{J_0}{4}(1-A),$$

где J_0 — солнечная постоянная; A — альбедо земной атмосферы.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В РУСЛАХ

1. Распределение динамических характеристик по глубине потока

Рассмотрим установившееся движение воды в канале или естественном русле, имея в виду определить скорость и расход воды на единицу ширины потока. Будем считать движение плоским, что соответствует случаю, когда $\frac{B}{h} \gg 1$ (B — ширина потока, h — его глубина). Это дает нам основание пренебречь боковыми эффектами. Кроме того, будем считать, что течение воды происходит по шероховатой поверхности, наклоненной под углом α к горизонтальной плоскости при постоянной глубине потока h.

Расположим оси координат в соответствии с чертежом (рис. 3).

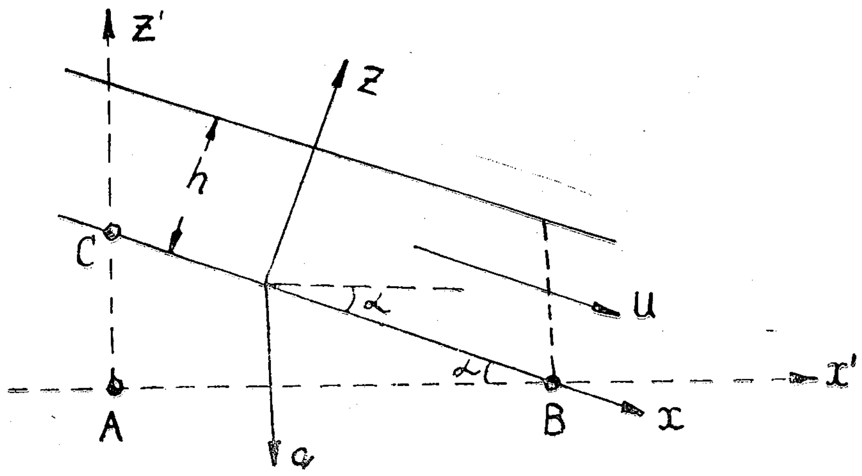

Рис. 3. Иллюстрация течения воды по наклонной шероховатой поверхности.

В случае стационарного течения определяющими параметрами являются следующие: проекция силы тяжести на ось x $g_x = g \cdot \sin \alpha$, глубина потока h, расстояние от дна z и шероховатость дна z_0.

При больших числах Рейнольдса, что практически всегда имеет место в естественном русле, режим движения турбулентный. Тогда для удельной силы турбулентного трения следует записать

$$\kappa \frac{du}{dz} = \varphi_\tau (g_x, h, z, z_0).$$

Аналогично

$$\kappa = \varphi_\kappa (g_x, h, z, z_0).$$

Чему соответствует:

$$\kappa \frac{du}{dz} = g_x h \Phi_\tau \left(\frac{z}{h}, \frac{z_0}{h}\right); \tag{4.1}$$

$$\kappa = \sqrt{g_x h^3}\, \Phi_\kappa \left(\frac{z}{h}, \frac{z_0}{h}\right). \tag{4.2}$$

Отсюда получаем

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{\frac{g_x}{h}}\, \Phi \left(\frac{z}{h}, \frac{z_0}{h}\right). \tag{4.3}$$

Интегрируя (4.1) по z от z_0 до z, получим выражение для скорости:

$$u = \sqrt{\frac{g_x}{h}} \int_{z_0}^{z} \Phi \left(\frac{z}{h}, \frac{z_0}{h}\right) dz = \sqrt{g_x h} \int_{z_0/h}^{z/h} \Phi \left(\eta, \frac{z_0}{h}\right) d\eta,$$

или

$$u = \sqrt{g_x h}\, \Phi_u \left(\frac{z}{h}, \frac{z_0}{h}\right). \tag{4.4}$$

Расход воды на единицу ширины потока

$$q = \int_{z_0}^{h} u\, dz = \sqrt{g_x h} \int_{z_0}^{h} \Phi_u \left(\frac{z}{h}, \frac{z_0}{h}\right) dz =$$

$$= h \sqrt{g_x h} \int_{z_0/h}^{1} \Phi_u \left(\eta, \frac{z_0}{h}\right) d\eta,$$

т. е.

$$q = h \sqrt{g_x h}\, \Phi_q \left(\frac{z_0}{h}\right). \tag{4.5}$$

Средняя скорость

$$\bar{u} = \frac{q}{h} = \sqrt{g_x h}\, \Phi_u \left(\frac{z_0}{h}\right). \tag{4.6}$$

В случае сечения со смоченным периметром χ и с площадью ω вместо h в последнее равенство можно ввести гидравлический радиус $R=\frac{\omega}{\chi}$. Кроме того, при малых углах наклона $\sin\alpha \sim \operatorname{tg}\alpha = i$ (i — уклон), так что $g_x \simeq g\cdot i$. Поэтому, воспользовавшись пропорциональностью между h и гидравлическим радиусом R, формулу (4.6) можно переписать в виде

$$\bar{u} = \tilde{\Phi}_u\left(\frac{z_0}{h}\right)\sqrt{R\cdot i}.$$

Обычно в динамике русловых потоков выражение для средней скорости записывают следующим образом:

$$\bar{u} = C\sqrt{R\cdot i}. \tag{4.7}$$

Это так называемая формула Шези, а размерный коэффициент C соответственно — коэффициент Шези. Мы видим, что он зависит от параметра z_0/h.

Разлагая выражения (4.1) и (4.2) в ряд по степеням аргумента $\frac{z}{h}$, будем иметь

$$\kappa\frac{du}{dz} = g_x\, h\,\Phi_\tau\left(0, \frac{z_0}{h}\right)\left[1+\tilde{\Phi}_\tau\left(0, \frac{z_0}{h}\right)\frac{z}{h}+\dots\right]; \tag{4.8}$$

$$\kappa = \Phi'_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right) z\sqrt{g_x h}\left[1+\tilde{\tilde{\Phi}}_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right)\frac{z}{h}+\dots\right], \tag{4.9}$$

где

$$\tilde{\Phi}_\tau = \Phi'_\tau\left(0, \frac{z_0}{h}\right) \Big/ \Phi_\tau\left(0, \frac{z_0}{h}\right);$$

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_\kappa = \Phi''_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right) \Big/ \Phi'_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right).$$

В формуле (4.9) учтено, что $\Phi_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right)=0$. Последнее следует из физически очевидного обстоятельства, что при $z\to 0$, $\kappa\to 0$.

Поскольку $\kappa(z)$ в рассматриваемой области является непрерывной функцией, то есть основания считать, что указанное разложение справедливо и по всей толще потока. Если ряд (4.9) сходится достаточно быстро, (что мы пока будем предполагать), то можно ограничиться выписанными членами разложения.

В данном случае рассматриваются установившиеся течения со спокойной поверхностью. Ввиду того, что вблизи нее турбулентные пульсации сильно демпфируются, то границу раздела вода—воздух можно считать практически непроницаемой. Поэтому при $z=h$ коэффициент турбулентности должен быть равен нулю. Из этого условия следует, что в формуле (4.9) $\tilde{\Phi}_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right) \cong -1$.

Тогда

$$\kappa = \Phi'_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right) \sqrt{g_x h}\, z\left(1 - \frac{z}{h}\right). \tag{4.10}$$

Поскольку $\kappa = \kappa(z)$ непрерывная положительная функция, обращающаяся в нуль в точках $z=0$ и $z=h$, то она должна иметь максимум $z = z_{\max}$, так что $\left.\frac{d\kappa}{dz}\right|_{z=z_{\max}} = 0$. Учитывая это условие, из формулы (4.10) легко получить, что $z_{\max} = \frac{h}{2}$ и тогда

$$\kappa_{\max} = \frac{1}{4}\Phi'_\kappa\left(0, \frac{z_0}{h}\right)\sqrt{g_x h^3}; \tag{4.11}$$

$$\kappa = \frac{4\,\kappa_{\max}}{h}\, z\left(1 - \frac{z}{h}\right). \tag{4.12}$$

В заключение заметим, что по экспериментальным данным $z_{\max} = \frac{5}{9}h$. Отсюда следует, что допущенное нами априорное предположение о возможности ограничиться двумя слагаемыми в (4.9) близко к истинному положению вещей.

Если в формуле (4.8) также ограничиться выписанными членами, что несомненно справедливо при $\frac{z}{h} \ll 1$, то для уровня вблизи дна можно получить выражение для градиента скорости, которое в линейном приближении имеет вид

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{g_x h}\;\frac{\left(1 + \varkappa_1 \frac{z}{h}\right)}{z},$$

где $\varkappa$, $\varkappa_1$ — функции $\frac{z_0}{h}$.

Интегрируя это выражение в пределах от z_0 до z, будем иметь

$$u = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{g_x h}\left[\ln\frac{z}{z_0} + \frac{\varkappa_1 (z - z_0)}{h}\right],$$

или

$$u = \frac{1}{\tilde{\varkappa}}\sqrt{g \cdot R \cdot i}\left[\ln\frac{z}{z_0} + \frac{\tilde{\varkappa}_1 (z - z_0)}{R}\right]. \tag{4.13}$$

2. Критерии состояния качества потока

Качество потока можно характеризовать соотношением между скоростью распространения возмущения и скоростью течения u. Если предположить, что возмущения, возникающие в точке, распространяются относительно воды со скоростью u_0, то, очевидно, скорость v их смещения относительно фиксированной точки будет

$$v = u \pm u_0 .$$

Определим u_0. Если поверхность воды испытала возмущение в какой-либо точке, то возникает волна, которая перемещается вверх и вниз по течению. Скорость ее движения зависит от силы тяжести g, глубины потока h и амплитуды a. Так что

$$u_0 = \varphi_0 (g,\ h,\ a) .$$

Отсюда следует зависимость

$$u_0 = \sqrt{g\,h}\ \Phi_0 \left(\frac{a}{h}\right) .$$

При $\frac{a}{h} \ll 1$ справедливо разложение

$$u_0 = \sqrt{g\,h} \left[\ \Phi_0 (0) + \frac{a}{h}\ \Phi_0' (0) + \ldots \right] .$$

Для возмущений весьма малой амплитуды, что практически всегда имеет место, можно ограничиться первым слагаемым. Тогда будем иметь

$$u_0 = \Phi_0 (0) \sqrt{g\,h}.$$

Из точного решения известно, что $\Phi_0(0) = 1$, поэтому окончательно можно записать

$$u_0 = \sqrt{g\,h}. \qquad (4.14)$$

Возможна ситуация, когда в потоке скорость $u = u_0$. Тогда возмущения вверх по течению распространяться не смогут, в связи с чем в области их генерации возникнут резкие флуктуации уровня. Поскольку расход q постоянен, указанному значению скорости $u = u_{кр} = u_0$ отвечает вполне определенная глубина, которую естественно определить как критическую $h = h_{кр}$. Этим мы подчеркиваем, что она соответствует условиям перехода спокойного состояния в бурное, либо наоборот. Имея в виду, что $u_{кр} = \frac{q}{h_{кр}}$, из формулы (4.14) легко получить

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} . \qquad (4.15)$$

Для русла с любым поперечным сечением можно ввести эквивалентную реальной площадь прямоугольника ω при глубине h. Тогда характерная ширина $B = \frac{\omega}{h}$, расход $Q = qB$ и скорость $v = \frac{Q}{hB}$. При этом формулу (4.15) можно переписать в виде

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g\,B_{кр}}}\,. \tag{4.16}$$

Критическая скорость $v_{кр}$ распространения возмущений равна

$$v_{кр} = u - u_{кр}\,. \tag{4.17}$$

Если реальная глубина потока $h > h_{кр}$, то при одинаковой величине расхода должно иметь место $v < v_{кр}$. Этому соответствует спокойное состояние потока, при чем любое возмущение будет распространяться как вверх, так и вниз по течению.

При $h<h_{кр}$ выполняется неравенство $v>v_{кр}$ и течение будет бурным. Отметим, что полученные в предыдущем параграфе зависимости, строго говоря, не могут быть применены к бурным течениям.

Бурные потоки наблюдаются в горных условиях или различного рода водосборных устройствах. При этом часто наблюдается аэрация, когда покрытая волнами свободная поверхность в силу чисто механических причин захватывает воздух. В дальнейшем он за счет турбулентного перемешивания распределяется по всей водной толще. При очень больших скоростях $v > 15$ м/с происходит подсос воздуха. В силу этих причин вода насыщается воздухом, поток разбухает, меняется его энергетический баланс. К подобным условиям уже неприменимы использованные выше допущения. Критерием такого рода качественных изменений может служить безразмерная величина $\frac{u}{\sqrt{gh}}$.

3. Теория водосливов

Рассмотрим еще одно характерное явление: течение через водосливы, которые устраивают в различных гидротехнических сооружениях. Под водосливом понимают вырез в перегораживающей поток стенке, через который перетекает жидкость. Будем рассматривать только установившиеся течения и определим расход воды Q, проходящий через водослив. Ясно, что Q должно определяться скоростью истечения u, а также площадью ω, через которую течет жидкость. Скорость (при пренебрежении различного рода потерями) зависит от силы тяжести g и высоты напора h. Под последней следует понимать высоту уровня невозмущенного водотока * над нижней точкой водослива. Таким образом,

$$Q = \varphi(g,\ h,\ \omega)\,,$$

или

$$Q = \omega \sqrt{g\,h}\, \Phi\left(\frac{\omega}{h^2}\right).$$

Массовый расход Q_m равен объемному, умноженному на плотность жидкости ρ, так что

$$Q_m = \rho\omega \sqrt{g\,h}\ \Phi\left(\frac{\omega}{h^2}\right). \tag{4.18}$$

Для водослива с прямоугольным сечением, имеющим ширину b, можем записать

$$Q_{m1} = \rho\, h\, b \sqrt{g\,h}\, \Phi_1\left(\frac{b}{h}\right). \tag{4.19}$$

При $\frac{b}{h} \ll 1$, с учетом того, что $Q_{m1} \to 0$ при $b \to 0$, путем разложения легко получить формулу

$$\tilde{Q}_{m1} = C\rho\, b^2 \sqrt{gh}\left(1 + C_1 \frac{b}{h} + \ldots\right), \tag{4.20}$$

где C, C_1 — константы.

Для треугольного водослива с углом раствора α формула (4.18) принимает вид

$$Q = \rho\, h^2 \sqrt{g\,h}\ \Phi_2(\alpha). \tag{4.21}$$

Соответствующие формулы можно получить и для водосливов с отверстиями других форм. В любом случае вид функции $\Phi\left(\frac{\omega}{h^2}\right)$ определяется эмпирически.

---

* Обычно возмущение, выражающееся в спаде уровня, начинает чувствоваться на расстояниях $\sim(3 \div 5)\ h$ до водослива.

§ 5. ДВИЖЕНИЕ НАНОСОВ

1. Начальное смещение

Любой поток в той или иной степени насыщен твердыми частицами, появляющимися за счет размыва грунтов. Вдоль по течению можно выделить участки с положительным балансом, когда количество поднимаемых со дна частиц больше числа опускающихся. В этом случае имеет место размыв русла. На других участках наблюдается стационарный режим с нулевым балансом. При снижении транспортирующей способности потока баланс становится отрицательным, вследствие чего происходит заиление русла. Перенос твердых частиц может осуществляться путем влечения их по дну (преимущественно посредством перемещения донных гряд) или во взвешенном состоянии. Принципиальной разницы в этих механизмах нет, ибо, по сути дела, они представляют собой скачки различных масштабов, совершаемые частицами различной крупности. Баланс твердых частиц зависит как от скорости потока, так и от гранулометрического состава пород, слагающих ложе.

Смещение донных частиц возникает за счет силового воздействия потока, которое сводится к лобовому давлению и подъемной силе. В целях упрощения будем считать течение установившимся, а поток двухмерным. Дно полагаем плоским с однородной шероховатостью. Таким образом, мы рассматриваем некоторую осредненную по времени и площади дна картину.

Очевидно, что отрыв частицы от дна зависит от выталкивающей силы $g\Delta\rho$, а также касательного напряжения на дне $\tau_0 = \tau \Big|_{z=z_0}$, вместо которого удобно ввести динамическую скорость $v_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = \kappa \frac{du}{dz}\Big|_{z=z_0}$. Частица может быть охарактеризована своим диаметром D, а свойства воды — ее кинематической вязкостью ν и плотностью ρ.

Диаметр частицы D, которая при заданных внешних условиях может быть оторвана от дна, зависит от указанных выше факторов, и для выяснения условий первоначального ее подъема следует рассмотреть зависимость

$$D = \varphi_D (g\Delta\rho,\ \rho,\ v_*,\ \nu)^*.$$

Отсюда методом анализа размерностей легко получить выражение

$$\frac{g\,\Delta\rho\, D}{\rho\, v_*^2} = \Phi\left(\frac{v_*\, D}{\nu}\right). \qquad (5.1)$$

Вместо v_* можно использовать также среднюю скорость. Поскольку, согласно формуле (4.1), $v_* = \sqrt{g_x h}\ \times \times \sqrt{\Phi_\tau\left(\frac{z_0}{h},\ \frac{z}{h}\right)}\ \Big|_{z=z_0} = \sqrt{g_x h}\ \psi_\tau\left(\frac{z_0}{h}\right)$ и в соответствии с формулой (4.6) $\overline{u} = \sqrt{g_x h}\ \psi_u\left(\frac{z_0}{h}\right)$, то

$$v_* = \overline{u}\,\chi_u\left(\frac{z_0}{h}\right).$$

Тогда, переписав предварительно выражение (5.1) в виде

$$v_* = \sqrt{\frac{g\,\Delta\rho\, D}{\rho}}\ \Phi_1\left(\frac{\rho\,\nu^2}{g\,\Delta\rho\, D^3}\right),$$

будем иметь

$$\overline{u} = \sqrt{\frac{g\,\Delta\rho\, D}{\rho}}\ \chi_u^{-1}\left(\frac{z_0}{h}\right)\Phi_1\left(\frac{\rho\,\nu^2}{g\,\Delta\rho\, D^3}\right).$$

Здесь $\overline{u}$ средняя скорость потока, которая соответствует условиям начала движения частицы диаметра D.

Поскольку из физического смысла $\overline{u}$ ясно, что она непрерывным образом зависит от $\frac{\rho\,\nu^2}{g\,\Delta\rho\, D^3}$, то допустимо разложение

$$\overline{u} = \sqrt{\frac{g\,\Delta\rho\, D}{\rho}}\ \chi^{-1}\left(\frac{z_0}{h}\right)\left[\Phi_1(0) + \frac{\rho\,\nu^2}{g\,\Delta\rho\, D^3}\,\Phi_1'(0) + \ldots\right].$$

Для условий, соответствующих малому влиянию сил вязкости $\frac{\rho\,\nu^2}{g\,\Delta\rho\, D^3} \ll 1$, в линейном приближении имеем

$$\overline{u} = \sqrt{\frac{g\,\Delta\rho\, D}{\rho}}\ \chi_1\left(\frac{z_0}{h}\right). \qquad (5.2)$$

* Предполагается, что зависимость от z_0 неявно выражена через v_*.

Или, возведя обе части последнего равенства в квадрат, можно получить выражение

$$\frac{\overline{u^2}}{g D}=\chi_2\left(\frac{z_0}{h}\right)\frac{\Delta \rho}{\rho}. \tag{5.3}$$

Для более мелких частиц необходимо сохранить последующие члены разложения, так что вместо формулы (5.3) будем иметь

$$\frac{\overline{u^2}}{g D}=\chi_3\left(\frac{z_0}{h}\right)\frac{\Delta \rho}{\rho}\left[1+\chi_4\left(\frac{z_0}{h}\right)\frac{\rho \nu^2}{g \Delta \rho D^3}+\ldots\right]. \tag{5.4}$$

Заметим, что если глубина русла сравнима с его шириной, то во всех предыдущих зависимостях вместо h следует использовать гидравлический радиус R.

Если фактические скорости в потоке меньше $\overline{u}$, то частицы диаметра D в русле глубиной h, с шероховатостью z_0 не могут начать двигаться. Это так называемые неразмывающие скорости.

2. Взвешенные наносы

Часть частиц, поднимаемых со дна, может распределяться по всей толще потока, так что он в той или иной степени насыщается наносами. При равенстве потоков примеси, обусловленных турбулентным перемешиванием и гравитационным оседанием, создается стационарная картина распределения наносов по вертикали. При реально существующих в потоке концентрациях влияние взвешенных частиц на поток (обратное влияние) практически ничтожно и поле скоростей практически не зависит от наличия наносов.

Рассмотрим распределение взвешенных наносов в потоке. Концентрация частиц в потоке зависит от следующих причин: 1) условий отрыва частиц от дна; 2) интенсивности турбулентного обмена κ в потоке; 3) скорости седиментации w. Первая из них определяет интенсивность поступления примеси в поток, а вторая и третья обусловливает распределение концентрации S по глубине потока z. Скорость седиментации (см. формулу (15) в работе [7])* выражается следующим образом:

$$w=\sqrt{\frac{g \Delta \rho D}{\rho}}\,\Phi_w\left(\frac{\nu}{D}\sqrt{\frac{\rho}{g \Delta \rho D}}\right). \tag{5.5}$$

---

* Формула (15) в работе [7] имеет вид $W=\sqrt{\frac{g \Delta \rho\, l_z}{\rho_в}}\,\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho_в g \Delta \rho\, l_z^3}};\ \frac{l_r}{l_z}\right)$. В этом случае $l_r=l_z\equiv D$; $\nu=\mu/\rho$, где ρ — плотность воды в отличие от плотности воздуха $\rho_в$.

Для больших чисел Рейнольдса (см. формулу (16) в работе [7])

$$w_1 = C_w \sqrt{\frac{g \Delta \rho D}{\rho}}. \tag{5.6}$$

Следовательно, формулу (5.5) можно переписать в виде

$$w = w_1 \tilde{\Phi}_w \left(\frac{\nu}{v_* D} \cdot \frac{v_*}{w_1} \right).$$

Условия отрыва от дна на основании выражений (5.1) и (5.6) можно записать таким образом

$$\frac{w_1}{w_*} = \Phi_0 \left(\frac{v_* D}{\nu} \right).$$

Коэффициент турбулентности, как показано выше, выражается в виде

$$\kappa = v_* z \Phi \left(\frac{z}{h}, \quad \frac{z_0}{h} \right).$$

Все вышеперечисленные факторы создают на высоте выступов шероховатости Δ концентрацию S_0.

Таким образом, для определения концентрации S по высоте z следует рассмотреть зависимость

$$S = \varphi_S \left(S_0, \ w_1, \ \frac{\nu}{v_* D} \cdot \frac{v_*}{w_1}, \ \frac{w_1}{v_*}, \ v_* z, \ \frac{z}{h}, \ \frac{z_0}{h}, z, \Delta \right).$$

Анализ размерностей приводит к соотношению

$$S = S_0 \tilde{\Phi}_S \left(\frac{v_* D}{\nu}, \ \frac{w_1}{v_*}, \ \frac{z}{h}, \ \frac{\Delta}{h}, \ \frac{z_0}{h} \right).$$

Поскольку $z_0 \sim \Delta$, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$S = S_0 \Phi_S \left(\frac{v_* D}{\nu}, \ \frac{w_1}{v_*}, \ \frac{z}{h}, \ \frac{\Delta}{h} \right).$$

При слабом влиянии вязкости получим выражение

$$S = S_0 \psi_S \left(\frac{w_1}{v_*}, \ \frac{\Delta}{h}, \ \frac{z}{h} \right). \tag{5.7}$$

Расход взвешенных наносов

$$P = \int_0^h u S \, dz = S_0 v_* \int_0^h \psi_1 \left(\frac{w_1}{v_*}, \ \frac{\Delta}{h}, \ \frac{z}{h} \right) dz,$$

то есть

$$P = S_0 \ h \ v_* \ \psi_2 \left(\frac{w_1}{v_*}, \ \frac{\Delta}{h} \right). \tag{5.8}$$

Средний расход

$$\overline{S} = \frac{P}{q} = \frac{P}{uh} = S_0 \, \psi_3 \left(\frac{w_1}{v_*}, \ \frac{\Delta}{h} \right)^*. \tag{5.9}$$

Каждый конкретный поток обладает вполне определенной способностью к переносу наносов. Максимальный расход наносов, который может иметь место в потоке при стационарных условиях, характеризует его транспортирующую способность. Если она понижается, то это ведет к выпадению твердых частиц и заилению русла.

3. Взаимосвязь морфологических и динамических характеристик потока

Любой речной поток формируется под влиянием климата, геологической структуры, характера растительного покрова, а также хозяйственной деятельности человека. От этого зависят расход воды и наносов, характер последних, уклон поверхности, форма поперечного сечения реки. Естественно, что морфологические и динамические характеристики русла должны быть тесно связаны между собой. Это объясняется тем, что размывающая способность потока определяет его геометрические границы. В свою очередь, скорость течения зависит от конфигурации заполненной водой части русла. Таким образом, как ширину потока B, так и его глубину h ** следует поставить в зависимость от расхода Q, шероховатости $z_0 \sim D$, условия размываемости, характеризуемого гидравлической крупностью W и уклона i, который должен входить в комбинации gi, ибо нас интересует проекция силы тяжести на направление движения. Следовательно, можно записать:

$$B = \varphi_B (Q, \ gi, \ w, \ D);$$

$$h = \varphi_h \ (Q, \ gi, \ w, \ D).$$

---

* Полученные выше соотношения с точки зрения практической реализации малоэффективны, но проведенный анализ позволяет глубже понять физический механизм рассмотренного явления.

** Обычно ширина реки значительно больше ее глубины, поэтому вполне можно вместо смоченного периметра χ использовать B, а вместо гидравлического радиуса R среднюю глубину $h = \frac{\omega}{B}$ (ω — площадь сечения). Для горных рек это условие, естественно, не выполняется.

Откуда:

$$\frac{B}{D} = \Phi_B\left(\frac{Q}{\sqrt{gi\,D^5}}, \quad \frac{w}{\sqrt{gi\,D}}\right); \tag{5.10}$$

$$\frac{h}{D} = \Phi_h\left(\frac{Q}{\sqrt{gi\,D^5}}, \ \frac{w}{\sqrt{gi\,D}}\right), \tag{5.11}$$

или

$$B\sqrt{\frac{w}{Q}} = \tilde{\Phi}_B\left(\frac{Q\,g^2\,i^2}{w^5}, \quad \frac{\sqrt{gi\,D}}{w}\right); \tag{5.12}$$

$$h\sqrt{\frac{w}{Q}} = \tilde{\Phi}_h\left(\frac{Q\,g^2\,i^2}{w^5}, \quad \frac{\sqrt{gi\,D}}{w}\right). \tag{5.13}$$

§ 6. ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

Выпадающая на землю влага частично просачивается в грунт. Достигнув водоупора, она станет двигаться по нему, образуя безнапорный фильтрационный поток (поток по наклонной поверхности). Аналогичные течения имеют место при фильтрации через земляную плотину или при наличии дренажных устройств, а также в некоторых других ситуациях. Обычно эти движения носят ламинарный характер, и лишь в редких случаях при наличии больших пор в крупнозернистых грунтах режим может быть турбулентным.

Скоростью фильтрации u называется величина, равная отношению расхода q* к площади сечения S, которая включает в себя площадь пор $S_п$ и частиц грунта $S_г$, так что $S = S_п + S_г$. Таким образом, $u = \frac{q}{S}$. В отличие от нее действительная скорость u_1 определяется как $u_1 = \frac{q}{S_n}$. Ясно, что $\frac{u}{u_1} \ll 1$.

Скорость u_1 в случае стационарного течения зависит от свойств грунта, определяющих его пористость. В качестве характеристики последней естественно использовать некоторую среднюю площадь сечения отдельной поры ω. Само движение вызывается действием сил тяжести, которая должна войти вкупе с величиной уклона, т. е. gi. Кроме того, необходимо принять во внимание вязкое сопротивление, т. е. включить в число определяющих параметров кинематическую вязкость ν. В итоге необходимо исследовать зависимость

$$u_1 = \varphi_u (gi,\ \nu,\ \omega).$$

Анализ размерностей приводит к соотношению

$$u_1 = \sqrt[3]{gi\,\nu}\ \Phi_u \left(\omega \sqrt[3]{\left(\frac{gi}{\nu^2} \right)^2} \right). \tag{6.1}$$

При $\varepsilon \equiv \omega \sqrt[3]{\left(\frac{gi}{\nu^2} \right)^2} \ll 1$, что соответствует малым диамет-

---

* Как и ранее, рассматриваем плоский поток.

рам пор и ламинарному режиму, допустимо разложение функции $\Phi_u(\varepsilon)$ в ряд по указанному параметру. Ясно, что при $\omega = 0$, $u_1 = 0$, поэтому $\Phi_u(0) \equiv 0$. С учетом этого обстоятельства в линейном приближении получаем

$$u_1 = \frac{gi\,\omega}{\nu}\,\Phi'(0)\,. \qquad (6.2)$$

Введя понятие коэффициента фильтрации $\kappa = \Phi'(0)\,\frac{g\,\omega}{\nu}\,\frac{S_п}{S}$, можно вместо формулы (6.2) записать выражение

$$u = \kappa\, i^*. \qquad (6.3)$$

Соответственно

$$q = S\,\kappa\, i\,. \qquad (6.4)$$

Последние соотношения носят наименование формул Дарси. Подчеркнем, что u есть некоторая фиктивная скорость, соответствующая реальному расходу q, но при площади сечения S, т. е. что частицы грунта и поры вводятся в рассмотрение лишь посредством учета сопротивлений такому движению.

Для крупнозернистых грунтов при наличии больших пор можно получить соотношение другого типа, соответствующее турбулентному режиму движения жидкости. В этом случае влияние вязкости является пренебрежимо малым, так что

$$u_1 = \tilde{\varphi}_u\,(gi,\ \omega),$$

откуда

$$u_1 = C\sqrt{g\,i}\ \omega^{1/4}\,. \qquad (6.5)$$

Здесь также можно ввести скорость фильтрации, обозначая $a = \tilde{\Phi}_u(0)\ \frac{S_п}{S}\ \sqrt[4]{g^2\omega}$. Тогда:

$$\tilde{u} = a\sqrt{i}\,, \qquad (6.6)$$

$$q = S\ a\sqrt{i}, \qquad (6.7)$$

где a также находится экспериментальным путем.

---

* Величина κ определяется эмпирическим путем.

§ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОФИЗИКИ ПОЧВ

Помимо направленных фильтрационных движений в почве могут наблюдаться миграции влаги за счет капиллярных сил, пленочных течений, а также ввиду наличия диффузии пара. В целом механизм переноса чрезвычайно сложен, и мы ограничимся лишь рассмотрением процессов капиллярного впитывания, для которых метод размерностей дает наиболее эффективные результаты.

В поверхностном слое жидкости за счет сил молекулярного сцепления возникает молекулярное давление p. Поскольку за счет эффекта смачивания на границе жидкость — стенка поверхность жидкости искривлена, то в дополнение к давлению на плоской поверхности p_0 появляется еще капиллярное давление p_σ, зависящее от главных радиусов кривизны r_1 и r_2. Для выпуклых поверхностей оно положительно, вогнутых — отрицательно, для плоских соответственно равно нулю. Так как для смачивающей жидкости, что соответствует процессам в почве, $p_\sigma < 0$, то $p < p_0$, и вода в капилляре поднимается до некоторой высоты h_0.

Форма поверхности зависит от условий смачивания. Если принять, что мениск имеет сферическую форму, то $r_1 = r_2 = r_0$. При полном смачивании $r_0 = r$, где r — радиус капилляра. В случае неполного смачивания поверхность жидкости пересекается с твердыми границами под некоторым углом α (краевой угол). При этом радиус кривизны r_0 уже не равен радиусу капилляра, но связан с ним посредством краевого угла.

Поверхностное натяжение, обусловливающее появление p_σ, может быть охарактеризовано коэффициентом поверхностного натяжения σ. По своему физическому смыслу этот коэффициент представляет собой свободную потенциальную энергию молекул жидкости в поверхностном слое, отнесенную к единице площади. Численно он равен силе, действующей в плоскости, соприкасающейся с поверхностью жидкости, в направлении бинормали. Поскольку изменению давления способствует лишь вертикальная проекция этой силы $\sigma_h = \sigma \cos \alpha$, то можно констатировать, что

$p_\sigma = p_\sigma\,(\sigma_h,\ r)$*. Откуда на основании соображений размерности будем иметь

$$p_\sigma = C_0 \frac{\sigma_h}{r}\ ^{**}. \tag{7.1}$$

Высота подъема h_0 зависит от r, σ и удельного веса жидкости ρg. Теперь, собрав результаты, мы сможем записать, что

$$h_0 = \varphi_h(\sigma_h,\ r,\ \rho g)\,.$$

Ввиду того, что в данном случае нет взаимосвязи между горизонтальными и вертикальными процессами, целесообразно ввести дифференцированные размерности длины L_r и L_h. Тогда размерности рассматриваемых величин будут иметь вид:

$$[h_0] = L_h;\ [\sigma_h] = M\,T^{-2}\,L_h\,L_r^{-1};\ [r] = L_r;\ [\rho g] = MT^{-2}\,L_r^{-2}\,.$$

Обычным путем находим

$$h_0 = C\,\frac{\sigma\cos\alpha}{r\,\rho\,g}\,, \tag{7.2}$$

где C — константа. Известно, что $C = 2$.

Из формулы (7.2) следует, что капиллярное давление выше в капиллярах меньшего диаметра. Поскольку почва пронизана множеством капилляров различных диаметров, то в случае нарушения равновесия может иметь место переток влаги за счет капиллярного впитывания***.

Допустим, что в какой-либо момент $t = 0$ между капиллярным давлением p_σ и весом столба жидкости ρgh не существует равновесия. Тогда на столб высотой h будет действовать разность давлений $\Delta p = p_\sigma - \rho gh$. Градиент давления

$$\frac{\partial\,\Delta\,p}{\partial h} = \frac{\partial\,p_\sigma}{\partial\,h} - \rho\,g = -\rho g = \text{const},\quad \text{поэтому}\quad \frac{\partial\Delta p}{\partial h} = \frac{\Delta p}{h}\,.$$

Следовательно, считая, что капилляр цилиндрический, можно для определения скорости движения использовать известное выражение для расхода жидкости при течении в трубе. Тогда

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{G}{\pi D^2 \rho} = C_1 \frac{r^2}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial x}\,,$$

---

* Величина σ в принципе зависит от температуры, но в интересующем нас диапазоне температур это изменение незначительно и может не учитываться.

** Формула (7.1) справедлива, естественно, при условии контакта нижнего конца капилляра с резервуаром жидкости, обеспечивающим неограниченную его подпитку.

*** Если капилляр имеет коническую форму, то смачивающая жидкость будет двигаться в сторону более узкого конца.

или

$$\frac{dh}{dt}=C_1\,\frac{r^2}{\mu}\,\frac{\Delta p}{h}=C_1\,\frac{r^2}{\mu h}\left(\frac{C_0\,\sigma}{r}-\rho g\,h\right). \qquad (7.3)$$

После интегрирования будем иметь

$$t=\frac{C_2\,\mu}{r^2\rho g}\left(h_0\ln\frac{h_0}{h_0-h}-h\right), \qquad (7.4)$$

где t — время, необходимое для поднятия жидкости от уровня h до h_0. В принципе $t\to\infty$, но в действительности за весьма короткое время уровень h достигает высоты, близкой к h_0.

При движении жидкости по горизонтальному капилляру можно определить время, необходимое для прохождения пути $l^2=h_1^2-h_2^2$, интегрируя формулу (7.3) и полагая второй ее член — нулю. Тогда будем иметь

$$t=C_3\,\frac{\mu\,l^2}{r\,\sigma}. \qquad (7.5)$$

Так как при определении t использовалась формула, полученная в предположении стационарности течения, то результаты справедливы для значений $t\gg\frac{\rho r^2}{\mu}$; ибо на самом деле процесс капиллярного впитывания не является строго стационарным.

§ 8. ЗАМЕРЗАНИЕ ВОДОЕМОВ

Если температура свободной поверхности водоема ниже 0° С, то вследствие аномального хода плотности воды (с максимумом при $+4°$ С) будет наблюдаться устойчивое распределение слоев. Конвекция в этом случае отсутствует и весь процесс промерзания можно считать обусловленным чистой теплопроводностью. Для достаточно глубоких водоемов влиянием дна можно пренебречь, так же как и при некотором удалении от береговой кромки влиянием берегов. Тогда математической моделью явления будет задача о замерзании полуограниченного пространства. При ее рассмотрении будем исходить из некоторых упрощенных предпосылок.

Предположим, что в момент $t=0$ на поверхности водоема, имевшего температуру воды $T_{02} = \text{const}$, устанавливается температура $T_{01} = \text{const} < 0°$ С. Тогда начнется процесс промерзания, появится граница раздела между закристаллизовавшейся и жидкой влагой.

Нашей задачей будет определение полей температуры $T_i = T_i \times \times (x, t)$ в каждой из сред и отыскание закона движения границы $\xi = \xi(t)$ ($i = 1$ относится к твердой фазе, $i = 2$ — к жидкой). Ясно, что процесс должен определяться теплофизическими характеристиками сред, т. е. коэффициентами теплопроводности λ_i и температуропроводности a_i, начальной температурой жидкости T_{02}, температурой на поверхности T_{01}, координатой x и временем t. Кроме того, ввиду наличия фазового перехода, следует учитывать объемную теплоту плавления $L\rho_1$.

Тогда температура в каждой из сред определяется следующей совокупностью величин:

$$T_i = \varphi_{T_i}(x, t, \lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2, L\rho_1, T_{01}, T_{02}).$$

Метод анализа размерностей приводит к зависимости

$$\frac{T_i}{T_{0i}} = \Phi_{T_i}\left(\frac{x}{\sqrt{a_2 t}}, \frac{T_{02}}{T_{01}}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{\lambda_1 T_{01}}{L\rho_1 a_1}\right). \qquad (8.1)$$

Обе переменные x и t объединились в одном комплексе, прочие безразмерные величины содержат лишь физические константы и исходные значения для температур.

Поскольку на границе раздела $T_1 = T_2 = \text{const} = 0$, то этому должно соответствовать значение

$$\frac{\xi}{\sqrt{a_2 t}} = \alpha = \text{const}.$$

Откуда закон движения границы раздела

$$\xi = \alpha \sqrt{a_2 t}. \tag{8.2}$$

При этом из выражения (8.1) следует, что

$$\alpha = \psi \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{c_{p2}\, T_{02}}{L} \right). \tag{8.3}$$

В обычных условиях величина $\dfrac{c_{p1}\, T_{02}}{L} \ll 1$, так что допустимо разложение

$$\xi = \sqrt{a_2 \cdot t}\; \psi \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{a_2}{a_1}, 0 \right) \left[1 + \frac{c_{p1}\, T_{01}}{L}\, \psi_1 \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{a_2}{a_1}, 0 \right) + \ldots \right]. \tag{8.4}$$

Аналогичная по содержанию задача возникает при промерзании грунта. Однако следует иметь в виду, что за счет различных форм связи влаги со скелетом почвогрунта температура ее замерзания колеблется от 0° С (для макрокапилляров) до —70° С (для влаги, связанной посредством адсорбционных сил). Таким образом, происходит постепенный переход жидкой влаги в твердое состояние, так что в промерзшей зоне содержится влага и в жидком состоянии. Тем не менее, для достаточно увлажненного грунта изложенный выше подход к решению задачи вполне справедлив.

Практические аспекты решения этой проблемы связаны со спецификой строительства в районах вечной мерзлоты, а также с сельскохозяйственной практикой, ибо условия перезимовки озимых культур в значительной мере определяются наиболее низкими температурами на глубине узла кущения.

Часто промерзание почвы начинается с момента, когда ее температура близка к 0° С. В этом случае все полученные выше зависимости значительно упрощаются. Дело в том, что температура фазового перехода на границе раздела также равна 0° С. Поэтому никаких изменений температуры во влажной среде не может быть.

Это означает, что все ее теплофизические свойства не оказывают влияния на процесс промерзания. Для анализа данного случая перепишем выражение (8.1) в виде

$$\frac{T_1}{T_{01}} = \Phi_{T_1}\left(\frac{x}{\sqrt{a_1 t}}, \ \frac{T_{02}}{T_{01}}, \ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ \frac{a_2}{a_1}, \ \frac{\lambda_1 T_{01}}{L\rho_1 a_1}\right).$$

Так как $T_{02} \cong 0$, а λ_2 и a_2 в решение входить не могут, то последнее соотношение принимает вид

$$T_1 = T_{01}\ \widetilde{\Phi}_{T_1}\left(\frac{x}{\sqrt{a_1 \cdot t}}, \ \frac{\lambda_1 T_{01}}{L\rho_1 a_1}\right). \tag{8.5}$$

Положение фронта определяется зависимостью

$$\xi = \sqrt{a_1 \cdot t}\ \widetilde{\psi}\left(\frac{\lambda_1 T_{01}}{L\rho_2 a_1}\right). \tag{8.6}$$

При $\frac{\lambda_1 T_{01}}{L\rho a_1} \ll 1$, что чаще всего отмечается, выражение (8.6) можно разложить в ряд. Учитывая, что при $T_{01}=0$, $\xi=0$, и ограничиваясь линейным приближением, будем иметь:

$$\xi = C\,\frac{\lambda_1 T_{01}}{L\rho_1\sqrt{a_1}}\sqrt{t}, \tag{8.7}$$

где C — константа.

Мы видим, что в этом простейшем случае толщина закристаллизовавшейся части слоя прямо пропорциональна температуре на поверхности почвы и растет как $\sqrt{t}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1970. 341 с.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965. 292 с.
3. Зилитинкевич С. С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1970. 292 с.
4. Голицын Г. С. Введение в динамику планетарных атмосфер. Л., Гидрометеоиздат, 1973.
5. Великанов М. А. Динамика русловых потоков, т. II, Л., Гидрометеоиздат, 1946. 323 с.
6. Гришанин К. В. Динамика русловых потоков. Л., Гидрометеоиздат, 1969. 428 с.
7. Лайхтман Д. Л., Палагин Э. Г. Анализ размерностей в задачах динамической метеорологии. Учебное пособие. Л., 1976. 58 с. (ЛГМИ).