551.5 C33

О. Г. СЕТТОН

МИКРОМЕТЕОРОЛОГИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НИЖНИХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ

Перевод с английского под редакцией докт. физ.-мат. наук Д. Л. ЛАЙХТМАНА

> БИБЛИОТЕНА ленинградского имарометеорологического инстигата

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАД • 1958

АННОТАЦИЯ

В монографии дается изложение некоторых принципов гидродинамики и термодинамики, важных для понимания процессов, определяющих метеорологический режим в приземном слое атмосферы. Приводятся основные результаты исследования процессов, совершающихся в этом слое.

Монография представляет интерес для метеорологов и других специалистов, интересующихся пограничным слоем атмосферы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора русского перевода	7
Введение	9
Глава 1. Атмосфера в покое Состав и физические свойства (11). Уравнение статики и изме- нение давления с высотой (16). Изменения температуры с вы- сотой (17).	11
Глава 2. Атмосфера в движении (1). Ламинарный поток Общие сведения о движении вблизи поверхности земли (25). Кинематика идеальных жидкостей (30). Воздушный поток над неровной местностью (37). Ветры на вращающейся земле (45). Вязкость и ее влияние (47). Уравнения движения вязкой жидкости (52). Течение вблизи плоской поверхности (55). Теория ламинарного пограничного слоя (59). Применение теории пограничного слоя к потоку над плоской поверхностью (64)	25
Глава З. Атмосфера в движении (II). Турбулентный поток Понятие турбулентности (69). Возникновение турбулентно- сти (71). Основы математической теории турбулентного дви- жения (75). Аналогия с молекулярными процессами (79). Коэффициент обмена (82). Приближение к геострофическому ветру (84). Дальнейшее развитие молекулярной аналогии; теория пути перемешивания (87). Турбулентный пограничный слой (89). Профиль скорости в турбулентный пограничный слой (89). Профиль скорости в турбулентный пограничным уравнений профиля для шероховатых поверхностей (97). Обо- снованность гипотез коэффициента обмена и пути перемеши- вания (101). Гипотеза переноса вихря (103). Статистические теории турбулентности (104). Применение теории подобия при исследованиях по турбулентности (117).	69
Глава 4. Теплопроводность и диффузия	123
Глава 5. Радиация	179

- Глава 6. Температурное поле в нижних слоях атмосферы.... Общие характеристики (213). Условия на поверхности земли (215). Профиль температуры (226). Анализ наблюдений температуры вблизи поверхности земли (231). Теоретическое исследование теплообмена в нижних слоях (236).
- Глава 7. Проблемы структуры ветра вблизи поверхности.... 255 Общий характер поля скорости у поверхности (255). Профиль ветра (258). Приближение к геострофическому ветру (268). Структура ветра вблизи поверхности (277). Влияние расслоения потока (292). Ветры местного происхождения (295).

213

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

За последние годы большое внимание исследователей привлекаю физические процессы, протекающие в приземном слое атмосферы. Это связано в первую очередь с прикладным значением метеорологии нижнего слоя атмосферы для многих проблем практики.

Особенно большое значение получают приложения к сельскому хозяйству. Можно, например, указать, что рациональное проектирование мелиоративных мероприятий (которые проводятся во многих странах в широком масштабе) невозможно без учета таких метеорологических факторов, как режим испарения, температурный и ветровой режим для того пункта, в котором планируется мелиорация.

Следует иметь в виду, что сведения, полученные из стандартных метеорологических наблюдений, очень часто недостаточны не только из-за сравнительно редкой сети метеорологических станций, но и из-за весьма существенных возмущений, обусловленных местными микрометеорологическими особенностями. В этой связи изучение физических закономерностей приобретает особую актуальность, поскольку результаты исследований позволяют давать количественные оценки особенностей микрометеорологического режима на основании монотонно меняющихся внешних факторов и даже определять те метеорологические нарушения, которые можно ожидать в результате осуществления гидрометеорологических мероприятий.

Значительное распространение получили работы метеорологов по предвычислению экстремальных температур в отдельной точке, основанные на соответствующих решениях уравнения теплопроводности для нижнего слоя атмосферы; эти же результаты используются для выбора рациональных методов борьбы с заморозками.

Изучение закономерностей образования и рассеяния местных туманов и методов активного воздействия на туманы чрезвычайно важно при оперативном обслуживании авиации. Условия образования гололеда необходимо учитывать при проектировании линий электропередач.

Закономерности распределения температуры и ветра по вертикали определяют различные строительные стандарты.

Несомненно, что по мере развития и углубления наших представлений о физических процессах в нижнем слое атмосферы будет расширяться сфера приложения полученных результатов к решению разнообразных народнохозяйственных задач.

Несмотря на большой интерес, предъявляемый к литературе по физике приземного слоя, в настоящее время отсутствуют более или менее полные монографии, которые освещали бы современное состояние этого раздела метеорологии. В известной мере заполнению этого пробела может служить предлагаемая вниманию читателей книга крупного английского специалиста О. Г. Сеттона.

Большим достоинством книги является ясный и подробный физический анализ явлений, сочетающийся с достаточной математической строгостью. Несмотря на большую сложность математической стороны многих проблем, автор сумел сохранить целесообразную пропорцию между физическим анализом и математическими выкладками. Изложение большинства проблем соответствует современному состоянию науки.

Следует, однако, отметить, что ряд важных вопросов, получивших достаточное развитие, совершенно не отражен в книге, а некоторым уделяется незаслуженно мало внимания. Здесь можно указать, например, на результаты, полученные за последнее время, по образованию радиационных и адвективных туманов, по изменению микроклимата при орошении, осушении и под влиянием лесных полос и др. Очень мало внимания уделяется процессам, происходящим в нижних слоях атмосферы над водой и на границе вода—суша. Мы имеем в виду, например, такие вопросы, как бризы и связанные с ними явления.

Следует, наконец, отметить, что в монографии совершенно не отражены работы советских ученых. Изложение результатов исследований, проведенных в Советском Союзе, безусловно обогатило бы многие разделы книги Сеттона. Поскольку это относится почти ко всем разделам физики приземного слоя атмосферы, то нет никакой возможности дать их в виде дополнения к соответствующим главам книги. Поэтому мы решили привести только дополнительный список работ советских ученых.

Книгу на русский язык перевели: М. Е. Берлянд (гл. 2 и 6), В. Л. Гаевский (гл. 1 и 5), Д. Л. Лайхтман (гл. 4 и 8), Т. А. Огнева (гл. 3 и 7).

ВВЕДЕНИЕ

В историческом развитии метеорологии интерес главным образом концентрировался на широких аспектах климата и погоды — процессов, которые охватывают большие районы земной поверхности и большую толщу атмосферы. В последние годы, однако, все большее и большее внимание обращалось на систематическое изучение внутренней структуры больших атмосферных процессов и особенно на подробное изучение явлений, которые возникают в приземных слоях воздуха.

Термин микрометеорология, употребляемый в этой книге, указывает на то, что предметом изучения являются физические процессы, имеющие место над ограниченными районами поверхности земли, главным образом в пределах нижних слоев атмосферы.

Климат и погода большого района обусловлены непосредственно движением больших воздушных масс над континентами и морями; при процессах такого масштаба не существенно точно учитыватьусловия, которые определяют такие, например, явления, как загрязнение атмосферы дымом из фабричных труб или стекание холодного воздуха в долину. Хотя эти особенности при рассмотрении климатологического атласа или синоптической карты имеют второстепенное значение, они могут влиять на благосостояние человека и экономику, а поэтому достойны серьезного изучения.

Физика нижнего слоя атмосферы интересна и важна главным образом из-за резких изменений в строении, которые обнаруживаются в ближайших к земле слоях воздуха. Такие изменения существенны не только для метеорологии, но и для других областей науки. Климат в пределах нескольких дюймов от земли, который особенноважен для растения в начале вегетации, совершенно не похож на климат, который характеризует слои, расположенные на несколько футов выше, так как слои воздуха в пределах нескольких сантиметров от земли могут испытывать в течение одного дня и тропическуюжару, и ледяной холод. Подробное изучение действия климата на растительность едва ли может основываться на данных, регистрируемых в будке на высоте около 4 футов.

Развитие микрометеорологии как точной науки требует не только исследования и истолкования тщательных наблюдений, проведенных в прилежащих к поверхности земли слоях воздуха, но также изучения физических процессов, которые обусловливают микроклимат. Это вызывает необходимость детально изучить движение воздуха вблизи твердых или жидких границ различной формы, температура которых

 9°

меняется во времени. Главной чертой такого движения является то, что поток обычно турбулентный и в нем происходит значительное перемешивание. Это означает, что многие свойства приземных слоев атмосферы зависят от турбулентности. Степень турбулентности ветра обусловливает распространение тепла от поверхности земли в воздух, обмен углекислым газом между растительным и животным миром, рассеяние пыли и легких семян, а также кругооборот воды в природе.

Первые главы этой книги посвящены некоторым разделам физики и математики, которые необходимы при изучении процессов, имеющих место вблизи твердой стенки, которой в сущности является поверхность земли.

Последние главы показывают, каким образом общие закономерности применимы к нахождению решений, хотя и приближенных, но важных для проблем гидрологии, загрязнения атмосферы и сельскохозяйственной метеорологии.

главаі

АТМОСФЕРА В ПОКОЕ

1. 1. Состав и физические свойства

Атмосфера. С точки зрения метеорологии, атмосфера состонт из гипотетического газа, названного *чистым сухим воздухом*, и водяного пара. В ней обычно находятся различные примеси, такие как индустриальные газы, и некоторое количество веществ в суспензии, например, вода (в виде льда, снега или дождя), дым, туман, пыльца растений и т. п.

Сухой воздух. Чистый сухой воздух, или, более кратко, сухой воздух представляет собой смесь газов, которая остается неизменной до больших высот. Пейнез [1] дает состав воздуха, представленный в табл. 1.

Состав	Объем, ⁰ /0	
Азот Кислород Аргон Углекислый газ	78,08 20,95 0,93 0,03	
Неон Гелий Криптон Ксенон Озон	1,8·10 ⁻³ 5·10 ⁻⁴ 1·10 ⁻⁴ 1·10 ⁻⁵ колеблется около 10 ⁻⁶	
Радон	6 · 10 ⁻¹³ предположительно 1 · 10 ⁻³	

Таблица 1 Состав чистого сухого воздуха

Таким образом, 99,9% объема сухого воздуха состоит из четырех газов: азота, кислорода, аргона и углекислого газа.

Основные физические свойства сухого воздуха даны в табл. 2.

Физические свойства сухого воздуха

Плотность р при 0°С и давлении 1000 мб
Удельная теплоемкость при постоянном давлении С 0,24
Удельная теплоемкость при постоянном объеме C _v ^P
Отношение удельных теплоемкостей 7
(Средний) молекулярный вес М

Так как составляющие сухого воздуха при обычной температуре, которая значительно выше их критических температур, являются газами, то к воздуху применимы законы идеального газа

$$p = \frac{R_1}{M} \,\rho T, \qquad (1.1)$$

где p — давление в динах на квадратный сантиметр площади, T — абсолютная температура, R_1 — универсальная газовая постоянная, равная 8,31 · 10⁷ эрг град⁻¹. Ввиду постоянства состава воздуха удобно написать $\frac{R_1}{M} = R$ — газовая постоянная сухого воздуха, имеющая значение 2,876 · 10⁻⁶ см² сек.⁻² град.⁻¹.

Водяной пар. Для метеорологов водяной пар является одной из наиболее важных составляющих атмосферы. Это справедливо главным образом потому, что при обычных температурах водяной пар легко переходит в жидкую и твердую фазы (и наоборот) с большим выделением или поглощением тепла; при этом происходит перенос большого количества тепла от почвы к атмосфере и обратно. Значение воды в парообразном или жидком состоянии для обеспечения жизни на земле не нуждается в доказательстве.

В связи с тем, что вода участвует во многих разнообразных процессах, количество водяного пара в воздухе измеряется различными способами.

Давление и плотность водяного пара. Согласно закону Дальтона о парциальном давлении, давление, оказываемое водяным паром в атмосфере, не зависит от давления других газов. Если отсутствуют процессы конденсации или испарения, водяной пар может рассматриваться как идеальный газ, давление е которого выражается следующим образом:

$$e = \frac{R_1}{M_w} \rho_w T, \qquad (1.2)$$

где $M_w = 18$ — молекулярный вес водяного пара, а ρ_w — его плотность. Температуру пара T можно принять равной температуре сухого воздуха, с которым водяной пар смешан, так как любое различие в температуре между паром и воздухом быстро устраняется сильной диффузией, сопровождающей обычно все атмосферные движения. Так как $R_1 = RM$, где R и M относятся к сухому воздуху,

предыдущее уравнение принимает вид

$$e = \frac{M}{M_w} R \rho_w T \approx 1.61 R \rho_w T \approx \frac{8}{5} R \rho_w T \qquad (1.3)$$

или

$$\rho_{w} = \frac{M_{w}}{M} \frac{e}{RT} \approx 0.622 \frac{e}{RT} \approx \frac{5e}{8RT}.$$
 (1.4)

Таким образом, имеются два прямых пути оценки количества водяного пара в некотором объеме атмосферы: 1) по давлению *е*, которое является следствием одного водяного пара, и 2) плотности р_w пара. Плотность водяного пара обычно называется абсолютной влажсностью атмосферы.

У поверхности земли давление атмосферы составляет около 1015 мб, при этом на водяной пар приходится очень небольшое количество порядка 1—2% Плотность сухого воздуха при 1000 мб и 0° С составляет 1,276 · 10⁻³ г см⁻³, а плотность водяного пара при этой же температуре меньше чем 5 · 10⁻⁶г см⁻³.

Несмотря на большое значение водяного пара в атмосферных процессах, он составляет лишь небольшую часть атмосферы вблизи подстилающей поверхности.

Если p — полное давление смеси сухого воздуха и водяного пара, p - e — парциальное давление одного воздуха, то плотность ρ_m смеси приближенно равна

$$\rho_m = \frac{p-e}{RT} + \frac{5e}{8RT} = \frac{p}{RT} \left(1 - \frac{3e}{8p} \right).$$
(1.5)

Мы можем написать это выражение в виде

$$\rho_m = \frac{p}{RI'}, \qquad (1.6)$$

обозначая виртуальной температурой $T' = \frac{T}{\left(1 - \frac{3e}{8p}\right)}$, температу-

ру, при которой объем сухого воздуха имел бы такую же плотность, как и его смесь с водяным паром при одном и том же давлении.

При условии, что отсутствует конденсация, смесь сухого воздуха и водяного пара ведет себя подобно идеальному газу, подчиняясь закону

$$p = R' \rho T$$
,

где

$$R' = \frac{R}{\left(1 - \frac{3e}{8p}\right)} \approx R\left(1 + \frac{3e}{8p}\right).$$

Это приближение часто используется в тех случаях, когда воздух содержит небольшое количество водяного пара.

Насыщение и относительная влажность. Согласно кинетической теории газов, испарение возникает тогда, когда части молекул жидкости удается преодолеть взаимные силы притяжения и оторваться от свободной поверхности в пространство, образуя пар.

Некоторые молекулы пара ударяются о поверхность и в конце концов захватываются жидкостью. Этот процесс может протекать до тех пор, пока окончательно не установится динамическое равновесие, при котором число молекул, потерянных жидкостью, равно числу молекул, полученных жидкостью от пара за тот же промежуток времени. Когда подобное явление имеет место, водяной пар называют насыщенным, и данной температуре соответствует определенное давление насыщенного водяного пара, или плотность насыщенного пара (в определенных условиях возможно получить перенасыщенный пар, но обычно такие условия не интересуют микрометеорологов).

Давление насыщенного пара и плотность насыщения быстро возрастают с температурой, и для выражения этой зависимости можно предложить различные формулы, теоретические и эмпирические.

Кей и Лейби [2] установили, что формула Кирхгофа — Ранкина — Дюпре

$$\log e = A + \frac{B}{T} C \log T$$

точна и удобна. Авторы рекомендуют для интерполяции применять log *e* как линейную функцию температуры.

В большей части метеорологических расчетов необходимая точность может быть получена при использовании таблиц упругости насыщенного водяного пара над льдом или над водой для интервалов в 1°C.

Несколько типичных значений дано ниже.

Давление насыщенного пара в миллиметрах ртутного столба Температура, ^оС.....0 5 10 15 20 25 30 Давление пара, мм.....4,58 6,54 9,21 12,78 17,51 23,69 31,71

Насыщение, как физическое явление, не зависит от нахождения или отсутствия других газов. В метеорологии появился не вполне строгий, но удобный способ рассмотрения атмосферы как "насыщенной" или "ненасыщенной". Это означает, что водяной пар, который составляет часть воздуха, находится или не находится в равновесии с поверхностью воды (или льда) при температуре, равной температуре атмосферы. Естественно рассматривать сухой воздух как сорт губки, которая может стать насыщенной водой, но это предположение совершенно неверно. Тем не менее термин "насыщенный воздух" стал очень распространенным в метеорологии и устранить его совершенно было бы слишком педантично. Этот термин не вредит делу при условии, что читатель уяснил себе его точное значение. Мы определяем насыщенный воздух как смесь чистого сухого воздуха и водяного пара, в которой последний содержится в количестве, насыщающем пространство, а влажный воздух — как смесь чистого сухого воздуха и водяного пара, в которой давление (или плотность) пара ниже давления насыщения (или плотности при насыщении). Из этих определений возник наиболее известный способ измерения водяного пара в атмосфере при помощи относительной влажности f, определяемой как отношение действительного давления пара к насыщающему давлению при той же температуре. Относительная влажность обычно выражается в процентах

$$f = \frac{100e}{e_s} \, 0/_0, \tag{1.7}$$

где e_s — давление насыщающего пара.

Взаимосвязанные измерения водяного пара. При рассмотрении проблем диффузии и испарения количественными характеристиками содержания водяного пара принимаются абсолютная влажность и плотность. Наблюдения обычно регистрируют давление пара или относительную влажность. Переход от одних единиц к другим может быть быстро выполнен с помощью таблиц. При анализе свойств воздушных масс и решении многих других проблем больших масштабов полезна еще одна величина — отношение смеси х. Она определяется как отношение массы водяного пара к массе сухого воздуха в данном объеме влажного воздуха. Численно отношение смеси является почти такой же величиной, как и удельная влажсность q, которая определяется как количество воды в единице массы влажного воздуха. Алгебраические соотношения между различными характеристиками даны ниже:

$$x = 0,622 \frac{e}{p-e} \approx 0,622 \frac{e}{p}$$
, так как $e \ll p$, (1.8)

$$f = \frac{100 \left(p - e\right)}{0.622e_s} x,$$
 (1.9)

$$\rho_w = \frac{(p-e)}{RT} x, \qquad (1.10)$$

$$q = \frac{0.622e}{p - 0.378e} \approx x. \tag{1.11}$$

Количество водяного пара в воздухе может также быть выражено *точкой росы*, определяемой как наиболее низкая температура, до которой может быть охлажден объем влажного воздуха при постоянном давлении, прежде чем достигнута конденсация. Наконец, *дефицит насыщения* — это разность между давлением насыщающего пара и действительным давлением пара при одной и той же температуре. Дефицит влажности также используется в практике, особенно биологами. Другого названия для этой величины — "осу-

ŀ5

метеорологии по причине, которая будет в дальнейшем подробно разобрана.

Хорошо известен факт, что обычно температура с высотой понижается, но это простое положение должно быть уточнено для условий вблизи почвы.

В слоях около поверхности почвы в теплый ясный день температура с высотой падает очень быстро, но после захода солнца, особенно при ясном небе, температура воздуха в этих слоях обычно повышается от поверхности земли вверх. Повышение температуры с высотой называется *инверсией*. Теоретического определения температурного профиля в атмосфере нельзя получить непосредственно в общем виде, но задача может быть решена рассмотрением определенных, относительно простых случаев. Наиболее важно при этом ввести особое значение температурного градиента, известного как сухоадиабатический градиент.

Подлежащая рассмотрению проблема может быть изложена в следующем виде: объем сухого воздуха, который по тем или иным причинам вынужден к перемещению от одного уровня к другому, должен изменить свое давление. Мы предполагаем, что это изменение давления происходит в соответствии с гидростатическим уравнением (1.12), хотя строго это уравнение применяется только в случае, если не имеется вертикального движения и при предположении, что атмосфера однородна во всех направлениях, в том числе и по вертикали. Так как три переменные: давление, температура и плотность связаны уравнением состояния (1.13), то следует, что изменение давления должно привести к изменению плотности или температуры объема или того и другого вместе. Такие изменения зависят, при данных условиях, от движения объема и состояния окружающей атмосферы.

Температура может падать или повышаться из-за понижения или повышения давления, но может также изменяться из-за притока телла к окружающему воздуху и от него, или из-за проникновения внешнего воздуха в данный объем во время его движения, или под воздействием радиации. Здесь мы рассмотрим только особый случай, когда нет потока тепла через границу объема и общее изменение температуры является следствием изменения давления. Это означает, что плотность воздуха данного объема на некотором уровне полностью определяется его абсолютной температурой. Нас особенно интересуют условия, при которых плотность объема всегда равна плотности окружающей среды. В окончательном виде проблема может быть выражена следующим образом: если объем воздуха в неподвижной сухой атмосфере перемещен с одного уровня на другой, то каким должен быть температурный профиль в атмосфере, чтобы обеспечить одинаковую плотность объема с окружающей средой, причем изменение температуры в объеме происходит без обмена тепла с окружающей атмосферой? В целях лучшего понимания вопроса нам нужно рассмотреть некоторые термодинамические понятия.

Адиабатические изменения. Изменение состояния (т. е.

температуры, давления и плотности) газа называют а д и а б а т и ч ес к и м, если оно происходит без обмена теплом между массой этого газа и окружающей средой. Такое состояние предполагает определенную функциональную зависимость между температурой, давлением и удельной теплоемкостью газа. В учебниках по термодинамике¹ формулируется принцип сохранения энергии, известный как *первый закон термодинамики*. Согласно этому принципу, бесконечно малое количество тепла dQ, которое передается газу, используется частично на повыщение внутренней энергии молекул $c_{q}dT$ и частично — на работу против внешнего давления. Напишем уравнение

$$dQ = c_v dT + Apd\left(\frac{1}{p}\right),$$

где A — величина, обратная механическому эквиваленту тепла.

Так как из $\frac{p}{o} = RT$ следует, что

$$pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = RdT - \frac{dp}{\rho},$$

то, следовательно,

$$dQ = (c_v + AR) dT - A \frac{dp}{p} = (c_v + AR) dT - \frac{ART}{p} dp =$$
$$= c_p dT - (c_p - c_v) T \frac{dp}{p},$$

так как $AR = c_p - c_p$.

При адиабатическом изменении dQ = 0. Следовательно, для такого изменения, если принять $\gamma = \frac{c}{c} p \approx 1,41$ (для сухого воздуха), то

$$\gamma \frac{dT}{T} - (\gamma - 1) \frac{dp}{p} = 0$$

или

$$T = \operatorname{const} p^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \approx \operatorname{const} p^{0,288}.$$
 (1.17)

Таким образом, если давление объема воздуха изменяется адиабатически, то температура должна повышаться или понижаться согласно уравнению (1.17).

Сухоадиабатический градиент. Рассмотрим атмосферу (в покое), в которой р, Р и Т — функции высоты z. Объем воздуха в такой атмосфере подвергается вертикальному перемещению.

¹ Zemansky. Heat and Thermodynamics. 2 d. ed., p. 101, Mc Graw-Hill, 1943.

2*

Рассмотрим изменения, которые имеют место в состоянии объема, если в процессе приближения его давления к давлению окружающего воздуха изменение температуры происходит адиабатически. Такое предположение позволяет исключить давление и плотность из гидростатического уравнения (1.12) путем использования функциональной зависимости (1.17) между давлением и температурой при адиабатическом процессе. Таким образом, если температура T' объема отличается от остальной атмосферы, следует, что

$$\frac{dT'}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T'}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} g \rho \frac{T'}{R \rho T} = -\frac{g}{R} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \frac{T'}{T}.$$
 (1.18)

Наиболее важным является случай, когда температура T' объема отличается на бесконечно малую величину от температуры окружающего воздуха. Тогда

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{R} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) = -\frac{gA}{c_p} \approx -9,87 \cdot 10^{-5} \text{°C cm}^{-1} \approx \approx -1^{\circ} \text{°C Ha} \ 100 \text{ M.}$$
(1.19)

Эта скорость убывания температуры с высотой, известная как сухоадиабатический градиент, обозначается символом Γ (гамма) и является одной из основных метеорологических констант.

Требуемый температурный профиль будет выражен следующим образом:

$$T(z) = T(0) - \frac{gA}{c_p} z.$$
 (1.20)

В атмосфере с таким распределением температуры массы воздуха, перемещающиеся адиабатически от одного уровня к другому, будут иметь всегда ту же температуру и плотность, которую имеет окружающая среда.

Статическая устойчивость атмосферы. Полученный результат дает критерий статической устойчивости атмосферы. Если градиент температуры в атмосфере превосходит адиабатический, то очевидно, что воздух, перемещенный вверх на бесконечно малую величину от уровня, на котором он имел ту же самую температуру и плотность, что и окружающий воздух, будет иметь более высокую температуру, чем окружающая среда на новом уровне и, следовательно, должен иметь меньшую плотность, чем окружающий воздух.

Подъемная сила, которая является результатом разности плотностей, указывает, что объем воздуха будет, вероятно, продолжать восхождение. Такое состояние атмосферы классифицируется как статически неустойчивое. Аналогично этому в атмосфере, в которой градиент температуры меньше адиабатического, масса воздуха, вынужденная двигаться вверх, плотнее, чем окружающая среда, и она будет стремиться опуститься на прежний уровень. Такое состояние является необходимым условием для статической устойчивости. Тот же результат имеет место, если происходит перемещение вниз, при условии, что перемещение адиабатическое. Следовательно, мы можем сказать, что сухая атмосфера находится в нейтральном, устойчивом или неустойчивом статическом равновесии, если скорость изменения температуры по вертикали равна, меньше или превосходит адиабатический градиент.

Ниже рассматриваются ограничения, накладываемые на приведенный анализ.

Потенциальная температура. Поскольку вертикальные движения имеют большое значение в любой метеорологической проблеме, важно определить температуру, на которую не действуют изменения давления при условии, что изменения происходят адиабатически.

Потенциальная температура θ сухого воздуха определяется как такая температура, которую принимает объем воздуха, если он приведен адиабатически от его первоначального давления к стандартному, обычно к давлению у поверхности земли.

Если p_0 — давление у поверхности, то из уравнения (1.17) имеем

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \approx T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,288}, \qquad (1.21)$$

где Т — фактическая (абсолютная) температура объема.

Градиент потенциальной температуры может быть выражен через градиент абсолютной температуры и адиабатический градиент.

Дифференцируя уравнение (1.21) в его логарифмической форме, имеем

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \frac{g}{RT}$$

или

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma \right).$$
(1.22)

Значение

 $\frac{dT}{dz} + \Gamma$

есть разность между действительным и адиабатическим градиентами температуры. На поверхности земли потенциальная и абсолютная температуры равны по определению, а аппроксимация

$$\theta = T + \Gamma z \tag{1.23}$$

вполне удовлетворительна для не очень больших значений *z*, особенно для нижних слоев, толщина которых редко превосходит 100 м и которые являются предметом исследования микрометеорологии.

Условия во влажном воздухе. Вышеизложенный анализ относится к сухому воздуху. Решение становится более сложным для влажного воздуха, в особенности, когда имеет место вертикальное движение, вызывающее конденсацию. Если водяной пар в атмосфере ниже уровня насыщения, то уравнение адиабатического процесса во влажном воздухе мало отличается от уравнения для сухого воздуха и уравнение (1.17) заменяется уравнением

$$T = \operatorname{const} p^{\frac{AR}{c_p}}, \qquad (1.24)$$

где c_p' — удельная теплоемкость ненасыщенного влажного воздуха при постоянном давлении; численно она мало отличается от c_p , и для практических целей уравнения (1.17) и (1.24) можно считать идентичными.

Для целей микрометеорологии развитие полученных выше результатов для насыщенной атмосферы не является вопросом первой необходимости и обсуждаться нами не будет. Интересующиеся этим вопросом могут обратиться к соответствующим работам по динамической метеорологии ¹.

Важность адиабатического градиента. Прежде чем эти результаты применять к реальной атмосфере, должны быть тщательно рассмотрены отклонения от полученного выше критерия устойчивости. В исходных предпосылках имеется несколько слабых пунктов, наиболее существенными из которых являются предположения о том, что процесс происходит адиабатически. Если уравнение статики применимо, то это предполагает, что воздушная масса, которая находится в движении, должна быть мала, а ее движение медленное. С другой стороны, условия адиабатического изменения обычно требуют, чтобы движение массы было быстрым, а сама масса была большой; только в этом случае теплообменом с окружающей средой можно было бы пренебречь. Отсюда следует, что атмосфера вблизи поверхности достигает адиабатического градиента только при весьма специфических условиях. Условия, принятые в качестве исходных в предыдущем анализе, имеют место при небе, покрытом плотными облаками, и при умеренном или сильном ветре. При этих условиях температура поверхности не отличается существенно от температуры воздуха вблизи поверхности почвы, так как облачный покров предохраняет поверхность как от поступления, так и от потери больших количеств радиации. Сильный ветер полностью перемешивает воздух в нижних слоях, в результате чего не наблюдается больших разностей температуры между смежными слоями воздуха (это доказано наблюдениями над разностью температур на различных уровнях в нижнем слое атмосферы).

Вертикальное движение воздуха при этих условиях вызывается не различием плотностей, а динамической неустойчивостью. Отсюда

¹ Haurwitz. Dynamic Meleorology. Ch. Ill, Mc Graw-Hill, 1941.

следует, что в этих условиях градиент температуры по вертикали должен приближаться к адиабатическому, так как почти все условия предыдущего анализа выполняются.

Этот вывод имеет больщое значение, но его содержание требует тщательного рассмотрения. Он означает, что если область атмосферы, имеющая однородную по горизонтали температуру, подвержена механическому перемешиванию, то результатом этого явится уменьшение внутреннего вертикального градиента температуры до адиабатического. Согласно этой теории, никакое движение не может привести к установлению меньших температурных градиентов и изотермическая атмосфера не может быть достигнута перемешиванием. Самое большее, к чему может привести такое перемешивание, — это создание атмосферы равной потенциальной температуры. В этом смысле состояние однородной потенциальной температуры должно рассматриваться как основное состояние равновесия. Конечный эффект турбулентного перемешивания состоит в уменьшении до минимума всяких отклонений от этого состояния.

Эти выводы, однако, предполагают, что применение результатов предыдущих параграфов, основанных на положениях статики, допустимо к атмосфере, которая находится в состоянии беспорядочного движения, и что *apriori* не очевидно.

Нельзя утверждать на этой стадии рассмотрения, что в нижних слоях атмосферы, в облачную ветреную ночь средняя потенциальная температура постоянна с высотой. Эти положения имеют большое значение в теоретической разработке проблемы переноса тепла в атмосфере. В твердом теле или несжимаемой жидкости (т. е. в такой, в которой элемент жидкости не изменяет своей плотности при движении) поток тепла через некоторую горизонтальную поверхность пропорционален градиенту температуры на рассматриваемом уровне, и законы термодинамики обеспечивают стремление градиента температуры к выравниванию. Сжатие в атмосфере должно приниматься во внимание, за исключением процессов теплопроводности, для очень небольших слоев; в этом случае при переносе тепла необходимо учитывать градиент потенциальной температуры; при перемешивании атмосфера стремится к выравниванию потенциальной температуры.

В проведенном выше рассмотрении вопроса не учитывалось влияние водяного пара и радиации. Для свободной атмосферы этот добавочный эффект должен быть принят во внимание. В верхней части атмосферы, называемой стратосферой, наблюдается изотермическое распределение температуры или небольшое повышение ее с высотой, т. е. такое состояние атмосферы, которое объясняется равновесием между излучением и поглощением радиации. Ниже этого слоя и в областях над пограничным слоем атмосферы средний градиент температуры приблизительно постоянен, составляет около $\frac{2}{3}$ от сухого адиабатического градиента. Полного объяснения причины такого распределения еще нет. Слои воздуха у поверхности земли характеризуются широким диапазоном значений температурного градиента.

Наибольшие градиенты имеют место в непосредственной близости от поверхности почвы, величины их существенно отличаются от величин в свободной атмосфере. В ясную погоду над коротко остриженным травяным покровом градиент температуры у поверхности земли в сотни и тысячи раз больше адиабатического. Это свойство объясняет многие характерные черты нижней атмосферы.

Важно отметить, что при этом анализе мы не рассматривали проблемы естественной конвекции, т. е. движения воздуха из-за его плавучести. Пока нет оснований утверждать, что вертикальное движение происходит самопроизвольно, если температурный градиент превосходит адиабатический. В дальнейшем предстоит рассмотреть систему в статическом равновесии, на которую накладываются небольшие перемещения, найти силы, которые действуют на объем в возмущенном состоянии, и, следовательно, условия для статической устойчивости системы. Как будет показано ниже (гл. 4), тонкий слой воздуха может сохранять большой температурный градиент без конвективного движения за счет влияния вязкости и проводимости. Эта проблема является одной из проблем динамической устойчивости атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paneth F. A. Sci. I. Roy. Coll. Sci., 6, 120. 1933.

2. Kaye G. W. C. and Laby T. H. Tables of Physical and chemical Constants. London, 1948.

 Основы динамической метеорологии. Под ред. Д. Л. Лайхтмана и М. И. Юдина. Гидрометеоиздат, Л., 1955.

4. Белинский В. А. Динамическая метеорология. Гостехиздат, М., 1950.

ГЛАВА 2

АТМОСФЕРА В ДВИЖЕНИИ (I). ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

2. 1. Общие сведения о движении вблизи поверхности земли

Атмосфера над достаточно большой площадью земного шара, в особенности в средних широтах, представляет собой отчетливовыраженную динамическую систему, в которой движение воздухаопределяется главным образом горизонтальными градиентами давления и температуры. Во многих случаях атмосферу можно рассматривать как несжимаемую и лишенную трения жидкость. Например, обычные оценки скорости ветра по полю давления, представленного на синоптической карте, основаны на предположении, что скорость движения воздуха устанавливается так, чтобы сохранялось равновесие градиента давления и силы, обусловленной вращением земли. Определеннаятаким образом скорость, известная как *геострофический ветер*, является удовлетворительным приближением к реальной скоростиветра на высотах между 500 и 1000 м над поверхностью земли.

В микрометеорологии, в отличие от синоптической метеорологии, ударение делается не столько на изменениях распределения давления, сколько на прямых или косвенных эффектах воздушных течений. И в задачах о воздушных течениях у самой земли градиент давления обычно можно рассматривать как постоянно действующую силу, полностью пренебрегая влиянием вращения земли. При таких условиях наиболее важными факторами являются трение и вертикальный градиент плотности. Положение здесь подобно тому, которое встречаетсяпри исследованиях в аэродинамических трубах. В последних устанавливается постоянное значение средней скорости воздуха с помощью воздушного винта или мотора, и внимание концентрируется наизменениях, имеющих место в поле скорости вблизи поверхности твердого тела.

При детальном исследовании воздушного потока атмосферу удобно разделить на ряд горизонтальных слоев (рис. 1).

В поверхностном пограничном слое, простирающемся не свыше 100 мнад поверхностью, влиянием вращения земли (кориолисовой силой) можно пренебречь по сравнению с влиянием самой поверхности. Обычно ветер в этой области непосредственно определяется градиентом давления большого масштаба, получаемого по синоптической карте. При некоторых обстоятельствах, однако, движение в поверхностном слое определяется влиянием локальных изменений плотности, не зависящих от основного поля давления, в результате чего в холмистой местности возникают местные (катабатические) ветры (гл. 7). Над нижним слоем расположен слой трения или планетарный пограничный слой, простирающийся примерно на километр над поверхностью земли. Он представляет собой переходную зону от возмущенного потока вблизи земли к сглаженному и лишенному трения потоку свободной атмосферы. В задаче о структуре ветра в этом слое учитывается не только градиент давления и кориолисова сила,

СВОБОДНАЯ АТМОСФЕРА



Рис. 1. Области различных типов движения в атмосфере.

но и результирующее влияние трения о земную поверхность. Геострофический ветер теоретически достигается между 500 и 1000 м, а выше, в свободной атмосфере, трением обычно можно пренебрегать, за исключением случаев, когда необходимо выполнять очень точные и детальные исследования.

При решении задач динамики наибольшие трудности (по различным причинам) связаны с проблемами приземного слоя. Во-первых, из-за близости границы ветер у поверхности обычно является турбулентным, его изучение относится к наиболее трудным вопросам динамики жидкости. Во-вторых, чрезвычайно большое разнообразие видов поверхности не позволяет строго математически определить нижнюю границу. Однако характерные особенности метеорологических задач и основной источник трудностей обусловлены тем, что в слое воздуха, соприкасающемся с почвой, часто имеют место большие суточные изменения вертикальных градиентов плотности, воздействующих сложным образом на характер потока.

Математическое описание движения жидкости. Несмотря на то, что все жидкости, включая в это понятие и газы, обладают некоторой степенью внутреннего трения, или вязкостью,

:26

удобно сначала рассмотреть предельный случай гипотетической идеальной жидкости, сделав для атмосферы еще дополнительно предположение о несжимаемости ее. В применении к такой жидкости некоторых фундаментальных законов механики состоит так называемая классическая гидродинамика, основанная Эйлером и Бернули. В ней используются два существенных принципа: 1) принцип сохранения массы, 2) второй закон Ньютона о том, что скорость изменения количества движения тела равна по величине и направлению движущей силе.

Первый из этих принципов ведет к уравнению неразрывности, которое для несжимаемой жидкости выражает линейную зависимость между градиентами составляющих скорости вдоль различных осей, или на векторном языке — равенство нулю дивергенции скорости.

Второй принцип приводит к эйлеровым уравнениям движения. При расчете ускорения частицы жидкости необходимо учесть, что за короткий промежуток времени изменяется не только скорость ее, но переносится и сама частица.

Члены в эйлеровых уравнениях, выражающие изменение количества движения частицы, имеют форму

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
 и т. п.,

где u, v, w — составляющие скорости соответственно вдоль осей *x*, *y*, и *z*, ρ — плотность, принимаемая за постоянную. Эти члены должны быть приравнены к силам, обусловленным градиентами давления $\left(\frac{\partial p}{\partial x}$ и т. п.) или внешними факторами, например, действием тяжести.

Решение типичных задач классической гидродинамики определяет скорость и давление, которые удовлетворяют трем уравнениям Эйлера, уравнению неразрывности и специальным (начальным или граничным) условиям в зависимости от исследуемого типа движения. Такие решения обычно вполне согласуются с наблюдениями в отдаленных от поверхности земли слоях атмосферы, как, например, в случае геострофического ветра. Учет вязкости заключается в добавлении к каждой из составляющих уравнения трех членов типа $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где μ — динамическая вязкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости выражаются следующим образом:

 $\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ $-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X$ ит.п.,

ействующие силы

где X представляет собой x-овую составляющую внешних сил, отнесенную к единице массы. Три уравнения в этой форме называются уравнениями движения Навье — Стокса.

Анализ различных членов уравнений позволяет выяснить сложные вопросы динамики жидкости. Группы членов в левой части уравнений, выражающих скорость изменения количества движения частицы жидкости, выделены отдельно, поскольку жидкость имеет массу или плотность, и соответственно этому называются инерционными членами. Они содержат квадраты или произведения неизвестных скоростей. Группы производных второго порядка в правой части уравнений (вязкие члены) отражают то обстоятельство, что жидкость обладает внутренним трением. Эти члены являются линейными. Полные уравнения, вместе с уравнением неразрывности, представляют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которая должна быть решена относительно трех неизвестных составляющих скоростей и давления.

Нелинейность полной системы уравнений обусловливает основные трудности, которые возникают при развитии теории движения жидкости. До сих пор не разработан математический аппарат для исследования нелинейных уравнений в частных производных второго порядка и в этом смысле уравнения Навье — Стокса являются неразрешимыми. Полученные точные решения относятся к некоторым ограниченным случаям очень малых скоростей. Однако нелинейность инерционных членов не препятствовала успешному развитию теории идеальной жидкости для одного специального случая. Если движение имеет характер, известный под названием безвихревого, то всегда имеется потенциал скоростей φ . Последний определяется не из уравнения движения, а из линейного уравнения в частных производных второго

порядка, называемого уравнением Лапласа, при условии, что $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$

(n - нормаль) обращается в нуль на границе. Введение потенциала скоростей или вместо него — функции тока ψ делает задачу о движении жидкости кинематической. После того как определено φ (или ψ) из уравнения Лапласа, уравнениями движения необходимо пользоваться только в тех случаях, когда требуется определить давление, и это возможно сделать, поскольку уравнения имеют первый интеграл. Примеры такого типа будут даны ниже в этой главе при рассмотрении воздушного потока над неровной поверхностью. При наличии вязкости безвихревое движение невозможно (стр. 55) и необходимо иметь дело с реальными скоростями и давлением, а отсюда и с уравнениями движения.

Естественно предположить, что для движения воздуха, ввиду малой вязкости газов, можно получить достаточно точное приближение, пренебрегая членами, обусловленными трением. К сожалению, это верно только для области атмосферы, удаленной от поверхности. Когда же имеет место сопротивление, как в случае движения вблизи земли, нельзя совершенно не учитывать вязкость. Так, из теории следует явно далекий от истины вывод о том, что тело, полностью погруженное в однородный установившийся поток идеальной жидкости, не встретит сопротивления, поскольку сила, определяемая разностью давления на поверхности, аннулируется ¹. Хотя вязкостью самой по себе нельзя объяснить, например, разрушительный эффект шторма, тем не менее косвенно она определяет сопротивление жидкости при изменении поля скорости вблизи твердого тела. Инерционные же члены могут быть опущены, когда скорость очень мала. Это имеет место, например, при движении под действием силы тяжести очень малой частицы, такой как пылинка или мелкая капля воды в тумане.

Решение линейных уравнений второго порядка, описывающих перемещение шара, было дано в 1851 г. Стоксом и получило название закона Стокса. Согласно этому закону, конечная скорость, достигаемая свободно падающим шариком небольшого размера, чрезвычайно мала, так что частица даже в воздухе может оставаться неограниченное время во взвешенном состоянии. Закон Стокса выполняется довольно строго для движения в воздухе, если диаметр шарика меньше $\frac{1}{10}$ мм, но совершенно несправедлив для больших тел, таких, например, как капли дождя.

В большинстве практических задач по динамике жидкости исследуется движение вблизи твердого тела со скоростями, величина которых такова, что необходимо сохранять инерционные члены. Неучет же вязкости ведет к нереальному выводу, что сопротивление равно нулю. Таким образом создается сложное положение, поскольку уравнения, в которых сохранены инерционные и вязкие члены, не могут быть решены.

Возникшие трудности были в значительной степени преодолены благодаря развитию Прандтлем, начиная с 1906 г., теории пограничного слоя. Было замечено, что в случаях, когда однородный поток воздуха протекал над неподвижной твердой стенкой, скорости, обращающиеся в нуль на самой поверхности, достигают значений, характерных для свободного потока уже на очень малых расстояниях от стенки. Иными словами, полное изменение скорости имеет место в очень тонком слое, примыкающем к поверхности. Таким образом влияние вязкости ограничено этим слоем, называемым пограничным слоем. Внутри данного слоя градиент скорости очень большой. Поскольку же сопротивление трения, или напряжения, на поверхности пропорционально произведению коэффициента вязкости на градиент скорости, то ясно, что даже жидкость с малой вязкостью, такая как воздух, может вызывать существенное трение при течении вдоль гладкой ровной поверхности. Используя это обстоятельство, Прандтль показал, как можно изменить уравнения Навье - Стокса, чтобы получить решение, хотя и трудоемкими, но несложными методами, а отсюда -- определить трение о поверхность, так же как и многие свойства потока воздуха.

¹ Так называемый парадокс Даламбера, кратко сформулированный Релеем в следующих словах: "В данной теории винт затопленного судна был бы бесполезен, но, вместе с тем, его функции не были бы необходимыми".

Выше была изложена очень упрощенная схема развития концепции пограничного слоя. В действительности же турбулентность в пограничном слое и влияние неровностей или шероховатостей поверхности делают неизбежными применения полуэмпирических методов. Тем не менее в этом направлении был сделан большой прогресс, были развиты многочисленные приложения к метеорологическим проблемам.

В свободной атмосфере движение воздуха не только по существу не зависит от вязкости, но с большой степенью точности может рассматриваться как безвихревое. Вихри не могут возникать внезапно в сплошной идеальной жидкости, ибо они обусловлены действием вязкости. Это обычно происходит только в непосредственной близости от твердого тела, в пограничном слое и в оставшихся следах твердого тела. Общая картина потока вблизи поверхности земли такова, что лишенный трения безвихревой поток свободной атмосферы становится у почвы вязким, вихревым и обычно сильно турбулизированным потоком.

Рассмотрим теперь особенности этого явления совместно с относящейся сюда математической теорией.

2. 2. Кинематика идеальных жидкостей

Ускорения. Рассмотрим прямоугольную систему координат Ох, Оу, Оz, зафиксированную в поле потока (система закрепляется на земле). Пусть u, v u w – составляющие скоростей малой частицы жидкости в момент времени t, так что $u = \frac{\partial x}{\partial t}, v = \frac{\partial y}{\partial t}, w = \frac{\partial z}{\partial t}$.

Поскольку u = u (x, y, z, t), то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} = = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$
 (2.1)

Это выражение представляет собой x-овую составляющую ускорения частицы с координатами x, y, z, t.

Аналогично этому у-овой и z-овой составляющими являются

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; \qquad (2.2)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}.$$
(2.3)

Физическая интерпретация этих выражений может быть следующая. Пусть P представляет собой точку x, y, z. Частица, которая была в P в момент времени t, будет находиться в $Q(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ в момент времени $t + \delta t$; так что мы делаем один шаг вперед во времени и другой — в пространстве. Первые члены в первой части уравнений (2.1) и (2.3) отражают первый шаг, тогда как второй шаг представлен остальными членами. Полученные выше выражения относятся к эйлеровой системе координат, в которой внимание направлено на все поле потока в некоторый данный момент. Альтернативный подход, при котором прослеживается история жизни типичной частицы, обычно приписывается. Лагранжу, хотя, согласно Лэмбу, этот метод также введен Эйлером. Силы. Рассмотрим малый элемент объема $\delta x \delta y \delta z$ (рис. 2).

 $\int_{a}^{z} \int_{a}^{b} \int_{a$

Рис. 2. Силы давления на элементарный объем.

Если p есть давление в центре левой стенки $\delta y \delta z$, то сила давления на поверхность будет $p \delta y \delta z$, при этом членами высшего порядкамалости пренебрегают. Сила давления на правую стенку $\delta y \delta z$ равна

$$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z$$

Отсюда результирующая сила давления в направлении х равна

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z.$$

Если X — x-овая составляющая некоторой внешней силы на единицу массы, то полной силой в направлении Ox является

$$\left(X_{\rho}-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z.$$

Уравнения. Поскольку масса элемента равна $\rho \delta x \delta y \delta z$, то согласно второму закону Ньютона

$$\left(X \rho - \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$
 б x б y б $z = р$ б x б y б $z \frac{du}{dt}$ и т. п.

или для всех трех составляющих

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$
(2.4)

31.

тде Y и Z — составляющие внешней силы на единицу массы в направлении соответственно у и z. Это — эйлеровы уравнения движения идеальной жидкости.

У равнение неразрывности. Эйлеровы уравнения выведены из второго закона движения Ньютона, согласно которому сила, необходимая для того, чтобы вызвать ускорение некоторого элемента жидкости, равна произведению ускорения на массу элемента. Если мы имеем дело не с твердым телом, а с элементарными объемами жидкости переменной плотности, то нужно привлечь еще второй физический принцип о сохранении массы.

Возвратимся к рис. 2. Количество жидкости, протекающее за время δt через левую стенку, равно $\rho u \delta y \delta z \delta t$ (пренебрегая при этом малыми величинами высшего порядка) и через правую стенку

$$\left[\rho u+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\right)\delta x\right]\delta y\delta z\delta t.$$

Отсюда результирующая масса, протекающая за время ôt, равна

$$-rac{\partial}{\partial x}(
ho u)\,\delta x\delta y\delta z\delta t$$

с подобными вкладами, обусловленными потоком через *другие стенки*. Таким образом, увеличение массы благодаря потоку через всю поверхность, ограничивающую данный объем за время δt , равно

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w\right)\right]\delta x\delta y\delta z\delta t.$$

Первоначальная масса в объеме равна р δx у δz , а увеличение ее за время δt составляет $\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \delta t$. Отсюда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho w\right) = 0.$$
(2.5)

Это можно записать как

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (2.6)$$

где $\frac{d}{dt}$ означает оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$
 (2.7)

Уравнения (2.5) и (2.6) называют уравнениями неразрывности. В однородной несжимаемой жидкости плотность везде одинакова, и уравнение (2.6) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (2.8)$$

т. е. дивергенция вектора скорости обращается в ноль.

Жидкость может быть, например, несжимаемой, но неоднородной, если плотность элемента не изменяется при движении, хотя

плотность от точки к точке изменяется. В этом случае $\frac{d\rho}{dt} = 0$, так что уравнение (2.8) все равно выполняется. Операцию (2.7) называют "дифференцированием вдоль движения жидкости" или "индивидуальной" производной.

Три уравнения движения и уравнение неразрывности являются основой классической гидродинамики. В математической физике задачи сводятся к одному или к нескольким дифференциальным уравнениям со специальными условиями, называемыми начальными или граничными условиями, которые делают задачу определенной. Обычно общее решение уравнения или системы уравнений не известно и, как правило, представляет небольшой интерес для практики, если бы даже и могло быть получено. Уравнений математической физики немного, но они имеют большую общность. Линейное уравнение 2-го порядка в частных производных, известное как уравнение Лапласа, встречается в теориях тяготения, электростатики, термического равновесия и движения жидкости. Соответствующие задачи различают главным образом по граничным условиям, которых столько же, сколько и задач, тогда как уравнения здесь одни и те же.

В динамике идеальной жидкости существенным граничным условием является то, что скорость жидкости в направлении, перпендикулярном к фиксированной твердой стенке, должна обращаться в нуль. Это указывает на то, что поверхность непроницаема для жидкости. Для *тангенциальной* составляющей скорости на поверхности не существует ограничений. Экспериментально установлено, что реальная, т. е. вязкая жидкость всегда прилипает к поверхности, так что тангенциальная скорость должна быть равной нулю в точках соприкосновения фиксированной границы и реальной жидкости. Это, вероятно, является наиболее важным различием между динамикой идеальной и динамикой вязкой жидкости.

Линии тока. Потенциал скорости. В задачах гидродинамики часто удобно чертить поле скорости так, чтобы можно было легко получить наглядное представление о направлении и величине скорости. Это осуществляется построением карты линий тока. Линии тока, или линии потока, определяются как кривые, которые в некоторый момент времени являются касательными к движению жидкости во всех ее точках. Жидкость не может пересечь линию тока. Трубка тока определяется как область пространства, ограниченная линиями тока.

Из этого определения видно, что линии тока должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$
(2.9)

Если линии тока сохраняют свой вид в течение всего времени, движение называют установившимся. В этом случае (но не в обратном) линии тока совпадают с действительными траекториями частиц жидкости.

З О. Г. Сеттон

Из уравнения (2.9) следует, что линии тока ортогональны к поверхностям, которые удовлетворяют уравнению

$$udx + vdv + wdz = 0. \tag{2.10}$$

Аналитическим условием существования таких поверхностей является

$$u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (2.11)$$

Если выражение

$$udx + vdy + wdz$$

есть полный дифференциал dq, так что

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
 (2.12)

то каждое из выражений

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.13)$$

цолжно тождественно исчезать, и уравнение (2.11) удовлетворяется. Функция φ называется потенциалом скоростей, а величины ξ , η , ζ , определяемые посредством (2.13), называются составляющими вихря. Когда $\xi = \eta = \zeta = 0$, движение называют безвихревым, и из определения φ следует, что если потенциал скоростей существует, то движение должно быть безвихревым.

Для несжимаемого движения в двух измерениях, когда w = 0,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$
 (2.14)

Отсюда уравнение неразрывности (2.8) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.15}$$

Это есть двухмерное уравнение Лапласа. Данное уравнение с условием, что градиент φ вдоль нормали обращается на твердой поверхности в нуль, определяет φ , а отсюда и поле скорости.

Функция тока. Уравнение (2.9) для линий тока в случае двухмерного движения приобретает вид

$$vdx - udy = 0. \tag{2.16}$$

Уравнение неразрывности (2.8) для двухмерного потока сводится к

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (-v)}{\partial y}$$

Отсюда следует, что левая часть уравнения (2.16) должна быть полным дифференциалом, например — $d\psi$, так что

$$vdx - udy = -\frac{\partial \psi}{\partial x}dx - \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

ИЛИ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Функция ψ называется функцией тока. Линии тока некоторого движения могут быть вычерчены, если придавать различные значения постоянной C в уравнении

$$\psi(x, y) = C.$$

Легко проверить, что ψ также удовлетворяет уравнению Лапласа (2.15), и поскольку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

то эквипотенциальные кривые $\varphi = \text{const}$ и линии тока $\psi = \text{const}$ ортогональны между собой. При решении задач для безвихревого потока функция тока может рассматриваться как альтернативная по отношению к потенциалу скорости потока.

Разность значений функции тока в двух точках представляет собой поток через линию, соединяющую точки. Это непосредственно следует из определения ψ ; если ds — элемент кривой и ϑ — угол между касательной и осью Ox, то поток равен

$$\int (u\sin\vartheta - v\cos\vartheta) \, ds = \int (udy - vdx) = \int d\psi = \psi_2 - \psi_1.$$

Это свойство может быть также использовано для определения функции тока, значение которой в точке *P* равно величине потока через линию *AP*, где *A* — некоторая зафиксированная точка на плоскости. Из-за этого свойства ψ иногда называют функцией потока.

Циркуляция и вихрь. В кинематике указывается, что движение твердого тела может быть разложено на две составляющие: поступательное и вращательное. В поступательном движении угловое смещение тела относительно фиксированных осей остается неизменным; тело не поворачивается вокруг собственного центра, но может описывать прямой или искривленный путь в пространстве.

При чисто вращательном движении тело изменяет свое угловое положение относительно фиксированных осей без изменения своего местоположения в целом.

В жидкости элементарный объем может свободно двигаться относительно независимого от него основного движения. При определении безвихревого движения для жидкости необходимо сосредоточить внимание на малой частице. Если частицы жидкости не имеют угловой скорости относительно их центров, то движение

3*

в целом безвихревое. Таким образом, можно говорить без логических противоречий о безвихревом потоке жидкости вокруг цилиндра или некоторого другого тела с искривленной поверхностью.

Циркуляция вдоль замкнутой кривой в жидкости определяется как линейный интеграл от касательной составляющей скорости по кривой. В формуле

$$\Gamma = \int_{C} q \cos \alpha \, ds$$

 Γ — циркуляция, C — замкнутая кривая, q — результирующая скорость в некоторой точке, α — угол между направлением q и элементом кривой ds в точке.

Если кривая *С* представляет собой малый прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, то для двухмерного потока

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy = 2\zeta dS,$$

где ζ — представляет собой вихрь, определение которого дано на стр. 34 уравнением (2.13), а dS — элемент площади. Отсюда вихрь может быть определен как половина предельной величины отношения циркуляции к площади малого элемента.

Стоксом было доказано, что если малая частица жидкости, у которой три главных момента относительно центра тяжести равны между собой, была внезапно как бы заморожена и отделена от главного тела жидкости, то она начнет двигаться чисто поступательно тогда, и только тогда, когда udx + vdy + wdz есть полный дифференциал. Этим объясняется то, что движение, удовлетворяющее данному условию, называется безвихревым.

Если имеется вихрь, то тело должно вращаться подобно волчку и его движение будет как вращательным, так и поступательным. Составляющие вихря определяют угловую скорость частицы относительно его центра.

Математическая теория вихревого движения идеальной жидкости была значительно развита Гельмгольцем, Кельвиным, Кирхгофом и др. Эти ученые рассматривали вихревые линии, определяемые как линии, направление которых всюду совпадает с мгновенными осями вращения соответствующих частиц жидкости. Они, кроме того, рассматривали вихревые нити (жидкость внутри объема, ограниченного вихревыми линиями, которые проведены через бесконечно малую замкнутую кривую), а также вихревые трубки и слои. Данные названия и определения наводят на мысль, что вращательное движение часто ограничено относительно малыми областями пространства, занятого жидкостью, и это является характерной чертой классической теории.

Вихри, используемые математиками, являются идеализацией тех, что встречаются в природе. В атмосфере имеется множество примеров отчетливо выраженных вихрей. Наиболее простыми, возможно, являются обычные кольца и малые "ветровые вихри", образующиеся на углах улиц в ветреный день. К большему масштабу вихрей принадлежат "пыльные бури" на песчаных площадях и "тропические штормы" в низких широтах.

Математический вихрь идеальной жидкости имеет одну характерную особенность. Он неизменяем, т. е. он не может быть создан или уничтожен силами инерции и давления. Это часто называют принципом сохранения безвихревого движения; некоторое движение, начавшееся после покоя в идеальной жидкости без поверхностей разрыва, должно оставаться всегда безвихревым. Когда имеются поверхности, отделяющие определенные массы в жидкости, вихри могут встречаться, но только в виде вихревых слоев. Поверхности разрыва, на которых нормальная составляющая скорости непрерывна, а касательная составляющая различна с обеих сторон, могут рассматриваться как тонкие вихревые слои, образованные бесконечными вихревыми нитями, обусловливающими разрыв касательной составляющей.¹ В реальной жидкости вихри возникают главным образом вследствие внутреннего трения, и поскольку влияние вязкости наиболее сильно проявляется в непосредственной близости к твердому телу, то в атмосфере вихри наиболее часто встречаются в слоях воздуха, примыкающих к поверхности земли. Постепенное уменьшение скорости потока воздуха до нуля на границе означает, что частицы воздуха задерживаются в этих слоях и вынуждены вращаться вокруг собственного центра. На больших высотах, где влияние земли мало, движение воздуха приближается по своему характеру к безвихревому течению.

Ниже в этой главе будет показано, что вязкость определяет не только возникновение вихрей, но также их распространение и полное уничтожение в основной области потока.

2. З. Воздушный поток над неровной местностью

Идея применения теории идеального потока к важной метеорологической задаче о движении воздуха над неровной местностью принадлежит Покельсу [1]. Ниже приводится решение этой задачи.

Общий метод, на котором основано его теоретическое исследование, заключается в следующем: если характер линий тока может быть установлен из гидродинамических уравнений, то относительно одной из этих линий тока можно предположить, что она относится к поверхности твердого тела. Это является следствием того, что идеальная жидкость может свободно двигаться вдоль такой поверхности и эту линию тока можно интерпретировать как твердую границу без какого-либо видоизменения потока.

Чтобы определить особенности линий тока на поверхности с неровным профилем, рассмотрим двухмерный безвихревой поток воз-

¹ Ramsey A. S. A treatise on Hydromechanics. Part II, G. Bell. 1947, crp. 239-241.

духа, который на больших высотах совершенно горизонтален и имеет постоянную скорость V. На уровне земли поток должен приспособиться к поверхности, состоящей из последовательных параллельных гребней и впадин, простирающихся бесконечно далеко в поперечном к ветру направлении.

Пусть ось х горизонтальна, а ось z вертикальна.

Если ф потенциал скоростей, то составляющими скорости являются

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$
 (2.17)

Для установившихся условий уравнение неразрывности (2.5) запишется в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$
 (2.18)

Предполагается, что плотность р изменяется только по вертикали. Отсюда из (2.17) и (2.18)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$
(2.19)

Для дальнейшего упрощения предполагается, что температура воздуха постоянна во всех точках, так что плотность уменьшается с высотой в соответствии с законом

$$\rho = \rho_0 e^{-qz}$$

где q — постоянная (см. стр. 16).

Уравнение (2.19) теперь приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = q \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Решением этого уравнения, согласно которому u = V, w = 0 при $z \to \infty$, является

$$\varphi = V \left[x - b \cos m x e^{-nz} \right],$$

откуда

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V \left[1 + bm \sin mx e^{-nz} \right],$$
$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = V bn \cos mx e^{-nz},$$

при этом

$$m^{2} - n^{2} = qn,$$

$$n = r - \frac{q}{2},$$

$$r^{2} = m^{2} + \frac{1}{4}q^{2}.$$

До сих пор наземный контур не был определен. Предполагается, что поверхность совпадает с одной из линий тока, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} = \frac{bn \cos mx e^{-nz}}{1 + bn \sin mx e^{-nz}}.$$

В результате интегрирования получим

$$e^{-nz}\sin mx = -\frac{m}{bqn} + Be^{qz},$$

где B — параметр линий тока. Одна из линий тока выбирается в качестве контура поверхности почвы, причем так, чтобы точка x = z = 0лежала на кривой профиля; для этих значений $B = \frac{m}{ban}$, так что

$$\frac{bn}{m}\sin mxe^{-rz} = \frac{1}{q} \left[e^{\frac{qz}{2}} - e^{\frac{-qz}{2}} \right].$$
(2.20)

Пусть q имеет порядок 10^{-4} м⁻¹, когда z выражается в метрах, а максимум высоты неровностей таков, что

$$\left(rac{1}{2}\,qz
ight)^2$$
 \ll 1 или z \ll $rac{2}{q}$ $=$ $2\cdot10^4$ м

(этому условию вполне удовлетворяют такие неровности, как песчаные дюны или обычные пологие склоны жилых мест). Тогда в разложении экспоненциальных функций в правой части (2.20) можно пренебречь членами $\left(\frac{qz}{2}\right)^2$ и более высокими степенями.

Отсюда приближенно уравнением профиля будет

$$z=\frac{bn}{m}\sin mxe^{-rz}$$
.

Эта кривая может соответствовать некоторой последовательности гребней. Если при этом через λ обозначить "длину волны" или расстояние между вершинами, то

$$m=\frac{2\pi}{\lambda}$$
.

Морганс [2] использовал этот результат для построения теоретической кривой, соответствующей равным вертикальным скоростям над последовательно расположенными горными хребтами высотой 2300 м и расстоянием между вершинами, равным 24 км. При этих значениях b = 1270, $n = 2,066 \cdot 10^{-4}$, $m = 2,618 \cdot 10^{-4}$, $q = 1,25 \cdot 10^{-5}$ м⁻¹.

Из теоретического решения можно сделать следующие выводы

1. Максимум скорости ветра наблюдается на вершине, а минимум скорости на дне долины, если в обоих случаях направление ветра строго горизонтальное.

2. Вдоль вертикали, пересекающей середину склона, горизонтальная скорость постоянна и равна скорости на больших высотах V.

3. Вдоль вертикали, пересекающей вершину, скорость ветра, значение которой максимально на вершине, постепенно уменьшается до ее значений на бесконечности V. На дне долины ветер постепенно увеличивается с высотой до его конечного значения V.

4. Вертикальная скорость, которая везде уменьшается с высотой, достигает максимального значения на середине склона, где

$$w = V \operatorname{tg} \alpha$$
,

а α — угол, характеризующий крутизну склона в этой точке. На больших склонах имеют место большие вертикальные скорости.

5. Кривые восходящих и нисходящих скоростей симметричны относительно вертикали, пересекающей вершину.

Анализ, выполненный Покельсом, приводит к естественному выводу, что наибольшая горизонтальная скорость достигается на вершине. Кроме этого, из него следует еще вывод, который на первый взгляд кажется неожиданным, что максимум вертикальной скорости достигается на середине наветренной стороны неровности.

В общем теория потока идеальной жидкости вблизи твердого тела находится в должном соответствии с наблюдениями в точках наветренной стороны. Однако она обычно совершенно не выполняется на подветренной стороне, поскольку в ней не учитывается образование возмущений. Согласованности с наблюдениями можно поэтому ожидать только на наветренной стороне холмов.

Идрак [3] использовал воздушные змеи для измерения вертикальных скоростей над отлогими склонами холмов (максимальный наклон 25°) высотой около 100 м над уровнем равнины, а также над неровностями высотой около 10 м. В обоих случаях имело место значительное сходство между теоретическим и наблюденным распределениями вертикальных скоростей на наветренной стороне. Как и предсказывалось теорией, вертикальные скорости приближались к нулю на вершине и на равнине, а максимума достигали на крутой части склона. Здесь также имело место хорошее согласование между измеренными и вычисленными максимумами вертикальной скорости. Формула Покельса при V = 10 м/сек. и $\alpha = 25^{\circ}$ дает $w_{\rm max} = 4,7$ м/сек., а кривые Идрака показывают, что в точках наибольшего наклона при скорости ветра 10 м/сек. в свободном потоке были измерены вертикальные токи, достигающие 4 м/сек. Однако поле вертикальных скоростей оказалось не симметричным относительно вертикали, проведенной через вершину, как это следует из теоретического решения, и на подветренной стороне преобладало состояние неупорядоченного движения.

Кошмидер оценил вертикальные скорости по наблюдениям, произведенным с помощью планеров, над Росситенскими дюнами. Он обнаружил заметное расхождение с теорией Покельса, заключающейся в том, что над вершинами вертикальные скорости сначала увеличи-
ваются с высотой, а затем уменьшаются. Кох [5] путем фотографирования малых клубов дыма обнаружил, что области максимума вертикальных скоростей встречаются на середине склона, однако в общем наблюдения показывают значительно более сложное поле течения, чем это следует из простой теории безвихревого потока. Для более подробного ознакомления с экспериментальными работами рекомендуем читателю оригинальные статьи или обзор, данный Моргансом [2].

Из изложенного выше следует, что, несмотря на неучет вязкости и жесткое предположение об отсутствии вихрей в течении, теория идеальной жидкости дает приемлемую картину потока вблизи низких холмов, на их наветренной стороне. Эта картина. однако. в значительной

степени качественная и не может быть применена к точному количественному анализу. Ошибка наиболее явно обнаруживается на подветренной стороне холмов; это результат неучета вязкости, а отсюда и вихрей, поскольку движение позади крутой поверхности тела не является безвихревым.

Источники и стоки. Течение над крутым обрывом. Приведенные выше примеры показывают как можно применить потенциал скоростей для определения характерных особенностей потока идеальной



Рис. 3. Течение вблизи источника.

жидкости вблизи твердого тела, используя при этом положение о том, что некоторая линия тока может рассматриваться как граничная поверхность. Подобным образом может быть использована функция тока, если применить известные представления об источниках и стоках.

Источником является точка, в которую, согласно предположению, втекает жидкость с равномерной скоростью, а сток — точка, в которой жидкость исчезает. Полагается, что жидкость вытекает из источника равномерно по всем направлениям вдоль радиальных линий. Пусть Q есть мощность источника, т. е. скорость, с которой протекает жидкость. Для источника постоянной мошности

$$Q = 2\pi r u_r$$

где $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ — есть расстояние от источника и u_r — радиальная скорость.

Линии тока являются прямыми, радиально направленными от источника, а по определению функция ψ — постоянная вдоль этих линий. Для некоторой радиальной линии *ОА* можно принять, что $\psi = 0$ (рис. 3). Если *В* некая точка на линии тока, образующей

угол ϑ с *OA*, то поток через дугу *AB* равен $(r \vartheta) u_r = \left(\frac{Q}{2\pi}\right) \vartheta$. Отсюда

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \,\vartheta$$

является функцией тока для ОВ.

Следует заметить, что источник представляет собой особую точку поля, т. е. уравнения движения не удовлетворяются в этой точке. Если источник расположен на линии тока, принятой за граничную поверхность, и характеристики выбранной линии тока удовлетворяют гидродинамическим уравнениям, то источник приобретает простой математический смысл, определяющий влияние тела на поток.

Глауэртом¹ был предложен излагаемый ниже метод исследования потока воздуха, принимаемого за идеальную жидкость, над ровной местностью и над крутым обрывом. Предположим, что источник мощностью Q помещен в однородный поток, движущийся со скоростью — U параллельно оси x. Очевидно, что для этого случая функцией тока является

$$\psi = -Uz + \frac{Q}{2\pi} \vartheta.$$

Она представляет собой сумму функций тока для двух раздельных потоков. Если принять Q = 2Uh, то выражение для ψ приобретет вид

$$\psi = U\left(\frac{h\vartheta}{\pi} - z\right).$$

Особенности потока можно определить, положив $\psi = \text{const}$, причем для постоянной принимается ряд значений (например, 0, 1, 2, 3...), а U и h задаются соответствующими численными значениями. Результаты вычислений представлены на рис. 4.

Линия тока $\psi = 0$ состоит из положительной части Ox и кривой параболической формы; характеристики потока симметричны относительно $\psi = 0$. Предполагается, что эта линия представляет собой часть поверхности земли, состоящей из ровного участка и крутого обрыва. Источник находится внутри линии "обрыва" и впредь его можно не учитывать, поскольку в задаче рассматривается внешний поток по отношению к $\psi = 0$.

Для обрыва

$$r\sin\vartheta = z = \frac{h\vartheta}{\pi} \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi).$$

Отсюда

$$h=\pi r\,\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\,.$$

¹ Glauert H. The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory. Cambridge, 1948, crp. 22.

Таким образом, h определяет максимальную высоту обрыва когда r увеличивается и $\vartheta \rightarrow \pi$. Компоненты скорости выражаются посредством:

 $u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -U \left[1 - \frac{hx}{\pi \left(x^2 + y^2 \right)} \right],$



Рис. 4. Течение над обрывом (по Глауэрту).

У подножья обрыва u = w = 0 (это точка, в которой линии тока симметрично расходятся). Отсюда координатами основания обрыва являются $x = \frac{h}{\pi}$, z = 0.

Распределение вертикальных скоростей определяется формулой

$$\varpi = \frac{Uh}{\pi} \frac{\sin \vartheta}{r}.$$

На обрыве

$$h=\pi r=\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$$

и таким образом

$$w = U \frac{\sin^2 \vartheta}{\vartheta} \, .$$

Вертикальная скорость достигает максимального значения w = 0,725 U в точке $\vartheta = 66,8^{\circ}, z = 0,37 h$. Из данного вывода следует, что полеты планеров возможны вблизи этой точки на склоне такого обрыва. Часто наблюдаются подобные полеты чаек над скалистым берегом.

Решение этого типа, хотя и относится к задачам, представляющим нечто искусственное, поскольку здесь не учитывается вязкость, имеет все же важные применения. В последние годы привлекалось внимание к задаче об использовании естественного ветра в качестве источника электрической энергии в дополнение к углю или энергии воды. Этот метод обычно состоит в сооружении ветровых турбин вблизи вершины холма с целью использования наибольших горизонтальных скоростей, вызванных сгущением линий тока над гребнем. Теория идеальной жидкости дает первое приближение к решению задачи о нахождении увеличения горизонтальной скорости, вызванной возвышенностью.

Волны на подветренной стороне гор. Планеристы часто сообщают о наличии системы стоячих волн на подветренной стороне гор. Поэтому для аэронавтики имеет важное значение вопрос об исследовании условий, при которых могут возникать такие волны. Соответствующая задача для рек исследовалась Кельвином в 1886 г. Кельвин получил выражение для деформации свободной поверхности, обусловленной влиянием малых синусоидальных поверхностей дна. Эта работа и последующее ее обобщение рассмотрены Лембом¹.

В атмосферных задачах нет свободной поверхности и главный интерес заключается в исследовании волн, которые имеют большую амплитуду в нижних слоях. Лира [6] и Квини [7] показали, что при однородном по высоте ветре на подветренной стороне препятствий имеют место волновые движения. Но в макрометеорологическом масштабе такими волнами можно пренебречь.

Скорер [8] рассмотрел задачу об обтекании препятствий в случае ветра, изменяющегося с высотой, при устойчивом (положительном) градиенте потенциальной температуры. Согласно его выводам, если масштабы таковы, что влиянием вращения земли можно пренебречь, вблизи земли на подветренной стороне препятствий могут наблюдаться волны с большой амплитудой. Такие волновые поверхности обязаны своему существованию, главным образом изменению ветра с высотой.

Анализ Скорера ограничен рассмотрением нетурбулентной идеальной жидкости. Его основной вывод заключается в том, что волны большой амплитуды могут возникать только вблизи земли на подветренной стороне холмов, если величина

$$\sqrt{\frac{g\beta}{V^2} - \frac{1}{V} \frac{d^2v}{dz^2}}$$

уменьшается кверху, где $\beta = \frac{d \ln \theta}{dz}$, θ — потенциальная температура, V — невозмущенный ветер.

¹ Гидродинамика, пер. с 6-го англ. изд. Гостехиздат, 1947, § 242-246. 44 Такие волны экспоненциально затухают кверху и являются существенно устойчивыми. Они встречаются только, если имеется препятствие и если нет трения, и будут существовать бесконечно долго в нисходящем потоке на подветренной стороне гор. Читателю рекомендуется оригинальная статья автора для ознакомления с диаграммами, иллюстрирующими поток воздуха 1) для изолированного гребня на ровной местности и 2) для склона, переходящего в равнину, при условиях, благоприятных для образования подветренных волн. В этих примерах длина волны равна нескольким километрам, и диаграммы показывают в качественном отношении теоретическую схему действительного явления над неровной местностью.

2. 4. Ветры на вращающейся земле

При исследованиях движения воздуха нужно принимать во внимание вращение земли везде, за исключением очень тонкого слоя вблизи поверхности. Вследствие этого появляется так называемая сила Кориолиса, или отклоняющая сила, величина которой легко определяется. Здесь не приводится вывод выражения для этой силы, читатель может найти подробный анализ в учебниках по динамической метеорологии¹.

Рассмотрим систему фиксированных осей на земле с Ox, направленной по горизонтали на восток, Oy — по горизонтали на север и Oz — вертикально вверх. Если ω — угловая скорость вращения земли и φ — широта, то частица в атмосфере подвержена силе, величина которой на единицу массы имеет компоненты:

$$- 2\omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi) параллельную Ox - 2\omega u \sin \varphi параллельную Oy 2 \omega u \cos \varphi параллельную Oz$$
 (2.21)

где u, v, w — составляющие скорости соответственно вдоль осей x, y, z. Направление вектора отклоняющей силы параллельно плоскости экватора и перпендикулярно направлению движения частицы.

Уравнения движения поэтому приобретают вид:

$$\frac{du}{dt} + 2\omega \left(w \cos \varphi - v \sin \varphi \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\omega u \sin \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y$$

$$\frac{dw}{dt} - 2\omega u \cos \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + Z$$
(2.22)

где X, Y и Z — составляющие сил, не связанные ни с давлением, ни с силой тяжести.

¹ Брент Д. Физическая и динамическая метеорология. Гидрометеоиздат, Л. — М., 1938 (гл. VIII).

Геострофический ветер. В свободной атмосфере вертикальная составляющая движения воздуха *w* обычно значительно меньше горизонтальных составляющих. Поэтому можно получить важное приближение к движению воздуха на достаточно больших высотах, положив, что ветер на этих уровнях горизонтален и не зависит от трения. Тогда:

 $\frac{du}{dt} - 2\omega v \sin \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X$ $\frac{dv}{dt} + 2\omega u \sin \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y$ (2.23)

Эти уравнения показывают, что воздух приобретает такое ускорение, чтобы установилось равновесие между градиентом давления, отклоняющей силой и внешними силами. Для стационарной или



Рис. 5. Геострофический ветер (северное полушарие).

очень медленно движущейся барической системы движеможно рассматривать ние как установившееся $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ $=\frac{\partial v}{\partial t}=0$). Если в дополнение к этому все силы, кроме тех, которые вызваны вращением земли и полем давления, отсутствуют, то сила ветра может быть просто определена градиенту по давления, снятому с синоптической карты.

Из решения, полученного для ускорения вдоль касательной и нормали к

траектории, установлено, что обычно касательное ускорение, или изменение скорости по ветру, мало по сравнению с центростремительным, или нормальным ускорением. Сила, возникающая вследствие нормального ускорения, направлена к центру кривизны и при сделанных предположениях должна быть уравновешена силой Кориолиса и градиентом давления. Сила Кориолиса ориентирована под прямым углом к траектории, и поэтому она имеет то же направление, что и ускорение. Чтобы установилось равновесие, градиент давления должен быть также направлен вдоль той же линии, а это означает, что движение должно происходить вдоль изобары.

Ветер, удовлетворяющий этому условию равновесия, называется градиентным ветром. Когда изобары являются прямолинейными или слегка искривлены так, что центростремительным ускорением можно пренебречь, то результирующим движением будет геострофический ветер. Геострофический ветер, обозначающийся симво-

лом G, есть "скорость свободного потока", или "скорость на бесконечности", для задач, касающихся поверхностных слоев (рис. 5).

Приняв для удобства $2\omega \sin \varphi = \lambda$, имеем по определению

G = градиент давления $\div \lambda \rho$. (2.24) Направление G совпадает с изобарой, т. е. φ направлено по нормали к градиенту давления.

Если изобара сильно искривлена так, что центробежным ускорением нельзя пренебречь, то уравнение (2.24) нужно заменить на

$$(V-G)=\pm\frac{V^2}{r},$$

где V — градиентный ветер, а r — радиус кривизны траектории.

Выполненный анализ подтверждает, что для двухмерного уравнения движения наиболее естественной формой является схема, в которой составляющие образуют вектор u + iv, где $i = \sqrt{-1}$. Уравнения (2.23) тогда сводятся к одному

$$\frac{d}{dt}(u+iv)+i\lambda(u+iv)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+i\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Для геострофического равновесия

$$G = u + iv = \frac{i}{\lambda \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Последнее соотнощение показывает, что вектор скорости перпендикулярен к вектору градиента давления. Поскольку направление оси Ox можно выбрать произвольно, расположим Ox вдоль изобары, так чтобы $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$ представляло собой полный градиент. давления. а

$$G = u = -\frac{1}{\lambda \rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$
.

Векторным уравнением движения тогда будет

$$i\lambda \left(V - G \right) = F, \tag{2.25}$$

где V — действительный ветер на некоторой высоте, а F представляет собой добавочные силы, обусловливающие, например, движение вдоль искривленной траектории или внутреннее трение.

2. 5. Вязкость и ее влияние

Вследствие молекулярной структуры все жидкости, будь то собственно жидкость или газы, обладают в большей или меньшей степени сопротивлением к деформации, или вязкостью. Это свойство легко обнаруживается при медленном движении вблизи твердой границы, где движение жидкости перестает быть однородным и происходит сдвиг, т. е. частицы скользят одна по другой в слоях, параллельных поверхности. Идеальная жидкость в классической гидродинамике есть некоторая идеализированная субстанция, неспособная вызвать даже малое срезывающее усилие. В такой жидкости не может происходить диссипации энергии, обусловленной внутренним трением. Кроме того, как уже объяснялось, на границе твердого тела в идеальной жидкости не возникает тангенциальной силы. Поэтому такая жидкость может свободно двигаться по поверхности без диссипации энергии. С другой стороны, реальная жидкость благодаря молекулярному притяжению обладает свойством прилипать к твердой границе. Часть кинетической энергии ее движения необратимо превращается в тепло и этим усиливает энергию молекулярного движения.



Рис. 6. Течение между двумя параллельными плоскостями.

Вязкость в газе. Анализ вязкости в газе можно производить двумя путями:

1. Ньютоновский метод. Жидкость рассматривается как сплошная среда, и вязкость вводится посредством постулирования системы сил для учета характерных явлений.

2. Метод кинетической теории газов. Жидкость рассматривается как совокупность молекул, благодаря взаимодействию которых возникает эффект внутреннего трения.

Ньютоновский анализ вязкости. Пусть некоторый объем газа расположен между двумя большими параллельными плоскостями, одна из которых движется относительно другой (рис. 6). По причине, которая будет ясна позже, следует предположить, что скорость движущейся плоскости очень мала, или мало расстояние между плоскостями Z. При этих обстоятельствах в результате наблюдений установлено, что относительное движение твердых поверхностей заставляет перемещаться весь объем газа параллельно границам. На границах газ прилипает к поверхностям и, если u = u(z) — скорость газа относительно закрепленной плоскости на расстоянии z от нее, то:

> u = U на плоскости z = Z, u = 0 на плоскости z = 0,

где U – скорость движущейся, плоскости относительно фиксирован-

ной плоскости. Наблюдения также показывают, что при таком расположении скорость газа между плоскостями изменяется линейно, т. е.

$$u = U \frac{z}{Z}, \qquad (2.26)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{U}{Z} \,. \tag{2.27}$$

Выражение (2.26) называется профилем скорости, а (2.27) — градиентом скорости.

Чтобы поддерживать движение, необходима сила, пропорциональная $\frac{U}{Z}$ на единицу площади поверхности и действующая параллельно плоскости, т. е. по касательной к потоку. Этой силой является *срезывающее усилие*. Срезывающее усилие на единицу площади пропорционально градиенту скорости.

Это соотношение может быть уточнено посредством введения коэффициента пропорциональности, характеризующего данный газ и называемого динамической вязкостью. В общем случае

$$\tau = \mu \, \frac{du}{dz} \,, \tag{2.28}$$

где τ — срезывающее усилие на единицу площади, а μ не зависит от u и z.

В задачах о движении жидкости часто удобно использовать вместо и кинематическую вязкость у, определяемую как

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$
,

где р — плотность жидкости. Размерность μ равна $ML^{-1}T^{-1}$, а $\nu - L^2T^{-1}$.

При обычных давлениях динамическая вязкость зависит только от природы и температуры газа. В табл. З приведено несколько типичных значений для и и у.

Таблица З

Вязкость сухого воздуха при различных температурах¹

Температура, °С	0	20	40
μг см ⁻¹ сек1	$1,71 \cdot 10^{-4}$	1,81.10-4	1,90.10-4
$v cm^2 cek.^{-1}$	0,132	0,150	0,169

Во многих задачах, особенно касающихся турбулентного потока, кинематическая вязкость входит только в дробной степени, например $v^{\frac{1}{4}}$. В этих случаях относительно малыми изменениями в зави-

¹ Значение у соответствует нормальному атмосферному давлению на поверхности земли.

симости от температуры можно пренебречь и рассматривать v как совершенно постоянную величину. Попутно следует заметить, что кинематическая вязкость воздуха значительно больше, чем воды. В общих словах, как будет видно ниже, это означает, что некоторые особые характеристики движения, такие как вихрь, $\partial u \phi \phi y H \partial u$ *руют* благодаря действию вязкости значительно быстрее в воздухе, чем в воде. Это свойство вязкости легче понять, основываясь на кинетической теории газа, излагаемой в следующем разделе.

Вязкость как свойство совокупности молекул. Известно, что газ не является сплошной средой, а представляет собой совокупность молекул, которые во многих задачах можно рассматривать как отдельные тела, имеющие определенную массу и размер. Для дальнейшего упрощения молекулы газа можно принимать в виде упругих шариков, движущихся (при обычных температурах) с очень большой скоростью и непрерывно сталкивающихся друг с другом. Это основное положение кинетической теории газов. Оно успешно применялось для объяснения ряда свойств, таких как вязкость, посредством введения для газа простой механической модели, подобно тому как это было описано выше.

Молекулы азота, кислорода и аргона — трех основных составляющих воздуха — имеют диаметр 10^{-8} см. При обычных температурах и давлении средняя скорость этих молекул около $4 \cdot 10^4$ см сек.⁻¹ и они перемещаются между столкновениями на расстоянии примерно 10^{-5} см (*путь свободного пробега*). Каждая молекула претерпевает около 10^9 столкновений в секунду, и свойство вязкости выступает как прямое следствие этого непрерывного перемешивания.

Простейший анализ такого поля выполнил К. Максвелл в 1860 г. Он предположил, что молекулы газа движутся большей частью сложным беспорядочным образом с равными по всем направлениям средними значениями составляющих скорости. Это движение может быть названо "тепловым", обычно связанным с температурой, которая измеряет энергию движения. Предположим, что газ медленно движется между двумя плоскостями (рис. 6), а дополнительное движение, или течение, молекулярного поля в заданном направлении является настолько слабым, что оно не влияет на распределение теплового движения вдоль координатных осей. Тогда молекулы будут обладать не только количеством движения, соответствующим собственному беспорядочному движению, независящему от их положения в поле; они будут также обладать в небольшой степени упорядоченным количеством движения в направлении общего течения, зависящего от положения молекул относительно границ.

Предположим, что достигнуто установившееся состояние для макроскопического движения и что между границами профиль скорости определяется как u = u(z). Пусть далее молекула на плоскости z = z обладает упорядоченным количеством движения mu(z), соответствующим этому уровню. В результате теплового движения она будет двигаться со средней длиной свободного пробега l,

сохраняя количество движения до того момента, когда произойдет столкновение. Молекула, которая покинет плоскость z = z, достигнет плоскости z = z + i без потери количества движения. В результате через слой газа толщиной i будет происходить перенос упорядоченного количества движения, равного

$$mu(z+l)-mu(z)\approx ml\frac{du}{dz}.$$

Число молекул, пересекающих плоскость под прямым углом, в среднем равно одной трети от полного числа, поскольку все направления движения равновероятны. Если N — число молекул в единице объема и c — средняя молекулярная скорость, то количество движения, переносимое через единицу площади слоя за единицу времени, равно $\frac{1}{3}$ Nmcl $\frac{du}{dz}$.

Поскольку макроскопическое движение является установившимся, то количество движения передается любым слоем следующему с такой же скоростью, с какой оно поступает, так что на единицу движущейся площади плоскости действует сила — τ , а на единицу площади неподвижной плоскости $+\tau$.

Тогда

$$\tau = \frac{1}{3} Nmcl \frac{du}{dz}$$
.

Но Nm = р (р – плотность газа), поэтому

$$\tau = \frac{1}{3} \rho c l \, \frac{du}{dz} \,. \tag{2.29}$$

Сравнивая это с уравнением (2.28), получим

$$\mu = \frac{1}{3} \rho c l \tag{2.30}$$

или

4*

$$v = \frac{1}{3}cl. \tag{2.31}$$

Таким образом, получен важный вывод, согласно которому вязкость выражается посредством средней молекулярной скорости и длины свободного пробега. Проведенный выше анализ крайне схематичен, но использование более строгих приемов приводит к таким же результатам. И если для примера предположение о сохранении количества движения при свободном пробеге заменить более точным предположением (так называемым "постоянством" молекулярных скоростей), то в результате немного изменится только числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ ¹.

¹ Более подробные сведения о данном вопросе читатель может получить в работах Джинса и Леба по кинетической теории газов.

Необходимо строго оговорить. что подразумевается под понятиями, используемыми в данном анализе. Влияние непрекрашающихся столкновений молекул проявляется, во-первых, в имеющем место непрерывном переносе количества движения из областей с большими макроскопическими скоростями в области с малыми скоростями. Степень переноса количества движения через единицу площади плоской поверхности в жидкости выражается произведением вязкости на градиент скорости. В этом смысле вязкость обусловливает диффузию количества движения. Во-вторых, здесь нет чистого переноса молекул через плоскость, параллельную направлению потока (в противном случае газ не сохранял бы однородную плотность). Однако несмотря на это, наличие градиента макроскопической скорости приводит к тому, что благодаря беспорядочному движению осуществляется перенос количества движения через сплошной поперечный поток. Наконец, читатель должен был заметить важную роль, которую играет свободный пробег в анализе Максвелла. Своболный пробег может рассматриваться либо как расстояние. на котором молекула сохраняет свой запас количества движения, либо как грубая оценка толщины слоя газа, в котором проявляется действие вязкости. Из гл. 3 будет видно, что эти соображения приобретают важное значение в широком классе задач, относящихся к турбулентному движению.

2. 6. Уравнения движения вязкой жидкости

В предыдущем параграфе были рассмотрены сравнительно простые примеры течения между параллельными плоскостями. Влияние вязкости здесь проявлялось посредством обычного тангенциального напряжения. В общем случае может быть девять таких составляющих напряжения на поверхности элемента объема жидкости (рис. 7). Три составляющие напряжения на некоторую боковую сторону, ориентированные параллельно осям, обозначены простыми индексами. Так, на стороне x = const, параллельной плоскости (y, z), имеют место напряжения: τ_{xx} — нормальные к плоскости, τ_{xy} и τ_{xz} — касательные к плоскости.

Первый индекс указывает сторону, на которую действует напряжение, а второй индекс обозначает направление действия напряжения. Напряжение можно рассматривать как положительное, а давление — как огрицательное. В идеальной жидкости

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p,$$

а касательные напряжения равны нулю по определению.

Соотношения между составляющими. Предположим, что элемент объема жидкости центрирован в точке (x, y, z). Его ребра длиной δx , δy , δz параллельны осям. Если рассматривать поверхность, нормальную к оси x, то напряжения на единицу площади в точке (x, y, z) равны τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} . На двух соответствующих боковых сторонах элемента объема напряжения равны:

$$\tau_{xx} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) \,\delta x, \, \tau_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) \,\delta x,$$
$$\tau_{xz} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz}) \,\delta x$$

в центрах боковой стороны, расположенной ближе к началу координат. Подобные же выражения, но с заменой знака минус на плюс



Рис. 7. Вязкое напряжение в элементе жидкости.

представляют напряжения в центрах боковых сторон, удаленных от начала координат. Результирующими этих напряжений являются силы, соответственно параллельные осям Ox, Oy, Oz,

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx}\right)\delta x\delta y\delta z, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xy}\right)\delta x\delta y\delta z, \\ \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz}\right)\delta x\delta y\delta z \end{array}$$

и пары сил относительно Оу, Ог

 $-\tau_{xz}\delta x\delta y\delta z, \quad \tau_{xy}\delta x\delta y\delta z.$

Две другие боковые стороны могут быть рассмотрены аналогичным образом. При этом получим подобные силы, параллельные осям, и пары сил:

$$\begin{split} &-\tau_{yz} \delta x \delta y \delta z, \quad \tau_{yz} \delta x \delta y \delta z, \\ &-\tau_{zy} \delta x \delta y \delta z, \quad \tau_{zx} \delta x \delta y \delta z. \end{split}$$

Разложение на компоненты относительно координатных осей приводит к трем уравнениям движения:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$
(2.32)

где, как и прежде, X, Y и Z — составляющие внешних сил на единицу массы.

Если определить моменты относительно линий, проходящих через (x, y, z) параллельно осям, то получим

 $(\tau_{yz} - \tau_{zy}) \delta x \delta y \delta z + (члены с более высокими степенями <math>\delta x \delta y \delta z) = 0.$ Отсюда, когда $\delta x \delta y \delta z \to 0$,

$$\begin{split} & \tau_{yz} = \tau_{zy} \; , \\ & \tau_{zx} = \tau_{xz} \; , \\ & \tau_{xy} = \tau_{yx} \; , \end{split}$$

так что девять первоначальных составляющих напряжения сводятся к шести. Уравнения (2.32) полностью выражают движение вязкой жидкости.

У равнения. Уравнения вида (2.32) не могут быть приняты для практического использования, поскольку они содержат шесть неизвестных напряжений наряду с тремя неизвестными скоростями. Напряжения в элементе жидкости, очевидно, не зависят от поступательного перемещения или вращения элемента как целого, а обусловлены некоторым кручением, т. е. относительным смещением отдельных частей элемента. Наиболее общее смещение элемента жидкости состоит из растяжения по направлениям, параллельным некоторой системе координатных осей, поступательного перемещения и вращения. Состояние напряжения зависит только от растяжения.

Подробный анализ (длительный и сложный) показывает, что шесть напряжений могут быть выражены линейно с помощью так называемых основных напряжений. Предполагается, что разность между этими напряжениями и их средним значением *p* представляет собой линейную функцию от скорости смещения элемента жидкости.¹ В окончательном виде вязкое напряжение может быть

¹ За подробным анализом читателю рекомендуется обратиться к уже цитированной книге Лемба, гл. XI.

выражено посредством давления, вязкости и градиентов скорости так, что нормальные напряжения примут вид:

$$\tau_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

(2.33)

а касательные напряжения:

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$
(2.33')

Если жидкость несжимаема, член — $\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$ исчезает. Подстановка в (2.32) приводит к уравнениям Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости:

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$
(2.34)

Если у = 0, эти уравнения сводятся к эйлеровским (2.4).

2. 7. Течение вблизи плоской поверхности

Выше отмечалась нелинейность уравнений Навье — Стокса и вытекающие отсюда последствия. Если вектор скорости определяется по потенциалу и таким образом поток принимается безвихревым, то нетрудно показать, что вследствие этого тождественно исчезают все члены в уравнении Навье — Стокса, которые умножаются на μ^1 (это можно интерпретировать как наличие равновесия сил трения, подобно тому как это имеет место в твердом теле). Решение, полученное для потока идеальной жидкости, удовлетворяет также уравнениям Навье — Стокса. Однако для такого движения исчезновение членов с производными второго порядка означает, что

¹ Так, если φ — потенциал скоростей, $\nabla^2 \varphi = 0$, где ∇^2 — оператор Лапласа, равный $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Отсюда ∇^2 grad $\varphi =$ grad $\nabla^2 \varphi$ и таким образом

 $\nabla^2 u = \nabla^2 v = \nabla^2 w = 0.$

порядок уравнений уменьшается, а это приводит к трудностям в случаях, когда необходимо удовлетворять условиям на твердой границе. В потоке идеальной жидкости движение полностью определено условием, что на границе нормальная составляющая скорости равна нулю. Вследствие же отсутствия членов второго порядка, определяющих трение, касательная составляющая не может исчезнуть, кроме частного случая, когда вся масса жидкости находится в покое относительно поверхности. Отсюда, несмотря на тождественное исчезновение членов, определяющих трение, уравнения Навье — Стокса должны представлять движение, в котором частицы жидкости могут вращаться, т. е. вихревое движение.

Ниже приводятся простые, но важные примеры вязкого потока вблизи плоской поверхности, для которых можно найти точное решение уравнений Навье — Стокса благодаря тому, что по условиям задачи нелинейные инерционные члены тождественно равны нулю.

Поток Куэтта. Предположим, что пространство между двумя параллельными плоскими границами z=0, z=Z>0 заполнено однородной по плотности жидкостью. Пусть верхняя граница равномерно движется в направлении x, а нижняя граница неподвижна. Если далее предположить, что воздух движется равномерно в плоскостях, параллельных границам, то v=w=0. Из уравнения неразрывности $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, поэтому u=u(z). Уравнения Навье — Стокса тогда приобретают вид:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$(2.35)$$

Поскольку инерционные члены равны нулю и так как u не зависит от x, то градиент давления должен быть постоянным. Отсюда из уравнения (2.35)

$$u = \frac{1}{2\mu} z^2 \frac{\partial p}{\partial x} + Az + B,$$

где A и B — постоянные, определяемые на основании граничных условий u = 0 при z = 0, u = U при z = Z.

Искомым решением является

$$u = U\frac{z}{Z} + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z(z-Z).$$
(2.36)

Срезывающее усилие в некоторой точке есть

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du}{dz} = \frac{\mu U}{Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2z - Z), \qquad (2.37)$$

а напряжение трения на единицу площади нижней границы равно

$$\left(\mu \frac{du}{dz}\right)_{z=0} = \frac{\mu U}{Z} - \frac{1}{2} Z\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$
(2.38)

При движении Куэтта $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и срезывающее усилие не зависит от расстояния от границы. Это усилие можно записать в форме

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du}{dz} = \rho U^2 \left(\frac{\nu}{UZ}\right). \tag{2.39}$$

Безразмерная величина <u>UZ</u> называется *числом Рейнольдса* для. движения и обозначается символом Re. Тогда

$$\tau_{zx} = \operatorname{Re}^{-1} \rho U^2. \tag{2.40}$$

Смысл этой записи станет понятным позже.

Диффузия вихря. В предыдущем примере предполагалось, что имеет место установившееся равномерное движение над некоторой плоскостью, параллельной границам.

Предположим, что ограничения, связанные с установившимся потоком, сняты. Уравнения (2.35) тогда заменятся следующими:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (2.41)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Эти уравнения удовлетворяются подстановкой p == const, и тогда-

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad (2.42)$$

поскольку $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Уравнение (2.42) соответствует линейному потоку тепла в теле или диффузии в газе (уравнение Фикка).

Предположим, что отыскивается решение уравнения (2.42) при условиях:

$$u = U$$
 для всех z , когда $t = 0$
 $u = 0$ для $z = 0$, когда $t > 0$ (2.43)

Эта задача относится к жидкости, находившейся до некоторого момента времени (t=0) в установившемся и равномерном движении со скоростью U, а затем (t>0) подвергшейся торможению неподвижной плоскостью бесконечной протяженности. Необходимо определить характер влияния неподвижной плоскости на движение жидкости.

В математическом отношении подобная задача встречается в теории теплопроводности, когда одна из сторон полубесконечного тела, первоначально имевшего везде одинаковую температуру, затем поддерживается при нулевой температуре (гл. 4). Решением задачи является

$$\frac{u}{U} = \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{vt}}, \qquad (2.44)$$

где

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\vartheta^{2}} d\vartheta$$

интеграл вероятности.

Это решение удовлетворяет начальным и граничным условиям для t = 0, $\frac{u}{tt} = 1$ и для z = 0, t > 0, u = erf(0) = 0.

Можно показать, что это решение единственное, т. е. нет друтой функции, удовлетворяющей уравнению, а также начальным и траничным условиям. Из (2.44) следует, что когда t неограниченно возрастет, $u \rightarrow 0$ для конечных z, так что в итоге напряжение трения на границе приводит к покою всю массу жидкости.

Вихрь потока по определению равен

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{U}{2\sqrt{\pi vt}} e^{\frac{-z^2}{4vt}}.$$
 (2.45)

Выражение справа является известным решением, представляющим распространение по всему телу теплоты, первоначально сконцентрированной на плоскости z = 0. Если рассматривать плоскость z = 0 как вихревую плоскость, то уравнение (2.45) показывает, что вихрь диффундирует благодаря вязкости по всему телу, точно так же, как диффундирует тепло. Таким образом, жидкость, в которой вначале не было завихрений, приобретает вихри вследствие сопротивления на плоскости z = 0. Это сопротивление обязано исключительно вязкости. С другой стороны, когда $t \to \infty$, вихри везде уничтожаются, что происходит опять-таки в силу действия вязкости. Таким образом, вязкость приводит и к зарождению и к уничтожению вихрей.

Из теоретического анализа следует, что за некоторое конечное время вихрь распространяется по всей жидкости. Верхнюю границу слоя Z, в котором имеют место завихрения, можно определить как высоту, на которой η уменьшается до некоторой малой доли, например $\frac{1}{f}$, своего максимального значения (относящегося к z = 0). Установлено, что значения Z ко времени t определяются посредством формулы

$$Z = 2 \sqrt{vt \ln f}$$

Отсюда следует, что толщина слоя, в котором распространится вихрь, имеет порядок $\sqrt[n]{vt}$. Этот вывод можно также получить из чисто "размерных" соотношений.

При рассмотрении данных результатов необходимо отметить одно важное ограничение. Выше предполагалось, что течение происходит в параллельных плоскостях, так что v = w = 0 и нет пересечения потоков, кроме движения молекул. Движение этого типа, называемое ламинарным, может установиться только при некоторых особых условиях. Одним из таких условий является то, что скорость везде мала. Если эти условия не выполняются, движение становится гораздо более сложным и нельзя предполагать, что инерционные члены исчезают.

Чисто ламинарное движение сравнительно редко встречается в атмосфере, но это состояние может быть достигнуто в потоке вблизи поверхности земли при особых условиях, которые отнюдь не редко встречаются. Они будут описаны ниже.

2. 8. Теория ламинарного пограничного слоя

Следует заметить, что аналогия между распространением вихря в жидкости и теплопроводностью в твердом теле вовсе не поверхностная. Физические условия, возникающие при движении вблизи



Рис. 8. Ламинарный пограничный слой над плоской поверхностью.

твердой границы, можно значительно легче понять, если рассмотреть повыщение температуры в жидкости вблизи нагретой поверхности. В этот вопрос была внесена ясность работами Прандтля, которому принадлежит концепция и ранее развитые теории пограничного слоя. Допустим, что в потоке холодной жидкости помешено нагретое тело. Если скорость потока мала, тепло распространяется во всех направлениях и воздействует на большой объем жидкости, но если течение быстрое, то прогреется только сравнительно тонкий слой жидкости вблизи тела. В гидродинамических задачах, если в первоначально безвихревом потоке скорость мала, завихренность вызванная вязкостью, будет обнаруживаться на больших расстояниях от тела. В быстрых же течениях вихри сосредоточатся в тонком слое жидкости, непосредственно примыкающем к поверхности, а поток, удаленный от тела, будет оставаться безвихревым. Эти выводы подтверждены многочисленными экспериментами в гидродинамических трубах. Они показывают, как можно на основании качественного анализа уравнений Навье — Стокса получить очень важные результаты относительно течения жидкости вблизи твердой поверх-

ности, предположив, что вязкость очень мала или, более точно, что число Рейнольдса очень велико.

Динамическое подобие и число Рейнольдса. Поскольку нельзя управлять естественными ветрами, то многие экспериментальные исследования в механике жидкости производились на моделях. При этом первым очевидным требованием является то, чтобы характер изучаемого движения ничем, кроме масштаба, не отличался от характера движения модели.

Геометрическое подобие между двумя системами означает, что одна из них может совпасть со второй при определенном изменении единицы длины; динамическое подобие означает, что при соответствующих изменениях основных единиц (например, массы, длины и времени) уравнения движения и граничные условия для одной системы могут быть приведены к таковым для другой. Для этого имеется простое аналитическое условие.

Рассмотрим жидкость однородной плотности, в которой внешние силы, такие как сила тяжести, вызывают некоторое гидростатическое давление, от которого отсчитывается действительное давление. При движении такой жидкости действуют три типа сил, выраженных по-средством:

1) инерционных членов $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$, $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u^2}{\partial x}$ и т. п., 2) вязких членов $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т. п.,

3) членов, содержащих градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x}$, и т. п.

Для двух динамически подобных движений отношение сил, представленных этими членами, должно быть одинаковым для обоих движений. Однако в силу того, что в уравнении эти силы уравновешиваются, достаточно рассмотреть только отношения двух сил указанного типа. В качестве последних выбирают силы инерции и трения.

Пусть U — некоторая заданная скорость, а l — характерная длина. Инерционные члены содержат $\frac{\rho U^2}{l}$, а вязкие члены — $\frac{\mu U}{l^2}$. Их отношение равно безразмерной величине $\frac{\rho U l}{\mu} = \frac{U l}{\nu}$, называемой числом Рейнольдса. Таким образом, необходимым условием динамического подобия двух движений, когда системы геометрически подобны, является равенство чисел Рейнольдса и одинаковые граничные условия. Это основной принцип, относящийся ко всем исследованиям с моделями в аэродинамических трубах.

Приведенные выше соотношения можно рассматривать и по-иному. Для некоторого заданного движения число Рейнольдса указывает на преобладание инерционных или вязких эффектов; если число Рейнольдса мало (например, меньше единицы), характер течения определяется главным образом вязкостью, а очень большие числа Рейнольдса (например, десятки или сотни тысяч) означают, что инерционные эффекты значительно важнее вязких. Для иллюстрации сказанного рассмотрим течение воздуха с умеренной скоростью¹. Примем за I некоторый масштаб длины тела, например, его диаметр. Если в качестве заданной скорости взята скорость воздуха на больших расстояниях от тела, то число Рейнольдса будет велико. Если же скорость потока воздуха измеряется очень близко к поверхности, число Рейнольдса будет мало. В общем случае это означает, что влияние вязкости будет в основном ощущаться в очень близких к телу слоях воздуха и оно будет совсем слабым в свободном потоке.

Важность числа Рейнольдса в аэродинамических задачах может быть видна из весьма общих результатов, полученных Рэлеем. Силы, действующие в потоке на помещенное в него тело, зависят от 1) плотности и вязкости жидкости, 2) скорости потока, 3) размера, формы и положения тела. Для тел с подобными формами и положениями, если размер их *l*, из анализа размерности следует формула Рэлея для аэродинамической силы.

Сила
$$\sim \rho U^2 l^2 \operatorname{Re}^n$$
, (2.46)

где U — скорость возмущенного потока относительно тела и n — безразмерное число, которое может быть найдено только с помощью точного анализа или эксперимента. Составляющая аэродинамической силы, параллельная направлению невозмущенного потока, называется сопротивлением или напряжением. Для этой силы соотношение Рэлея обычно записывается в следующей форме:

сопротивление
$$=$$
 $\frac{1}{2}$ $ho U^2 l^2 C_D$,

где $C_D = \text{const Re}^n - \kappa oэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом напряжения. Точное решение, иллюстрирующее теорему Рэлея для срезывающего усилия на единицу площади в движении Куэтта [уравнение (2.40)], дает$

$$\tau_{zx} = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{2}{\text{Re}} \,.$$

В этом примере

$$C_D = \frac{2}{\text{Re}}, \quad n = -1$$
 (2.47)

Теорема Рэлея показывает, что для несжимаемого движения характер течения вокруг погруженного тела полностью определяется числом Рейнольдса, которое выступает здесь как основной параметр движения жидкости.

Уравнения движения в пограничном слое. Прандтлевский анализ движения вблизи твердой границы основан на установленном в опытах факте, что в жидкости с малой вязкостью, на-

¹ Ограничение умеренной скоростью, т. е. скоростью значительно ниже той, с которой распространяются звуковые волны в воздухе, необходимо с целью исключения эффектов сжимаемости.

пример в воздухе, влияние трения существенно только в очень тонком слое, примыкающем к границе. В этом слое градиент скорости должен быть большим, поскольку переход от нулевой скорости относительно границы к скорости свободного потока осуществляется на протяжении малой толщи жидкости. Вследствие же малой вязкости инерционные и вязкие члены в уравнениях Навье—Стокса могут иметь одинаковый порядок величин для тонкого слоя со значительным градиентом скорости. Вне пограничного слоя жидкость может рассматриваться как идеальная, движущаяся с равномерной скоростью при известном поле давления.

Сущность метода состоит в исследовании порядка величины различных членов уравнения движения и неразрывности в слое толщиной δ , которая предполагается малой. Для двухмерного движения за граничную поверхность принимается плоскость z = 0. Течение осуществляется в направлении x. Удобно использовать некоторые безразмерные переменные ξ , ζ , τ .

Если U есть заданная скорость (обычно скорость свободного потока) и l — характерная длина в направлении x (например, длина поверхности по направлению ветра), то новые переменные определяются как

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta}, \quad \tau = \frac{U}{l}t.$$

Пограничный слой $0 \leqslant z \leqslant \delta$ определяется теперь посредством $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$.

Уравнения движения и уравнение неразрывности приобретают форму:

$$\frac{1}{l} \left(U \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{l}{\delta} w \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{v}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{v}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} , (2.48)$$

$$\frac{1}{l} \left(U \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{l}{\delta} w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) = -\frac{1}{\rho \delta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{v}{l^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{v}{\delta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} , (2.49)$$

$$\frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0, \qquad (2.50)$$

причем u = w = 0 при $\zeta = 0$; u = U, w = 0 для $\zeta > 1$.

Положим, что u, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ имеют **О** (1) и что большие ускорения исключаются так, что $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U}{l} \frac{\partial u}{\partial \tau}$ также **О** (1). Из уравнения (2.50) следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = O\left(\frac{\delta}{l}\right).$$

Поскольку *и* изменяется от нуля до *U* в интервале $0 \ll \zeta \ll 1$, то $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$ должны быть *O* (1). Отсюда в уравнении (2.48) все инерционные члены имеют одинаковый порядок величины.

Возвратимся снова к вязким членам в уравнении (2.48). Если и и б малы, но таковы, что $\frac{\gamma}{\delta^2}$ имеет порядок O(1) и $\frac{\gamma}{l^2}$ мало, точленами $\frac{\gamma}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ можно пренебречь и поэтому их можно опустить... Член $\left(\frac{\gamma}{\delta^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$, как и инерционные члены, имеет O(1) и должень быть оставлен. Типичный инерционный член $\frac{u}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi}$ и вязкий член $\frac{v}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$ таким образом равны, и поскольку u пропорционально U, отсюда следует, что

$$\delta^2 = \operatorname{const} \frac{\nu l}{U}$$

или

$$\frac{\partial}{l} = \operatorname{const} \sqrt{\frac{v}{Ul}} = \operatorname{const} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Re}}},$$
 (2.51)

где Re — число Рейнольдса, а постоянная имеет порядок единицы. Этот результат представляет большое значение для последующего развития теории.

Уравнение (2.49) теперь сводится к

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = O\left(\frac{U^2 \delta^2}{l^2}\right)$$

 $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=O(\delta),$

что свидетельствует о пренебрежимо малом значении изменения давления по направлению, перпендикулярному к стенке. Таким образом, давление остается постоянным вдоль некоторой нормали к поверхности и поэтому определяется посредством уравнения для потокаидеальной жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (z \ge \delta). \tag{2.52}$$

Уравнениями движения и неразрывности в пограничном слое, вы-

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ (z \sqrt{-v})$$
(2.53)

Здесь $\delta = O\left(\sqrt{\frac{\gamma}{IU}}\right).$

Эти уравнения являются уравнениями Прандтля.

или

2. 9. Применение теории пограничного слоя к потоку над плоской поверхностью

Исследование трения воздуха в непосредственной близости к поверхности земли (поверхность предполагается плоская) представляет одну из основных задач микрометеорологии. Ниже эта задача будет рассмотрена для ламинарного движения с помощью метода, который, хотя и не строго, позволяет получить практически достаточное приближение к точному решению уравнений Прандтля. Он не требует сложных вычислений, присущих строгим исследованиям.



Рис. 9. Применение теоремы о количестве движения к пограничному слою.

При рассмотрении задач пограничного слоя сразу же возникает затруднение, связанное с точным определением "толщины" пограничного слоя δ . На самой поверхности u = w = 0. На верхней же границе слоя u должно непрерывно приближаться к U, а $\frac{\partial u}{\partial z}$ обращаться в нуль. В математических исследованиях такие условия обычно не могут быть удовлетворены при некотором конечном значении z. Эта трудность преодолевается благодаря тому, что для данного конечного значения δ требуется (т. е. при $z = \delta$), чтобы uбыло равно U с некоторой желаемой степенью точности (скажем, 10,1 или 0,1%). Для точных аналитических работ вводятся различные определения, например, так называемая "толщина вытеснения" δ_1 , выражаемая как

$$\delta_1 = \frac{1}{U} \int_0^\infty (U-u) \, dz,$$

тде интегрирование ведется вдоль нормали к пограничному слою. Эта величина определяет степень смещения линий тока вверх вблизи поверхности в невозмущенном потоке. Рассмотрим плоскость AA, перпендикулярную к поверхности z = 0. Количество жидкости, пересекающее элемент объема с единичной шириной и высотой dz в единицу времени, равно риdz (рис. 9). Эта масса до того, как она достигла пограничного слоя, двигалась с невозмущенной скоростью U, и поэтому уменьшение количества движения равно рu(U-u) dz. Полное уменьшение количества движения в единицу времени равно

$$\rho\int_{0}^{\infty} u(U-u)\,dz \approx \int_{0}^{\delta} u(U-u)\,dz.$$

Эта скорость уменьшения количества движения должна быть равна суммарному сопротивлению трения на поверхности в точке А. Отсюда

$$\int_{0}^{x} \tau_0 \, dx = \rho \int_{0}^{\delta} u \left(U - u \right) \, dz$$

или

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u \left(U - u \right) dz,$$

где τ_0 — напряжение трения на поверхности, отнесенное к единице площади. Предположим, что профиль скорости в пограничном слое известен, так что

$$u = Uf\left(\frac{z}{\delta}\right) = Uf(\zeta).$$

Отсюда

$$\rho \int_{0}^{\delta} u (U-u) dz = \rho U^{2} \delta \int_{0}^{1} (f-f^{2}) d\zeta.$$

При грубом предположении относительно профиля скорости, а именно, что он является линейным в пограничном слое или

$$f(\zeta) = \zeta$$
, если $0 \leq \zeta \leq 1$,
 $f(\zeta) = 1$, если $\zeta > 1$,

получим

$$\int_{0}^{1} (f-f^{2}) d\zeta = \int_{0}^{1} (\zeta-\zeta^{2}) d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Тогда уменьшение количества движения равно

$$\rho \frac{U^{2\delta}}{6}$$

5 О. Г. Сеттон

Напряжение трения на поверхности, по определению, равно

так что

$$\frac{\nabla U}{\delta} = \frac{U^2}{6} = \frac{d\delta}{dx} \; .$$

Отсюда

$$\delta = 2 \sqrt{\frac{3 \times x}{U}} \approx 3,464 \sqrt{\frac{1}{U}}.$$

Из этого выражения может быть найдена толщина вытеснения:

$$\delta_1 = \frac{1}{U} \int_0^\infty (U-u) \, dz = \delta \int_0^1 (1-f) \, d\zeta = \frac{1}{2} \, \delta.$$

Отсюда

$$\delta_1 \approx 1,732 \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{U}} = \frac{1,732x}{V \,\overline{\text{Re}}} \,. \tag{2.54}$$

Напряжение трения на поверхности равно

$$\tau_{0} = \frac{\mu U}{\delta} = \frac{0.289 \rho U^{2}}{\sqrt{U \frac{x}{\gamma}}} = \frac{0.289 \rho U^{2}}{V \overline{\text{Re}}}$$
(2.55)

и полное сопротивление от x=0 до x=l

$$\int_{0}^{l} \tau_0 dx = 0,577 U^2 l \sqrt{\frac{v}{Ul}}.$$

Найденное приближенное решение можно сопоставить с точным решением, полученным Блазиусом [9], который рассматривал уравнения

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

И

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

при граничных условиях: u = w = 0 при z = 0, u = U, вдоль x = 0и когда $z \to \infty$.

Эти уравнения относятся к установившемуся течению над плоской поверхностью при отсутствии градиента давления. Согласно полученному решению

$$\delta_1 = 1,72 \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{U}},$$

$$\tau_0 = \frac{0,332\rho U^2}{\sqrt{Re}}.$$

Если сравнить эти выражения с (2.54) и (2.55), то, несмотря на грубое предположение о линейном профиле, видно хорошее численное согласование. Предлагались и другие приближения, которые давали удовлетворительные результаты. Лемб, например, использовал профиль в форме синусоидальной функции; применялись также полиномы третьей и четвертой степеней. Изложение этих результатов дано в работе Гольдштейна¹.

Основное значение полученного выше решения заключается не только в хорошем согласовании числовых факторов (которые, в случае линейного профиля, в известной степени случайны), но в самом использованном методе. Как можно было видеть в данной задаче, для определения потока количества движения требуется только знание профиля скорости, а это имеет большое значение для микрометеорологии. Выполнить прямое измерение напряжения трения у земли не легко и часто необходимы косвенные методы, такие, например, как приведенные выше, для того чтобы определить значение этой величины.

Интегральное условие Кармана. Изложенный выше метод был использован Карманом [10] в целях получения общего соотношения для течения в пограничном слое. Соотношение Кармана может быть выведено следующим образом из уравнений пограничного слоя. Пусть u = f(z) при условии, что u = 0 для z = 0, и u = U для $z = \delta$. Интегрирование первого уравнения (2.53) и использованные уравнения неразрывности дают

$$\int_{0}^{\circ} \rho \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dz + \int_{0}^{\circ} \rho u \, \frac{\partial u}{\partial x} \, dz + [\rho w u]_{0}^{\delta} + \int_{0}^{\circ} \rho u \, \frac{\partial u}{\partial x} \, dz = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} + \left[\mu \, \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{0}^{\delta} \, .$$

цалее

$$\int_{0}^{\circ} \rho \frac{\partial u^{2}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{\circ} \rho u^{2} dz - \frac{\partial \delta}{\partial x} \left[\rho u^{2} \right]_{0}^{\delta} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{\circ} \rho u^{2} dz - \rho U^{2} \frac{\partial \delta}{\partial x} dz$$

Член $[\rho uw]_0^{\delta}$ исчезает при z = 0, так что

$$U\left[\rho w\right]_{0}^{\delta} = U \int_{0}^{0} \rho \frac{\partial w}{\partial z} dz = -U \int_{0}^{0} \rho \frac{\partial u}{\partial x} dz =$$
$$= -U \frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{\delta} \rho u dz + U \frac{\partial \delta}{\partial x} \left[\rho u\right]_{0}^{\delta} = -U \frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{\delta} \rho u dz + \rho U^{2} \frac{\partial \delta}{\partial x}.$$

Срезывающее усилие $\mu \frac{\partial u}{\partial z}$ равно τ_0 при z = 0 и исчезает при $z = \delta$. Отсюда окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{0}^{\delta}\rho u\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{0}^{\delta}\rho u\,(u-U)\,dz = -\,\delta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_{0}. \quad (2.56)$$

¹ Гольдштейн С. Современное состояние гидромеханики вязкой жидкости. Т. 1. ИИЛ, М., 1948.

 5^*

Это общее интегральное соотношение Кармана. Из него видно, что для установившегося движения при отсутствии градиента давления

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{0}^{\delta}\rho u\left(U-u\right)dz=\tau_{0}.$$

В более общем случае уравнение (2.56) должно рассматриваться как соотношение, которое для установившегося движения определяет δ как функцию x, если известны при этом профиль скорости и градиент давления.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Pockels F. C. Ann. Physik (4), IV, 459, 1901.
- 2. Morgans W. R. Aeronaut. Research Committee, R. and M. No 1456, London, 1931.
- 3. Idrac P. Etude sur les conditions d'ascendance du vent favorable au vol à voile, Mém. office natl. météorol. France, 1923.

- Koschmeider H. Z. F. M., 235, 1925.
 Koch H. Veröffentl. Forschungs. Inst. R, R. g., 1928.
 Lyra G. Z. angew. Math. u. Mech., 23, No 1, 1943.
 Queney P. Univ. Chicago, Dept. Meteorol. Misc. Rept., No 23, 1947; Am. Meteorol. Soc. Bull., 29, 16, 1948.
- 8. Scorer R S. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc, 75, 41, 1949.

- 9. Blasius H. Z. Math. u. Physik, 56, 4, 1908.
 10. Theodore V. Kármàn, Z. angew. Math. u. Mech., 1, 233, 1921.
 11. Prandtl L. The Mechanics of Viscons Fluids, Aerodynamic Theory, Durand (ed), vol. III, G, Berlin, 1934.
- 12 Динамическая метеорология. Под ред. Б. И. Извекова и Н. Е. Кочина. Редиздат ЦУЕГМС, 1935
- 13. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидро-механика. Ч. I, ГИТТЛ, 1955.
- 14. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. ГИТТЛ, 1950.
- Основы динамической метеорологии. Под ред. Д. Л. Лайхтмана и М. И. Юдина. Гидрометеоиздат, 1955.
- 16. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.

глава

АТМОСФЕРА В ДВИЖЕНИИ (II). ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОТОК

Движение воздуха вблизи земной поверхности редко является таким простым, как оно описано в примерах предыдущей главы. Вообще жидкость малой вязкости, двигающаяся вблизи твердого тела, не будет следовать устойчивому распределению линий тока, кроме весьма специфических случаев. Подлинно ламинарный поток, в котором частица жидкости всегда следует точно таким же путем, что и предыдущая, является математически идеализированным; его следует рассматривать лищь как ограниченное приближение к действительности. В *естественном* состоянии движение отдельных частиц жидкости чрезвычайно сложное, хотя среди беспорядочного перемещения можно выделить достаточно простую среднюю модель.

Если тело с заметными поперечными размерами (плохо обтекаемое), например сферу, подвесить в аэродинамической трубе или в каком-либо другом приборе, способном производить "сглаженный" поток, то вблизи тела можно различить два вида движения при условии, что скорость потока не очень мала. Кверху от предмета и часто на определенном расстоянии над его поверхностью поток остается сглаженным и приспосабливается к форме тела, а позади тела и на значительном расстоянии за ним сглаженный поток разрушается настолько, что невозможно различить сколько-нибудь устойчивый или правильный характер линий тока. Этот тип движения называется *турбулентным*.

За исключением некоторых особых случаев, ветер вблизи земли является турбулентным, особенно в непосредственной близости к таким препятствиям, как деревья, здания и холмы. До сих пор математическая теория этого типа движений разработана только частично, и большая трудность экспериментального изучения микрометеорологии обусловлена весьма сложным движением воздуха в нижних слоях атмосферы.

3. 1. Понятие турбулентности

Изучение турбулентного движения лучше всего начать с рассмотрения некоторых несложных опытов с потоком воды в длинных прямых трубах, впервые описанных Осборном Рейнольдсом в 1883 г.; теперь они обычно демонстрируются в школьных аудиториях. В этой установке вода из большого резервуара пропускается через длинную прямую стеклянную трубу, тщательно изолированную от внешних колебаний; при этом характер потока становится видимым за счет введения окрашенной струи из дополнительной трубки рядом с входным отверстием. Если движение воды в трубе достаточно медленное, окрашенная нить сохраняет свою целостность от входа до выхода и дает незначительное расширение в направлении течения; но если скорость потока увеличивается сверх определенного предела, характер движения изменяется. В новом типе потока окрашенная нить быстро разрушается и рассеивается по потоку во всех направлениях; при этом труба, удаленная от входного отверстия, наполняется разбавленной краской, в которой возможно различить первоначально окрашенную нить.

Первый тип потока является чисто ламинарным, в нем движение происходит постоянно по линиям, параллельным стенкам трубы, без заметного смешения смежных слоев жидкости. Второй, или турбулентный, тип потока, характеризуется наличием вторичных движений, пересекающихся с основным потоком; они вызывают быстрое и непрерывное смешение жидкости во всей трубе. Турбулентное движение в значительной степени вращательное, но вращение не имеет никакого упорядоченного характера, и путь отдельной частицы чрезвычайно извилист, хотя вся жидкость в целом неуклонно двигается по направлению к выходу. Следуя Рейнольдсу, можно предположить, что поток состоит из относительно простого среднего движения, на которое накладывается чрезвычайно сложное вторичное, или вихревое, движение колебательного характера (но не обязательно периодического).

Тщательное исследование двух типов движения указывает на трудность (или на данной стадии даже на невозможность) создания удовлетворительного математического определения турбулентного движения. Даже в так называемом ламинарном потоке траектория частицы не вполне определяется решением уравнений гидродинамики, так как перемешивание молекул жидкости означает, что частица непрерывно бомбардируется со всех сторон; поэтому траектория частицы всегда содержит в себе случайные пульсации. Это явление известно под названием броуновского движения. Но следует заметить, что флюктуации этого типа не имеют отношения к основному потоку и встречаются даже тогда, когда жидкость в общем находится в покое. С другой стороны, турбулентность означает, что эти случайные пульсации наблюдаются не только в траектории частицы, но что они бывают гораздо больших масштабов и имеют отношение (каким-то не вполне еще объяснимым образом) к основному движению. Эти соображения наводят на мысль, что нетурбулентный поток можно определить как поток, в котором любые случайные пульсации в движении элемента жидкости бесконечно малы, т. е. величины молекулярного масштаба.

Турбулентный поток есть движение, включающее случайные ко-

лебания конечного размера; эти колебания приводят к пульсациям в траектории частицы, которые по масштабу можно сравнить с размерами, определяющими кинематику среднего движения, обусловленного формой пограничной поверхности. Такие колебания вызывают перемешивание и поэтому по характеру совершенно отличны от правильного волнового движения, которое не осуществляет перемешивания смежных слоев жидкости.

Основная теоретическая проблема турбулентности, разрешенная еще только отчасти, состоит в исследовании источника этих колебаний и их влияния на среднее движение; но это едва ли возможно до тех пор, пока не будет найдено удовлетворительное определение турбулентности¹.

Обычно не возникает трудностей при распознавании турбулентного движения вследствие ясно выраженных нерегулярных пульсаций в движении и характерного вида потока. Почти все естественные движения как в воздухе, так и в воде турбулентны. Чувствительный анемометр, помещенный вблизи земли, показывает, что движение воздуха состоит из быстрой смены порывов и затиший, сопровождаемых непрерывными изменениями в направлении, но амплитуда колебаний меняется в зависимости от местности, погоды, высоты над земной поверхностью, времени суток. Значительная изменчивость турбулентности создает большинство трудностей при рассмотрении проблем метеорологии. Иногда невозможно с уверенностью сказать, является ли естественный ветер турбулентным или нет. Манометрический анемометр может дать в некоторых случаях очень сглаженную запись скорости, так как он имеет большую инерцию, но если один и тот же поток исследовать термоанемометром и осциллографической трубкой, можно обнаружить значительные колебания, которые были уменьшены манометрическим прибором. Это иллюстрирует одну из повседневных трудностей микрометеорологии — трудность оценить, насколько полученные результаты зависят от характеристик используемых приборов.

3. 2. Возникновение турбулентности

В своих опытах по исследованию потока в длинных прямых трубах Рейнольдс показал, что движение становится турбулентным,

¹ Данное выше определение несовершенно, так как прилагательное "случайный" не выражается математически. Предполагается, что "случайный" здесь эквивалентно "особенностям, связанным с пограничными условиями". Это означает, что характеристики турбулентности полей флюктуаций скорости имеют универсальный характер, независимо от конфигурации пограничной поверхности, над которой двигается жидкость. Имеется много доказательств, подтверждающих правильность этой точки зрения, но это утверждение не может быть справедливым для колебаний очень больших масштабов. Для дальнейшей дискуссии определения турбулентности можно рекомендовать отчет Совещания по атмосферной турбулентности в пограничном слое, проведенного в Массачузетском технологическом институте, июнь, 1951 г.

когда число Рейнольдса $\frac{ud}{v}$ (*d* — диаметр трубы) превышает некоторую критическую величину порядка 2000. С тех пор проблема возникновения турбулентности рассматривалась как экспериментально, так и теоретически.

Предполагается, что турбулентность возникает вследствие неустойчивости ламинарного потока. поэтому были предприняты многочисленные попытки определить общий критерий для этого перехода. Проблема потери устойчивости упорно исследовалась многими выдающимися математиками, включая Рейнольдса, Орра, Хайзенберга, Тольмиена и Шлихтинга. Вскоре, на основании экспериментов, было установлено, что независимо от того, как велика начальная неустойчивость, поток в конечном итоге приходит к ламинарному состоянию, если число Рейнольдса ниже определенного предела. Но последующие исследования показали, что движение может оставаться ламинарным при более высоких числах Рейнольдса, если предпринять тщательные меры предосторожности для исключения всяких посторонних нарушений. Это означает, что ламинарный поток устойчив для бесконечно малых нарушений, а переход к турбулентному режиму осуществляется, если имеет место некоторое конечное внешнее возмушение.

Микрометеорология имеет дело преимущественно с движением вблизи поверхности, поэтому исследования зарождения турбулентности в пограничном слое представляют особый интерес.

Проблема устойчивости ламинарного пограничного слоя без градиента давления (гл. 2) изучалась математиками Геттингенской школы с 1924 по 1935 г. Тольмиен [1] нашел, что ламинарный поток, если он подвержен небольшим периодическим нарушениям, должен дать начало неустойчивым волнам, когда Re = $\frac{u\delta_1}{d}$ (где u — скорость свободной струи, δ, -- толщина смещения пограничного слоя) превышает 420. Шлихтинг [2] принял критическую величину Re за 575. Прежние проверки этой теории (1938 г.) недостаточны для того. чтобы обнаружить какие-либо неустойчивые волны в пограничном слое вблизи пластинки при таких низких числах Рейнольдса. С другой стороны, имелись основания подтвердить теорию, выдвинутую Джеффри Тейлором, которая связывает образование турбулентности в ламинарном пограничном слое с турбулентностью в свободном потоке.

Эти противоречивые теоретические и экспериментальные результаты теперь выяснены работой Шубауэра и Скрамштада из Национального бюро стандартов¹. Неустойчивые волны Тольмиен — Шлихтинга встречаются в случае, когда турбулентность свободного потока очень мала, и поэтому они могут быть обнаружены только в специального типа аэродинамических трубах для слабой турбулентности.

¹ Краткое изложение этой работы с иллюстрациями можно найти в статье Драйдена [18].

В обычной аэродинамической трубе турбулентность свободной струи является регулирующим фактором и переход происходит согласно механизму, предлагаемому теорией Тейлора. Сами по себе волны Тольмиена — Шлихтинга не образуют турбулентного потока, но дают начало условиям для образования неустойчивых вихревых полос, которые, в конечном итоге, свертываются в маленькие вихри. Драйден [18] приходит к заключению, что, если турбулентность свободного потока мала, спектр первоначально имевшегося нарушения является наиболее важным, тогда как в свободном потоке с более высокой турбулентностью наибольшее значение имеют интенсивность и масштаб турбулентности. Эти соображения особенно важны в аэродинамике. Можно предположить, что в высоких слоях атмосферы, где ветер достаточно свободен от турбулентности, шум, создаваемый мотором, мог бы служить фактором, который позволит определить, будет ли поток над поверхностью крыльев турбулентным.

Атмосферная турбулентность. Все изложенные выше соображения относятся к движению, в котором плотность меняется незначительно, так что влияние силы тяжести не сказывается. В атмосфере вблизи земли это условие выполняется только тогда, когда небо покрыто облаками. Во всех других случаях большие суточные изменения температуры поверхности, вызываемые главным образом противоположным влиянием приходящей от солнца коротковолновой радиации и уходящей от земли длинноволновой радиации, радикальновлияют на воздушный поток. Чтобы объяснить эти соображения, рассмотрим условия вблизи поверхности земли, лишенной растительности или покрытой невысокой травой, после полудня и вечером в ясный день, ранним летом или в конце его, когда синоптическая карта указывает на небольшие градиенты давления. При высоком солнце температура поверхности поднимается значительно выше, чем температура воздуха, непосредственно примыкающего к ней, и ветерявляется сильно турбулентным.

По мере опускания солнца температура земли быстро падает и становится ниже температуры воздуха, в результате чего слои атмосферы, находящиеся в непосредственном соприкосновении с землей, охлаждаются и становятся плотнее, чем вышележащие слои.

Поддержание турбулентного состояния связано с непрерывным перемещением по вертикали отдельных частиц воздуха, так что если падение плотности с высотой ярко выражено, то необходимо совершить значительную работу по преодолению силы тяжести при подъеме более плотных масс за счет расхода энергии среднего движения. В таких случаях турбулентное движение становится менее интенсивным и может даже совсем исчезнуть. Это, в свою очередь, означает, что пополнение движения за счет свободного потока для возмещения той части, которая израсходована благодаря трению о землю, уменьшается вследствие уменьшения перемешивания и движение потока в целом замедляется.

Если небо остается ясным и нет заметных горизонтальных градиентов давления, это состояние будет продолжаться до тех пор, пока приходящая радиация повысит температуру поверхности земли и вслед за этим температуру самых нижних слоев воздуха. Положение теперь меняется на обратное, так как менее плотный воздух находится ниже и всякая тенденция к вертикальному движению усиливается распределением плотности. Вскоре после рассвета близкий к ламинарному поток уступает место турбулентному движению, которое продолжается весь день.

Турбулентность атмосферы вблизи земли, таким образом, проявляет резко выраженную суточную изменчивость, причем турбулентность велика при больших сверхадиабатических градиентах и мала при сильных инверсиях. Когда небо полностью покрыто толстым слоем облаков и ветер сильный или умеренный, градиент температуры остается небольшим и устойчивым; в этих условиях степень турбулентности мало меняется от дня к ночи. Часы, когда температура сильно падает с высотой и турбулентность наиболее выражена, будут относиться к сверхадиабатическому периоду, а время, когда существует обратное соотношение (ясная ночь), — к инверсионному периоду¹.

Большие трудности при разрешении метеорологических проблем возникают обычно вследствие того, что нельзя игнорировать влияние термической стратификации в нижней атмосфере. Развитие таких исследований происходит медленно по двум причинам. Вопервых, введение переменного градиента плотности означает, что математическая теория оказывается значительно более сложной. чем лля однородной жидкости, и в настоящее время едва ли может быть построена. Во-вторых, весьма трудным делом является создание в аэродинамических трубах полностью развитых профилей в реальных слоях жидкости. имеющих градиенты плотности, сравнимые с градиентами плотности в нижней атмосфере. Поэтому имеется очень мало опытных данных по контрольным экспериментам, которыми могли бы руководствоваться специалисты в этой области. Микрометеоролог должен полагаться в своих данных почти всецело на наблюдения, проведенные на открытом воздухе, где в одинаковой мере трудно и осуществлять контроль, и выбирать скольконибудь одинаковые условия, которые вряд ли встречаются. Ниже будет показано, что в таких исследованиях основным параметром является не число Рейнольдса Re. а число Ричардсона Ri, определяемое через



¹ Суточное изменение турбулентности в ясную погоду наблюдают жители деревень, так как дым от сжигания травы, который сильно рассеивается ветром во время полуденных часов, в сумерки скапливается в тонкие плотные покрывала на значительных расстояниях без всякого перемешивания. где u — средняя скорость, а другие обозначения имеют их обычное значение.

Исследование турбулентности в жидкости с различными градиентами плотности требует, таким образом, очень точных измерений градиентов температуры и скорости.

3. 3. Основы математической теории турбулентного движения

Средние величины и флюктуации. Пусть u, v, w -составляющие скорости, измеренной в точке (x, y, z). В турбулентном потоке все три составляющие являются функциями как времени,



Рис. 10. Определение средней скорости.

так и координат. Средняя скорость с составляющими \overline{u} , \overline{v} , \overline{w} определяется в фиксированной точке во время t_0 соотношениями:

$$\overline{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{1}{2}T}^{t_0 + \frac{1}{2}T} u \, dt; \quad \overline{v} = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{1}{2}T}^{t_0 + \frac{1}{2}T} v \, dt$$

$$\overline{w} = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{1}{2}T}^{t_0 + \frac{1}{2}T} w \, dt$$
(3.1)

где [*T* — произвольный интервал, называемый *периодом осред*нения.

В общем

 $u, v, w = f(x, y, z, t_0, T).$

Геометрически это означает, что если получены значения u, v, w в точке за некоторый интервал времени, то площади между осями времени и кривыми u = u(t), v = v(t), w = w(t), измеренные за некоторый меньший интервал продолжительности T, с центром в $t = t_0$ используются для составления средних скоростей $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$

так, чтобы части площади, которые лежат выше u = u, v = v, $w = \overline{w}$, были равны частям, лежащим ниже тех же линий (рис. 10). Очевидно, если скорость определена так, что характеризует движение в целом, интервал T должен быть большим, чтобы включать достаточное число колебаний. С другой стороны, универсальное принятие очень большого периода осреднения может скрыть важные изменения, которые происходят в потоке. Например, общий уровень скорости может непрерывно подниматься или опускаться в течение выбранного периода, поэтому движение нельзя должным образом представить простой постоянной средней скоростью.

Если среднюю скорость можно считать установившейся, то анализ чрезвычайно упрощается. Во всех случаях пульсации скорости и', v', w' определяются разностью между абсолютной скоростью в какой-либо момент и средней скоростью, так что

$$u' = u - \overline{u}; \quad v' = v - \overline{v}; \quad w' = w - \overline{w}.$$
 (3.2)

· В установившемся среднем потоке $\overline{u} = \overline{u}$ и т. д.

$$\overline{u'} = \frac{1}{T} \int_{t_c - \frac{1}{2}T}^{t_o + \frac{1}{2}T} (u - \overline{u}) dt = \overline{u} - u = 0.$$

Таким образом,

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0. \tag{3.3}$$

Но это не может означать а priori, что средние величины квадратов и произведений вихревых скоростей (например, $\overline{u'^2}$, $\overline{w'v'}$ ит. д.) обязательно равны нулю.

Если средний поток нельзя считать установившимся, необходимо принять некоторое другое ограничение; обычно при этом считают, что изменения в u, v, w происходят достаточно быстро, что позволяет определить интервал T, в котором $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ изменяются очень медленно.

Во всех случаях уравнение (3.3) должно выполняться или точно, или с высокой степенью приближения. Это равноценно предположению о том, что некоторая доля упорядоченности имеется даже в турбулентном движении.

Процесс, описанный выше, предполагает, что скорость в какойлибо точке можно разложить на устойчивую или медленно меняющуюся среднюю скорость и беспорядочно колеблющуюся вихревую скорость. В аэродинамических задачах обычно допустимы такие условия, при которых средняя скорость нечувствительна к периодам осреднения; поэтому можно определить единую характерную среднюю скорость из наблюдений, проведенных за произвольные интервалы времени. Такие условия не всегда наблюдаются в атмосфере, и поэтому влияние периода осреднения часто резко проявляется
в метеорологических задачах. Этот вопрос встанет позже, при изложении теории диффузии. В данном случае достаточно сказать, что так как во флюктуациях естественного ветра встречаются периоды, изменяющиеся от доли секунды до нескольких минут, выбор периода для создания характерной средней величины имеет обычно важное значение.

Описанный выше подход можно использовать для создания средних величин любой другой субстанции, которая беспорядочно колеблется вследствие турбулентности. Наиболее важными примерами являются температура и концентрация взвешенного вещества. Большинство стандартных метеорологических приборов предназначено для того, чтобы дать хорошее приближение к средней величине по интервалам порядка минуты или около этого; другие, например, различного типа регистрирующие чашечные анемометры используют более длинные периоды осреднения. Микрометеорология требует, чтобы особое внимание обращалось на точную запись самих флюктуаций, и в этом отношении она существенно отличается по своей аппаратуре от обычной метеорологии или климатологии.

Напряжения Рейнольдса. Легко показать, что уравнения Навье — Стокса для несжимаемого движения на основании определения вязких напряжений (см. гл. 2) могут быть написаны в форме

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} - \rho uv) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} - \rho uw). \quad (3.4)$$

Аналогичным образом записываются уравнения для v, w. Предполагается, что эти уравнения в равной мере справедливы для турбулентного потока, если u, v, w представляют полные скорости.

Задача состоит в том, чтобы установить, удовлетворяют ли уравнения средним скоростям.

В приведенных выше уравнениях положим u = u + u' и т. д. и определим средние величины по правилам, установленным выше.

Результирующие уравнения будут следующими:

$$p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\tau}_{xx} - \rho \overline{u}^2 - \rho \overline{u'}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\tau}_{xy} - \rho \overline{u} \overline{v} - \rho \overline{u'} \overline{v'} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{xx} - \rho \overline{u} \overline{w} - \rho \overline{u'} \overline{w'} \right) \\ \rho \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\tau}_{xy} - \rho \overline{u} \overline{v} - \rho \overline{u'} \overline{v'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\tau}_{yy} - \rho \overline{v}^2 - \rho \overline{v'}^2 \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\tau}_{yz} - \rho \overline{v} \overline{w} - \rho \overline{v'} \overline{w'} \right) \\ \rho \frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\tau}_{xx} - \rho \overline{u} \overline{w} - \rho \overline{u'} \overline{w'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\tau}_{yz} - \rho \overline{v} \overline{w} - \rho \overline{v'} \overline{w'} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\tau}_{z} - \rho \overline{w}^2 - \rho \overline{w'}^2 \right)$$

$$(3.5)$$

Каждое из этих выражений имеет вид уравнения (3.4), если u заменяет u и т. д., а

вязкое	напряжение	τ_{xx}	заменяется	через	$\bar{\tau}_{xx} - \rho \bar{u'^2}$)	
ח	n	τ_{xy}	n	n	$\underline{\tau}_{xy} - \underline{\rho u'v'}$		}	(3.6)
n	n	τ _{xz}	n	"	τ _{xz} — ρ <i>u' w'</i>	ИТ.	д.)	

Это означает, что уравнения, которым удовлетворяют средние величины, не являются просто уравнениями Навье—Стокса со средними величинами скоростей и вязких напряжений, заменяющими мгновенные величины, а что к вязким напряжениям необходимо добавить некоторые дополнительные члены, не зависящие от вязкости и связанные с флюктуациями, а именно

-ри², -рv², -рw², -рu²v², -рu²v², -рu²w², -рv²w². (3.7) Эти члены, называемые напряжеениями Рейнольдса, указывают, что флюктуации скорости, подобно молекулярному перемешиванию, вызывают перенос количества движения. В общем напряжения Рейнольдса перевешивают по значению чисто вязкие напряжения, которыми можно пренебречь в задачах турбулентного движения.

Физический смысл напряжений Рейнольдса можно показать без труда. Нормальные напряжения $-\rho u'^2$ и т. д., очевидно, представляют дополнительное динамическое давление, вызываемое флюктуационной скоростью; по этой причине трубка Пито в турбулентном потоке дает среднюю скорость несколько выше истинной. Тангенциальные напряжения $-\rho u'w'$ и т. д., которые включают в себя две компоненты скоростей, имеют решающее значение в задачах воздушного потока вблизи поверхности земли.

Коэффициент корреляции *r* между двумя флюктуационными скоростями *u'*, *w'* будет по определению

 $r = \frac{\overline{u'w'}}{\sqrt{\overline{(u'^2)}}\sqrt{\overline{(w'^2)}}}.$ (3.8)

Величина и знак r, таким образом, зависят в основном от средней величины u'w', а фактические напряжения $-\rho u'w'$ и т. д. будут отличаться от нуля тогда и только тогда, когда существует корреляция между соответствующими парами вихревых скоростей в некоторой точке. Как такая корреляция может возникать, видно из примера устойчивого горизонтального среднего ветра у земли.

Пусть x — ось в направлении среднего ветра, y — ось горизонтальная, поперек среднего ветра, а z — вертикальная ось, так что $\overline{u} = \overline{u}(z), \ \overline{v} = \overline{w} = 0.$

В этой системе порывы или внезапные возрастания среднего ветра обозначим положительными величинами u', а временные затишья — отрицательными u'; левую и правую части отклонений ветра от его среднего направления обозначим, скажем, положительным и отрицательным v' соответственно, а направленные вверх

и вниз — мгновенные течения — положительным и отрицательным w'. Если средняя величина произведения w'v' не приближается к нулю, то среди последовательности значений u'v' должно быть преобладание членов одного и того же знака — или отрицательного, или положительного, которое означает, что более вероятно найти положительные величины u' с положительными веичинами v', чем с отрицательными величинами.

Нет никаких оснований связывать порывы или затишья со стремлением ветра колебаться в каком-либо одном направлении, и наиболее вероятным результатом является $\overline{u'v'} = 0$. С другой стороны, так как установившееся состояние сохраняется, несмотря на влияние поверхностного трения, благодаря тому, что быстродвигающийся воздух сверху приносится ближе к поверхности, а замедленные массы воздуха переносятся снизу вверх, то имеются все основания ожидать, что порывы (положительные u') будут более часто встречаться с нисходящими течениями (отрицательные w'), чем с восходящими течениями (положительные w').

Следовательно, u'w' не будет исчезать, и напряжение Рейнольдса — $\rho u'w'$ будет существенно отличаться от нуля. Эта величина, называемая вихревым касательным напряжением, является математическим выражением переноса движения флюктуациями скорости через какую-либо плоскость, параллельную z = 0. Мёллер [3], используя результаты Скрейса [4] для ветра в самых нижних слоях атмосферы над равниной, нашел хорошо выраженную корреляцию (r = 0,8) между u' и w', причем быстродвигающиеся частицы воздуха опускались, а замедленные — поднимались. Это иллюстрирует полную реальность напряжений Рейнольдса в потоке вблизи земли.

3. 4. Аналогия с молекулярными процессами

Хотя введение напряжений Рейнольдса вносит значительную ясность в общий механизм турбулентности, математические трудности при этом не уменьшаются. Пока неизвестен аналитический метод, посредством которого эти напряжения можно было бы выразить через средние скорости и их производные, поэтому уравнения для большинства задач остаются еще неразрешимыми.

Основные результаты, которые до сих пор были достигнуты в теории и наблюдениях, основывались на введении достаточно правдоподобных эмпирических связей между турбулентными напряжениями и средним потоком. Рациональной теории турбулентности, сравнимой, скажем, с теорией, развитой для невращательного движения невязкой жидкости, не существует до настоящего времени.

Рассуждения относительно турбулентного потока напоминают теорию вязкости, развитую в кинетической теории газов (гл. 2).

Можно предположить, что жидкость в турбулентном движении имеет нечто вроде зернистой структуры, в которой "куски" жидкости откалываются от среднего движения и начинают (по крайней

мере, на короткие промежутки времени) независимую жизнь до тех пор, пока они не поглотятся средним потоком на каком-либо другом уровне. Это создает картину переноса турбулентностью количества движения или других свойств, которая почти полностью соответствует простым молекулярным моделям газа.

Правдоподобность этой аналогии подтверждается тем, что такое движение небольших индивидуальных масс жидкости может иметь место, причем хорошо известным примером является "вихревая дорожка" Кармана. Именно в потоке, наблюдаемом позади плохо обтекаемого тела при малых числах Рейнольдса, вихри отрываются попеременно от одного из двух краев, идут по направлению потока по определенной траектории и рассеиваются посредством вязкости только через значительное время.

Настоящий турбулентный поток можно рассматривать с достаточной достоверностью как движение, в котором вихри очень многочисленны, а их распределение не вполне упорядочено. Поэтому неудивительно, что многие из ранних работ, и особенно работы по атмосферной турбулентности, основывались на модели "кинетической теории", по которой двигающиеся массы жидкости, называемые вихрями, ведут себя подобно молекулам, передающим движение, тепло и взвешенное вещество от одного слоя к другому благодаря столкновениям.

Предполагается, что окончательная передача свойств включает процесс, не совсем ясно определяемый как "смешение с основным телом жидкости".

Прежде чем вникнуть в детали математического развития этой аналогии, можно с достаточной точностью утверждать, что общие выводы такого характера согласуются с известными фактами.

Один из наиболее примечательных результатов турбулентности вытекает из сравнения профилей скорости для ламинарного и турбулентного потока в длинной трубе с круглым поперечным сечением. Если число Рейнольдса значительно ниже критической величины, характеристики движения в круглой трубе известны из точного решения уравнений вязкого движения, данного Пуазейлем.

Если z — радиальное расстояние от центра трубы, а a — радиус, профиль Пуазейля есть

$$u(z) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (a^2 - z^2), \qquad (3.9)$$

где $(p_1 - p_2)$ — перепад давления на расстоянии l. Распределение скорости, таким образом, параболическое, и градиент скорости

$$\frac{du}{dz} = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} z$$

возрастает линейно от значения величины — $(p_1 - p_2) \frac{a}{2\mu l}$ на стенке (z = a) до нуля в центре трубы (z = 0).

Когда поток турбулентный, распределение средней скорости на большом расстоянии от входа существенно иное. Общий характер движения показан на рис. 11. Профиль над центральной частью почти неизменный, но у стенки имеется большой градиент скорости. Для профиля не было получено никакого точного выражения, но известно, что эмпирическое соотношение

$$\overline{u} = u_{\max} \left(\frac{a-z}{a} \right)^{\frac{1}{7}}$$

с удовлетворительной точностью отражает измерения от стенки почти до центра трубы для умеренных чисел Рейнольдса (<200000).



Рис. 11. Профили скорости в ламинарном (1) и турбулентном (2) потоках по наблюдениям в трубе.

Для больших чисел Рейнольдса получены меньшие величины показателя степени $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)$, а более точное выражение, выведенное еще Карманом, показывает, что средняя скорость изменяется пропорционально логарифму расстояния от стенки.

Какое бы выражение ни использовалось, ясно одно, что изменение скорости с расстоянием от стенки происходит крайне медленно, за исключением непосредственной близости от границы. Это является характерной чертой турбулентного потока, и подобное состояние имеет место в атмосфере.

Скорость ветра над оголенной или покрытой невысокой травой поверхностью очень медленно изменяется с высотой (за исключением непосредственной близости к поверхности) в период падения температуры с высотой, когда турбулентность высока, но имеет более крутой градиент в период инверсии, когда поток ламинарный или близок к нему. Это один из наиболее важных фактов в микрометеорологии, который детально будет рассмотрен в гл. 7.

Такие свойства полностью согласуются с картиной кинетической теории турбулентной жидкости. Подобно молекулам, вихри переносят движение от одного слоя к другому. Можно представить себе вихрь, который вначале является частью основного потока в области сравни-

6 О. Г. Сеттон

81.

тельно высоких скоростей, затем отрывается и перемещается с сохранением части или всего количества движения до тех пор, пока он не смещается в области более низких скоростей. Такое перемешивание должно обнаруживаться в форме мгновенного порыва или возрастания скорости на новом уровне. Конечный эффект непрерывных вторичных движений этого типа должен сглаживать разности скоростей, кроме случаев непосредственного соседства с границей, где твердая поверхность несколько ограничивает поперечное движение.

Основной эффект турбулентности состоит в вызывании *перемешивания большого масштаба*. Это утверждение является справедливым независимо от того, правдоподобна ли или нет аналогия с кинетической теорией. Большое значение турбулентности в изучении условий вблизи земли заключается почти полностью в этом положении, так как без непрерывного смешения, вызываемого вихревым движением атмосферы, ее свойства должны чрезвычайно сильно отличаться от тех, которыми она обладает.

3. 5. Коэффициент обмена

Естественно, что первым шагом теории турбулентности является заимствование основных идей кинетической теории газов в выражении переноса количества движения или каких-либо других субстанций посредством виртуальных коэффициентов вязкости, проводимости или диффузии, определенных тем же самым образом, как и их молекулярные аналоги. Такие величины были названы Вильгельмом Шмидтом коэффициентами обмена. Шмидт основательно развил соответствующую теорию в своей классической монографии "Обмен масс в свободном воздухе", опубликованной в 1925 г. Подобная идея была предложена намного раньше Буссинеском; в Англии Тейлор и Ричардсон также применили эту теорию к метеорологии.

Основное выражение для турбулентного потока можно получить независимо от какой-либо теории о структуре вихревого движения.

Пусть E — есть количество какого-нибудь допускающего передачу консервативного свойства в единице массы жидкости, например количества движения, тепла или взвешенного вещества. Предположим, что \overline{E} (средняя величина E) — постоянная на плоскости x, y, а движение таково, что $\overline{v} = \overline{w} = 0$.

Количество E, переносимое в единицу времени через единичное поперечное сечение плоскости, параллельной плоскости z = 0, есть — $\rho E w'$ (отрицательный знак указывает, что, когда поток движется в направлении увеличения z, E уменьшается с z) плюс небольшой вклад, возникающий за счет молекулярного перемешивания $k \frac{dE}{dz}$, где k — соответствующий молекулярный коэффициент (вязкости, проводимости, диффузии). Отсюда на единицу площади

мгновенный поток = $k \frac{dE}{dz} - \rho E w' = k \frac{d}{dz} (\overline{E} + E') - (\overline{\rho} + \rho') (\overline{E} + E') w'$.

Беря среднюю величину,

средний поток =
$$k \frac{d\overline{E}}{dz} - \overline{\rho}\overline{E'w'} - \overline{E}\overline{\rho'w'} - \overline{E'\rho'w'}$$
. (3.10)

Если флюктуациями плотности пренебречь и р = р, то

средний поток =
$$k \frac{d\overline{E}}{dz} - \rho \overline{E' w'}$$
. (3.11)

Таким образом, средний поток через плоскость, перпендикулярную к направлению z, зависит главным образом от наличия корреляции между флюктуациями скорости и переносимого свойства. Если переносится движение, то E = u, $k = \mu$ и, таким образом,

средний поток =
$$\mu \frac{d\overline{u}}{dz} - \rho \overline{u' w'}$$
, (3.12)

в котором второй член можно считать соответствующим напряжением Рейнольдса, а средний поток количества движения является силой трения на единицу площади, или касательным напряжением. Для веществ во взвешенном состоянии, таких как водяной пар, дым или пыль, E следует выражать в граммах вещества на грамм воздуха; таким образом, для диффузии водяного пара E должно быть удельной влажностью, или отношением абсолютной влажности к плотности влажного воздуха, так что ρE является абсолютной влажностью, или концентрацией, водяного пара (масса в единице объема).

Случай переноса тепла требует специального рассмотрения, и об этом речь будет ниже (гл. 4).

Существенно, конечно, чтобы величина E была консервативной, т. е. не менялась во время процесса переноса. Например, если рассматривается диффузия водяного пара, должна исключаться конденсация.

Основной проблемой при анализе турбулентного перемешивания является выражение (3.11) через среднее значение \overline{E} и его производные. Гипотеза коэффициента обмена состоит в том, что $-\rho \overline{E'w'}$ может быть выражено произведением виртуального коэффициента перемешивания на градиент среднего свойства $\frac{d\overline{E}}{dz}$. Если A — этот коэффициент, то по такой гипотезе

средний поток =
$$(k + A) \frac{d\overline{E}}{dz}$$
. (3.13)

Таким образом, для движения

6*

средний поток на единицу площади =
$$\tau = (\mu + A) \frac{du}{dz}$$
 (3.14)

или, обозначая
$$K_M = \frac{A}{\rho}$$
 и $\nu = \frac{\mu}{\rho}$,
 $\frac{\tau}{\rho} = (\nu + K_M) \frac{d\overline{u}}{dz} \approx K_M \frac{d\overline{u}}{dz}$, если $\nu \ll K_M$. (3.15)

К_м — вихревая вязкость.

До этого момента проводился чисто формальный анализ, причем K_{M} определялось соотношением

$$K_{M} = -\frac{\overline{u'w'}}{\frac{d\overline{u}}{dz}}, \qquad (3.16)$$

которое не дает никаких сведений относительно поведения K_M , например, является ли он функцией u, u', w' и z или он постоянен. Очевидно, первый этап состоит в том, чтобы найти порядок величины K_M для атмосферных процессов и установить хотя бы в первом приближении, что K_M является абсолютной постоянной (т. е. не зависящей от положения в поле действия), подобно его молекулярному аналогу у.

3. 6. Приближение к геострофическому ветру

Ветер вблизи поверхности земли обычно связан с преобладающим распределением давления большого масштаба и поэтому может рассматриваться как геострофический ветер, измененный трением. Если силы трения, каково бы ни было их происхождение, выражаются виртуальными напряжениями τ_{zx} , τ_{zy} , уравнения движения двухмерного установившегося среднего потока, отнесенные к осям, закрепленным на земле, будут следующими:

$$-\lambda \overline{\upsilon} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx}$$

$$\lambda \overline{\mu} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy}$$

$$(3.17)$$

Они, по сути дела, являются уравнениями (2.23) из гл. 2 с включением трения. Задачу необходимо решать так, чтобы найти, каким образом геострофический ветер, который является скоростью свободного потока, изменяется по величине и направлению вблизи поверхности земли (z = 0) виртуальными напряжениями, возникающими за счет турбулентности.

Если пренебречь молекулярным трением (что возможно, как будет показано позже), то напряжения выражаются следующим образом:

$$\tau_{zx} = A_x \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}, \quad \tau_{zy} = A_y \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial z}.$$
 (3.18)

в соответствии с гипотезами коэффициента обмена.

В первом приближении принимается, что $A_x = A_y = A = \text{const}$, а члены с трением в уравнении (3.17) заменяются через $K_M \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2}$ и

 $K_M \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial z^2}$ соответственно, где $K_M = \frac{A}{\rho}$ является вихревой вяз-костью.

Основные результаты вихревого трения видны при изучении упрощенной задачи, в которой градиенты давления и плотности принимаются одинаковыми на всех высотах, а изобары — прямыми и параллельными. Если ось х направлена вдоль изобар, как в гл. 2, то легко показать, что уравнения (3.17) сводятся к простому выражению

$$i\lambda (V-G) = K_M \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$
 (3.19)

где $V = \overline{u} + i\overline{v}$, а G — геострофический ветер.

Задача завершается включением граничных условий:

$$V = 0$$
 Ha $z = 0$,
 $\lim_{z \to \infty} V = G$.

Отсюда v, компонента скорости, перпендикулярная изобарам, приближается к нулю на больших высотах, так как геострофический ветер дует вдоль изобар.

Соответствующее решение легко найти подстановкой в уравнение экспоненциальной функции. При разложении на действительные и мнимые члены выражение для отношения переменного ветра к постоянному геострофическому ветру будет следующим:

$$\frac{V}{G} = 1 - \left(\cos z \sqrt{\frac{\lambda}{2K_M}} - i\sin z \sqrt{\frac{\lambda}{2K_M}}\right) \exp\left(-z \sqrt{\frac{\lambda}{2K_M}}\right). \quad (3.20)$$

Обозначая $z \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2K_M}\right)} = \zeta$, компоненты скорости можно пред-

ставить как

$$\overline{u} = G(1 - e^{-\zeta} \cos \zeta),$$
$$\overline{v} = G e^{-\zeta} \sin \zeta.$$

График связи u и v для положительных ζ является равноугольной спиралью с u = G, v = 0 как пределом при $\zeta \to \infty$. Это так называемая спираль Экмана, впервые примененная Экманом [5] при рассмотрении аналогичной задачи для океанических течений, вызываемых поверхностными напряжениями.

Угол а, который образует ветер на какой-либо высоте с геострофическим направлением, равен

$$\alpha = tg^{-1} \frac{\overline{v}}{\overline{u}} = \frac{\sin \zeta}{e^{\zeta} - \cos \zeta} .$$
 (3.21)

Эта функция дана на рис. 12 для $0 \ll \zeta \ll \pi$.

На поверхности, где $\alpha = \frac{\pi}{4}$, влияние напряжений таково, что отклоняет ветер от направления свободного потока, и в поверхностном пограничном слое ветер отклоняется на угол в 45° от изобар в направлении уменьшения давления. Качественно это подтверждается наблюдениями, но нормальные дневные величины α



Рис. 12. Угол между ветром на данной высоте и геострофическим ветром.

в этом слое, при установившемся состоянии над сушей, гораздо ближе к 20°.

Когда $\zeta = \pi$, $\alpha = 0$; это означает, что ветер вначале достигает геострофического направления на ограниченной высоте Z, где

$$Z = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{\lambda}{2K_M}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\lambda}{2K_M}}}$$

Если эту высоту можно установить из подъемов шаров-пилотов, используя их в сочетании с синоптической картой, то оценка порядка величины K_{M} может быть найдена из формулы

$$K_{M} = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{Z}{\pi}\right)^{2} . \tag{3.22}$$

Добсон [6] из анализа подъемов, произведенных с Салисберийской равнины в Англии, получил, что Z находится в пределах от 600 до 900 м, откуда Тейлор оценил порядок величины K_M в 10⁴ см² сек.⁻¹. Эта величина резко отличается от кинетической вязкости воздуха, которая имеет порядок 10^{-1} см² сек.⁻¹. Таким образом, сама вязкость слишком мала, чтобы объяснить наблюдаемое распределение скорости в первом километре над поверхностью, и это приводит к заключению, что атмосферное перемешивание имеет масштабы, далеко превосходящие молекулярную диффузию.

Приведенные результаты основаны на предположении о независимости K_M от высоты; эта гипотеза теперь рассматривается как несостоятельная. Задача о приближении к геострофическому ветру для переменного K_M детально рассматривается в главе 7.

3. 7. Дальнейшее развитие молекулярной аналогии; теория пути перемешивания

В кинетической теории газов выражение, выведенное для кинематической вязкости, включает произведение среднего свободного пробега на среднюю молекулярную скорость; обе эти величины не зависят от положения в поле потока. Дальнейшая аналогия между молекулярным и вихревым движением была продолжена Прандтлем [8], который ввел *путь перемешивания*, аналогичный свободному пробегу, но меняющийся в поле потока.

Теорию можно развивать различными путями. Прежде всего можно предположить, что в результате общего беспорядочного движения "вихрь", рассматриваемый как дискретный объем жидкости, отрывается от начального уровня z и переносится потоком, соответствующим среднему движению на уровне z, к новому уровню z + l, где он смешивается с основным потоком.

Ассимиляция вихря на новом уровне дает начало флюктуации скорости u', где

$$u' = \overline{u} (z+l) - \overline{u} (z) \approx l \frac{d\overline{u}}{dz} . \qquad (3.23)$$

Так как в общем все три флюктуационные компоненты имеют тот же самый характер и ту же самую величину, подобные выражения, различающиеся только численно, должны иметь место для v'и w'. Гипотеза пути перемешивания состоит в том, что введенная таким образом величина l является уникальной длиной, которая характеризует локальную интенсивность турбулентного перемешивания на каком-либо уровне, но которая, в отличие от среднего пути свободного пробега, может быть функцией положения, средней скорости и т. д. Касательное напряжение Рейнольдса τ , будучи пропорциональным средней величине произведения u' w', представляется в этой системе уравнением

$$\tau = -\rho \overline{u'w'} = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right) \left|\frac{d\overline{u}}{dz}\right|, \qquad (3.24)$$

причем отделение членов $\frac{du}{dz}$ неизбежно приводит к тому, что знак т изменяется с $\frac{du}{dz}$. На основании уравнения (3.16) вихревая вязкость

$$K_{M} = -\frac{\overline{u'w'}}{\frac{d\overline{u}}{dz}} = l^{2}\frac{d\overline{u}}{dz}.$$
(3.25)

Здесь предполагается, что коэффициенты пропорциональности включены в величину *l*.

Приведенные выше аргументы можно расширить, чтобы охватить диффузию какого-либо консервативного свойства через введение несколько отличного определения пути перемешивания.

Пусть E(z) есть свойство, средняя величина которого, постоянная на какой-то плоскости, параллельной z = 0, сохраняется во время прохождения вихря от плоскости $z = z_1$ к $z = z_2$.

Средняя скорость переноса q для E(z) в направлении z есть

$$q = -\overline{w'\left[E\left(z_2\right) - E\left(z_1\right)\right]} \approx -\overline{w'\left(z_2\right) - z_1}\frac{d\bar{E}}{dz}.$$
 (3.26)

Гипотеза пути перемешивания подразумевает, что при всех таких движениях имеется уникальная средняя длина *l*, при которой

$$\overline{w'(z_2 - z_1)} = l \sqrt{(\overline{w'}^2)},$$
 (3.27)

поэтому поток Е, вызванный турбулентностью, выражается через

$$q = -l \sqrt{(\overline{w'}^2)} \frac{d\overline{E}}{dz} . \qquad (3.28)$$

Это позволяет выразить виртуальный коэффициент диффузии К следующим образом:

$$K = l \sqrt{\left(\overline{w}'^2\right)}.$$
 (3.29)

Полагая $E = \rho \overline{u}$, т. е. если речь идет о вихревом переносе количества движения в несжимаемой жидкости, уравнение (3.28) становится

$$-q = \tau = \rho l \sqrt{(\overline{w'}^2)} \frac{d\overline{u}}{dz}. \qquad (3.30)$$

Это выражение в отношении основной концепции то же, что и выражение (3.24), но оба l могут отличаться по величине.

Как один, так и другой вывод, дают несколько больше, чем простое постулирование, которое само по себе не является надежным основанием для предположения о существовании универсального пути перемешивания. Хотя это представление, очевидно, создается удачным использованием концепции свободного пробега в кинетической теории газов, имеются очень важные различия между проблемами молекулярного и турбулентного перемешивания.

В кинетической теории столкновение является событием, определяемым как прерывное изменение количества движения эластичных сфер.

В данной задаче "смешение" нельзя определить с такой же точностью, не представляется также возможным развить теорию дальше

посредством тщательно разработанной механической модели турбулентного движения, в которой "вихри" имеют свойства, подобные тем же упругим сферам. Только логический подход дает возможность использовать уравнение (3.24) или (3.30) в качестве определения l(считая τ , $\frac{du}{dz}$ и $\overline{w'}^2$ известными или измеримыми) и соверщеннопренебрегать аргументами, основанными на свойствах дискретных масс жидкости. Тогда величина l становится удобным параметром, имеющим размерность длины, но не имеющим какого-либо точногофизического значения.

После введения концепции пути перемещивания в 1925 г., этот вопрос энергично исследовался как теоретически, так и экспериментально. Величину l непосредственно измерить нельзя, но теорию можно проверить двумя путями. При первом методе вводят некоторую правдоподобную гипотезу относительно l как функции положения и устанавливают, насколько следствия этой гипотезы совпадают с наблюдением. При втором методе путь перемещивания находят из измерений касательного напряжения, профиля скорости и т. д. и результаты также анализируют с точки зрения согласования. Оба метода использовались в метеорологии.

3. 8. Турбулентный пограничный слой

Детальное изучение движения в пограничном слое над ровной поверхностью, параллельной средней скорости, при больших числах Рейнольдса можно рассматривать как идеализированную задачу движения атмосферы над небольшим участком поверхности земли.

Рассмотрим гладкую плоскую поверхность (например, полированную металлическую пластину), определяемую через z = 0, $x \ge 0$, где x — расстояние от края, а z — толщина потока, и установившееся двухразмерное среднее движение, в котором средняя скорость \overline{u} в какой-либо плоскости является только функцией x, z. Начиная от края, образуется ламинарный пограничный слой, но при достаточно больших скоростях или на значительных расстояниях понаправлению течения поток в пограничном слое становится турбулентным. Таким образом, при движении по направлению потока от пограничного рубежа вначале встречается, во-первых, ламинарный пограничный слой, затем переходная область, и, наконец, развитый турбулентный пограничный слой (рис. 13). Эксперименты показывают, что разрушение ламинарного потока начинается тогда, когда локальное число Рейнольдса $\frac{\overline{ux}}{y}$ достигает критической величины, которая зависит от турбулентности в свободном потоке¹.

¹ По результатам, полученным в Бюро стандартов, оказывается, чтоэто имеет место, когда \overline{ux}/v находится между 10⁵ и 10⁶, причем более: высокие величины соответствуют турбулентности свободного потока, при которой $\sqrt{(u'^2)/u} = 5 \cdot 10^{-3}$ (Dryden. I. Aeronaut. Sei., I, 71, 72, 1934).

В метеорологических задачах наветренный край считают расположенным на бесконечном расстоянии от точки наблюдения, и можно принять, что турбулентность в пограничном слое всегда вполне развита.

Применение теоремы количества движения к движению вблизи плоской поверхности показывает, что толщина ламинарного погра-

жничного слоя возрастает как $x^{\overline{2}}$ (уравнение (2.54). Тот же самый метод можно применить к турбулентному движению, если линейный



Рис. 13. Турбулентный пограничный слой.

профиль скорости, принятый для ламинарного потока, заменяется профилем, в котором средняя скорость меняется как z^m при m > 0. Для $m = \frac{1}{7}$ [см. ниже уравнение (3.54)] поверхностное касательное напряжение на единицу площади τ_0 и толщина турбулентного пограничного слоя δ выражаются следующими формулами:

$$\tau_0 = 0,0228 \rho \overline{u}^2 \left(\frac{\nu}{\overline{u}x}\right)^{\frac{1}{5}},$$
$$\delta = 0,366 x \left(\frac{\nu}{\overline{\mu}x}\right)^{\frac{1}{5}}$$

«соответственно¹. Таким образом, турбулентный пограничный слой над кладкой ровной поверхностью зависит от расстояния от начального края более сильно, чем ламинарный пограничный слой.

Детальное рассмотрение характера движения во вполне развитом турбулентном пограничном слое показывает, однако, что фактическое состояние может быть более сложным, чем это указано выше. Если пограничная поверхность гладкая, в обычном смысле слова, то можно выделить несколько областей потока:

1) непосредственно примыкающий к поверхности очень тонкий *ламинарный подслой*, в пределах которого вертикальные вихревые движения практически отсутствуют. Внутри этого слоя градиент

¹ Для детальных расчетов см. Prandtl L. and Tietjens O. G. Applied Hydro-and Aeromechanics. Mc Graw-Hill, 1934, стр. 74—76.

скорости $\frac{du}{dz}$ достигает очень больших величин, и касательное напряжение вызывается главным образом только вязкостью;

2) над ним собственно турбулентный пограничный слой, характеризующийся сильными вертикальными движениями и небольшим градиентом средней скорости. В этом слое напряжение Рейнольдса по крайней мере равно вязкому напряжению, а может быть гораздо больше;

3) над пограничным слоем — свободный поток, в котором вязкие напряжения незначительны.

Таким образом, вблизи гладкой плоской поверхности скорость падает до нуля, вначале медленно, а затем быстро по мере приближения к пограничной поверхности; поэтому градиент скорости, в конечном итоге, достигает очень больших величин, которые во многих исследованиях рассматривались, как бесконечные.

Динамическая скорость. На данной стадии удобно ввести вспомогательную величину, имеющую размерность скорости u_* . Динамическая скорость (Schubspannungsgeschroindigkeit) определяется соотношением

$$u_*^2 = \left| \frac{\tau}{\rho} \right|. \tag{3.31}$$

В большинстве метеорологических приложений касательное напряжение τ рассматривают не зависимым от высоты в некотором тонком слое (см. п. 3.9) и, следовательно, равным значению на поверхности τ_0 , так что

$$u_* = \sqrt{\left(\left|\frac{\tau_0}{\rho}\right|\right)} = \sqrt{\left(\left|\overline{u'w'}\right|\right)}.$$
(3.32)

Динамическая скорость, таким образом, зависит от характера поверхности и величины средней скорости. Происхождение этой скорости легко выяснить, если вспомнить, что обычно в турбулентном движении касательное напряжение примерно пропорционально квадрату средней скорости (при ламинарном движении, скажем в потоке Куэтта, уравнение (2.39), касательное напряжение пропорционально первой степени скорости). Соотношение между касательным напряжением и квадратом средней скорости приближенное¹, а динамическая скорость определяется так, чтобы квадратичный закон для нее выполнялся точно. Из уравнения (3.32) видно, что u_* должна иметь тот же порядок величины, что и вихревые скорости, и в качестве грубого, но полезного правила для метеорологических задач можно принять $u_* \approx \frac{\overline{u}}{10}$ 2

¹ Так, в примере турбулентного потока через гладкую трубу при умеренных числах Рейнольдса соотношение между касательным напряжением и средней скоростью более точно представляется через $\frac{\tau}{\tau}$.

2 Для более точных величин - см. табл. 23.

 $p\alpha \overline{u}^{\overline{4}}$

Гладкие и шероховатые поверхности. В обыденной речи говорят, что поверхность "шероховатая", если она волнистая или покрыта случайно распределенными неровностями. Если давать точное определение, то в качестве меры шероховатости различных поверхностей следует ввести по крайней мере две длины: высоту волнистостей или выпуклостей и некоторый характерный интервал длины между индивидуальными элементами, такими как длины волн для правильных волнистостей, или среднее расстояние между выпуклостями.

Здесь рассматривается особый случай, когда шероховатые элементы настолько близко распределены, что в рассмотрение входит одна высота. Задача ограничивается предположением о том, что неровности достаточно сходны по форме и дают возможность определить характерную среднюю высоту (например, когда ветер дует над обработанной почвой, высота растительного покрова которой постоянна на значительной площади в данное время года).

Определение гладких или шероховатых поверхностей в аэродинамическом смысле основывается на сравнении средней высоты неровностей с глубиной ламинарного подслоя.

Обычно поверхность называется *аэродинамически гладкой*, если неровности настолько малы, что позволяют образовать ламинарный подслой, в который они полностью погружены.

На аэродинамически шероховатой поверхности неровности настолько велики, что препятствуют образованию такого слоя, и движение является турбулентным до самой поверхности.

Так как толщина ламинарного подслоя зависит от значения числа Рейнольдса, классификация поверхности по данному выше определению включает не только геометрические характеристики пограничной поверхности, но также величину средней скорости; поэтому поверхность, которая является "гладкой" при малых скоростях, может становиться "шероховатой" по мере возрастания средней скорости. Практически, так как ламинарный подслой всегда очень мал, поверхность, которая является аэродинамически гладкой при умеренных числах Рейнольдса, должна быть совершенно гладкой в обыденном смысле слова.

Приведенные выше выводы можно было получить на основании количественных исследований Шиллера [9], Никурадзе [10], Шлихтинга [11] с существенными результатами для метеорологии.

Шиллер теоретически исследовал максимальные размеры неровностей, не меняющих заметно характер ламинарного движения в трубе, найдя условие, по которому не должно быть возбуждения позади неровности. Его результат (выраженный в значениях динамической скорости) состоит в том, что не встречается никакого изменения в движении, если

$$\frac{u^{*\varepsilon}}{\sqrt{2}} < 5,5.$$

Если принять $u_* = 10$ см сек.⁻¹ (которая, вероятно, еще ниже),

то это означает, что неровности более 1 мм по высоте будут обычно ухудшать гладкость поверхности в аэродинамическом смысле.

Никурадзе в своих исследованиях (важных для метеорологии) имел дело с турбулентным потоком в трубах, внутренние поверхности которых были сделаны однородно шероховатыми посредством песчаных зерен. Его критерий для вполне шероховатого потока основан на представлении о том, что при данных обстоятельствах движение фактически не зависит от вязкости, а это имеет место, когда

$$\frac{u_{\star}\varepsilon}{v} > 75. \tag{3.33}$$

Для другого конца диапазона Никурадзе подтвердил результаты Шиллера.

Между этими двумя границами находится переходная область, в которой поверхность не гладкая, не шероховатая, т. е. имеется заметное влияние вязкости. Эти исследования впоследствии были продолжены Шлихтингом, который применял шероховатые поверхности с частицами, значительно различающимися по размеру и форме. Шлихтинг соединил в одну связную теорию результаты для всех таких поверхностей введением длины, названной эквивалентной шероховатостью песка.

Под последней понимается высота шероховатостей поверхности, покрытой зернами песка, которая вызывает такое же трение, как и фактическая поверхность со сложной шероховатостью.

При метеорологических проблемах, очевидно, трудно говорить с достаточной уверенностью о "средней высоте" частиц, которые обыкновенно находятся на поверхности земли. Позже будет показано, что эту трудность можно преодолеть, и критерий Никурадзе для шероховатости действительно применяется за счет использования длины, связанной с высотой частиц, но находится она из измерения профиля скорости.

Если поверхность вполне шероховатая ($u_* \frac{\varepsilon}{v}$ около 100 или больше), непосредственное влияние вязкости незначительно и число Рейнольдса не входит в число аргументов. Возможное исключение вязкости из выражения для торможения на вполне шероховатой поверхности объясняется следующим фактом: на такой пограничной поверхности ламинарный подслой не существует, поверхность действительно состоит из плотной массы маленьких крутых тел, сопротивление которых состоит почти всецело из торможения. Отсюда следует, что поверхностное напряжение на такой поверхности почти точно пропорционально квадрату относительной скорости.

Позже будет показано (гл. 7), что это справедливо для поверхности земли в громадном большинстве случаев.

3. 9. Профиль скорости в турбулентном пограничном слое в связи с гипотезой пути перемешивания

Рассмотрим устойчивое двухразмерное среднее движение вблизи плоской твердой поверхности z = 0.

Предполагается, что u есть функция только z, а целью является определение профиля скорости u(z) при вполне развитой турбулентности, которая обусловлена данным касательным напряжением τ . Метеорологически это означает задачу об изменении ветра с высотой над горизонтальной поверхностью земли, когда температурный градиент близок к адиабатическому, т. е. влияние силы тяжести исключается.

Уравнение движения. Если x — ось в направлении среднего ветра, так что $\overline{v} = \overline{w} = 0$ по всему рассматриваемому слою, а силой Кориолиса пренебрегают, то уравнение среднего движения сводится к одному уравнению:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x},$$
 (3.34)

где $\tau = -\rho \ \overline{u'w'}$, а $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$ — градиент давления в направлении среднего ветра.

Если предположить, что $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$ не зависит от высоты в рассматриваемом поверхностном слое, уравнение (3.34) после интегрирования дает

$$\tau = \tau_0 + z \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}, \qquad (3.35)$$

где τ_0 — величина τ при $z \longrightarrow 0$.

В большинстве метеорологических задач изменение давления в направлении среднего ветра мало, и в том случае, когда z невелико, скажем, не превышает 25 м, обычно можно пренебречь вторым членом правой части уравнения (3.35) по сравнению с первым.¹ Поэтому анализ ограничивается случаем, в котором $\tau = \tau_0$ по всему рассматриваемому слою. Это означает, что динамическая скорость

$$u_* = V\left(\left| \frac{\tau_0}{\rho} \right| \right)$$
 также не меняется с высотой в этом слое.

Гипотезы относительно пути перемешивания. Прежде чем приступить к определению профиля, необходимо сделать некоторые предположения относительно функциональной формы *l*. Существуют различные возможности.

Гипотеза 1. Предполагается, что l в какой-либо точке определяется исключительно расстоянием от пограничной поверхности и физическими свойствами жидкости. В общем

$$\frac{u}{u_*}=f(l, z, \tau_0, \nu, \rho),$$

¹ Для более детального анализа см. работы Эртеля [12] и Калдера [13].

и единственным безразмерным соотношением, которое можно образовать из величин правой части, будет $\frac{l}{z}$, $\frac{u_*z}{v}$.

Отсюда

$$\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{l}{z}, \frac{u_*z}{\gamma}\right).$$

Из уравнения (3.24)

$$l^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = \text{const}$$

или

$$\frac{1}{u_*}\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{1}{l} . \tag{3.36}$$

Это выражение является дифференциальным уравнением для профиля средней скорости в пограничном слое. В качестве первогошага разумно принять $\frac{l}{z} = k$, где k — постоянная, выражающая интуитивное соображение о том, что масштаб перемешивания пропорционален расстоянию от пограничной поверхности. Тогда уравнение (3.36) перепишется как

$$\frac{1}{u_*}\frac{du}{dz} = \frac{1}{kz}.$$
(3.37)

После интегрирования оно дает

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln z + \text{const},$$

что можно переписать в безразмерном виде

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_* z}{v}\right) + \text{ const.}$$
(3.38)

Постоянную интегрирования можно определить из соответствующего граничного условия. Характерной чертой поведения реальных жидкостей вблизи твердой граничной поверхности является отсутствие всякого относительного движения на самой границе. В данной задаче это означает, что u = 0 на z = 0 — условие, которому нельзя удовлетворить выбором постоянной интегрирования в уравнении (3,38). Поэтому следует удовлетворить некоторому более частному граничному условию и выбрать его в той области, где справедливо уравнение (3.38). Такое условие, подтвержденное детальным исследованием движения вблизи гладкой поверхности, состоит в том, чтоградиент скорости возрастает беспредельно по мере приближения к поверхности. Это автоматически удовлетворяется уравнением (3.37).

Для движения вблизи гладких поверхностей Никурадзе нашел, что

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{0.4} \ln \left(\frac{u_* z}{v} + 5, 5 \right). \tag{3.39}$$

Здесь k = 0,4. Это уравнение может быть написано в более простой приближенной форме, как

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{0.4} \ln\left(\frac{9u_*z}{v}\right),$$
 (3.40)

откуда видно, что средняя скорость приближается к нулю на поверхности $z = \frac{v}{q_{n}}$, причем уравнение не имеет никакого смысла для меньших величин z. Даже если принять u, таким малым, как 10 см сек. -1, уравнение формально справедливо до высоты примерно $2 \cdot 10^{-3}$ см от поверхности.

Если пренебречь у по сравнению с К_м, уравнения (3.15) и (3.37) дают

$$K_{M} = \frac{u^{2}}{\frac{d\tilde{u}}{dz}} = u_{*}l = ku_{*}z. \qquad (3.41)$$

По данной гипотезе вихревая вязкость возрастает линейно с рас-«стоянием от пограничной поверхности. Так как для ветра над очень тладкой поверхностью k около $4 \cdot 10^{-1}$, а u_* обычно порядка 10-20 см сек. -1, то, следовательно, в метеорологических задачах на высоте 100 см над поверхностью К_м должно быть порядка 103 см² сек.-1. Это находится в соответствии с оценками, сделанными другими путями, и подчеркивает важный общий результат о том, что путь перемешивания имеет тот же порядок вели--чины, как и высота рассматриваемой плоскости над поверхностью земли.

Очевидно, такие заключения относятся к приземным слоям; в противном случае должен возникать невероятный результат --- вихревая вязкость достигает беспредельных величин на значительных высотах, т. е. в областях атмосферы, почти лишенных турбулентности, типа, имеющегося вблизи земли.

Гипотеза 2. Другое выражение для *l*, первоначально полученное из соображений подобия, было получено Карманом [14]. Среднюю скорость можно устранить, выбирая оси, двигающиеся по потоку со средней скоростью, соответствующей рассматриваемому уровню *z*. Гипотеза подобия состоит в том, что в такой системе флюктуации во всех точках отличаются только масштабами длины и времени (или скорости). Это равносильно требованию, что путь перемешивания должен зависеть непосредственно от распределения средней скорости и только косвенно от расстояния от граничной поверхности. Таким образом, в простом случае установившегося двухразмерного среднего движения вдоль оси х получается, что

$$l = f\left(\frac{d\overline{u}}{dz}, \frac{d^2\overline{u}}{dz^2}, \dots\right).$$

-96

Пренебрегая производными выше второй, из соображений размерности получаем

$$l = k \frac{\frac{du}{dz}}{\frac{d^2 u}{dz^2}}, \qquad (3.42)$$

где k — постоянная. Если τ не зависит от z, например, когда нет градиента давления в направлении движения, уравнение (3.24) дает



откуда

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln z + \text{const},$$

что идентично с профилем, полученным по гипотезе 1.

Таким образом, при отсутствии градиента давления две гипотезы приводят к одинаковым результатам, и постоянную k в уравнении (3.42) можно отождествлять с использованной ранее, т. е. l = kz и k = 0,4.

Число k называется постоянной Кармана, и ниже будет показано (гл. 7), что величина 0,4 пригодна также и для движения вблизи поверхности земли.

3. 10. Изменения уравнений профиля для шероховатых поверхностей

При режиме развитой шероховатости влияние вязкости незначительно, поэтому, пользуясь терминами предшествующего раздела, *u*

 $\frac{u}{u}$ должно зависеть только от z, l и ε .

Принимая, как и ранее, l = kz, профиль будет

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) + \text{const}, \qquad (3.43)$$

что обычно записывается в виде

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$$
 при $z \ge z_0$. (3.44)

Здесь z_0 — постоянная интегрирования, известная как *параметр шероховатости*, который должен быть связан с размером неровностей. На основании измерений в трубах, поверхность которых имела однородную шероховатость (благодаря песчаным зернам), было показано, что $z_0 \approx \frac{\varepsilon}{30}$. Уравнение (3:44), таким образом, означает, что средняя

7 О. Г. Сеттон

скорость приближается к нулю на высоте, зависящей от средней высоты неровностей, причем ниже этого уровня уравнение не имеет смысла.

Если принять соотношение $z_0 = \frac{\varepsilon}{30}$, то можно написать критерий Никурадзе для гладких и шероховатых поверхностей.

Для потока над гладкой поверхностью

$$\frac{u_*z_0}{v} < 0,13.$$

Для потока над шероховатой поверхностью

$$\frac{u_*z_0}{v}>2,5.$$

Величина u_*z_0 называется макровязкостью и обозначается через N.

Таким образом, критериями Никурадзе являются

для потока над гладкой поверхностью

 $N < 0.13 v \approx 0.02$ cm² cek.⁻¹

для потока над шероховатой поверхностью

 $N > 2.5 v \approx 0.4 \text{ cm}^2 \text{ cek}.^{-1}$.

Макровязкость следует рассматривать как величину, которая в потоке с развитой шероховатостью играет роль, аналогичную роли кинематической вязкости в потоке над гладкой поверхностью. Пределы (3.45) не следует считать точными, и они в приложении к метеорологии не обязательно должны быть таковыми. Если N на несколько порядков больше, чем v (т. е. $N > 10 \text{ см}^2 \text{ сек.}^{-1}$), то можно с уверенностью утверждать, что движение происходит над поверхностями развитой шероховатости; такими будут почти все примеры, представляющие метеорологический интерес (см. табл. 23, гл. 7).

Гипотеза Россби. Задача о пути перемешивания и профиле скорости в непосредственной близости к вполне шероховатой поверхности рассматривалась Россби [14] в предположении, что влияние шероховатости на путь перемешивания фактически ограничивается теми слоями, в которых z и z₀ сравнимы, считая

$$l = k (z + z_0); (3.46)$$

(3.45)

это не отличается от обычной формы l = kz для $z \gg z_0$. Тогла дифференциальное уравнение для профиля будет

$$\frac{1}{u_*}\frac{du}{dz} = \frac{1}{k(z+z_0)},$$
 (3.47)

откуда

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln (z + z_0) + \text{const.}$$

-98

Если удовлетворить условие u = 0 на z = 0, то результирующий профиль будет

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right).$$
(3.48)

Градиент скорости имеет предел при $z \to 0$, а на z = 0 становится равным $\frac{u_*}{kz_0}$. Исследования, основанные на этой формулировке, рассматриваются в гл. 7.

У ниверсальный профиль. Недостаток вышеуказанной формулировки состоит в том, что ни (3.44), ни (3.48) не согласуются с профилем над гладкой поверхностью (3.40) для $z_0 = 0$; поэтому на параметр шероховатости нельзя смотреть, как на постоянно изменяющуюся величину. Трудность можно преодолеть, используя макровязкость (Сеттон [16]), следующим образом. Уравнение (3.44) можно написать как

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_*z}{N}\right),\tag{3.49}$$

а уравнение (3.48) как

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_* z + N}{N}\right). \tag{3.50}$$

Универсальный профиль, пригодный как для шероховатой, так и для гладкой поверхности, определяется интерполяционной формулой

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_* z}{N + \frac{v}{9}}\right) \tag{3.51}$$

соответственно уравнению (3.44) и через

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{u_* z + N}{N + \frac{v}{9}} \right)$$
(3.52)

соответственно формуле Россби. Для аэродинамически гладкой поверхности следует положить N=0 (так как $z_0=0$), тогда оба уравнения сводятся к уравнению (3.40). Для большинства метеорологических задач N гораздо больше v; при этом результирующие уравнения (3.51) и (3.52) не отличаются от уравнений (3.44) и (3.48), соответственно.

Макровязкость (вследствие того, что она зависит или от конфигурации поверхности z_0 , или от динамической скорости u_*)-полностью определяется аэродинамическим качеством поверхности и особенно полезна при анализе диффузии вблизи поверхности земли.

99

7*

Другие выражения для профиля. В ряде метеорологических задач профиль удобно выражать через среднюю скорость на стандартной высоте, например, на высоте 1 *м* над поверхностью. Уравнение (3.48) эквивалентно

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{\ln(\alpha + 1)} \ln\left(\frac{\alpha z}{z_1} + 1\right), \qquad (3.53)$$

если u_1 — средняя скорость на упомянутой стандартной высоте z_1 ; на $\alpha = \frac{z_1}{z_0}$ можно смотреть как на параметр, выражающий аэродинамические свойства поверхности.

В ряде математических задач, включающих подробное использование профиля скорости (например, в проблеме диффузии, гл. 8), введение логарифмического профиля в дифференциальные уравнения встречает трудности, и часто можно решать эти уравнения, если логарифмическую функцию заменить простой степенной. По этой причине выгодно развивать разобранную выше теорию в виде степенных законов.

В качестве простейшей гипотезы зависимость пути перемешивания от высоты можно выразить как

$$l=l_1z^p, p\neq 1$$

где l_1 — величина пути перемешивания на единичной высоте. Дифференциальное уравнение профиля будет

$$\frac{1}{u_*}\frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{1}{l_1 z^p} ,$$

откуда

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{l_1(1-p)} z^{1-p} + \text{const.}$$

При $0 \le p < 1$ условие u = 0 на z = 0 может быть удовлетворено, если профиль представить через

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = q \left(\frac{u_* z}{v}\right)^{1-p} , \qquad (3.54)$$

де

$$q = \left(\frac{v}{u_*}\right)^{1-p} \frac{1}{l_1(1-p)} \, .$$

Эта формулировка применима к гладким поверхностям. Наблюдения показывают, что для таких поверхностей $p = \frac{6}{7}$; в этом случае скорость возрастает, как корень седьмой степени из расстояния от границы. Для умеренных значений чисел Рейнольдса профиль корня седьмой степени дает очень хорошее представление об изменении скорости вблизи гладкой стенки, а для больших чисел Рейнольдса p должно возрастать до $\frac{7}{8}$ или $\frac{8}{9}$, чтобы скорость соответствовала наблюдениям. С другой стороны, логарифмический профиль находится в хорошем согласовании с наблюдениями для гораздо большего предела чисел Рейнольдса без всяких подгонок величин параметров.

В метеорологии часто удобно использовать профиль степенного закона в виде

$$\overline{u} = \overline{u_1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^m, \quad m \ge 0, \tag{3.55}$$

где \bar{u}_1 — средняя скорость на упоминавшейся высоте z_1 .

Если т не зависит от высоты, соответствующее выражение для вихревой вязкости K_{M} есть

$$K_{M} = K_{1} \left(\frac{z}{z_{1}}\right)^{1-m},$$
 (3.56)

где K_1 — вихревая вязкость на высоте z_1 . Уравнения (3.55) и (3.56) известны в метеорологии, как *степенные законы Шмидта*.

Важно отметить, что связь между K_M и \overline{u} справедлива только в пределах сравнительно небольшого слоя, в котором τ можно принять независящим от высоты. Это ограничение не всегда имеют в виду при исследованиях атмосферной турбулентности, получая сомнительные результаты.

Таблица 4

Гипотеза	Поверхность	Путь перемешивания	Профиль скорости	Вихревая вязкость
$l \cos z$ $l \cos z + z_0$	Гладкая шероховатая шероховатая	kz kz $k (z+z_0)$	$k^{-1}\ln\left(\frac{9u_{*}z}{v}\right)$ $k^{-1}\ln\left(\frac{u_{*}z}{N}\right)$ $k^{-1}\ln\left[\frac{(u_{*}z+N)}{N}\right]$	$ku_{*}z$ $ku_{*}z$ $k(u_{*}z+N)$
$l \infty z^p$	гладкая	$l_1 z^p$	$q \left(\frac{u_*z}{v}\right)^{1-p}$	$u_*l_1z^p$

Общие формулы для l, u и K_M вблизи поверхности (τ не зависит от z)

3. 11. Обоснованность гипотез коэффициента обмена и пути перемешивания

Гипотеза коэффициента обмена основывается на постулате, что скорость переноса консервативного свойства в поле потока, где средняя скорость меняется только в одном направлении, пропорциональна градиенту средней концентрации этого свойства. Коэффициент обмена является просто коэффициентом пропорциональности.

Если это принимать в качестве определения, то никакие возражения математического характера к теории коэффициента обмена не должны возникать. Физически, однако, это означает, что процесс переноса возникает за счет флюктуационных движений короткого "периода", т. е. движений, связанных с малыми масштабами, условно называемыми размерами вихрей. Гипотеза пути перемешивания Прандтля вводит два добавочных предположения: 1) что коэффициент обмена включает единственную характерную длину и характерную флюктуационную скорость; 2) что введенная таким образом длина пропорциональна частному от флюктуационной скорости на градиент средней скорости.

На (1) можно смотреть, как на определение l, а (2) вносит определенное предположение о том, что средняя скорость допускает перенос в высказанном выше смысле и что $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ являются почти одинаковыми во всех точках.¹

Наиболее очевидный недостаток теории пути перемешивания становится ясным, если определять величину l из наблюдений. На стр. 96 указывалось, что на основании измерения профилей ветра вблизи земли l имеет тот же порядок величины, что и высота наблюдений, и поэтому не является "маленькой" в смысле пути свободного пробега. Почти такой же вывод получается из лабораторных измерений вихрей и струй. Особенно серьезный недостаток выявляется при сравнении распределения энергии в следу.

В теории Прандтля $\overline{u'}^2$ пропорционально $l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2$. Отсюда следует,

что энергия должна уменьшаться до нуля в центре следа, где $\frac{d\bar{u}}{dz} = 0$,

если *l* не бесконечно, что неприемлемо из физических соображений. Фактически измерения показывают, что вихревая энергия высока в центре следа и уменьшается до нуля только на границе нарушенного потока.

Вывод, полученный Драйденом [18], состоит в том, что не только теория пути перемешивания несостоятельна, но что значительное сомнение вызывает основная гипотеза о том, что виртуальное касательное напряжение в пограничном слое непосредственно связано с градиентом средней скорости.

Теория пути перемешивания Прандтля не придает должного веса влиянию крупных вихрей

Из рассмотрения условий в следу предполагается, что в турбулентном потоке может иметь место некоторый процесс переноса, который не зависит от градиента переносимого свойства, т. е. могут существовать некоторые "конвективные" процессы, так же как в обычном механизме диффузии (Бетчелор [17]). Различие между процессом диффузии типа, хорошо известного из кинетической теории газов, и другими способами переноса обсуждается в гл. 4; здесь достаточно указать, что не всегда возможно формулировать удовле-

¹ Бетчелор [17] показал, что положение (2) эквивалентно предположению, о том, что турбулентность имеет одну и ту же структуру во всех точках поля и что нет никакого рассеяния турбулентной энергии.

творительную теорию турбулентного переноса простым предположением $\overline{w'E}_{\infty} \frac{d\overline{E}}{dz}$ (стр. 83). Может быть дополнительный член или члены, зависящие от \overline{E} и некоторой средней скорости.

Трудность еще более возрастает в случае переноса тепла (гл. 4), когда входит такой посторонний эффект, как плавучесть. По-видимому, количество движения переносится главным образом небольшими вихрями, и этим можно объяснить первоначальный успех, который имел место при введении пути перемешивания.

3. 12. Гипотеза переноса вихря

При формулировании выражения пути перемешивания для вихревого касательного напряжения принималось, что движение является консервативным транспортабельным свойством, как указано на стр. 83. Это означает, что флюктуации давления, которыми ни в коем случае нельзя пренебречь в турбулентной жидкости, не влияют на средний перенос количества движения. В общем это не должно быть обязательным, но когда турбулентность определенно двухразмерная, сохраняется одна компонента вихря. Это замечание является основой *теории вихревого переноса*, выдвинутой Тейлором [19].

Рассматривая, как и прежде, турбулентное движение, в котором средняя скорость является только функцией z и в котором среднеквадратичные величины флюктуаций постоянны, уравнение движения будет

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) - w\eta,$$

где η — удвоенный вихрь, т. е.

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \, .$$

Принимая средние величины,

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \overline{w' \eta'},$$

где η' — удвоенная пульсация вихря. Отсюда скорость изменения количества движения в единице объема будет — $\rho \overline{w' \eta'}$. Полагая $E = \rho \eta$ в уравнении (3.28), следует, что

$$-\rho \overline{w'\eta'} = \rho l \sqrt{(\overline{w'^2})} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial z} = \rho l \sqrt{(\overline{w'^2})} \frac{\partial \overline{zu}}{\partial z^2}$$

так как, по определению, $\eta = \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$. Таким образом, по теории пе-

реноса вихрей, скорость, с которой количество движения передается единице объема жидкости благодаря флюктуациям, будет

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} = K(z)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2},$$

где, как и прежде,

$$K(z) = l \sqrt{(w'^2)} .$$

Его можно сравнить с выражением, выведенным в теории переноса движения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K_{\mathcal{M}}(z)\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right].$$

Два выражения одинаковы, если коэффициент обмена не зависит от z.

Теория вихревого переноса была далее развита Тейлором, но окончательные уравнения с трудом поддаются анализу. Этот вопрос не будет здесь больше обсуждаться, так как различия между двумя теориями до сих пор не имеют большого значения для микрометеорологии. Читатель, пожелающий продолжать исследования дальше, должен обратиться к какой-либо специальной работе по динамике жидкостей.¹

3. 13. Статистические теории турбулентности

В положениях, о которых речь была выше, основное внимание уделялось распределению средней скорости и в этой связи влиянию трения на турбулентность. Флюктуации, или выхревые скорости, исключались из анализа (на ранней стадии) через введение коэффициента обмена или использование концепции пути перемешивания. Такие теории являются "статистическими" только в том смысле, что они имеют дело со средними свойствами движения и поскольку корреляционные функции имеют место в определении виртуального напряжения. Все такие теории по сути дела включают значительные элементы опыта.

На основании современных экспериментальных исследований чрезвычайно трудно сохранить основные положения теории пути перемешивания в первоначально предложенном виде, и в последние несколько лет общая линия развития проблемы турбулентности идет по направлению так называемых статистических теорий. Во многих отношениях этот подход более естественный, так как он включает свойства флюктуаций, которые представляют турбулентность самым непосредственным образом. Статистическая теория, основанная Тейлором в 1921 г., исходит из внутренних свойств и соотношений

¹ Например, Goldstein. Modern Developments in Fluid Dynamies. Oxford, 1938.

компонент флюктуационных скоростей и выводит свойства среднего потока через рассмотрение определенных статистических функций флюктуаций. Различие между двумя подходами сводится по сути дела к тому, что в то время, как эмпирические теории принимают средний поток установившимся и поэтому исследуют его характер и влияние на другие свойства, статистические теории начинают с флюктуаций и стараются показать, как характер всего поля, включая средний поток, возникает из свойств флюктуаций, рассмотренных в качестве статистической совокупности.

Исторически статистические теории возникли из отдельной работы по проблеме диффузии, опубликованной Тейлором в 1921 г. в Трудах Лондонского математического общества, в журнале, посвященном главным образом проблемам чистой математики. В это же десятилетие возникла Геттингенская школа, с которой связаны первые успехи концепции пути перемешивания. За исключением нескольких замечательных и высоко оригинальных статей Ричардсона, эмпирические теории сохраняли свое доминирующее влияние до 1935 г., когда Тейлор снова выступил с замечательной серией работ, сразу поставивших статистическую теорию в центр внимания исследователей. Затем последовали другие статьи, например Кармана. В разработке проблемы были достигнуты большие успехи, но дальнейшие исследования были прерваны второй мировой войной в 1939 г.

Когда военные действия прекратились, ученым за пределами России стали известны новые исследования А. Н. Колмогорова, и именно это развитие теории, которое имеет много общего с концепциями, недавно выдвинутыми Гейзенбергом, Вайсцекером и Онзагером, рассматривается теперь многими, как наиболее обобщающее из всех предложенных до сих пор теорий.

В области микрометеорологии, помимо работы Ричардсона, которая является классической, единственное непосредственное приложение статистических концепций к атмосфере во время этого периода было сделано Сеттоном в 1932 и 1934 гг. — также в отношении проблем диффузии.

Беспорядочные блуждания и броуновское движение. Основные концепции статистической теории удобнее всего вводить при рассмотрении диффузии вначале для случая молекулярного перемешивания (броуновское движение), а затем в турбулентном потоке. Преимущество этого подхода состоит в том, что при этом становится ясно, какие статистические функции (и почему) важны в развитии динамической теории.

Отдельная молекула газа вследствие столкновения с другими молекулами должна следовать очень беспорядочным путем. Для упрощения анализа можно предположить, что все свободные пробеги имеют одну и ту же длину λ и параллельны некоторому условному направлению, так что после большого числа столкновений молекула продвинется в указанном направлении на расстояние $\pm \lambda \pm \lambda \pm \lambda \pm \lambda$... Это можно свести к задаче "о походке пьяницы": пьяный гражданин

делает несколько шагов одной длины, но каждый из них может быть слелан как назад, так и вперед; какова вероятность того, что он продвинется на данное расстояние после *n* шагов?

В пособиях по кинетической теории газов показано, что применение этой концепции к движению молекулы ведет к следующему результату: среднее расстояние пропорционально корню квадратному из времени, которое прошло от начала движения. Если бы движение не было беспорядочным, то пройденное расстояние было бы пропорционально времени и (как считает Джинс), "двигаясь наугад, мы должны сделать в четыре раза больше шагов, чтобы пройти две мили, чем для того, чтобы пройти одну".

Ясно, что движение этого вида отчасти подобно тому, которое влияет на частицу в турбулентном потоке, но вихревая диффузия едва ли настолько проста, как это показано выше, и, в частности, невозможно принять отсутствие непрерывности, как в примере молекулярного движения. Важным фактом является идея диффузии как беспорядочного движения.

В броуновском движении предполагается, что частица, которая велика по сравнению с молекулой, но достаточно мала, чтобы реагировать на влияние молекулярной бомбардировки, испытывает при движении в жидкости вязкое сопротивление (это иллюстрирует тот важный факт, что анализ на некоторой стадии должен принимать во внимание внутренние свойства среды). На движение частицы, таким образом, влияют: 1) инерция, 2) вязкое трение и 3) посторонние влияния, включающие столкновения, которые рассматриваются, как статистические группы беспорядочного характера. Уравнение движения в одном измерении будет

$$n\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + R_x = 0,$$

где m — масса частицы, $f \frac{dx}{dt}$ — вязкое трение, а R_x составляет посторонние силы.

Требуется найти среднюю скорость рассеяния, или $\frac{d}{dt(x^2)} = \frac{d}{dt(\overline{x^2})} = S$, в этом поле. Уравнение движения можно написать как $\frac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}f\frac{d}{dt}(x^2) + xR_x = 0.$

При осреднении по большому числу молекул $\overline{xR_x} = 0$ вследствие случайного характера посторонних сил и отсюда

$$\frac{1}{2}m\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}fS = m\overline{u^2},$$

так как $u = \frac{dx}{dt}$ является скоростью молекул.

Если температура газа постоянна в пространстве и времени, то $m\bar{u}^2 = \frac{RT}{N}$, где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, а N — число молекул в единице объема.

Интегрируя по времени,

$$S = \frac{2m}{f} \overline{u^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{tf}{m}\right) \right]. \tag{3.57}$$

Так как $f = 6 \pi \mu r$, где μ — динамическая вязкость, а r — радиус частицы, которая предполагается сферической (закон Стокса), то отсюда следует, что $\frac{f}{m} = \frac{9 \mu}{2 r^2 \rho}$ в общем велико, так как r должно быть очень малым для того, чтобы броуновское движение было заметным.

Экспоненциальный член, таким образом, становится малым через очень короткое время, и после второго интегрирования получаем хорошо известную формулу Эйнштейна

$$\overline{x^2} = \frac{2m\overline{u^2}}{f}t = 2Kt,$$
 (3.58)

где K — коэффициент диффузии, величина которого в этом случае зависит от абсолютной температуры, вязкости газа и формы частиц. Уравнение Эйнштейна проверено экспериментально.

Теоремы Тейлора. Тейлор в 1921 г. указал, что можно поступать следующим образом.

Из обычных законов образования средних величин

$$\frac{\overline{d}}{dt} x^2 = 2\overline{xu} = 2 \int_0^t \overline{u(t) u(t+\xi)} d\xi.$$

Если $\overline{u^2}$ не меняется, коэффициент корреляции $R(\xi)$ между скоростью u, испытываемой частицей во время t и $t + \xi$, по определению будет

$$R(\xi) = \frac{\overline{u(t) u(t+\xi)}}{\overline{u^2}}.$$
 (3.59)

Отсюда

$$S = \frac{d}{dt} \, \overline{x^2} = 2\overline{u^2} \int_0^t R(\xi) \, d\xi. \tag{3.60}$$

Из сравнения уравнений (3.57) и (3.60) следует, что в этом случае

$$R(\xi) = \exp\left(-\frac{f\xi}{m}\right),$$

поэтому $R(\xi)$, который равен единице при $\xi = 0$, действительно нуль при больших величинах ξ .

Из уравнения (3.60)

$$\overline{x^2} = 2\overline{u^2} \int_0^t dt \int_0^t R(\xi) d\xi.$$
 (3.61)

Для $R(\xi) = \exp\left(\frac{-\xi f}{m}\right)$ это дает

$$\overline{x^2} = 2\overline{u}_2^2 \left[\frac{tm}{f} - \frac{m^2}{f^2} \left(1 - e^{-\frac{tf}{m}} \right) \right] ,$$

а пренебрегая членами порядка $\left(\frac{m}{f}\right)^2$, получаем

$$\overline{x^2} = \frac{2m\overline{u^2}}{f}.$$

Как и в простом случае беспорядочного движения, покрываемое расстояние пропорционально \sqrt{t} .

Эти соображения проливают значительный свет на общую проблему турбулентной диффузии. В качестве полезной аналогии вихри в турбулентной жидкости можно сравнить с молекулами в газе, в котором движение частицы будет результатом его столкновений с различными вихрями, но "вихрь" является здесь только удобным способом описания флюктуации скорости, связанной с определенным масштабом длины.

Теорема Тейлора показывает, что дисперсия, испытываемая группой частиц в таком поле, определяется средней величиной интенсивности флюктуаций \overline{u}^2 и характером корреляции между флюктуациями, которые влияют на частицу в различное время. Этот тип корреляции не похож на тот, который входит в выражение длякасательного напряжения в том отношении, что он включает толькоодну компоненту скорости.

Экспоненциальная форма для $R(\xi)$ в примере броуновского движения объясняется следующим. Предположим, что, подобно молекулам, вихри имеют один и тот же размер. Часть $u^2(t + \xi)$ благодаря корреляции с u(t) есть $R^2(\xi) u^2(t)$, а часть $u^2(t + \xi)$, независящая от u(t), есть $[1 - R^2(\xi)] u^2(t)$. Отсюда действующая на частицу в конце интервала вихревая энергия составляется из той части, которая сохраняется на протяжении всего интервала, плюс часть, которая получается за счет движений, возникающих в течение всего интервала. Продолжая процесс во время следующего интервала (ξ) до истечения 2ξ сек., часть вихревой энергии за счет первоначальных вихрей есть $\frac{1}{2}R^4(\xi) u^2(t)$. Отсюда для поля, в котором все вихри,

тюявляющиеся и исчезающие с одной и той же неизменной скоростью, одного размера

 $R(2\xi) = R^2(\xi)$, или $R(\xi) = \exp(-a\xi)$,

яде a — постоянная, зависящая от размера вихря.

Таким образом, броуновское движение, в котором дисперсия возрастает как квадратный корень из времени, является результатом выбранного типа беспорядочного движения. Так как $R(\xi)$ при этом действительно нуль для всех случаев, за исключением очень маленьжих величин ξ, движение приближается к ряду разобщенных, но сходных движений. Турбулентное движение не является движением этого типа, и любую теорию, основанную на концепции поля, в котором все вихри имеют одинаковый размер, следует считать несостоятельной (см. раздел 8.2).

Если функция R (ξ) (которая на основании физических представлений должна стремиться к нулю, когда ξ стремится к бесконечности)

является такой, что $\int R(\xi) d\xi$ сходится, можно определить длину l_1

через соотношение

$$l_1 = \sqrt[n]{(\overline{u^2})} \int_0^\infty R(\xi) d\xi, \qquad (3.62)$$

а виртуальный коэффициент через

$$K = \sqrt{\overline{(\overline{u^2})} l_1} = \overline{u^2} \int_0^\infty R(\xi) d\xi.$$
 (3.63)

Последнее можно сравнить с уравнением (3.29), из чего становится ясным, что l, аналогично пути перемешивания в эмпирических теориях; но в трактовке Тейлора концепция смешения не является существенной для аргументации, а вышеуказанные уравнения имеют смысл, когда никакого смешения не происходит. Теорема Тейлора, распространяя идеи анализа процессов беспорядочного движения на случай непрерывного движения, создает отправную точку для большинства важных исследований, касающихся особенностей турбулентзного поля.

Масштабы турбулентности. При рассмотрении флюктуаций в двух точках Р и Q в турбулентной жидкости корреляция между u'(P) и u'(Q) будет в общем меняться с расстоянием PQ. Можно ожидать, что корреляция будет уменьшаться по мере возрастания PQ, а это позволяет определить длину, которую следует считать "размером" вихря. Если R(у) есть коэффициент корреляции между флюктуациями в точках, разделенных расстоянием у, т. е.

$$R(y) = \frac{\overline{u'(P) u'(Q)}}{\sqrt{\overline{[u^2(P)]}} \sqrt{\overline{[u^2(Q)]}}},$$

109

en en para la come

причем ось у направлена вдоль PQ, длину L можно определить из соотношения

$$L = \int_{0}^{\infty} R(y) \, dy, \qquad (3.64)$$

при условии, что интеграл сходится. Это будет, например, если R(y) есть нуль для y, больших некоторой определенной конечной длины.

Длина L, называемая масштабом турбулентности, представляет средний размер вихрей, или масштаб длины флюктуации; при этом не подразумевается какая-либо определенная модель вихря.

Вся турбулентность, и особенно естественный ветер, является комплексом движений, охватывающих большой диапазон масштабов, от таких, которые связаны с флюктуациями, включающими наибольшее количество энергии движения, до таких, которые типичны для очень маленьких вихрей, связанных с диссипацией энергии в тепло под действием вязкости. Соотношение между R(y) и масштабом самых малых вихрей может быть получено в следующем виде (Тейлор [21]).

Если u'^2 не зависит от у, то

$$R(y) = \frac{\overline{u'u_y}}{{u'}^2} = \frac{1}{\overline{u'}^2} \left(\overline{u'}^2 + y\overline{u'}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{y^2}{2!}\overline{u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \dots \right)$$

$$\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial y}}=0, \quad \overline{u'\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}}=-\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2}.$$

Отсюда

$$R(\mathbf{y}) \approx 1 - \frac{1}{2!} \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{u'}^2} \left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial \mathbf{y}}} \right)^2$$

или

И

$$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} = 2\overline{u'^2} \lim_{y \to 0} \left[\frac{1 - R(y)}{y^2}\right] = \frac{2{u'}^2}{\lambda^2}, \qquad (3.65)$$

где λ — отрезок на оси у параболы, проведенной по касательной к кривой [R(y), y] в ее вершине, причем кривизна кривой R(y) при y = 0 есть, таким образом, мера $(\overline{\frac{\partial u'}{\partial y}})^2$.

Длина λ называется *микромасштабом турбулентности* и является мерой среднего диаметра самых малых вихрей, или, более точно, масштабом флюктуаций, которые главным образом обусловливают диссипацию энергии.

Изотропная турбулентность и диссипация энертии. Теория пути перемешивания Кармана применима к так называе-

мому однородному турбулентному движению, в котором распределение флюктуаций и их корреляций в разных точках отличается только масштабом. Более простым типом турбулентного движения является такое, в котором средние величины компонент скорости или их пространственные производные не меняются при вращении или зеркальном отображении координатных осей. Такое турбулентное поле называют и з о т р о п н ы м (Тейлор [21]); оно составляет наиболее простой тип поля для теоретического изучения. Естественно, что такое поле имеет ограниченное значение, так как по определению изменения в направлении и величине флюктуаций в данной точке случайны, а корреляция между флюктуационными компонентами в различных направлениях отсутствует. В изотропной турбулентности нормальные напряжения $\rho \overline{u'^2}, \rho \overline{v'^2}$ и $\rho \overline{w'^2}$ равны, а тангенциальные напряжения — $\rho \overline{u'v'}, -\rho \overline{v'w'}$, $-\rho \overline{u'w'}$ близки к нулю.

Турбулентные поля этого типа не имеют места вблизи земли, где движение сильно анизотропное, к изотропии атмосфера приближается на значительных высотах. Одно из преимуществ изучения изотропной турбулентности состоит в том, что такие поля можно осуществлять, по крайней мере приблизительно, в хорошо сконструированной аэродинамической трубе, так что результаты теоретических исследований можно проверять экспериментально. Существенная особенность изотропной турбулентности состоит в том, что статистические свойства поля зависят главным образом от интенсивности и масштаба; оба эти фактора легко можно менять в лаборатории.

Большинство экспериментальных работ связано с разрушением турбулентности. Обычно вблизи входного конца рабочей части помещается проволочная решетка; это обеспечивает хорошо выраженную и совершенно правильную вихревую систему, быстро переходящую в изотропное поле, свойства которого можно изучать в различных точках по направлению ветра. Такие исследования имеют небольшое непосредственное приложение к микрометеорологии, но важны в теоретическом отношении. Здесь будут вкратце рассмотрены основные моменты.

Общее выражение для средней скорости диссипации в вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\overline{W} = \mu 2 \left[\left(\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} \right)^2 \right].$$

В изотропном поле оно сводится к

$$\overline{W} = 6\mu \left[\left(\frac{\overline{\partial u'}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\overline{\partial u'}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\overline{\partial v'}}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial y} \right].$$

111

Величины в скобках не независимы, так как жидкость несжимаемая, а поле изотропное. Можно показать¹, что для таких полей выражение сводится к

$$\overline{W} = 7,5\mu \left(\frac{\partial \overline{u'}}{\partial y}\right)^2$$

Из уравнения (3.65) следует, что

$$\overline{W} = 15\mu \frac{{a'}^2}{\lambda^2} \,. \tag{3.66}$$

С другой стороны, кинетическая энергия флюктуаций в единице объема есть $-\frac{1}{2}$ - $\rho (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$, что для изотропной турбулентности сводится к $\frac{3}{2} \rho \overline{u'^2}$. Скорость разрушения энергии турбулентности, таким образом, есть $-\frac{3}{2} \rho \frac{d (\overline{u'^2})}{dt}$.

Если вихри двигаются по потоку с постоянной скоростью $u = \frac{dx}{dt}$, скорость разрушения на расстоянии x будет $-\frac{3}{2}\rho \overline{u} \frac{d(\overline{u'^2})}{dx}$. Таким образом,

$$-\frac{3}{2}\rho\overline{u}\frac{d}{dx}(\overline{u'^2}) = 15\mu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2}$$

представляет уравнение, которое можно подтвердить опытами в аэродинамической трубе.

Напряжения Рейнольдса приблизительно пропорциональны квадрату турбулентных флюктуаций, а работа, совершаемая против этих напряжений (которая при отсутствии внешних сил должна черпаться

из кинетической энергии системы), пропорциональна $\frac{e(u'^2)^2}{L}$, где L — масштаб турбулентности [уравнение (3.64)].

Отсюда следует, что, когда геометрически подобные системы сравнимы в различных масштабах и при различных скоростях,

$$\overline{W} = \frac{15 \,\mu \overline{u'^2}}{\lambda^2}$$
 пропорционально $\rho \frac{(\overline{u'^2})^{\frac{3}{2}}}{L}$,
или

$$\lambda^2 = \text{const} \frac{L_{\gamma}}{\sqrt{[u'^2]}}.$$
 (3.67)

Это уравнение дает соотношение между микромасштабом турбулентности и масштабом турбулентности в изотропном поле.

¹ В деталях см. Гольдштейна (цитируемое произведение), т. 1, стр. 222 или оригинальную работу Тейлора.
Спектр турбулентности. До сих пор в турбулентном поле анализировались средняя интенсивность флюктуаций и связанные с ними характерные длины, что до некоторой степени подобно анализу кинетической энергии молекулярного движения газов через такие характеристики, как температура и свободный пробег. Основная задача касается распределения энергии флюктуаций для движений различных масштабов или по вихрям разных размеров.

Если чувствительный и малоинерционный прибор (такой, например, как термоанемометр) поместить в какой-либо точке турбулентного потока для регистрации величины одной компоненты флюктуаций, скажем u', то результатом будет неправильная кривая скорости по времени без каких-либо достаточно заметных периодических составляющих. Заимствуя выражение из радиотехники, запись будет иметь характеристики "шума". Однако (при определенных ограничениях, которые здесь не приводятся) любая функция может быть выражена как ряд Фурье, или интеграл Фурье, так что u'(t) в какойлибо фиксированной точке можно разложить в ряд гармонических компонент различных длин волн или частот. Средняя величина $\overline{u'^2}$ будет составляться вкладами из всех частот, но в зависимости от характера поля флюктуации определенных частот будут производить наибольшие вклады и будут, таким образом, в значительной степени определять величины $\overline{u'^2}$, тогда как влияние флюктуаций других частот будет незначительным.

Идея, используемая здесь, в значительной степени подобна той, которая лежит в основе спектроскопического анализа.

Призма, помещаемая в пучке белого света, разлагает изменения (во времени) интенсивности в точке на гармонические компоненты и таким образом образует спектр. В 1938 г. Симмонс и Солтер показали, как отдача от термоанемометра, помещенного в турбулентном потоке воздуха, может быть разложена электрическими фильтрами в подобный спектр. При обычном образце призмы тот факт, что скорость света одинакова для всех длин волн, означает, что анализ временных изменений точно эквивалентен гармоническому анализу пространственных изменений интенсивности вдоль траектории. В задаче о турбулентности применимы те же самые аргументы, если вихри проносятся мимо фиксированной точки с постоянной средней скоростью. Используя эти представления, Тейлор показал, как спектр турбулентности, измеренный за некоторый интервал времени в фиксированной точке, связан с корреляцией между одновременными величинами флюктуаций в разных точках вдоль среднего ветра.

Средняя величина u'^2 , которая является мерой среднего уровня энергии турбулентности, создается вкладами флюктуаций различных частот. Спектральная функция F(n), где n — частота (циклы в секунду), определяется следующим. Пусть F(n) измеряет часть общей энергии, которая связана с индивидуальной частотой n так, что

8 О. Г. Сеттон

 $\overline{u'^2} F(n) dn$ будет вкладом в $\overline{u'^2}$ из частот, лежащих между n и n + dn.

Таким образом,

$$\overline{u'^2} = \int_0^\infty \overline{u'^2} F(n) dn$$
 или $\int_0^\infty F(n) dn = 1.$

График F(n) в зависимости от n называется спектральной кривой.

Теперь следует рассмотреть разложение u'(t) на гармонические компоненты. Так как разложение должно быть произведено по неограниченному интервалу, анализ основывается на интеграле Фурье, а не на ряде. Величины a(n) и b(n), определяемые соотношениями

$$a(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \cos 2\pi nt \, dt, \qquad (3.68)$$

$$b(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \sin 2\pi nt \, dt, \qquad (3.69)$$

соответствуют в интегральном представлении обычным коэффициентам ряда Фурье. Таким образом, требуемое представление, включающее все частоты, будет

$$u'(t) = 2\pi \int_{0}^{\infty} [a(n)\cos 2\pi nt + b(n)\sin 2\pi nt] dn.$$

Чтобы рассчитать средний квадрат ${u'}^2(t)$, необходим интеграл, аналогичный теореме Парсевала для ряда ¹, а именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u'(t)]^2 dt = 2\pi^2 \int_{0}^{\infty} [a^2(n) + b^2(n)] dn.$$

Если принять, что предел интегрирования — очень продолжительный интервал времени, но не бесконечность, то из обычных правил образования средних следует, что

$$\overline{u'^2} = 2\pi^2 \int_0^\infty \lim_{T \to \infty} \left[\frac{a^2(n) + b^2(n)}{T} \right] dn.$$

¹ Теорема Парсевала является следствием ортогонального свойства тригонометрических функций и состоит в следующем: если функция f(x) удовлетворяет определенным, очень общим условиям и $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ является *n*-м членом ряда Фурье, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{2}(x) dx = \frac{1}{2}a_{0}^{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n}^{2} + b_{n}^{2}).$$

Это показывает, что u^{r_2} составляется вкладами флюктуаций различных частот. Вклад от флюктуаций, частота которых находится между *n* и n + dn, будет $2\pi \lim_{T \to \infty} \left[\frac{a^2(n) + b^2(n)}{T}\right] dn$ и, таким образом, по определению, будет F(n) dn. Отсюда

$$F(n) = 2\pi^{2} \lim_{T \to \infty} \left[\frac{a^{2}(n) + b^{2}(n)}{T} \right].$$
 (3.70)

Предположим, что средняя скорость u, поддерживающая турбулентность, гораздо больше u'^1 , и поэтому можно принять, что последовательность изменений u' в фиксированной точке является следствием проносящихся через данную точку неизменных во времени структурных неоднородностей турбулентного потока. В таком случае

$$u'(t) = u'\left(\frac{x}{\overline{u}}\right),$$

где x — расстояние против потока от фиксированной точки, в которой u' измеряется по данной неоднородности в момент t = 0. Это, очевидно, справедливо только, когда $\frac{u'}{\overline{u}}$ мало.

Коэффициент корреляции R(x) определяется как

$$R(x) = \frac{u(t)u'\left(t + \frac{x}{\overline{u}}\right)}{u'^{2}}.$$
 (3.71)

В учебниках по анализу² показано, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \, u'(t+t') \, dt = 2\pi^2 \int_{0}^{\infty} \left[a^2(n) + b^2(n) \right] \cos 2\pi n t' \, dn \, .$$

Применяя это к вышеприведенному случаю при $t' = \frac{x}{\overline{u}}$ и используя уравнение (3.70) и (3.71), получаем

$$R(x) = \int_{0}^{\infty} F(n) \cos \frac{2\pi nx}{\overline{u}} dn. \qquad (3.72)$$

¹ Обычно это можно обеспечить в аэродинамической трубе, но такое предположение не всегда может оправдываться в атмосфере, например, в непосредственной близости к большим предметам, таким как деревья или дома. Над плоской местностью *u*' обычно имеет порядок 0,1 *u* у земной поверхности.

² Например, Wiener N. The Fourier Integral, p. 70, Cambridge, 1933.

8*

Здесь естественно использование формулы преобразования Фурье: если f(x) является монотонной функцией, определяемой через

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} g(\eta) \cos \eta \, x \, d\eta,$$

тогда

$$g(\eta) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \eta x \, dx.$$

Полагая

$$\eta = \frac{2\pi n}{\overline{u}}, \quad f(x) = R(x), \quad g(\eta) = \frac{\overline{u}F(n)}{2V2\pi}$$

из (3.72) следует, что

$$F(n) = \frac{4}{\overline{u}} \int_{0}^{\infty} R(x) \cos \frac{2\pi nx}{\overline{u}} dx.$$
 (3.73)

В этом именно и состоит основной результат Тейлора: коэффициент корреляции R(x) и видоизмененная спектральная функция $\frac{\overline{u}F(n)}{2\sqrt{2\pi}}$ являются парой преобразований Фурье.

Таким образом, зная F(n), можно вывести R(x) из (3.72) или, наоборот, из измеренного R(x) мы можем вывести F(n) из (3.73).

Из общих физических соображений очевидно, что должно существовать соотнощение между R(x) и F(n). Для больших вихрей R(x) будет падать до нуля при возрастании x более медленно, чем в случае маленьких вихрей. Отсюда следует, что если измеренная кривая R(x) имеет большое протяжение по оси x, спектр будет ограничен относительно низкими частотами, и наоборот. Тейлор сравнил свою теорию с измерениями в аэродинамической трубе, сделанными на расстоянии около 2 м по ветру от сетки, которая создает турбулентность при средних скоростях ветра, изменяющихся от 500 до 1000 см/сек.⁻¹. За исключением случаев, близких к x = 0, найдено, что R(x) не зависит от средней скорости ветра, т. е. $\overline{u}F(n)$ является функцией $\frac{n}{\overline{u}}$. Соответствие между измеренными величинами R(x) и рассчитанными по выражению (3.71) (используя

спектральную функцию F(n), полученную по термоанемометру и системе фильтров) было удовлетворительным. Спектральная кривая может использоваться для оценки величины λ микрошкалы турбулентности. Из определения λ (уравнение (3.65))

$$\frac{1}{\lambda^2} = 2 \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - R(x)}{x^2} \right].$$

Когда *п* мало, $\frac{\cos 2\pi nx}{\overline{u}}$ в (3.73) можно заменить через $\frac{1-2\pi^2 x^2 n^2}{\overline{u^2}}$.

Отсюда

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\bar{u}^2} \int_{0}^{\infty} n^2 F(n) \, dn.$$
 (3.74)

При опытах в аэродинамической трубе Тейлор нашел неплохое соответствие между λ , рассчитанным по спектральным кривым и полученным непосредственно из наблюдений над диссипацией энергии. Величины λ были порядка 1 см и слегка уменьшались с увеличением средней скорости.

3. 14. Применение теории подобия при исследованиях по турбулентности

В 1941 г. Колмогоров [24] развил оригинальную и заманчивую теорию турбулентности, основанную на гипотезах о структуре маломасштабных флюктуаций при очень больших числах Рейнольдса. Вследствие военного времени эти положения широко не исследовались до 1947 г., когда Бэтчелер опубликовал несколько докладов и критических дискуссий по этой теории. Аналогичные идеи были независимо выдвинуты Гайзенбергом [26], Онзагером [27] и Вайсцекером [28], а в последние годы испытания в аэродинамических трубах дали много подтверждений в их полезности. Нижеследующее соображение основывается главным образом на работах Бэтчелера. Основная идея этой работы заключается в том, что турбулентное движение состоит из широкого диапазона отдельных движений с различными масштабами и что энергия непрерывно переходит от больших масштабов к малым. Обычно принято говорить, что флюктуации происходят благодаря вихрям различных размеров, но ничего при этом не предполагается о модели процесса. Всякое индивидуальное движение большого масштаба не может существовать в атмосфере как таковое неопределенно долго; оно неустойчиво для малых возмущений и рано или поздно должно разрушиться в движение меньших масштабов, т. е. в меньшие вихри. В конечном итоге, предел должен достигаться тогда, когда энергия переходит в флюктуации, число Рейнольдса которых является слишком низким, чтобы допустить образование еще более мелких вихрей. Затем энергия непосредственно переходит в беспорядочное движение молекул посредством вязкости. Колмогоров предполагает, что по мере распадания вихрей непосредственное влияние больших вихрей постепенно ослабевает так, что малые вихри приобретают свойства, которые являются более или менее их собственными, т. е. общими для всех типов турбулентности. Как следствие, маломасштабная структура всякого турбулентного движения должна быть изотропной, и испытания в аэродинамических трубах должны показать, насколько это близко к действительности.

Нельзя утверждать, однако, что средние свойства небольших вихрей будут строго одинаковыми для всех типов турбулентности; имеется ряд ограничений, которым они должны подчиняться на основании закона сохранения энергии. Если средний уровень турбулентной энергии постоянный, небольшие вихри должны превращать в тепло всю энергию, которая переходит к ним при распаде больших вихрей. Отсюда следует первая гипотеза подобия Колмогорова.

Средние свойства маломасштабных компонент какоголибо турбулентного движения при больших числах Рейнольдса определяются только через кинетическую вязкость жидкости (v) и среднюю скорость диссипации энергии в единице массы жидкости (s).

Следует заметить, что в этой гипотезе выражение "маломасштабный" означает, что исключаются движения, которые содержат заметную долю полной энергии турбулентности. Большие вихри составляют наибольшее количество энергии, а малые вихри являются основными поглотителями, и именно к последним применяется первая гипотеза подобия.

Вторая фундаментальная гипотеза Колмогорова непосредственно связана с условием, что характерное число Рейнольдса очень велико (как в обычных атмосферных проблемах). По мере того как число Рейнольдса возрастает, конечная вязкая диссипация все более и более будет смещаться в направлении к более мелким вихрям, которые при этом возникают; и в свое время самые большие вихри этого диапазона, подчиняющиеся первой гипотезе подобия, окажутся не зависимыми от процесса, посредством которого энергия переходит к молекулам (т. е. не зависимыми от v), и будут зависеть исключичительно от сил инерции.

Вторая гипотеза подобия Колмогорова состоит в следующем.

Для достаточно больших чисел Рейнольдса имеется подобласть в области малых вихрей, в которой средние свойства определяются исключительно через среднюю скорость диссипации энергии в единице массы жидкости (с).

Если обратиться к аналогии товарных обращений, эти вихри представляют собой "посредников", чьи характеристики определяются скоростью, при которой энергия переходит из значительных вместилиш, а не основной диссипацией, через "потребителя" малого Очевидно, что теория ничего не может сказать о своймасштаба. ствах, зависящих от движений большого масштаба, а приложима только к средним величинам, которые заметно зависят от маломасштабных компонент движения. Тогда такие средние величины должны выражаться по гипотезе, как универсальные функции с и у и некоторой переменной длины или времени, входящей в зависимости от характера задачи. Вид универсальных функций можно вывести из анализа размерности.

В качестве примера Бэтчелер взял для рассмотрения величину

 $[\overline{u'(x+r)-u'(x)}]^2$, где u'(x) и u'(x+r) – мгновенные скорости в двух точках пространства, определяемых векторами x и x + rсоответственно. Если две точки достаточно близки, то на разность скоростей могут влиять только те вихри, масштаб которых не слишком превышает r (величину r). Поэтому гипотезу подобия можно применять.

Так как мелкие вихри, вероятно, однородны в пространстве, средняя величина должна зависеть главным образом от r, а не от x. Отсюда можно написать

$$\overline{[u'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-u'(\boldsymbol{x})]^2}=f(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{\varepsilon}),$$

где f — универсальная функция. Из анализа размерности получаем

$$\overline{[u'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-u'(\boldsymbol{x})]^2} = V\overline{(\varepsilon v)} f_1\left(\frac{1}{r\varepsilon^4}\right),$$

где f_1 — другая универсальная функция. Из условия неразрывности и изотропности маленьких вихрей Бэтчелер вывел, что

$$[\overline{u'(x+r)-u'(x)}]^{2} = \sqrt{(\varepsilon_{\nu})} \left(f_{2} + \frac{r_{1}^{2}}{2r} \frac{df_{2}}{dr}\right),$$

где r_1 — компонента r в направлении u', а f_2 — третья универсальная

функция от $\left(\frac{r\epsilon^{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{4}}\right)$. Далее вводится вторая гипотеза на том основании,

что вихрь гораздо меньшего масштаба, чем r₁, будет также не очень заметно влиять на $[u'(x+r)-u'(x)]^2$; поэтому средняя величина определяется главным образом размерами вихря в непосредственной близости от r. Если r ограничить двумя предположениями: что оно гораздо меньше размеров вихрей, являющихся основными носителями

энергии, и что оно гораздо больше, чем размер $\frac{\sqrt{4}}{\frac{1}{4}}$, т. е. больше,

чем диаметр вихрей, зависящих от вязкости, функция $f_{\mathbf{2}}$ должна иметь такой вид, чтобы у исчезло из искомого выражения. Это будет справедливо, когда

$$f_2 = c_1 \left(\frac{r_{\varepsilon^4}}{\frac{3}{\sqrt{4}}} \right)^2,$$

где c_1 — абсолютная постоянная. Отсюда

$$\overline{[u'(x+r)-u'(x)]^2} = c_1(\varepsilon r)^{\frac{2}{3}} \left(1+\frac{r_1^2}{3r^2}\right)$$

для *r* в указанном диапазоне. Это положение можно проверить в аэродинамической трубе, и оно, согласно Бэтчелеру, удовлетворительное. Того же типа аргумент можно использовать, чтобы сделать некоторые предположения о виде функции для спектральной энергии, и здесь результаты оказались удовлетворительными.

Теория Колмогорова позволила вывести интересное выражение для корреляционной функции R(x). Для изотропных полей позади решетки теория дает, что

$$R(x) = 1 - \frac{1}{2} C \left(\frac{15v}{u'\lambda^2} x \right)^{\frac{2}{3}} = 1 - Ax^{\frac{2}{3}},$$

где A не зависит от x. Это выражение справедливо, как правило, если x гораздо больше λ и гораздо меньше, чем масштаб самых больших вихрей. Формула довольно хорошо подтверждается наблюдениями.

Вопрос о том, насколько концепции Колмогорова можно при-

ложить к атмосфере, рассматривался Бэтчелером. Размер $\left(\frac{\sqrt{3}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$ играет почти ту же роль в теории подобия, что и микрошкала турбулентности λ ; он является мерой масштаба движений, энергия которых

Брент¹ указывает, что скорость, при которой кинетическая энергия земной атмосферы диссипируется турбулентностью, имеет порядок 5 см²/сек.⁻³ в самых нижних 10 км. Таким образом, если при-

диссипируется непосредственно вязкостью.

нять эту цифру, $\left(\frac{\sqrt{3}}{\varepsilon}\right)^{\overline{4}}$ имеет порядок миллиметров или, самое большое, сантиметров. Отсюда атмосферные вихри, зависящие от вязкости, имеют диаметры, сравнимые с микрошкалой турбулентности, найденной в аэродинамических трубах. С другой стороны, большие по масштабу флюктуации скорости в атмосфере имеют периоды порядка десятков секунд или даже минут и связаны, таким образом, с характерными масштабами длины порядка десятков или сотен метров. Можно сделать вывод, что предел размеров атмосферных вихрей, к которым применима вторая гипотеза подобия Колмогорова, очень велик.

Серьезное ограничение, однако, накладывается требованием, что флюктуации, к которым гипотезы подобия применимы, должны быть свободны от внешних влияний. Колмогоров рассматривает консервативную систему, в которой перенос энергии происходит исключительно от больших к малым вихрям. Если имеется некоторый внешний источник, поставляющий энергию к определенному участку спектра вихрей (например, к сравнимому по размеру с глубиной

¹ Physical and Dynamical Meteorology, 2 d ed., p. 286, Cambridge 1939. 120

слоя, в котором вертикальные течения вызываются различиями плотности), теория подобия может прилагаться только к средним величинам, которые зависят от флюктуаций со значительно меньшими размерами, чем рассмотренный предел. Это вызывает некоторое ограничение при применении в микрометеорологии.

Положение в данное время следующее: в то время как новая теория подобия открыла свободные пути исследования в динамике турбулентного движения, она до сих пор недостаточно вышла из лабораторной стадии для эффективного продвижения в область метеорологии. Метеорологи должны внимательно следить за развитием теории, особенно в приложении к теории диффузии, которая рассматривается в гл. 8.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Tollmien W. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math-physik. Klasse, p. 21. 1929.
- 2. Schlichting H. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Klasse, 2, 181, 1933.
- 3. Möller F. Beitr. phys. fr. Atmos., 20, 79, 1933. 4. Scrase F. J. Geophys. Mem. 52.

- Scrase F. J. Geophys. Mem. 52.
 Ekman V. W. Nyt. Mag. Naturv., 40 (1), 1902.
 Dobson G. M. B. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 40, 123, 1914.
 Taylor G. I. Phil. Trans. Roy. Soc., 215, 1, 1915.
 Prandtl L., Durand W. F. The Mechanics of Viscous Fluids, Aerodynamic Theory, Vol. III, Division G, Berlin, 1934.
 Schiller L. Handbuch der Experimentalphysik, 4, Part 4, Leipzig, 1932.
- 10. Nikuradse J. Verhandl. deut. Ing. Forsch., 361, 1933.

- Schlichting H. Ingen-Arch., 7, 1, 1936.
 Ertel H. Met. Z., 50, 386, 1933.
 Calder K. L. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 65, 537, 1939.
 Theodore V. Kármán Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Klasse, 1930.
- 15. Rossby C. G. Mass. Inst, Technol., Meteorol. Papers 1, 4, 1932.
- 16. Sutton O. G. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 74, 13, 1948. 17. Batchelor G. K. J. Aeronaut. Sci... 17, 441, 1950.
- Dryden H. L. Mechanics of Boundary Layer Flow, Advances in Applied Mech., 1, 2-78, 1948.
- 19. Taylor G. 1. Proc. Roy. Soc., London, A 135, 685, 1932.
- 20. Taylor G. I. Proc. London Math. Soc., 20, 196, 1922.
- 21. Taylor G. I. Proc. Roy. Soc. (London), A 151, 430, 1935. 22. Simmons L. F. G. and Salter C., Proc. Roy. Soc., London, A 165, 78, 1938.
- 23. Taylor G. I. Proc. Roy. Soc. (London), 164, 476, 1938.
- 24. Kolmogoroff A. N. Compth. red. acad. sci. U. R. S. S., 30, 301, 1941; 32, 16, 1941.
- 25. Batchelor G. K. Proc. Cambridge Phil. Soc., 43, 533, 1947.

- 20. Батспетот G. К. Рюс. Cambridge Pnil. Soc., 43, 533, 1947. 26. Heisenberg W. Proc. Roy. Soc. (London), A 195, 402, 1948. 27. Onsager L. Phys. Rev., (II), 68, 286, 1945. 28. Weiszäcker C. F. Z. Physik, 124, 614, 1948. 29. Берлянд М. Е. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. т. 8, № 1, 1944. 30. Будыко М. И. Труды НИУ ГУГМС, сер. I, вып. 7, 1945. 31. Будыко М. И. Метеорология и гидрология, № 2, 1946. 29. Билико М. И. Матеорология и Карология, № 2, 1946.

- 32. Будыко М. И, Юдин М. И. ДАН СССР, т. 53. № 7, 1946. 33. Будыко М. И., Лайхтман Д. Л., Тимофеев М. II. Метеорология и гидрология, № 3, 1953.

34. Гандин Л. С., Дубов А. С. Труды ГГО, вып. 16 (78), 1949.

- 35. Казанский А. Б., Монин А. С. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1956.
- 36. Колмогоров А. Н. ДАН СССР, т. 30, № 4, 1941.
- 37. Константинов А. Р. Труды ГГО, вып. 16 (78), 1949.
- 38. Лайхтман Д. Л. Труды ГГО, вып. 39 (101), 1953.
- 39. Лайхтман Д. Л., Огнева Т. А. Труды ГГО, вып. 39 (101), 1953.
- 40. Лайхтман Д. Л., Орленко Г. П. Труды ГГО, вып. 60 (122), 1956.
- 41. Монин А. С. Информационный сборник ГУГМС, № 1, 1951.
- 42. Монин А. С., Обухов А. М. ДАН СССР, т. 93, № 2, 1953.
- 43. Монин А. С., Обухов А. М. Труды геофиз. ин-та АН СССР, № 24, 1954.
- 44. Обухов А. М. Труды ин-та теорет. геофиз., т. 1, 1946.
- 45. Обухов А. М. Труды геофиз. ин-та АН СССР, № 24, 1954.
- 46. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности. Гидрометеоиздат, Л., 1955.
- 47. Скворцов А. А. Труды ин-та энергетики АН УзССР, вып. I, 1947. 48. Тимофеев М. П. Труды ГГО, вып. 27 (89), 1951. 49. Швец М. Е. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 1941.
- 50. Юдин М. И. Труды НИУ ГУГМС, сер. І, вып. 35, 1946. 51. Юдин М. И. Труды ГГО, вып. 19 (81), 1950.
- 52. Яглом А. М. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1953.

ГЛАВА 4

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЯ

Возникновение и перенос тепла — широко распространенное явление природы, чрезвычайно интересное для метеоролога, которому атмосфера часто представляется огромной, весьма сложной тепловой машиной. Исследование переноса тепла в воздушном океане, ограниченном снизу твердой и жидкой поверхностью, температура которой непрерывно меняется, и в котором содержание водяного пара переменно, представляется весьма сложным и является предметом изучения многих наук. Огромные трудности изучения явления, однако, часто возрастают для метеоролога из-за фактической невозможности определения точных границ (например, точной "поверхности" земли, покрытой растительностью) или даже температуры воздуха в пасмурный день. Бесполезно ожидать в микрометеорологии последовательности тщательно проверенных лабораторных экспериментов. Как указывает Брант, "воздух не знает свою собственную температуру до такой степени точности".

На данной стадии развития науки самое большее, что можно ожидать от теории, это обоснованные и взаимно непротиворечивые объяснения явлений, которые имеют место в пределах нескольких футов от земли.

Традиционное изложение теплопередачи сводится к рассмотрению трех различных процессов: проводимости, конвекции и радиации. Проводимость, или диффузия тепла в газе, обусловлена упругим столкновением молекул в условиях отсутствия переноса массы и подобна, таким образом, переносу количества движения благодаря вязкости. Конвекция вызвана смешением сравнительно больших объемов с различными температурами при движении жидкости. Радиация является передачей энергии посредством электромагнитных волн при участии промежуточной среды. Все эти процессы могут одновременно встречаться в атмосфере, и часто трудно или даже невозможно полностью разделить различные эффекты.

При детальном изучении необходимо дальнейшее подразделение. Конвекция называется свободной, если движение жидкости в гравитационном поле сохраняется только благодаря различиям в плотности, вызванным локальными разностями температуры. Вынужденная конвекция означает, что движение жидкости происходит благодаря градиенту давления. В обоих случаях поток может быть как ламинарным, так и турбулентным. В ветреный день при облачном небе обмен тепла между землей и воздухом является хорошим примером вынужденной конвекции, но если ветер мал и поверхность земли сильно нагрета, то процесс переноса тепла включает оба типа конвекции. Термины "свободный" и "вынужденный" могут поэтому быть применены к атмосферной конвекции только в несколько неточном смысле, указывающем, что в рассмотренных условиях преобладает один или другой процесс, но он не обязательно единственный.

При ламинарном движении имеется определенная связь между переносом количества движения, вязкостью и переносом тепла в жидкости, а также менее точная, но несомненная аналогия между переносом количества движения и тепла при вынужденной конвекции в турбулентной жидкости. В обоих процессах внутренний механизм, по существу, тот же самый. Динамика свободной конвекции неизбежно более сложная, поскольку любое движение, возникшее благодаря различиям плотности, сразу же изменяется под действием вязкости и теплопроводности. Таким образом, на первый взгляд представляется как относительно простая проблема — термодинамический режим неглубокого слоя жидкости, нагретого снизу, в котором вертикальное движение не создается немедленно, поскольку выравнивающие действия теплопроводности и вязкости стремятся сгладить различия температуры и скорости, и только когда температурный градиент достигает критической величины, появляются вертикальные токи. Это легко доказывается в лаборатории и очевидно, что подобное состояние может встречаться в атмосфере.

4. 1. Математическая теория теплопроводности

Твердое тело. Классическая теория теплопроводности в твердом теле основана на фундаментальном предположении, что поток тепла из одной области в другую пропорционален площади поперечного сечения, перпендикулярной направлению потока, и температурному градиенту в этом же направлении. Если q — поток тепла на единицу площади (в калориях на 1 см²/сек.), T — температура и x — направление потока тепла, то

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Величина λ называется коэффициентом теплопроводности и является свойством тела, в котором переносится тепло. Так же как и в случае вязкости, удобно определить второй коэффициент k, называемый коэффициентом температуропроводности, аналогичный кинематической вязкости; оба коэффициента связаны зависимостью:

$$k=\frac{\lambda}{c\rho}$$
,

где с является удельной теплоемкостью твердого тела, р — его плотностью.

Уравнение теплопроводности получается очень просто, если рассмотреть поток тепла через маленький прямоугольный объем со сторонами δx , δy , δz . Исходя из точно таких же соображений как и при выводе уравнения непрерывности (гл. 2), легко увидеть, что приток тепла в объем за единицу времени, вызванный *x*-вой компонентой потока, есть

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \delta x \, \delta y \, \delta z, \qquad (4.1)$$

остальные компоненты потока дают аналогичные вклады. Приращение тепла в объеме может быть выражено как

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta x \, \delta y \, \delta z.$$
 (4.2)

Приравнивая выражения (4.1) и (4.2), получим уравнение теплопроводности для изотропного тела

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \tag{4.3}$$

Жилкости. Полное рассмотрение переноса тепла благодаря теплопроводности в жидкости связано со значительными трудностями, поскольку, строго говоря, необходимо учитывать изменения плотности, тепло, возникшее в жидкости благодаря работе вязких сил, и зависимость теплопроводности и вязкости от температуры. В простейшем случае, при котором жидкость рассматривается как несжимаемая, а теплом, возникшим благодаря трению, пренебрегают, уравнение, описывающее перенос тепла в движущейся жидкости, является простым обобщением уравнения для изотропного твердого тела. Повышение температуры движущейся частицы жидкости за время δt есть

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z$$

(сравните с уравнением (2.1)).

Деля на δt и устремляя δt к 0, получим выражение для скорости изменения температуры

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

в обычных обозначениях. Уже было показано (гл. 1), что если количество тепла dQ подается к единице массы воздуха, то

$$dQ = c_p \, dT - \frac{ART}{p} \, dp.$$

Если изменения давления незначительны, то уравнение сводится к $dQ = c_p dT$ и приращение тепла в элементарном объеме $\delta x \ \delta y \ \delta z$ за единицу времени есть

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta x \, \delta y \, \delta z.$$

Это должно равняться приращению тепла благодаря теплопроводности, т. е.

 $\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \delta x \, \delta y \, \delta z$

на основании аргументов, которые приводились в предыдущих параграфах. Отсюда искомое выражение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (4.4)$$

rhe $k = \frac{\lambda}{c_n \rho}.$

Уравнение (4.4) получено с некоторыми ограничениями. Если их устранить и рассмотреть общую проблему переноса энергии в движущейся жидкости, то можно показать¹, что уравнение, определяющее распределение температуры в любом поле потока, есть

$$\rho c_{\boldsymbol{v}} \frac{dT}{dt} + Ap \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + A\Phi, \quad (4.5)$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, A — величина, обратная механическому эквиваленту теплоты, Φ — функция диссипации, определенная следующим образом:

$$\Phi = \mu \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Для идеального газа уравнение (4.5) имеет следующий вид:

$$c_{\rho} \rho \frac{dT}{dt} - A \frac{dp}{dt} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + A\Phi.$$
(4.6)

Слагаемое, в которое входит Ф, выражает диссипацию энергии благодаря вязкости, проявляющейся в жидкости в форме тепла. Это слагаемое, а также слагаемое, выражающее изменение давления, обычно малы, чтобы иметь большое влияние в проблемах микрометеорологии, и можно предположить, что уравнение (4.4) дает адекватное представление о переносе тепла при несжимаемом ламинарном движении атмосферы.

4. 2. Простейшие процессы диффузии

Уравнения, полученные выше, содержат оператор Лапласа ▽²:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

¹ Гольдштейн. Современные состояния гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. II, ГИИЗ, 1948. Есть также интересное исследование — Воиssinesq. Theorie analytique de la chaleur. Vol. II, Paris, 1903.

Наличие этого оператора в очень многих уравнениях математической физики может быть объяснено, если обратиться к одной общей теореме¹. Пусть E — скалярная физическая характеристика (например, температура), и пусть E_0 — значение E в точке O. Среднее значение \overline{E} в кубе со стороной a вокруг точки O определяется

$$a^{3}\overline{E} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int E \, dx \, dy \, dz.$$

Раскладывая Е в ряд Тейлора, получаем

$$E = E_0 + x \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_0 + y \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)_0 + z \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_0 + \frac{1}{2} \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right)_0 + y^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right)_0 + z^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)_0\right] + xy \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\right)_0 + yz \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial z}\right)_0 + xz \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial z}\right) + \dots$$

В результате интегрирования по указанной выше области (куб со стороной a) все интегралы, содержащие нечетные степени или произведения переменных, оказываются равными нулю благодаря симметрии, и останутся только слагаемые a^3E_0 и слагаемые, содержащие x^2 , ... и т. д., причем

$$\int \int \int \frac{a^2}{2} \int x^2 dx dy dz = \frac{a^5}{12}$$
ит. д.

Таким образом, если всеми четвертыми и более высокими произведениями от *E* пренебречь, то

$$a^{3}\overline{E} = a^{3}E_{0} + \frac{a^{5}}{24}(\nabla^{2}E)_{0}$$

или

$$\overline{E} - E_0 = \frac{a^2}{24} (\nabla^2 E)_0.$$

Так, было показано, что при некоторых резонных ограничениях относительно E величина ∇E пропорциональна разности между значениями E в точке и его средним значением в некоторой области, окружающей эту точку. Если среда имеет такую структуру, что процессы диффузии в ней происходят всегда при наличии локальных различий свойств в данной точке и средних по области ее окружающей, то уравнение, описывающее эти процессы, будет содержать оператор Лапласа.

¹ Horf. Enführung in die Differentialgleichungen der Physik. 1933.

Таким образом, если в среде имеется местный перегрев ("hot spot"), то скорость изменения температуры в этой точке будет пропорциональна разности $\overline{T} - T_0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_0 \sim T - T_0 \sim (\nabla^2 T)_0.$$

Это и есть уравнение теплопроводности. Аналогично, если Е представляет концентрацию вещества во взвешенном состоянии, то уравнение диффузии есть

$$\frac{dE}{dt} = k \nabla^2 E,$$

где k — коэффициент диффузии. Те же самые соображения могут также быть применены для вывода уравнений Лапласа и Пуассона в электростатике или для волнового уравнения и т. д., так что теорема, приведенная выше, может рассматриваться как фундаментальное соотношение математической физики¹.

Общая форма уравнения диффузии, учитывающая пространственные изменения коэффициентов, есть

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial E}{\partial z} \right).$$
(4.7)

Простой процесс диффузии — это процесс, который может быть полностью описан вышеприведенными уравнениями. Если коэффициенты не зависят от x, y, z, то

$$\frac{dE}{dt} = k_x \frac{d^2 E}{dx^2} + k_y \frac{d^2 E}{dy^2} + k_z \frac{d^2 E}{dz^2}$$
(4.8)

и диффузия называется фикковской. Простой процесс диффузии является, таким образом, процессом, в котором скорость переноса свойства через единичную площадку равна произведению коэффициента диффузии на градиент свойства на рассмотренном уровне, т. е.

$$q = -\lambda \frac{\partial E}{\partial z} , \qquad (4.9)$$

где q — поток свойства. Таким образом, перенос количества движения благодаря вязкости или распространение тепла благодаря теплопроводности, а также диффузия одного газа в другой являются простыми процессами диффузии. Согласно гипотезе о коэффициенте обмена (гл. 3) перенос среднего значения свойства благодаря турбулентности является процессом этого же типа. С другой стороны, перемещение тепла свободной конвекцией не может рассматриваться как простой диффузный процесс.

Рассмотрение этих проблем методами кинетической теории газов уже проводилось в гл. 2. Для более детального ознакомления чита-

¹ Норf, стр. 59.

телю следует обратиться к специальным работам по кинетической теории. Этот метод выявляет основную характеристику подлинной диффузии, а именно: свойство переносится от одного уровня к другому благодаря колебаниям или беспорядочному движению в малых масштабах, действующих независимо от основного движения в сочетании с существующим градиентом.

На первый взгляд может показаться, что передача любого свойства может рассматриваться как процесс диффузии, в котором уравнение (4:9) применимо для определения соответствующего коэффициента диффузии. (Этот метод находил сравнительно больше применения на ранних стадиях развития теории атмосферной турбулентности). Однако надо признать, что этот подход, хотя математически и осуществим, является искусственным, и мало вероятно, что он будет эффективен, если исследуемые физические процессы не являются процессами того же типа, что и в кинетической теории. Из соображений практики должно быть показано, что коэффициент проводимости, определяемый уравнением (4.9), является или постоянным, или процесс может быть действительно описан как диффузия.

Коэффициенты молекулярной диффузии являются функциями температуры. В большинстве метеорологических проблем этими вариациями можно пренебречь, и во всей этой работе молекулярная проводимость и диффузия будут рассматриваться как фикковские.

4. 3. Граничные условия

Уравнения, выведенные выше, по своему существу являются недостаточными, чтобы разрешить какую-либо конкретную проблему теплопроводности. В любой конкретной задаче необходимо учитывать начальные и граничные условия, которые делают проблему определенной; они, являясь такой же частью проблемы, как и само уравнение, требуют внимательного рассмотрения, особенно в приложении к метеорологии.

Решение проблемы в математической физике должно удовлетворять трем условиям:

1. Решение должно существовать.

2. Решение должно быть единственным.

3. Решение должно непрерывно изменяться в зависимости от исходных данных.

Условие (1) просто означает, что математическая форма решения свободна от внутренних противоречий, но она не дает уверенности в том, что уравнение может быть решено в форме, которая даст применимый для практики ответ на конкретную проблему.

Условие (2) позволяет математику утверждать, что, кроме полученного решения проблемы, сформулированной дифференциальным уравнением и краевыми условиями, никакое другое независимое решение не может быть найдено. (Часто то же самое решение можно выразить в двух или более эквивалентных формах, но они по существу не различаются). Прежде чем показать единственность решения, проблема должна быть верно сформулирована, т. е. должны быть правильно выбраны количество и тип краевых условий.

Условие (3) означает, что проблема должна быть физически определенной, и небольшие различия в исходных данных в некоторой области должны приводить также к малым изменениям решения в этой области.

Можно показать, что решение уравнения теплопроводности при заданных краевых условиях является единственным, если на *T* наложены некоторые обоснованные ограничения, например, что в рассматриваемой области температура и ее производные являются непрерывными функциями времени и пространства.¹

Читатель должен заметить, что в общем произвольные условия могут быть наложены на T и его первые производные по координатам, но не на $\frac{\partial T}{\partial t}$, или вторые производные по координатам, потому что последние связаны дифференциальным уравнением.

Краевые условия в метеорологических проблемах. Выбор граничных условий в проблемах математической физики часто представляет значительные трудности. Обычно граничные условия не означают, что решение (или его производные) принимает предписанное значение в определенный момент времени или в определенной области, но задается предел, к которому должно стремиться найденное решение. Краевое условие является предсказанием свойства решения при некоторых специальных условиях.

В проблеме распространения тепла от нагретой почвы в атмосферу точное значение температуры на большой высоте не может быть определено заранее, но совершенно очевидно, что действие источника будет убывать с увеличением высоты. В этом примере необходимым граничным условием является то, что $T \rightarrow 0$, когда $z \rightarrow \infty$, и задача состоит в отыскании частного решения уравнения именно с этим свойством. После того как решение найдено, численное значение температуры может быть определено для любого уровня.

Проблемы метеорологии обычно касаются обмена тепла между землей и атмосферой, т. е. двух безграничных сред с различными проводимостями, имеющими границу z = 0. Основные условия на общей границе следующие.

1. Заданная температура. T может быть известно на z = 0 как постоянная величина или функция времени (например, в дневные часы T как функция может задаваться первыми несколькими членами ряда Фурье).

2. Заданный поток. Поток тепла через z = 0, согласно определению,

$$q_0 = -kc_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$$

¹ Подробнее см. Carslaw и Jaeger. Conduction of Heat in Salids Oxford, 1947.

130

Если k_a — температуропроводность воздуха, а k_g — температуропроводность почвы, то непрерывность потока тепла через z = 0 дает

$$\lambda_{a} \left(\frac{\partial T_{a}}{\partial z} \right)_{z=0} = \lambda_{g} \left(\frac{\partial T_{g}}{\partial z} \right)_{z=0}$$
(4.10)

как необходимое условие, T_a , T_g — температура воздуха и почвы, соответственно.

3. Заданное излучение. Ньютоновский "закон охлаждения" устанавливает, что при небольших температурных разностях скорость теплоотдачи пропорциональна превышению его температуры над температурой обтекающего воздуха. В первом приближении этот путь учитывает влияние теплопроводности естественной кон векции и радиации.¹ В этой формулировке благодаря введению "коэффициента внешней теплоотдачи" ("exterior conductivity" h) граничные условия есть

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} + h\left(T - T_0\right) = 0, \qquad (4.11)$$

где T — температура земли и T_0 — температура обтекающего воздуха. Если h = 0, (4.11) сводится к "заданному потоку" для идеального теплоизолятора², но если $h \gg k$, данное условие приближается к условию, соответствующему "заданной на поверхности температуре".

4. 4. Ламинарный тепловой пограничный слой

При движении холодной жидкости над нагретой поверхностью наблюдается, что температурный градиент велик в непосредственной близости к поверхности и мал в остальном пространстве. Это известно из измерений, сделанных вблизи тщательно скошенного луга в жаркий летний день. Приблизительно в полуметровом слое от земли температурный градиент может быть в тысячу раз больше адиабатического температурного градиента, но на высотах порядка нескольких метров градиент составляет только около одной сотой от наблюденного вблизи земли. В жидкости с небольшой температуропроводностью, такой как воздух, естественно рассматривать тепловой пограничный слой того же происхождения, что и динамический пограничный слой, описанный выше. Хотя в настоящее время нельзя утверждать, что эти два слоя имеют почти одну и ту же толщину, из общих физических соображений такое условие весьма возможно.

 $\sigma e (T^4 - T_0^4) \approx 4 \sigma e T_0^3 (T - T_0) = \text{const} (T - T_0).$

Это соотношение есть закон Ньютона.

² Случай, когда $h \rightarrow 0$, нужно рассмотреть особо. См. Karslaw и Jaeger.

9*

¹ Действительно, потеря тепла излучением определяется законом Стефана — Больцмана: тело при обсолютной температуре T, окруженное оболочкой, которая имеет абсолютную температуру T_0 и излучает, как черное тело, теряет тепло со скоростью $\sigma e (T^4 - T_0^4)$, где σ — постоянная Стефана, а e — излучательная способность. Если $T - T_0$ мало, то

Уравнение (4.4) для установившегося двухразмерного движения имеет следующий вид:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

тде *и* и *w* связаны с уравнением непрерывности

 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Если δ_H есть толщина теплового пограничного слоя и l — характерная длина на плоскости в направлении x, то переменные можно сделать безразмерными так же, как при рассмотрении динамического пограничного слоя:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta_H}.$$

Преобразованные уравнения будут

$$\frac{u}{l}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{w}{\delta_H}\frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{k}{l^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{k}{\delta_{H^2}}\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}.$$

$$\frac{1}{l}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\delta_H}\frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0.$$
(4.12)

Пограничный слой теперь определяется соотношением $0 \ll \zeta \ll 1$. Предполагается, что

 $u_{\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} = O(1).$

Легко понять, что члены левой части уравнения (4.12) должцы быть оба O(1). Член $\left(\frac{k}{l^2}\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2}\right)$ в правой части должен быть мал, поскольку k мало, а l конечно. Если член

$$\left(\frac{k}{\delta_{H}^{2}}\right)\left(\frac{\partial^{2}T}{\partial\zeta^{2}}\right)$$

должен быть величиной того же порядка, что и член в левой части, то следует, что

$$\delta_H^2 = \operatorname{const} \frac{kl}{u}$$

с постоянной, имеющей порядок единицы. Поскольку u пропорциональна U — скорости вне динамического пограничного слоя, то

$$\frac{\delta_H}{l} = \text{const} \sqrt{\frac{k}{lU}},$$
 (4.13)

что можно сравнить с уравнением (2.51) для толщины динамического слоя:

$$\frac{\delta}{l} = \text{const} \sqrt{\frac{\gamma}{lU}}$$
.

Таким образом, если $\frac{Ul}{b}$ велико и если отношение $\sigma = \frac{v}{b}$ не очень отличается от единицы, то распределение температуры вблизи нагретой поверхности, над которой имеет место ламинарное течение жидкости, должно быть подобно распределению скорости, и оба пограничных слоя будут действительно одинаковы. Уравнение распространения тепла в слое есть

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$
 (4.14)

Количество $\frac{Ul}{k}$ называется числом Пекле (Pe), а отношение $\sigma = \frac{v}{k}$ числом Прандтля (Pr). Очевидно, что Pe = σ Re. Для воздуха вблизи поверхности земли о≈0.7.

Проблема теплоотдачи гладкой плоской поверхности, поддерживаемой при постоянной температуре, в ламинарный воздушный поток, направленный параллельно поверхности, рассматривалась Польгаузеном. Полученные им теоретические формулы удовлетворительно согласуются с имеющимися измерениями. Большой интерес для микрометеорологии представляет общирная проблема переноса тепла с плоской поверхности турбулентным воздушным течением, которая рассматривается ниже (п. 4.7).

4. 5. Свободная конвекция

Свободная конвекция означает подъем воздуха в гравитационном поле из-за местного повышения температуры, которое вызывает уменьшение плотности, а отсюда и направленную вверх силу, или плавучесть. Величина направленной вверх силы легко определяется по принципу Архимеда. Если g, является этой силой на единицу объема, то следует, что

$$g_z = g \rho_0 - g \rho = g \rho \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right),$$

где р есть плотность нагретого объема, а ро-плотность окружаю-Коэффициент расширения жидкости α определяется щей жидкости. по уравнению

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \left[1 + \alpha \left(T - T_0 \right) \right] ,$$

где *T* и *T*₀ — абсолютные температуры, соответствующие каждая р и ρ₀. Отсюда направленная вверх сила, вызванная плавучестью, есть

$$g_z = g_{\alpha \rho} \left(T - T_0 \right) = g_{\alpha \rho} \Delta T,$$

где $\Delta T = T - T_0$ является местным повышением температуры. Для идеального газа $p = R \rho T$, а отсюда

$$u = \frac{1}{T_0}$$

Эго значит, что при свободной конвекции ускорение, испытываемое нагретой частицей, есть $\frac{g\Delta T}{T_0}$. Коэффициент расширения, таким образом, появляется только умноженным на ускорение силы тяжести, т. е. в комбинации $g\alpha$.

Вышеуказанные выражения являются основными для теории. Если считать T_0 средним значением в тонком слое вблизи почвы, то плавучесть на любом уровне пропорциональна местному температурному перегреву.

Анализ свободной конвекции методом размерности. Приведенные рассуждения подсказывают, что потери тепла равномерно нагреваемой поверхностью за единицу времени благодаря свободной конвекции в находящемся над ней воздухе, могут быть выражены соотношением типа

$$q = h \Delta T$$
,

где ΔT — разность между температурой поверхности и температурой воздуха, находящегося в контакте с ней. Такое уравнение определяет коэффициент теплоотдачи h, но скрывает большинство реальных трудностей явления. Наблюдения показывают, что температура воздуха над нагретой поверхностью быстро меняется с высотой в непосредственной близости к поверхности; таким образом, ΔT не может быть определено однозначно без более глубокого рассмотрения. Найдено, что h так же, как и теплопроводность, далека от постоянной, и необходим дальнейший анализ, из которого будет получена полезная связь между h и другими переменными. (Те же самые замечания относятся к так называемому "уравнению Дальтона" для испарения, в котором сделана попытка выразить скорость переноса пара с влажной поверхности заменой ΔT разностью между давлением пара на поверхности и давлением окружающего воздуха и определением h как коэффициента переноса массы).

В учебниках по теплопроводности показано, что если записать

$$h = f(l, \Delta T, \rho, \mu, c_n, g, \lambda),$$

где *l* — характерная длина, а другие обозначения имеют их обычный смысл, то, применяя анализ размерностей, получим:

$$\frac{hl}{\lambda} = C \left(\frac{g \alpha l^3 \Delta T}{v^2} \right)^n \left(\frac{v}{k} \right)^m \,,$$

где C, m и n являются неизвестными числами, а α — коэффициентом объемного расширения. Для идеального газа $\alpha = \frac{1}{T}$, где T абсолютная температура газа вдали от нагретой поверхности. Отсюда

$$\frac{hl}{\lambda} = C \left(\frac{gl^3}{\sqrt{2}} \frac{\Delta T}{T}\right)^n \left(\frac{\nu}{k}\right)^m.$$

Количество $\frac{hl}{\lambda}$, называемое числом Нуссельта (Nu), выражает отношение температурного градиента у поверхности к среднему 134

температурному градиенту в жидкости¹. Группа $\frac{gl^3 \Delta T}{v^2 T}$, называемая числом Гразгофа (Gr), играет в свободной конвекции роль, до некоторой степени подобную числу Рейнольдса в вынужденной конвекции. Остающееся отношение $\frac{v}{k}$ уже определено как число Прандтля (Pr). Таким образом, уравнение переноса тепла при свободной конвекции может быть написано, как

$$\mathrm{Nu} = C \operatorname{Gr}^n \sigma^m.$$

Для воздуха вблизи поверхности земли число Прандтля приблизительно постоянно ($\sigma \approx 0.7$), а число Нуссельта в некоторой степени пропорционально числу Гразгофа.

Приведенный анализ является основой многих полуэмпирических исследований. В частности, Фишенден и Саундерс утверждают, что скорость потери тепла с единицы площади горизонтальной поверхности составляет

$$q = 6 \cdot 10^{-5} \Delta T^{\frac{5}{4}} \text{ кал. см}^{-2} \text{ сек.}^{-1}, \qquad (4.15)$$

где $\Delta T^{\circ} C$ — разность между температурой поверхности и температурой воздуха, находящегося значительно выше слоя с большим температурным градиентом. Это соотношение было исследовано для атмосферы Рамоном, который нашел удовлетворительное согласование между формулой и наблюдениями, если ΔT принять за разность между температурой почвы и температурой воздуха на расстоянии 4 футов над поверхностью. Если число Гразгофа превышает примерно 10⁵, то оказывается, что индекс $\frac{5}{4}$ необходимо заменить $\frac{4}{3}$, движение тогда имеет турбулентный характер.

Свободная конвекция от вертикальной стены. Рассмотрим двухразмерную вертикальную поверхность, определенную $y = 0, z \ge 0$, которая поддерживается при постоянной температуре T_{w} в атмосфере, температура которой в районах, удаленных от стены, T_0 . Пусть нагретый воздух (температура T') находится в тонком слое, примыкающем к стене, в пределах этого слоя имеется конвекционный поток, который предполагается слабым. Проблема является тогда проблемой движения несжимаемого ламинарного пограничного слоя с плавучестью, замещающей обычный градиент давления; все другие действия переменной плотности считаются второстепенными. Соответствующими уравнениями задачи являются

$$w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} = v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g \left(\frac{T' - T_0}{T_0} \right)$$
 (уравнение движения)
 $w \frac{\partial T'}{\partial z} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}$ (уравнение теплопроводности),
 $\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (уравнение непрерывности).

¹ lakob. Heat Transfer, vol. I, New-Jork, 1949.

Здесь w — вертикальная составляющая скорости и v — скорость, нормальная к стене, так что пограничные условия имеют вид $w = v = 0, T' = T_w$ на y = 0 и $w \to 0, T' \to T_0$, так как $y \to \infty$. Далее предполагается, что $T_w - T'$ мало по сравнению с T_0 .

. Эти уравнения были решены Польхаузеном. Было показано, что его решение хорошо согласуется с наблюдениями Шмидта и Бекмана. Результат Польхаузена для высоты z_0 над нижним краем поверхности

$$\mathrm{Nu} = \frac{qz_0}{k} = 0,359 \left[\frac{gz_0^3 (T_{xy} - T_0)}{\sqrt{2}T_0} \right]^{\frac{1}{4}} = 0,359 \,\mathrm{Gr}^{\frac{1}{4}},$$

где q теперь означает скорость переноса тепла с единицы площади для единичной разности температуры. Уравнения, приведенные выше, составляют основу для объяснения горных и долинных ветров в п. 7.6.

При использовании этих результатов должна быть соблюдена осторожность, так как число Грасгофа здесь не слишком велико. Если термический пограничный слой становится турбулентным, то

оказывается, что число Нуссельта пропорционально Gr³, вместо <u>1</u>

Gr⁴ для ламинарного пограничного слоя.

Возникновение свободной конвекции над горизонтальной поверхностью. Анализ свободной конвекции с вертикальной поверхности не представляет больших затруднений главным образом потому, что результирующее движение легко находится при условии, что оно не является турбулентным. Проблема, представляющая наибольший интерес в микрометеорологии, — это проблема свободной конвекции с горизонтальной поверхности, но она далеко не проста, и сложное движение жидкости, нагреваемой снизу, являлось предметом тщательного изучения первоначальных математических исследований Релея в 1916 г.

Физическая сущность процесса целлюлярного конвективного движения описана в исторических экспериментах Генри Бенара в 1900 г.¹

Если неглубокий горизонтальный слой жидкости равномерно нагревается снизу, то вначале движение жидкости отсутствует и тепло перемещается в верхние слои одной теплопроводностью. Это состояние может продолжаться неопределенно долго при условии, что разность температур в жидкости остается сравнительно небольшой, поскольку любая тенденция образовать вертикальные потоки тормозится вязкостью. Если температурный градиент в жидкости превышает некоторую величину, то начинается конвективное движе-

¹ Бенару справедливо приписывают честь этого открытия, но почти за 40 лет до него Джемс Томсон предположил, что некоторые расцветки на поверхности моря могут быть вызваны вертикальными целлюлярными течениями.

ние, а если слой не слишком глубок, то это движение принимает упорядоченный характер. Слой разделяется на ряд вертикальных "ячеек", более или менее одинаковых, внутри которых жидкость циркулирует снизу вверх и обратно. По крайней мере, в начальной стадии движение установившееся — отсутствует беспорядок, типичный для динамической турбулентности.

При рассмотрении сверху жидкость обычно имеет очень характерный вид: поверхность покрыта узором правильных многоугольников, обычно шестиугольников.¹

На значение этого явления для метеорологии было впервые указано Брантом и Лау в 1925 г. Впоследствии были проведены исследования Мола, Филлипса, Уокера и Чандры.² Механизм конвективных ячеек также изучался в связи с проблемой распределения тепла в свободной атмосфере, и отмечалось, что некоторые облачные узоры дают указания на существование этого типа движения в большом масштабе в атмосфере. Этот аспект проблемы здесь рассматриваться не будет.

Математический анализ ячеистого конвективного движения. В своем основном исследовании по динамике ячеек. Бенара Релей рассмотрел геометрию форм ячеек и сформулировал критерий для определения критического градиента плотности, при котором может существовать установившееся движение. С тех пор, как эта теоретическая проблема привлекла больщое внимание, наиболее важные результаты получены такими учеными, как Джеффрис, Пелью и Саусвелл.

Полное рассмотрение проблемы связано с громоздкими математическими выкладками и заняло бы здесь слишком много места.

Существенной особенностью является то, что Релей и все последующие ученые считают эту проблему проблемой динамической устойчивости движения. Предполагается, что медленное движение возникает из начального покоя с заданным распределением температуры, и основные уравнения, уравнения вязкого движения, проводимости и непрерывности исследованы для того, чтобы выяснить, какая зависимость должна существовать между параметрами для установившейся конвекции.

Допустим, что первоначально тепло перемещается только проводимостью. Если жидкость находится в состоянии покоя, давление

¹ Читатель, желающий увидеть это явление, очень легко может егополучить, налив некоторое количество летучей жидкости (бензина или четыреххлористого углерода) в неглубокую посуду и посыпав поверхностьпорощком алюминия. Быстрое испарение охлаждает верхнюю поверхностьжидкости, образуя большой перепад температуры между нижней и верхней поверхностями. Почти немедленно поверхность делится на многоугольники, и легко увидеть, что жидкость поднимается у центра каждого многоугольника и опускается у краев. Этот эксперимент может быть проделан и с папиросным дымом. При пропускании дыма в воздух, находящийся между двумя большими горизонтально расположенными стеклянными пластинками, нижняя пластинка нагревается.

² См. Брент "Физическая и динамическая метеорология", 2-е изд., стр. 219 (Кембридж, 1939).

изменяется только по вертикали, согласно гидростатическому уравнению (1.12), и если предположить, что температура постоянна во времени и однородна по горизонтали, то уравнение теплопроводности приводится к виду

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0,$$

так что, если $T_0(z)$ является начальной температурой, то

$$T_0 = T(0) + \beta z,$$

где T(0) — температура на z = 0, а β — температурный градиент (постоянный). Таким образом, первоначально предполагается, что во всем слое жидкости существует линейный температурный профиль.

Уравнение термического расщирения есть

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \alpha \beta z \right),$$

где ρ_0 — плотность, соответствующая T(0), и α — коэффициент расширения. Таково состояние, при котором начинается конвективное движение. Предполагается, что оно настолько медленно, что квадратами и произведениями компонент скорости u, v, w можно пренебречь. Приращение температуры T' предполагается также небольщим, так что, представив

$$T = T_0 + T' = T(0) + \beta z + T'$$

и пренебрегая всеми членами второго порядка малости в u, v, w, T', уравнения возмущенного движения можно привести к виду

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + w\beta = k \nabla^2 T'. \tag{4.16}$$

В период конвективного движения

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha \left(\beta z + T' \right) \right].$$

Отсюда следует, что изменение ρ , вызванное конвективным движением, составляет часть — $\alpha T'(1 - \alpha\beta z)$ первоначального значения и, таким образом, может быть не принято в расчет, если оно умножается на u, v, w или T'. Аналогично, если p' является изменением и давления, вызванным конвекцией, то изменением плотности, обусловленным p', можно пренебречь и, таким образом, следует, что ρ может рассматриваться как постоянная во всем движении, исключая те случаи, когда оно непосредственно выражает силу Архимеда. Это значит, что расширение жидкости нагреванием не имеет динамического значения, за исключением одного уравнения (для w), где она проявляется в качестве внешней силы, т. е. когда α умножается на g.

Уравнения Новье-Стокса для конвективного движения, таким образом, принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g \alpha T'$$
(4.17)

жде р — постоянная величина. Недостающим уравнением является уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$
(4.18)

В результате перестановки u, v, p' и T' из уравнения (4.16) в уравнение (4.18) получается дифференциальное уравнение шестого порядка для w

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k \nabla^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \nabla^2 w + \beta g \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \quad (4.19)$$

которое составляет основу для последующего анализа.

Нет надобности в точной формулировке граничных условий. Трудность возникает главным образом из того факта, что некоторые соотношения уже существуют между температурой и компонентами скорости, поскольку они связаны уравнениями. У твердой поверхности $w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, а у свободной поверхности $\frac{\partial a}{\partial z}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$ исчезают и, следовательно, $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$ на основании уравнения непрерывности; таким образом, условия на свободной поверхности есть $w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$. Если температура остается постоянной на обеих границах, то на этих поверхностях T' = 0.

Дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка (4.19) относительно *чо* можно решить методом "разделения переменных", если искать

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) F(\boldsymbol{z}) e^{\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{t}} . \qquad (4.20)$$

В этом выражении f(x, y) характеризует боковую геометрию ячеек. F(z) означает изменение w с высотой и поэтому зависит от граничных условий. Точные выражения для f(x, y) известны для «квадратных и шестиугольных ячеек, но они не необходимы для определения критерия устойчивости. Параметр σ в показательном члене вообще является комплексной величиной, поскольку движение может убывать (действительная часть σ отрицательна), колебаться в ограниченных пределах (действительная часть σ нулевая) или безгранично возрастать (действительная часть σ положительна). Конвекция предполагает, что движение не должно затухать, и легко понять, что конвекция может поддерживаться только тогда, когда σ — действительная величина. Таким образом, неустойчивость будет возникать при $\sigma \ge 0$; критические условия соответствуют $\sigma = 0$, и проблема сводится к определению режима установившегося движения. При этих упрощениях уравнение (4.19) принимает вид

 $abla^{6}w = - rac{eta g lpha}{k
u} \left(rac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + rac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}}
ight).$

В качестве вертикальной координаты принимается величина $\zeta = \frac{z}{h}$, где h — глубина всей жидкости. В преобразованном уравненим постоянные сгруппированы в форму $\frac{-\beta g \alpha h^4}{k^{\gamma}}$, и анализ сводится к нахождению самого нижнего значения $\frac{-\beta g \alpha h^4}{k^{\gamma}}$, для которого может иметь место медленное установившееся движение¹.

Таким образом, $\frac{-\beta g \alpha h^4}{k \nu}$, называемое числом Релея и обозначаемое через Ra, является (безразмерным) характеристическим числом.

Окончательный результат таков, что если Ra ниже некоторого критического значения, то состояние равновесия устойчиво, и любые зарождающиеся конвективные движения гасятся совместными действиями вязкости и проводимости. Значение критического числа зависит от физических условий задачи, т. е. от существа пограничных условий, а не от формы ячеек. Основные результаты, достигнутые до сих пор, приводятся ниже.

Природа границ	Критическое значение	Автор
Две свободные	$\frac{27\pi^4}{4} = 657,5$	Релей
Одна твердая, одна сво-	1100,7	Пелью и Саусвелл
Две твердые.	1707,8	Джеффрис

Критическое значение числа Релея

Приложение к микрометеорологии. Физическая интерпретация этих результатов легко получается, если имеется в виду, что

$$\beta = \frac{T(0) - T(h)}{h} = \frac{\Delta T}{h},$$
$$\alpha = \frac{\rho(h) - \rho(0)}{\rho(0) \Delta T} = \frac{\Delta \rho}{\rho(0) \Delta T},$$

¹ Для уточнения см. Pellew и Southwell [8]; эта проблема рассматривается также в книге leffreys. Methods of Mathematical Physics, pp. 413 ff. Cambridge, 1947.

где T(h), $\rho(h)$ и T(0), $\rho(0)$ означают температуры и плотности на верхней и нижней границах соответственно, в начальной стадии. Результат Релея, таким образом, означает, что конвекция начинается, если

$$\frac{\Delta \rho}{\rho(0)} > \operatorname{Ra}_{c} \frac{k \nu}{g h^{3}}, \qquad (4.21)$$

где Ra_c есть одно из критических значений числа Релея, приведенных выше. Если *h* мало, а производными от р выше первого порядка можно пренебречь, то

$$\rho(h) = \rho(0) + h \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_0$$

или

$$\frac{\Delta \rho}{\rho(0)} = \frac{h}{\rho(0)} \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_0.$$

Для идеального газа, покоющегося в гравитационном поле, имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{T}\left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{R}\right)$$

(гл. 1). Величина $\frac{g}{R}$ есть так называемый автоконвективный градиент. Его значение для сухого воздуха составляет 3,4 · 10⁻⁴ ° С см⁻¹. Таким образом, критерий может быть выражен в форме

$$-\left(\frac{dT}{dz}+\frac{g}{R}\right) > \operatorname{Ra}_{c}\frac{kv}{gh^{4}}T(0).$$

Итак, конвекция будет иметь место, когда разность между рассматриваемым градиентом и автоконвективным градиентом достигает некоторого значения. Поскольку температурный профиль в начальной стадии считается линейным, отношение (4.21) может быть заменено

$$\frac{\Delta T}{T(0)} > \operatorname{Ra}_{c} \frac{kv}{gh^{3}} - \frac{hg}{RT(0)} \,.$$

Для таких газов, как воздух или углекислый газ, если h не превышает нескольких метров; членом $\frac{hg}{RT(0)}$ можно пренебречь, когда T(0) порядка 300° K, т. е. при нормальных земных температурах. Обычно форма критерия такова:

$$\frac{\Delta T}{T(0)} > \operatorname{Ra}_{c} \frac{k_{\nu}}{gh^{3}}.$$
(4.22)

Результат Релея в этой форме со значением $Ra_c = 1708$ (Джеффрис), соответствующим слою газа, ограниченному сверху и снизу горизонтальными твердыми поверхностями, был исследован К. Чандрой для воздуха и Д. Т. Е. Дассанаяке (не опубликовано) для углекислого газа. Эти эксперименты показывают, что в действительности явление гораздо сложнее, чем предполагается в анализе Релея. Чандра и Дассанаяке нашли, что возможны, по крайней мере, двавида установившегося движения при возникновении конвекции. Еслиглубина слоя превышает некоторое значение, зависящее от природыгаза, то начинается обычный ячеистый тип конвекции для значений ΔT , которые достаточно хорошо согласуются с критерием (4.22). Если, однако, глубина слоя меньше, чем эти критические величины, то при значительно меньших величинах ΔT , по сравнению с требуемым критерием Релея — Джеффриса, начинается другой, совершенно отличный тип конвекции, названный Чандрой столбчатой конвекцией.

Переход от столбчатого к ячеистому типу движения имеет место, когда температура нижней поверхности и разность температур между границами значительно возрастает.

Недавно эта проблема была пересмотрена Сеттоном, который указал, что одно из основных требований анализа Релея — установление линейного температурного профиля по всей глубине жидкости — маловероятно, если скорость нагрева нижней поверхности не очень медленна. Рэмдас и Молуркар в исследовании, подсказанном наблюдениями миражей вблизи нагретой земли, нашли, что при установившейся свободной конвекции существует неглубокий поверхностный слой, в котором температура падает с высотой оченьбыстро и равномерно; в вышележащем слое температурный градиент много меньше.

Область приблизительно постоянного градиента имеет толщину около 1 см или меньше. Таким образом, возможно, что возникновение свободной конвекции обычно начинается с неустойчивости движения в неглубоком пограничном слое, толщина которого не зависит от расстояния между верхней и нижней границами.

На основании анализа размерностей, используя уравнение Фишендена—Саундерса для теплопроводности в установившейся свободной конвекции (4.15), Сеттон нашел, что толщина слоя приблизительноравна

$$\delta = (\Delta T)^{-\frac{1}{4}},$$

где ΔT измеряется в градусах С. Критерий потери устойчивости в этом слое должен включать только отношение абсолютных температур нижней и верхней поверхностей. Столбчатая форма конвекции, найденная Чандрой, имеет место, когда отношение $\frac{T(0)}{T(h)}$ достигает величины между 1,02 и 1,03 (приблизительно), независимо от природы газа или расстояния между границами. Переход от столбчатой формы к ячеистой имеет место, когда ΔT удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Delta T}{T(0)} = \operatorname{const}\left(\frac{k\nu}{g\hbar^3}\right)^{\frac{4}{5}}$$

Это исследование более точно характеризует условия возникновения свободной конвекции в слое газа, ограниченном двумя горизонтальными поверхностями. Критерий Релея—Джеффриса означает, что $\Delta T \rightarrow 0$, если $\hbar \rightarrow 0$. Если слой достаточно глубок, то ΔT очень быстро достигает соответствующего критического значения критерия Релея—Джеффриса. Конвекция тогда начинается с целлюлярной формы и оказывается, что если эта форма осуществляется, то переход к любому другому типу установившегося движения невозможен. Если, однако, глубина слоя меньше, чем некоторая критическая величина, то критерий, найденный Сеттоном, удовлетворяется прежде чем ΔT достигает значения, требуемого формулой Релея—Джеффриса, и при таких обстоятельствах начинается столбчатая форма. При длительном нагревании нижней поверхности линейный температурный профиль устанавливается во всем слое, а столбчатая конвекция переходит в целлюлярную.

Применение к атмосфере. Результаты Релея были использованы для объяснений существования очень больших градиентов температуры в воздухе вблизи земной поверхности в жаркий день. Эти теории основаны на предположении, что критерий Релея годится для турбулентного движения, если k и \vee заменены соответствующими характеристиками для турбулентного потока. Трудно согласиться с такой трактовкой, поскольку начальные условия, принимаемые Релеем и другими учеными, не выполняются, и имеются иные трудности, связанные с изменением по высоте вихревой проводимости и вихревой вязкости.

Малеркар развил теорию, по которой распределение температуры вблизи нагретой поверхности может быть объяснено лучистым теплообменом, причем разность температур между верхней и нижней поверхностями — это разность, найденная экспериментально. Рассматриваемая проблема расчленяется им на две главные части:

1. Изучение природы температурного профиля, связанного с данной температурной разностью.

2. Определение максимальной температурной разности на данном интервале высот с заданным температурным профилем.

Температурный профиль, принимаемый Малеркаром, имеет следующий вид:

$$\frac{ah\sin b(h-z)}{\sin bh}$$

где h — толщина слоя, а a и b — постоянные. Малеркар находит, что критерий устойчивости зависит от формы температурного профиля и что более высокие значения ΔT могут сохраняться, когда профиль представляется кривой с вогнутостью вверх, чем в том случае, когда он прямолинеен. Профиль, описываемый гиперболическим синусом, использованный Малеркаром, хорошо согласуется с измерениями температуры вблизи нагретой поверхности, если постоянные a и b выбраны подходящими. Проблема возникновения свободной конвекции и сохранения больших температурных градиентов не была удовлетворительно разрешена даже для относительно простых условий, создаваемых в лаборатории. Соответственная проблема для атмосферы гораздо сложнее из-за наличия динамической турбулентности и действия шероховатости земли. Вопрос о величине температурных градиентов, которые могут существовать в жаркую погоду вблизи земли, далек от академического и имеет большое значение для изучения жизни животных и растений, но едва ли можно ждать удовлетворительного рецения до тех пор, пока предмет не будет изучен в лабораторных условиях.

4. 6. Проблемы фикковской диффузии

Типичное фикковское уравнение — уравнение теплопроводности «в твердом теле — привлекало внимание математиков прошлого столетия, в результате чего изучение этого линейного параболического уравнения принадлежит как к чистой математике, так и к приклад-Техника получения решений не нуждается в детальном расной. -смотрении, поскольку эта сторона подробно излагается в курсах математической физики. Вместо этого основное внимание будет обращено на метеорологическую интерпретацию некоторых хорошо знакомых результатов¹. Приводимые ниже результаты выражены через обычные характеристики теплопроводности, в качестве зависимой переменной принята температура. Удобно выбрать некоторую фиксированную температуру за нулевую, но это не означает, что температура в этом случае обязательно является точкой измерения на стоградусной шкале или какой-либо другой физически значащей температурой. Необходимо выразить переменную температуру как разность между ней и любой удобной для фиксации температурой, чтобы избежать ненужных осложнений в формулах.

Основные проблемы в большинстве своем удобно классифицировать в зависимости от типа пограничного условия.

Задана температура поверхности. Полубесконечная среда с фиксированной температурой поверхности и заданным начальным распределением температуры. Это можно рассматривать как исследование фикковской диффузии в атмосфере, ограниченной снизу плоской поверхностью (z = 0), поддерживаемой при постоянной (нулевой) температуре. Атмосфера простирается до бесконечности в сторону положительного значения z; в момент t=0 распределение температуры есть F(z), где F—известная функция. Задача состоит в определении температуры для всех z > 0для любого момента времени t > 0.

¹ Общирный обзор методов решения фикковского уравнения дан Сагslaw и Jager. Классические решения и применения методов математики даны в работе Ingersoll, Zobel и Ingersoll. Heat Conduction with Engineering and Geological Applications. Mc Craw-Hill, 1948.

Математически проблема сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

с начальным условием

T = F(z) при t = 0, z > 0

и граничным условием

$$T = 0$$
 при $t > 0$, $z = 0$.

Частным решением уравнения является

$$T = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4kt}\right),$$

а отсюда могут быть выведены другие решения на основании свойств линейных уравнений: сумма любого числа решений является также решением. Таким образом,

$$T = \frac{1}{2(\pi kt)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4kt}\right] d\zeta$$

является решением, удовлетворяющим уравнению при $t \to 0$, $T \to F(z)$. Для удовлетворения того условия, что плоскость z должна оставаться при нулевой температуре, продолжим решение в отрицательную сторону оси z и потребуем, чтобы в той области удовлетворялось начальное условие при $z = -\zeta$ ($\zeta > 0$) $T = -F(\zeta)$. Искомое решение, которое удовлетворяет начальному и граничному условиям, легко получить на основании решений в обоих полупространствах¹, а именно,

$$T(z, t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{1}{2}}} \int_{0}^{\infty} F(\zeta) \left\{ \exp\left[-\frac{(z-\zeta)^{2}}{4kt}\right] - \exp\left[-\frac{(z+\zeta)^{2}}{4kt}\right] \right\} d\zeta \quad (4.23)$$

Когда $F(z) = T_0 =$ постоянной, из (4.23) вытекает важный частный случай. Решение при этом принимает вид

$$T = T_0 \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{(4kt)}} . \tag{4.24}$$

Таким образом, распределение температуры зависит только от безразмерной комбинации $\frac{z}{V(4 \, k t)}$.

Как пример использования этого решения рассмотрим следующую проблему: воздух, достигший определенного распределения температуры при продвижении над нагретой землей, входит в контакт с морем, которое может считаться границей с постоянной (нулевой) температурой. Требуется найти распределение температуры воздуха над морем. Температурный профиль воздушной массы дается в (4.23)

10 О. Г. Сеттон

¹ Карслоу и Джеджер (см. стр. 40).

как функция высоты и времени, которое прошло с того момента, когда воздух пришел в контакт с морем. Если ветер установившийся и постоянный с высотой, время t может быть заменено через $\frac{x}{u}$, где u — скорость ветра, а x — новая независимая переменная, указывающая расстояние от берега. Уравнение тогда принимает вид

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

с начальным условием

$$T = F(z)$$
 при $x = 0, z > 0$

и граничным условием

T = 0 на z = 0 при x > 0.

Для $F(z) = T_0 =$ постоянной решение есть

$$T(x, z) = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{zu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(4kx)}}\right). \tag{4.25}$$

Интеграл вероятности стремится к нулю, когда $x \to \infty$, выражая тот факт, что в конечном итоге вся воздушная масса достигнет температуры поверхности моря. Это свойство могло бы быть предсказано вначале, но в этом нет необходимости, поскольку проблема полностью определена начальным и граничным условиями, приведенными выше.

Решение (4.25) показывает, что действие поверхности, строго говоря, чувствуется на всех высотах. На практике принято считать, что действие простирается только до некоторой конечной высоты Z, определенной условием, согласно которому действие поверхности фактически прекращается, когда

$$\frac{T(x,t)}{T_0} = \frac{1}{10}$$
.

Поскольку eff (θ) == 0,1, когда $\theta \approx 0,09$, то следует, что верхняя граница слоя, подвергшегося трансформации, выражается уравнением

$$Z^2 = 0,32 \frac{kx}{u} , \qquad (4.26)$$

т. е. параболой с вершиной у x = z = 0. Это показано на рис. 14.

В действительности установлено, что диффузия тепла в атмосфере существует обычно не вследствие молекулярной проводимости, а благодаря турбулентности и не подчиняется уравнению Фикка (см. гл. 6). Тем не менее, приведенное выше рассуждение представляет собой первое приближение к действительности, если k заменено постоянной вихревой проводимостью K, которая на несколько порядков больше, чем k (а также является функцией скорости ветра). Таким образом, можно рассматривать (4.26) как определение слоя, внутри которого турбулентное перемешивание эффективно в формировании температурного профиля. Это является основой метода, использованного

Тейлором в его рассуждениях о вертикальном распределении температуры в воздухе вблизи Ньюфаундленда.

Как дальнейшее важное применение этого решения рассмотрим двухразмерную проблему испарения при ветре, постоянном с высотой, и постоянном коэффициенте диффузии К. Граничное условие на



Рис. 14. Образование инверсии при ветре, дующем с суши на море.

z = 0 нуждается в специальном рассмотрении и из очевидных физических соображений непосредственно не следует. Граничным условием, которое приводит к результатам, согласующимся с наблюдениями, является равенство концентрации пара на увлажненной поверхности насыщающей концентрации¹. Если испаряющая поверхность определена как $0 \le x \le x_0$, z = 0, то уравнение есть

$$u\frac{\partial \chi}{\partial x} = K\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$$

с условиями

$$\chi = 0$$
 для $x = 0, z > 0,$
 $\chi = \chi_s$ на $z = 0, 0 \leqslant x \leqslant x_0.$

Решением является

$$\chi = \chi_s \operatorname{erfc}\left(z \sqrt{\frac{u}{Kx}}\right), \qquad (4.27)$$

где erfc x — функция дополнения к интегралу вероятности

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\theta^{2}} d\theta.$$

Уравнение (4.27) годится только применительно к увлажненной площади, где местная скорость испарения на единицу площади есть

$$K\rho\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_{z=0} = \chi_{s}\rho \sqrt{\frac{Ku}{x}}, \qquad (4.28)$$

¹ Для рассмотрения граничных условий в проблемах испарения см. гл. 8.

10*

а полная скорость испарения от x = 0 до $x = x_0$ пропорциональна, таким образом, $\sqrt{x_0}$. Это приводит к двум важным выводам: 1) что испарение не просто пропорционально площади увлажненной поверхности и 2) что местная скорость испарения убывает с расстоянием от края (Джеффрис). Обсуждению этой проблемы отведено большое место в гл. 8.

Полубезграничная среда, температура поверхности которой является известной периодической функцией времени. Предположим, что температура поверхности $T(0,t) = T_1 \cos(\omega t - \varepsilon)$ $(T_1 = \text{const})$, а начальная температура нуль. Можно показать, что требуемое решение уравнения теплопроводности¹ есть

$$T(z, t) = \frac{2T_1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{\sqrt{(kt)}}^{\infty} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z^2}{4k\mu^2}\right) - \varepsilon\right] e^{-\mu^2} d\mu.$$

Это решение может быть выражено в форме

$$T(z, t) = \frac{2T_1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\frac{z}{2}/\sqrt{(kt)}} \right] \cos \left[\omega \left(t - \frac{z^2}{4k\mu^2} \right) - \varepsilon \right] e^{-\mu^2} d\mu.$$

Можно также показать, что интеграл с бесконечным пределом равен

$$T_1 \exp\left(-z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \cos\left[\omega t - \left(\varepsilon + z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\right],$$
 (4.29)

что представляет затухающую волну, амплитуда и фаза которой меняются с высотой. Интеграл с конечным пределом обозначает перемещающееся возмущение, первоначально вызванное колебанием температуры у поверхности. Если время t велико для того, чтобы величина <u>2 V (kt)</u> была достаточно малой, второй интеграл стремится к нулю; тогда решение дается выражением (4.29), и это является обычно принятой формой. Предположение, что t может быть принято неограниченно большим, подразумевает, что эта волна является одной из ряда однородных волн, которые существовали достаточно долго, чтобы исключить нестационарность и установить почти квазистационарное состояние. Не ясно, годится ли это предположение для нижних слоев атмосферы даже по отношению к температурному полю в течение долгого периода хорошей погоды, потому что, хотя в такие дни температура поверхности земли между восходом и заходом может быть приблизительно представлена выражением типа $T_1 \cos(\omega t - \varepsilon)$, это выражение не описывает ночных температур поверхности. Поэтому применение решения (4.29) к атмосфере вызывает некоторые сомнения, и при подробном рассмотрении должно

¹ Карслоу и Джеджер, см. стр. 46.
быть исследовано влияние слагаемого, выражающего нестационарность.

Если 4.29 принято как искомое рещение, то следует, что:

1) амплитуда волны уменьшается с ростом высоты, как

$$\exp\left[-z\sqrt{\left(\frac{\omega}{2k}\right)}\right],$$

2) фаза волны запаздывает, как $z \sqrt{\left(\frac{\omega}{2k}\right)}$. Это значит, что время максимальной температуры наступает позднее, с ростом высоты.

Решение (4.29) было использовано многими учеными в микрометеорологии. Очевидно, что если измерения амплитуды и времени наступления максимальной температуры сделаны на различных высотах, то может быть подсчитана эффективная проводимость. Тейлор, Шмидт, Джонсон, Бест и др. применили это решение именно таким образом для нижних слоев атмосферы, чтобы определить порядок величины вихревой проводимости, если ее принять одинаковой на различных высотах.

Нет сомнения, что наблюденные температуры могут быть приблизительно представлены затухающей волной с изменяющейся фазой, но это решение имеет недостатки в других отношениях. Данная проблема рассматривается в гл. 6; здесь можно считать, что (4.29) дает качественную характеристику изменения суточной температурной волны с высотой.

То же самое решение может быть применено с гораздо большим успехом к проблеме проникновения суточной температурной волны в почву. Нетрудно обобщить результат для случая, когда температура представляется рядом Фурье. Если

$$T(0, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos(n\omega t - \varepsilon_n),$$

то решение есть

$$T(z, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \exp\left(-z \sqrt{\frac{n\omega}{2k}}\right) \cos\left[n\omega t - \left(\varepsilon_n + z \sqrt{\frac{n\omega}{2k}}\right)\right].$$

Этот результат следует из линейности уравнения и граничных условий, именно в таких случаях сумма любого числа решений также является решением.

Задан тепловой поток. Полубезграничная среда с потоком через z = 0, постоянным или заданным в виде функций времени, при заданных начальных условиях. Тепловой поток через любую плоскость по определению является

$$f = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Тепловой поток удовлетворяет тому же самому дифференциаль-

ному уравнению, что и Т. а именно:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \, .$$

Если поток через z = 0 постоянен и равен f_0 , то искомое решение является простой модификацией решения уравнения (4.24), а именно:

$$f = f_0 \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{(4kt)}}$$
.

Интегрируя это выражение, имеем

$$T(z, t) = \frac{2f_0}{\lambda} \left[\left(\frac{kt}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4kt} \right) - \frac{1}{2} z \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{(4kt)}} \right]. \quad (4.30)$$

Это решение было использовано Брантом при рассмотрении падения температуры земной поверхности в ясную спокойную ночь, когда земля теряет тепло с приблизительно постоянной скоростью на единицу площади. Температура поверхности тогда выражается в виде

$$T(0, t) = \frac{2f_0}{\lambda} \left(\frac{kt}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$
 (4.31)

Таким образом, падение температуры земной поверхности в ясную спокойную ночь должно быть представлено на температурно-временном графике параболической кривой, при условии, что нет большого выделения скрытой теплоты благодаря конденсации. Этой проблеме отведено большое место в гл. 5.

Если предположить, что температура среды всюду равна нулю при t = 0, а поток тепла через z = 0 дается известной функцией $\varphi(t)$, то последующий температурный профиль имеет вид¹:

$$T(z, t) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{t} \frac{\varphi(t-t')}{Vt'} \exp\left(-\frac{z^2}{4kt'}\right) dt'. \quad (4.31a)$$

Полубезграничная среда, состоящая из двух слоев, с различными коэффициентами теплопроводности; поверхность поддерживается при постоянной температуре. В ясную ночь быстрое охлаждение земной поверхности благодаря излучению часто вызывает затухание турбулентности вблизи земной поверхности. В любой момент времени после заката можно предполагать наличие внизу слоя холодного воздуха, в котором тепло распространяется только благодаря молекулярной проводимости, и над ним слоя теплого воздуха, в котором турбулентный обмен более активен. Нижний слой разбухает со временем, и проблема заключается в определении скорости, с какой поверхность раздела (температура которой принимается за нулевую) движется вверх. С этой целью допускается, что

¹ См. стр. 57.

вихревой перенос тепла в более теплом воздухе может быть представлен постоянным коэффициентом вихревой проводимости.

Пусть T_0 будет температура (постоянная) земной поверхности z=0. Если T_1 и k являются температурой и температуропроводностью слоя воздуха от земной поверхности до верхней границы Z слоя холодного воздуха, то

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \quad 0 < z < Z(t), \qquad (4.32)$$
$$T_1 = T_0 \quad \text{Ha} \quad z = 0$$

и если T_2 и K — соответствующие величины для турбулентного воздуха, то

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \quad z \geqslant Z(t).$$
(4.33)

На больших высотах предполагается, что $T_2 \longrightarrow T_3$ (постоянная). На поверхности раздела

$$T_{1} = T_{2} = 0$$

$$kc_{p}\rho_{1}\left(\frac{\partial T_{1}}{\partial z}\right) = Kc_{p}\rho_{2}\left(\frac{\partial T_{2}}{\partial z}\right)$$
Ha $z = Z$
(4.34)

Уравнение (4.32) и его граничное условие удовлетворяются выражением типа

$$T_1 = T_0 + A \operatorname{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{(4kt)}}\right],$$

где А — постоянная величина. Уравнение (4.33) удовлетворяется

$$T_2 = T_3 + B \operatorname{erfc}\left[\frac{z}{\sqrt{(4Kt)}}\right]$$
,

где *В* — другая постоянная. Из первого условия в (4.34),

$$A \operatorname{erf}\left[\frac{Z}{\sqrt{(4\kappa t)}}\right] = -T_{0}$$

$$B \operatorname{erfc}\left[\frac{Z}{\sqrt{(4\kappa t)}}\right] = -T_{3}$$
(4.35)

Поскольку уравнение (4.35) должно удовлетворять всем значениям t, то следует, что аргументы интеграла вероятности должны быть независимы от t, т. е.

$$Z = C \sqrt{t}$$
,

где C — постоянная, которую следует определить. Теоретическое определение C требует использования второго условия в (4.34), ведущего к трансцендентному уравнению, которое может быть решено только приближенно. Ввиду недостаточно обоснованных пред-

положений, которые были сделаны относительно проводимости в двух слоях, такие вычисления здесь вряд ли уместны. Основным результатом является то, что толщина нижнего слоя возрастает пропорционально квадратному корню из времени. Наблюдения Джонсона и Хейвуда относительно толщины "инверсионного слоя" в ясную ночь (аналогичное явление) показывают, что приведенные теоретические соотношения сравнительно хорошо согласуются с фактами.

Этот пример важен для практики. Он показывает, как граница приземного слоя воздуха в ясную ночь постепенно перемещается и как скорость углубления слоя может быть оценена при условии, что постоянная С определена из наблюдений.

Наиболее известным примером, относящимся к проблеме этого типа, является процесс промерзания почвы или замерзание озера. В этом случае второе условие в (4.34) должно быть заменено через

 $k_1 c_p \rho_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right)_z - k_2 c_p \rho_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_z = L \rho_1 \frac{dZ}{dt} ,$

т. к. если L является скрытой теплотой плавления, то $L\rho_1$ — количество тепла, освобождающееся на поверхности раздела при перемещении ее на расстояние dZ. Это тепло уносится благодаря проводимости.

Рассмотренная проблема была разрешена Нейманом и Стефаном¹, решение которых показывает, что толщина слоя льда возрастает пропорционально корню квадратному из времени.

Математически эта проблема отличается от обычных проблем теплопроводности тем, что в ней не даны начальные условия. Можно показать, что в проблеме Неймана начальные условия задаются в виде изотермии (T₃) во всей среде.

Метод источников. Метод источников, открытый Кельвином, находит свое естественное применение в метеорологии при проблемах, касающихся диффузии вещества. Метод основан на существовании решения уравнения диффузии, характеризующегося тем, что при $t \longrightarrow 0$ решение равно бесконечности в одной точке и нулю всюду в остальном пространстве, причем полное количество тепла по всему пространству в любой момент времени конечно. Такое решение имеет простую физическую интерпретацию, оно описывает температуру безграничного твердого тела, обусловленную ограниченным количеством тепла, мгновенно сообщаемым отдельной точке. Из этого решения путем интегрирования возможно образование других решений, представляющих непрерывные источники или источники, распределенные вдоль линий или на поверхностях.

Этот метод развивается здесь по отношению к источникам вещества (таким как дым или газ), но так же хорошо может применяться и к источникам тепла, если концентрацию вещества рассматривать как эквивалент температуры.

¹ См. Ииджерсолл, Зобелл и Инджерсолл, гл. 10.

Мгновенный точечный источник. Количество вещества O г возникает при t = 0 и подвергается рассеиванию.

Дифференциальное уравнение при сферической симметрии есть

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = k \nabla^2 \chi = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right),$$

где χ — концентрация, равная плотности взвешенного вещества (в граммах на кубический сантиметр) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ с началом координат в источнике, а k — коэффициент диффузии.

Краевые условия следующие:

$$\chi \rightarrow 0$$
 при $t \rightarrow 0, r > 0,$
 $\chi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty,$

наряду с ними должно выполняться условие непрерывности

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi \, dx \, dy \, dz = Q,$$

которое выражает тот факт, что вещество в процессе диффузии не создается и не исчезает. Решением является

$$\chi(x, y, z, t) = \frac{Q}{8(\pi kt)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4kt}\right).$$
 (4.36)

Это решение было использовано Робертсом, чтобы представить диффузию клуба дыма, образованного взрывом. Предполагается, что разбухание клуба дыма не зависит от скорости ветра, облако просто переносится ветром, так что система координат перемещается вместе с ветром. Робертс также допускает, что k можно отождествлять с коэффициентом вихревой диффузии.

Если начало координат в точке (x', y', z'), то решением является

$$\chi(x, y, z, t) = \frac{Q}{8(\pi kt)^{\frac{2}{2}}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4kt}\right].$$

М г новенный линейный и плоский источники (неограниченные). Решение для мгновенного линейного источника мощности Q г см⁻¹, параллельного оси y и проходящего через точку (x', y', z'), достигается интегрированием вдоль линии мгновенных точечных источников мощности Qdy' в точке y'. Решением является

$$\chi(x, z, t) = \frac{Q}{8(\pi kt)^{\frac{3}{2}}} \exp \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4kt} \right] dy' = \frac{Q}{4\pi kt} \exp \left[-\frac{(x-x')^2 + (z-z')^2}{4kt} \right].$$
(4.37)

Аналогично распределяя линейные источники мощностью Qdx' по плоскости z = z', можно интегрированием получить решение для мгновенного плоского источника, параллельного плоскости z = 0 и проходящего через (0,0, z'). Решение есть

$$\chi(z, t) = \frac{Q}{\sqrt{(4\pi kt)}} \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4kt}\right].$$
 (4.38)

Непрерывный точечный источник. Если среда находится в покое, то решение для постоянно действующего в точке (x', y', z') источника в период от t = 0 до t = t достигается без труда интегрированием по времени выражения для мгновенного точечного источника. Если

$$r^{2} = (x - x')^{2} + (y - y')^{2} + (z - z')^{2},$$

$$\chi(x, y, z, t) = \frac{Q}{8(\pi k)^{\frac{3}{2}}} \int_{0}^{t} \exp\left[-\frac{r^{2}}{4k(t-t')}\right] \frac{dt'}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi kr} \operatorname{erfc} \frac{r}{\sqrt{(4kt)}}.$$

Когда $t \longrightarrow \infty$, выражение сокращается до

$$\chi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi kr}.$$

Это выражение соответствует неограниченно долго действующему ' источнику.

Проблемой, представляющей огромный интерес в метеорологии из-за ее значения при расчетах атмосферной загрязненности, является задача о непрерывном точечном источнике при наличии ветра. В последующем анализе предполагается, что скорость ветра всюду постоянна и что распространение дыма может быть представлено уравнением Фикка с коэффициентом вихревой диффузии K. Ограничения, допущенные этим предположением, рассматриваются в гл. 8.

Решение для непрерывного точечного источника в движущейся среде может быть получено из решения для мгновенного точечного источника, если взамен системы координат, движущейся по направлению ветра вместе с клубом, ввести систему координат, закрепленную в пространстве. Направление оси x выбирается по ветру, а источник Q г сек⁻¹ располагается в начале координат (рис. 15). В закрепленной системе координат координаты (x - ut, y, z) заменяют координаты (x, y, z) движущейся системы. Непрерывный точечный источник эквивалентен ряду элементарных точечных мгновенных источников, так как концентрация в любой точке соответствует суммарному действию элементарных клубов. В момент t' источник дает Qdt' г вещества, но из-за ветра элемент воздуха, который находится в (x, y, z, t), пришел из [x - u(t - t'), y, z, t'];

Т0

концентрация в (x, y, z, t), благодаря мгновенному клубу с содержимым Qdt', возникшим в момент t', является на основании (4.36)

$$d\chi = \frac{Q \, dt'}{8 \left[\pi K \, (t-t')\right]^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{[x-u \, (t-t')]^2 + y^2 + z^2}{4K \, (t-t')}\right\}.$$
 (4.39)

Полная концентрация в (x, y, z, t) в облаке, созданном непрерывным точечным источником, есть сумма всех таких вкладов, т. е. равняется интегралу (4.39) по времени (t') от t'=0 до t'=t.



Рис. 15. Система координат при непрерывном точечном источнике.

Если источник действует неограниченно долго, то пределы интегрирования будут от t' = 0 до $t' = \infty$; этот случай является более важным для практики.

Решение может быть легко получено после некоторых преобразований:

$$\chi(x, y, z) = \frac{Q \exp\left(\frac{ux}{2K}\right)}{2K\pi^2 r} \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\tau^2 - \frac{u^2 r^2}{16K^2 \tau^2}\right) dr = \frac{Q}{4\pi K r} \exp\left[-\frac{u}{2K}(r-x)\right].$$
(4.40)

Наблюдения над дымовыми облаками показывают, что если ветер не очень слабый, облака принимают форму длинного тонкого пера, причем наибольший интерес представляет концентрация в точках, не слишком удаленных от оси облака (y = z = 0). В большинстве практических приложений $\frac{(y^2 + z^2)}{x^2}$ может рассматриваться как величина, квадрат которой пренебрежимо мал. В этом случае

$$-\frac{u(r-x)}{2K} = -\frac{u}{2K} \left[x \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} - x \right] \approx -\frac{u(y^2 + z^2)}{4Kx}$$

Отсюда для всех, кроме очень слабых, ветров

$$\chi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi Kr} \exp\left[-\frac{u(y^2 + z^2)}{4Kx}\right].$$
 (4.41)

На практике это выражение часто заменяется через

$$\chi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi K x} \exp\left[-\frac{u(y^2 + z^2)}{4K x}\right]$$
(4.42)

без серьезной погрешности.

Решение (4.40) и приближение (4.41) были получены Робертсом прямым решением дифференциального уравнения

$$u \frac{\partial \chi}{\partial x} = K \nabla^2 \chi$$

с учетом условия "непрерывности", которое означает, что поток вещества через поверхность, окружающую источник, равен Q.

Непрерывный безграничный линейный источник (перпендикулярный ветру). Если вещества поступают со скоростью Q г сек⁻¹ см⁻¹ вдоль линии x = z = 0, то концентрация в (x, z) есть

$$\chi(x, z) = \frac{Q}{4\pi K} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{u}{2K} \left\{ \left[x^2 + (y - y')^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}} - x\right\} \right) dy'}{[x^2 + (y - y')^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{2\pi K} \exp\left(\frac{ux}{2K} K_0 \left[\frac{u(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{2K}\right], \quad (4.43)$$

где K_0 — функция Бесселя второго рода. Если $\frac{u(x^2+z^2)^2}{2K}$ достаточно велико, то можно использовать асимптотическое разложение для K_0 , опуская все, кроме первого члена. Таким образом,

$$K_{0}\left[\frac{u(x^{2}+z^{2})^{\frac{1}{2}}}{2K}\right] \approx \left[\frac{2\pi K}{u(x^{2}+z^{2})^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{u(x^{2}+z^{2})^{\frac{1}{2}}}{2K}\right]$$

Отсюда, пренебрегая квадратами и более высокими степенями, 156 получим:

$$\chi(x, z) = \frac{Q}{\left[2\pi K (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{uz^2}{4Kx}\right) \approx \frac{Q}{\sqrt{(2\pi Kx)}} \exp\left(-\frac{uz^2}{4Kx}\right).$$
(4.44)

Робертс также дает решения для системы, в которой диффузия анизотропна (например, как в атмосфере вблизи земли), вводя три коэффициента: K_x , K_y , K_z . Решениями, соответствующими (4.36), (4.42) и (4.44), являются:

мгновенный источник

$$\chi(x, y, z, t) = \frac{Q}{8(\pi t)^{\frac{3}{2}} (K_x K_y K_z)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y} + \frac{z^2}{K_z}\right)\right], \quad (4.45)$$

непрерывный точечный источник

$$\chi(x, y, z) \approx \frac{Q}{4\pi x (K_y K_z)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{u}{4x} \left(\frac{y^2}{K_y} + \frac{z^2}{K_z}\right)\right], \quad (4.46)$$

непрерывный безграничный линейный источник (перпендикулярный ветру)

$$\chi(x, z) \approx \frac{Q}{\sqrt{(2\pi K_z x)}} \exp\left(-\frac{u z^2}{4 K_z x}\right). \tag{4.47}$$

Легко понять физический смысл этих выражений. Вдоль центральной линии или оси облака точечного источника (y = z = 0) или на центральной плоскости облака безграничного линейного источника (z = 0) концентрация падает непрерывно с расстоянием x вдоль ветра как x^{-1} в облаке от точечного источника и как $x^{-\frac{1}{2}}$ в облаке от линейного источника. При фиксированном расстоянии от источника (x = постоянной) распределение концентрации описывается нормальным законом Гауса перпендикулярно ветру и вертикально. Теоретически облака распространяются до бесконечности во всех направлениях, но для практики удобно определять конечные границы облака тем условием, что концентрация практически равна нулю, когда она падает от максимального значения на этом расстоянии до некоторой условной дроби, скажем $\frac{1}{10}$. Если y_0 и z_0 — половина бокового и половина вертикального размера облака, определенного указанным выше образом, то следует, что

$$y_0^2 = \frac{4}{u} (\ln 10) K_y x; \quad z_0^2 = \frac{4}{u} (\ln 10) K_z x.$$

Таким образом, ширина и высота облаков увеличиваются как V x. Видимые контуры облаков не могут быть определены так просто потому, что это потребовало бы привлечения теории видимости. Подробности этой теории и ее применение к диффузии могут быть найдены в работе Робертса.

Хотя эти решения должны теперь рассматриваться не более как грубые приближения к атмосферной диффузии вблизи земли, они образуют основы большинства выводов, которые имели место в недавние годы при изучении рассеяния дыма или газа в атмосфере. Несостоятельность этих точных решений в применении к наблюдениям указывает на то, что вихревая диффузия в атмосфере не может быть описана уравнением Фикка (см. гл. 8).

Метод отображения. Если источник вещества расположен на или вблизи поверхности земли, как в проблемах атмосферных загрязнений, то необходимо внимательно рассмотреть влияние границы. Если облако состоит из отдельных частиц вещества, таких как пыль или пепел, то обычно существует значительное отложение вблизи источника, вызванное выпадением больших частиц под действием силы тяжести. Даже в отношении облаков, состоящих из очень маленьких частиц или газа, имеет место некоторое отложение или поглощение растительностью, но во многих примерах поверхность земли без большой погрешности может считаться непроницаемой границей. Математически условием для непроницаемой поверхности является $K\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right) = 0$ на z = 0, но задача решается много легче, если использовать уравнение непрерывности.

Если непрерывный точечный источник расположен на уровне земли или вблизи нее, то условием, что вещество не исчезло и не создано при движении облака вдоль ветра, является

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} u\chi(x, y, z) dz dy = Q$$
(4.48)

для всех x > 0. Если источник находится на земле, а ветер всегда горизонтальный, то ось симметрии облака расположена на плоскости z = 0 и вид решения должен быть тот же самый, что и в среде, простирающейся до бесконечности во всех направлениях. Отсюда для облака, образованного на уровне земли,

$$\chi(x, y, z) = \frac{A}{4\pi K x} \exp\left[-\frac{u(y^2+z^2)}{4K x}\right],$$

где A — постоянная, величина которой должна быть выражена через мощность источника на основании условия непрерывности. Обращаясь к (4.48), получим A = 2 Q, таким образом, действие непроницаемой границы таково, что концентрация в любой точке в два раза больше, чем для источника в безграничной среде. В этом смысле земля действует как идеальный рефлектор. Очевидно, этот же результат справедлив и для облака от безграничного, перпендикулярного ветру,

линейного источника, расположенного на уровне земли. Этот результат был доказан для фикковской диффузии, которая не применима к атмосфере, но такой же вывод следует и для нефикковских процессов.

Если источник поднят (случай с фабричной трубой), то действие непроницаемой границы более сложно. Если высота h источника достаточно велика, то облако вблизи источника будет вести себя, как если бы граница отсутствовала, но по мере увеличения расстояния x вдоль ветра влияние границы будет чувствоваться все больше вследствие диффузии дыма к земле. Решение поэтому должно вести себя как решение для безграничной среды при малых $\frac{x}{h}$, но для больших $\frac{x}{h}$ должно приближаться к решению для источника, помещенного на уровне земли.

Проблемы этого типа в большинстве случаев легко решаются методом отображения. Полубезграничная среда z > 0 заменяется безграничной средой — $\infty \leqslant z \leqslant \infty$, а граница z = 0 уничтожается. Действие непроницаемой поверхности учитывается путем рассмотрения не только действительного источника x = y = 0, z = h, но также его отображения относительно z = 0, т. е. источника равной силы в x = y = 0, z = -h. Искомая концентрация в любой точке в области z > 0 равна сумме концентраций от обоих источников¹, поскольку отсутствие потока через плоскость z = 0 автоматически удовлетворяется благодаря симметрии.

Искомое решение, таким образом, есть:

$$\chi(x, y, z) = \frac{Qe^{\frac{-uy}{4Kx}}}{4\pi Kx} \left\{ \exp\left[-\frac{u(z-h)^2}{4Kx}\right] + \exp\left[-\frac{u(z+h)^2}{4Kx}\right] \right\}, \quad (4.49)$$

оно основано на приближенном решении (4.42) для непрерывного точечного источника.

Легко увидеть, что это решение обладает необходимыми свойствами. Когда $x, y \rightarrow 0$, а $z \rightarrow h$, концентрация возрастает до бесконечности, как

$$x^{-1}\exp\left[-\frac{u(z-h)^2+y^2}{4Kx}\right].$$

Это указывает, что вблизи x = y = 0, z = h решение ведет себя, как решение для непрерывного точечного источника в безграничной среде. Когда $\frac{x}{h}$ становится очень большим, решение не отличается от решения для непрерывного точечного источника на уровне земли (h = 0). Наконец, условие непрерывности (4.48) удовлетворяется для всех x > 0.

¹ Для дальнейшего подробного изучения этого метода и его применения см. Carslaw и Jaeger.

Физическая интерпретация этого решения легко видна из рис. 16, на котором изображена концентрация вдоль линии y = z = 0, т. е. прямо от источника по направлению ветра. У основания дымовой трубы концентрация практически равна нулю и остается малой на некотором расстоянии вдоль ветра, после чего она круто поднимается до максимума и затем убывает снова до нуля, но более медленно.



Расстояние по направлению ветра

Рис. 16. Концентрация примеси у поверхности земли от дымовой трубы при постоянном ветре.

Эти особенности были обнаружены на практике, но из-за предположения о фикковском характере решение, приведенное выше, должно рассматриваться для атмосферы только как качественное. Эта проблема развивается дальше в гл. 8.

4. 7. Распространение тепла благодаря турбулентности

Теоретический анализ вихревой теплопроводности в технике или лабораторных исследованиях, как например при движении в трубах или каналах, обычно содержит много упрощений. Самые важные из них — предположения о том, что профиль средней скорости и величина вихревой скорости являются такими же, как и в изотермическом потоке, и что нагревание, вызванное изменением давления, и диссипация энергии вязкостью незначительны. К тому же большая часть опубликованных работ относится к несжимаемому потоку.

В метеорологии, по крайней мере, некоторые из вышеназванных предположений неприемлемы, и это сразу ставит серьезные препятствия на пути развития теории. Основная трудность возникает из того факта, что нижние слои атмосферы подвержены суточным изменениям градиента плотности, который действует непосредственно на характер турбулентности; профиль средней скорости и величина колебаний скорости тесно связаны с градиентом температуры. Кроме того, большая толщина атмосферных слоев делает неприемлемым допущение о несжимаемости потока. Отсюда следует, что теплопроводность благодаря атмосферной турбулентности является предметом специального исследования и что многие, если не большинство, лабораторные исследования представляют весьма ограниченный интерес для метеорологии.

Перенос тепла турбулентностью в несжимаемом потоке. Если жидкость рассматривается как несжимаемая, то уравнение вихревой теплопроводности является простым и естественным обобщением уравнения молекулярной диффузии. Пренебрегая диссипацией из-за вязкости, получим уравнение теплопроводности для несжимаемого газа

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \nabla^2 T$$

[уравнение (4.4)].

В турбулентном движении фактическая температура T может рассматриваться как сумма средней температуры \overline{T} и флуктуации температуры T', т. е.

$$T = \overline{T} + T'.$$

Движение состоит из средней скорости $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ и вихревых скоростей (u', v', w'). Применяя операцию осреднения и используя уравнение непрерывности, получим

$$c_{p} \rho \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} - c_{p} \rho \overline{u'T'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} - c_{p} \rho \overline{v'T'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} - c_{p} \rho \overline{w'T'} \right) \cdot$$
(4.50)

Это уравнение нужно сравнить с уравнениями (3.5) для переноса количества движения пульсациями скорости. Формально здесь имеется полное подобие. Скоростями вихревой теплопроводности являются $\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + c_p \rho \overline{u'T'}\right)$ и т. д., таким образом, полная скорость переноса рассматривается как сумма скорости, возникающей благодаря молекулярной проводимости $\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)$, и скорости, зависящей от корреляции между колебаниями температуры и скорости. Пока градиент средней температуры не очень велик, вихревой перенос доминирует над молекулярным.

Если исследуемое явление относится к квазистационарному типу, такому, как изменение с высотой суточной температурной волны, которая рассматривается как одна из ряда подобных волн, то можно считать процессы перемешивания однородными по горизонтали. Тогда отсутствует результирующий средний ветер ($\overline{u} = \overline{v} = \overline{w} = 0$) потока тепла по горизонтали. Уравнение теплопроводности принимает вид

$$c_p \rho \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} - c_p \rho \overline{w' T'} \right).$$

11 О. Г. Сеттон

Пренебрегая молекулярной проводимостью и изменением плотности с высотой, имеем

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{w'T'} \right). \tag{4.51}$$

Если корреляционный момент $\overline{w'T'}$ может быть выражен как произведение коэффициента перемешивания на градиент средней температуры, т. е. если

$$-\overline{w'T'} = K(z) \frac{\partial \overline{T}}{\partial z},$$

то уравнение (4.51) становится

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right].$$
(4.52)

Если K(z) = K = постоянной, оно сводится к

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2}$$

- знакомому уравнению теплопроводности в твердом теле.

Теория пути смешения. Уже было показано (п. 3. 8), что если турбулентное перемешивание подобно молекулярной диффузии, то средняя скорость переноса q некоторого свойства E(z) в направлении z через единицу площади, нормальной к оси z, есть

$$q = -\overline{w'(z_2-z_1)} \frac{\partial \overline{E}}{\partial z}.$$

Для переноса тепла в несжимаемом газе $E = c_{p0}T$. Пусть смешение l определяется из соотношения

$$\overline{w'(z-z_1)} = l \sqrt{\overline{w'^2}}$$

или по гипотезе Прандтля

$$\overline{w'(z_2-z_1)}=l^2\frac{du}{dz}.$$

Отсюда

$$q = -c_p \rho l \sqrt{\overline{w'^2}} \frac{d\overline{T}}{dz}$$

или

$$q = -c_p \rho l^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dz} \right| \frac{d\overline{T}}{dz}.$$

Это позволяет предположить, что корреляционная функция $\overline{w'E'}$ и длина l одинаковы для теплопроводности и для переноса количества движения, поскольку в основе обоих явлений лежит один и тот же механизм перемешивания. Эта гипотеза может быть получена

из более общих соображений, если определить путь смешения для тепла $l_{_H}$ уравнением

$$T' = -l_H \frac{d\bar{T}}{dz} \tag{4.53}$$

и предположить, что

$$-\overline{w'T'} = l_M \left| \frac{d\overline{u}}{dz} \right| l_H \frac{d\overline{T}}{dz},$$

где l_M — путь смешения для количества движения (Сеттон [16]). На этой стадии эти уравнения носят чисто формальный характер.

Предположение о том, что в турбулентном движении количество движения и тепло переносятся одним и тем же путем, было впервые выдвинуто Рейнольдсом в 1874 г. и известно как аналогия Рейнольдса. Для движения, параллельного оси *x*, с переносом тепла в направлении оси *z* это утверждение означает, что колебание скорости, параллельной среднему потоку, должно быть пропорционально колебаниям температуры и что:

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + K) \frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\frac{q}{c_{z}\rho} = -(k + K) \frac{\partial \bar{T}}{\partial z},$$

где q и τ — скорости переноса тепла и касательное напряжение, соответственно отнесенные к единице площади, а K — коэффициент перемешивания, предполагаемый одинаковым для количества движения и тепла. Эта гипотеза была всесторонне рассмотрена, особенно в отношении переноса тепла в трубах ¹.

Перенос тепла благодаря вынужденной конвекции с плоской поверхности, поддерживаемой при однородной температуре. Предположение о том, что динамические и термические пограничные слои одинаковы и что профили скорости и температуры подобны, ведет к очень простому решению проблемы переноса тепла вынужденной (турбулентной) конвекцией с полубесконечной плоской поверхности при однородной температуре. Решение этой проблемы для ламинарного потока дано на стр. 195 как пример потока воздуха, имеющего одинаковую температуру и движущегося над холодным морем (образование инверсии благодаря прибрежному ветру).

Предположим, что поток воздуха, который характеризуется одинаковой температурой в нижних слоях, движется над плоской поверхностью постоянной температуры, вытянутой до бесконечности перпендикулярно ветру. Предполагается, что образующийся термический пограничный слой одинаков с динамическим пограничным слоем и имеет толщину δ. Если x измеряется по направлению ветра,

¹ См. Голдштеїн.

начиная от наветренного края плоской поверхности, и *z* — высота, то профили скорости и температуры могут быть представлены уравнениями:

$$ar{u} = U\left(rac{z}{\delta}
ight)^m$$
, если $z \leqslant \delta$,
 $ar{u} = U$, $z > \delta$,
 $T = T_0 \left(rac{z}{\delta}
ight)^m$, $z \leqslant \delta$,
 $T = T_0$, $z > \delta$,

где U и T_0 — соответственно скорость и температура воздуха, которые он имел до поступления на поверхность $x \ge 0$, z = 0. Предполагается, что поверхность имеет нулевую температуру. Пограничный слой начинается от наветренного края (x = z = 0) и разбухает с увеличением z, соответственно уравнению типа (§ 3.8)

$$\delta = ax \left(\frac{\gamma}{Ux}\right)^p \quad p > 0 \, .$$

Скорость переноса тепла с плоскости $x \ge 0$, z = 0 находится теперь методами, подобными тем, которые использовались при оценке поверхностного трения на плоской поверхности через потерю количества движения (гл. 2).

Рассмотрим элементарный объем длиной dx и единичной ширины, простирающийся от поверхности до вершины пограничного слоя. Тепло проходит через границы благодаря действию смешёния, и различные потоки могут быть выражены следующим образом.

1. Поток через плоскость z = 0; это величина, которую необходимо определить.

2. Приток, равный $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{0}^{\infty} \rho c_{p} \widetilde{u} T dz$, через грани, перпендикуляр-

ные *Ох*.

3. Приток, равный $\rho c_p T_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \int_0^\delta \overline{u} dz$, через верхнюю поверх-

ность. При установившемся состоянии эти потоки должны балансироваться. Отсюда, обозначая поток тепла у поверхности через q(x), следует, что

$$q(x) = \rho c_p T_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \overline{u} \, dz - \rho c_p \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s \overline{u} T \, dz.$$

Интегралы могут быть найдены из уравнения для профиля и толщины пограничного слоя. Конечным результатом является

 $q(x) = \rho c_p U T_0 \left(\frac{v}{Ux}\right)^p a(1-p) \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2m+1}\right).$

В случае гладкой плоской поверхности приближенными величинами будут

$$a = 0,366, m = \frac{1}{7}, p = \frac{1}{5}.$$

Подстановка этих величин ведет к формуле Лацко для местной скорости потери тепла турбулентной вынужденной конвекцией

$$q(x) = 0.0285 \rho c_p U T_0 \left(\frac{v}{Ux}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Для микрометеорологии необходимо пользоваться другими значениями постоянных, чтобы принять в расчет шероховатость поверхности, которая значительно увеличивает величину δ.

Решение, данное выше, представляет местный теплообмен между плоской поверхностью и воздушным потоком при условии, что поверхность имеет конечные размеры в направлении ветра и безгранична в направлении, перпендикулярном ветру. Таким образом, эти результаты применимы к воздуху, который пересекает береговую линию, перпендикулярную к направлению ветра. Следует заметить, что то же решение применяется также к проблеме испарения, когда воздух с заланной постоянной по вертикали влажностью проходит над увлажненной поверхностью. В этом случае температура поверхности заменяется поверхностной концентрацией водяного пара, а соответствующее предположение состоит в идентичности динамического и массового пограничных слоев. Тогда тепловой поток преобразуется в местную скорость испарения. Эта проблема подробно рассматривается в гл. 8.

Перенос тепла в атмосфере. До сих пор нет общепринятой формулировки проблем теплопроводности благодаря атмосферной турбулентности. Основными теориями являются следующие.

Выравнивание потенциальной температуры. В сжимаемой жидкости, такой, как атмосфера, в объеме воздуха, который вынужден изменить свой уровень, происходят изменения температуры из-за адиабатического нагревания или охлаждения, если никаких других факторов нет. По этой причине абсолютная температура воздуха не является консервативным свойством в процессах смешения большого масштаба. В 1915 г. Тейлор провел анализ, который показал, что средняя потенциальная температура θ , остающаяся постоянной в течение любого адиабатического процесса, должна, вероятно, рассеиваться турбулентностью так же, как абсолютная температура в твердом теле. Тот же вывод был сделан Шмидтом и Ричардсоном.

Одноразмерная форма уравнения, примененная вышеназванными авторами, есть

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right], \qquad (4.54)$$

где K (z) — коэффициент перемешивания для тепла, или вихревая

температуропроводность. Поток тепла через любой уровень z есть

 $q = -K(z) c_{\rho} \rho \frac{\partial \theta}{\partial z} . \qquad (4.55)$

Согласно этой теории, в изотермической атмосфере будет иметь место поток тепла, направленный вниз, так как в такой атмосфере потенциальная температура возрастает с высотой. Конечным результатом вихревого теплообмена является выравнивание потенциальной температуры.

Уравнение Брента. Брент вывел уравнение турбулентной тепло проводности для атмосферы, которое очень близко к уравнению (4.54). Его анализ заключается в следующем.

Предполагается, что типичный вихрь, который пересекает уровень z, возник на уровне z - l, где он имел среднюю температуру окружающей среды. Таким образом, если $\overline{T}(z)$ является средней (абсолютной) температурой воздуха на уровне z, то первоначальная температура вихря была

$$\overline{T}(z-l)\approx\overline{T}(z)-l\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}.$$

Если вихрь движется от z - l до z без потери или приобретения тепла из-за смешения или проводимости, то его температура изменяется благодаря изменению давления на величину Γl , где Γ адиабатический температурный градиент. Таким образом, температура вихря на уровне $z - \overline{T} - l \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right)$ и теплосодержание воздуха, который проходит через единицу горизонтальной поверхности в единицу времени, есть

 $c_{p} \mathsf{p} \mathsf{w}' \left[\overline{T} - l \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) \right],$

поскольку ра ' является потоком массы через единицу площади. Если рассматриваемая поверхность представляет собой изобарическую поверхность, то полный перенос воздуха за достаточно большой период должен равняться нулю. Осреднив приведенное выше выражение на достаточно большой площади и за достаточно длинный период времени, получим выражение для результирующего, направленного вверх потока тепла через единицу площади за единицу времени

$$- c_{p} \rho \overline{w' l} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right).$$

Длина l может теперь рассматриваться как путь смешения, а величина $\overline{w'}l$ — как вихревая температуропроводность. Следовательно, поток тепла через изобарическую поверхность есть

$$q = -K(z) c_p \rho \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right). \tag{4.56}$$

Приращение тепла между p и p+dp есть

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[K(z) c_p \rho \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) \right] dp = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) c_p \rho \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) \right] dz$$

и это должно равняться $c_p \rho dz \frac{d\bar{T}}{dt} = c_p \rho dz \frac{d\bar{T}}{dt}$ при отсутствии среднего движения. Таким образом, перемещение тепла по вертикали над большой плоской поверхностью описывается уравнением

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho K(z) \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) \right]. \tag{4.57}$$

Если пренебречь изменением р с высотой, то уравнение (4.57) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \Gamma \right) \right].$$
(4.58)

Это и есть уравнение Брента. Если K(z) = K = const, то уравнение (4.58) сводится к

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} \,. \tag{4.59}$$

Разность между двумя этими выражениями для потока тепла $Kc_p \rho \frac{\partial \theta}{\partial z}$ и $Kc_p \rho \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right)$ в нижних слоях атмосферы небольшая (для z < 100 м), поскольку на этих высотах $\theta \approx \overline{T} + \Gamma z$. В большинстве случаев уравнения (4.54) и (4.58) неразличимы, и в обеих теориях поток тепла направлен из области с высокой потенциальной температурой в область с низкой потенциальной температурой.

Преобразованные уравнения. Представленная выше теория создает некоторые трудности. Согласно указанным уравнениям, общее действие турбулентного перемешивания — это ослабление до нуля градиента потенциальной температуры таким образом, что атмосфера в целом должна стремиться к состоянию с постоянной потенциальной температурой по вертикали. Наблюдения показывают, что, наоборот, потенциальная температура обычно возрастает с высотой в свободной атмосфере, а средний градиент меньше, чем адиабатический температурный градиент. В нижних слоях атмосферы трудности для наблюдений возникают из-за небольшой величины разности температур, соответствующей адиабатическому температурному градиенту, но здесь снова имеются указания, что градиенты, наблюдавшиеся в пасмурные ночи с ветром, меньше, чем адиабатические — состояние, которое, на основании вышеописанных теорий, не могло быть достигнуто турбулентным перемешиванием. Анализ уравнений Тейлора и Брента, строго говоря, применим только к вынужденной конвекции; ни одной попытки не предпринято, чтобы учесть действие горизонтальных неоднородностей температуры.

которые могут дать повод вертикальным движениям. Предполагается, что вертикальная скорость перемещает элемент воздуха со средней температурой начального уровня. Это аналогично предположению, что процесс смешения не зависит от местных возмущений температуры и возникает исключительно благодаря динамической неустойчивости. В нижних слоях атмосферы всегда имеются горизонтальные градиенты температуры, и элемент воздуха, имеющий температуру более высокую или более низкую, чем окружающая среда, может подниматься или опускаться только по этой причине.

Как указано выше, имеются основательные причины полагать, что перенос тепла в атмосфере связан обычно как с вынужденной, так и со свободной конвекцией, но очень трудно (если не невозможно) определить вклад каждого типа переноса в полный поток, за исключением некоторых частных случаев. В последние годы было несколько попыток пересмотреть проблему, а именно Эртелем, Пристли и Свинбэнком.

Эртель считает, что поток тепла в атмосфере определяется градиентом абсолютной температуры, как в твердом теле или несжимаемой жидкости. Его аргументы оспариваются Прандтлем, и вопрос об их справедливости остается нерешенным.

В своей работе, которая во многом сходна с работой Эртеля, Пристли и Свинбэнк предполагают, что типичный вихрь был последний раз в покое на расстоянии l ниже фиксированного уровня z. Это означает, что w' и l имеют всегда тот же знак. Когда вихрь находится в покое, то предполагается, что он имеет там избыток температуры T'' относительно средней температуры T(z-l) своего уровня. Если температура вихря при движении меняется адиабатически от z - l до z, то

$$\overline{T}(z) + T'(z) = \overline{T}(z-l) + T'' - \Gamma l \approx \overline{T}(z) - l \frac{\partial T}{\partial z} + T'' - \Gamma l$$

и, таким образом,

$$T'(z) = T'' - l\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma\right).$$

Средний поток тепла через уровень z при обычных обозначениях, таким образом, есть

$$q = c_p \rho \overline{w'T'} = c_p \rho \left[- \overline{w'l} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) + \overline{w'T''} \right].$$

Первое слагаемое в этом выражении для потока выведено Брентом, оно означает, что поток тепла направлен из областей высокой в области низкой потенциальной температуры. Второе слагаемое не зависит от градиента потенциальной температуры и выражает действие, аналогичное свободной конвекции, состоящее в том, что для более теплых вихрей (T'' > 0) имеется тенденция подниматься вверх (w' > 0), этот член существенно положительный. Пристли и Свинбэнк указывают на первый тип переноса как на механическую

турбулентность и на второй — как на конвективную турбулентность.

Член $\overline{w'T'}$ не может быть измерен непосредственно, а егозначение может быть только выведено. Однако даже небольшая корреляция между w' и T'' сделала бы $\overline{w'T'}$ величиной сравнимой или даже больше чем $\overline{w'T'}$. Таким образом, согласно этой теории, результирующий поток тепла из областей низкой в области высокой потенциальной температуры возможен. Этим путем Пристли и Свинбэнк находят объяснение для некоторых макрометеорологических явлений, которые не объясняются прежними теориями, однако трудно судить, насколько снижается убедительность аргументов тем, что в расчет не принимается радиация.

Анализ механизма переноса тепла, данный Пристли — Свинбэнком, должен рассматриваться как первая попытка разрешения проблемы переноса тепла при наличии свободной и вынужденной конвекций. Основная критика, которой следует подвергнуть этот анализ (а также многие существующие в настоящее время теории), заключается в том, что он (анализ) ведет к слишком буквальному толкованию слова "вихрь".

"Средняя температура" на любом уровне является математической абстракцией, зависящей от периода наблюдений (стр. 75), а понятие вихрь как изолированная частица воздуха, которая движется вертикально, а ее температура отличается от средней температуры среды в зависимости от расположения начального уровня, нуждается в физическом обосновании. Частица воздуха начинает двигаться под влиянием архимедовых сил, когда ее температуры отличается на некоторую конечную величину от температуры окружающего воздуха (см. стр. 141), а последняя может совпадать или не совпадать со средней температурой, о которой идет речь в математическом анализе проблемы. Главную ценность этой работы составляет тот факт, что она указывает на возможность диффузии тепла, обусловленной в некоторых случаях факторами, отличными от неустойчивости, связанной с градиентом средней скорости.

4. 8. Теория пути смешения при свободной конвекции

Ясные летние дни часто сопровождаются слабыми ветрами, и в этих условиях вблизи поверхности земли существуют вертикальные потоки термического происхождения, распространяющиеся дозначительных высот в атмосфере. (Такие потоки знакомы планеристам и, очевидно, ощущаются и используются большими птицами, парящими в поисках добычи.) В таких условиях перенос тепла в атмосфере вызван главным образом движениями, обусловленными архимедовыми силами.

Уже указывалось, что перенос тепла с поверхности благодаря свободной конвекции, вообще говоря, не является действительным диффузным потоком. Возможно, однако, достигнуть некоторого прогресса в проблеме переноса тепла в более низких слоях атмосферы в жаркий спокойный день благодаря введению понятий, подобных использованным в обычной теории диффузии (Сеттон).

Подъемная сила нагретых масс послужила бы поводом для очень больших вертикальных скоростей, если бы не было постоянной деградации кинетической энергии благодаря дроблению на более мелкие вихри. Этот факт позволяет анализировать перенос тепла в спокойный день как функцию пути смешения, соответствующего всплывающим объемам.

Анализы могут быть доведены до конца двумя путями. Первый метод связан с использованием выражения Тейлора для рассеяния энергии в зависимости от масштаба турбулентности при изотропической турбулентности [уравнения (3.66) и (3.67)]. Интенсивность конвекционных струй определяется балансом между скоростью дробления начальных масс в мелкие вихри и скоростью уменьшения гравитационной потенциальной энергии. Средняя скорость уменьшения кинетической энергии турбулентности W благодаря действию вязжости дается выражением

$$W = \operatorname{const} \frac{\rho w^3}{L}, \qquad (4.60)$$

чтде w — средняя вертикальная компонента мгновенной скорости $(w = \sqrt{\overline{w^2}})$ и L — масштаб турбулентности.

Когда воздух, перегретый на величину ΔT по сравнению с температурой окружающей атмосферы, движется вверх со скоростью w, то скорость уменьшения потенциальной энергии на единицу объема есть

$$\rho w g \frac{\Delta T}{T}, \qquad (4.61)$$

тде T — средняя абсолютная температура не нагретого воздуха, полагаемая здесь постоянной. Если конвективные потоки сохраняют свою индивидуальность на расстоянии L, то ΔT может полагаться пропорциональной — $L \frac{\partial T}{\partial z}$ на основании обычных аргументов теории ятути смещения. Отсюда из (4.60) и (4.61)

$$w^2 = \operatorname{const} \frac{gL^2}{T} \left(-\frac{\partial T}{\partial z} \right),$$
 (4.62)

и коэффициент перемешивания для тепла K(z) = wL может быть представлен как

$$K(z) = \operatorname{const} L^2 \sqrt{-\left(\frac{g}{T} \frac{\partial T}{\partial z}\right)} .$$
(4.63)

Это выражение получено на основании принципов Тейлора.

Другим путем тот же результат следует из представлений о модели движущихся масс. Если нагретая масса имеет характерный линейный размер L, то сила Архимеда пропорциональна $gpL^{s}\frac{\Delta T}{T}$. При

пробивании через холодный воздух масса испытывает сопротивление, пропорциональное $\rho L^2 w^2$. Установившаяся скорость движения рассматриваемой массы может происходить, если сила Архимеда равна силе сопротивления. Это немедленно дает уравнение (4.62) для w.

Применяя выражение (4.63) к атмосфере, Сеттон заменяет градиент абсолютной температуры разностью между наблюденным градиентом и адиабатическим. Оправданием этого шага является исследование Джеффриса, который показал, что при не очень больших разностях плотности в сжимаемой жидкости вполне возможно использовать потенциальную температуру (или, с достаточной степенью приближения, отклонение температуры от адиабатического распределения) вместо абсолютной температуры. Определенное возмущение температуры производит в первом приближении то же действие на движение несжимаемой жидкости, что и на движение сжимаемой. Таким образом, в условиях выраженной свободной конвекции

$$K(z) = \operatorname{const} L^2 \sqrt{\left[-\frac{g}{T}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma\right)\right]}.$$

Это выражение может быть приближенно заменено

$$K(z) = l_H^2 \sqrt{\left[-\frac{g}{T} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma\right)\right]}, \qquad (4.64)$$

тде l_H — путь смешения для температуры, равный

$$l_{H} = -\frac{\Gamma}{\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right) + \Gamma} \,.$$

Зависимость между длиной пути смешения для температуры, вертикальной скоростью и коэффициентом перемешивания. Если вертикальный поток тепла q не зависит от высоты, то существует некоторая простая зависимость между l_{μ} , w, K(z) и T'.

Из (4.64)

$$K^{3}(z) = -\frac{g}{T} l_{H}^{4} K(z) \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right).$$

Поток тепла дается следующим выражением:

$$-K(z)\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}+\Gamma\right) = \frac{q}{c_p r} = \text{const}$$

или

$$K(z) = \text{const} \, l_H^{\frac{1}{3}}$$
 (4.65)

Аналогично:

$$w = \operatorname{const} l_H^{\frac{1}{3}}, \qquad (4.66)$$

$$\partial \overline{T} + \Gamma = \operatorname{const} l_H^{-\frac{1}{3}},$$
 (4.67)

$$T' = \operatorname{const} l_H^{-\frac{1}{3}}.$$
 (4.68)

Эти соотношения были использованы при анализе свободной конвекции в нижних слоях (см. стр. 247).

4. 9. Влияние градиента плотности на турбулентность

При изучении атмосферной турбулентности возникают огромные трудности вследствие того, что градиент плотности в нижних слоях атмосферы в ясную погоду подвержен хорошо выраженным суточным колебаниям. Это ясно видно из смены падения температуры с высотой днем, инверсией — ночью и соответственно усилением и ослаблением порывистости. Трудно воспроизвести полностью подобные явления в аэродинамической трубе, так что опытные данные в основном ограничены измерениями в нижних слоях атмосферы или в море с неизбежной потерей точности и надежности из-за отсутствия контроля.

Критерий Ричардсона. Фундаментальным исследованием действия силы тяжести в гашении турбулентности в жидкости различной плотности является исследование Л. Ф. Ричардсона. Анализ Ричардсона основан на том принципе, что на стадии, когда движение граничит с ламинарным, кинетическая энергия флюктуаций будет возрастать или уменьшаться соответственно тому, превосходит ли или остается ниже скорость поступления энергии от осредненного движения (благодаря напряжениям Рейнольдса) той скорости, с которой вертикально движущиеся массы жидкости совершают работу в гравитационном поле.

Критерий наиболее просто выводится следующим образом¹.

Объем воздуха, начинающий двигаться благодаря турбулентным пульсациям с уровня z - l, имея температуру $\overline{T}(z - l) \approx \overline{T} - l \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$, движется без смешения к новому уровню z. На новом уровне его температура $\overline{T} - l \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right)$, а избыток плотности над окружающей средой на этом уровне $\frac{l\rho}{T} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right)$. Так как объем тяжелее, чем окружающая среда, то он испытывает силу, направленную вниз, равную

$$\frac{gl\rho}{\overline{T}}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}+\Gamma\right)$$

на единицу объема. Скорость потока жидкости, направленного вверх, на единицу площади w', таким образом, средняя скорость работы

I См. Брент.

против силы тяжести на единицу объема

$$g
ho \, \overline{\overline{w' l} \over \overline{T}} \left(rac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma
ight) \, .$$

В этом выражении величина $\overline{w'l}$ может быть отождествлена с коэффициентом турбулентности K_H .

Работа, совершенная напряжениями Рейнольдса на единицу объема, есть

$$\pi \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = K_{M} \rho \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2,$$

тде τ — вихревое касательное напряжение, отнесенное к единице площади, K_{M} — вихревая вязкость и \overline{u} — средняя скорость, нормальная к оси z. По принципу Ричардсона, если $\rho \overline{E}(z, t)$ — средняя энергия турбулентности единицы объема на высоте z, то

$$\frac{\partial \overline{E} (z, t)}{\partial t} = K_M \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 - K_H \frac{g}{T} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) = K_H \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 \left[\frac{K_M}{K_H} - \frac{g}{T} \frac{\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right) + \Gamma}{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2} \right].$$

Поскольку $K_H \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)^2$ существенно положительно и отлично от нуля (исключая случай, когда \tilde{u} = постоянной), знак $\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$ зависит от того, будет ли безразмерное число

$$\operatorname{Ri} = \frac{g}{T} \frac{\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right) + \Gamma}{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{g\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)}{\theta\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2}$$

 $(\theta$ — потенциальная температура), называемое числом Ричардсона Ri, больше или меньше, чем отношение $\frac{K_M}{K_H}$.

В своем исследовании Ричардсон допускал $K_M = K_H$ и утверждал, что слегка турбулентное движение (E отлично от нуля) остается турбулентным, если Ri < 1, и перейдет в ламинарное движение, если Ri > 1. Это означает, что существует критическое значение числа Ричардсона. В рассмотренном случае оно равно единице.

Из вышеприведенного анализа следует, что необходимым условием для гашения турбулентности градиентом плотности является то, что потенциальная температура должна возрастать с высотой $\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0\right)$, но это условие недостаточно. Турбулентность может существовать

при инверсии потенциальной температуры, если $\frac{\partial u}{\partial z}$ достаточно велико. В метеорологии хорошо известен факт, что в ясную ночьскорость ветра в слоях, примыкающих к земле, обычно очень низка, тогда как ветер на более высоких уровнях остается сильным. Быстрое понижение плотности с высотой благоприятствует существованию большого градиента скорости, а это возможно только тогда, когда турбулентный обмен в приземных слоях падает до малого значения или вовсе затухает.

Физическая интерпретация критерия Ричардсона также ясно видна. из следующего грубого вывода. Вертикальная скорость wc воздушных масс с характерным линейным размером l_{H} , движущихся с конечной скоростью, есть

$$w_c = \operatorname{const} l_H \sqrt{\left(\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$$

[уравнение (4.62)]. Энергия этого движения на единицу объема

$$\rho w_c^2 = \operatorname{const} \rho l_H^2 \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \,.$$

Энергия вертикального компонента турбулентных скоростей, возникающих из неустойчивости, связанной с градиентом средней скорости на единицу объема, есть

$$\rho w_M^2 = \rho l_M^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2,$$

где l_м — путь смешения для количества движения, по определению Прандтля. Отношение этих энергий

$$\frac{\rho w_c^2}{\rho w_M^2} = \operatorname{const} \left(\frac{l_H}{l_M} \right)^2 \operatorname{Ri.}$$
(4.69)

Критерий Ричардсона получается теперь при предположении, что-"постоянная" в уравнении (4.69) равна единице и что $l_H = l_M$. Если энергия, связанная с градиентом плотности р w_c^2 , который в данном случае стабилизирует движение больше чем энергия, поступающая благодаря неустойчивости среднего движения ρw_m^2 , так что Ri > 1, турбулентность будет убывать, и если имеет место обратное явление (Ri < 1), то турбулентность сохранится.

Проблема устойчивости движения в присутствии градиента плотности обратила на себя внимание математиков. В 1931 г. Тейлоропубликовал отчет о некоторых ранее проведенных исследованиях. по этому предмету и достиг определенного результата для безграничной жидкости, в которой плотность изменяется по вертикали соответственно закону $\rho = \rho_0 \exp((-\beta z))$, а скорость — соответственно $u = u_0 + \alpha z$, где z = 0 — некоторый условный уровень (нетвердая граница), так что $\beta = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{dz}\right)$ и $\alpha = \frac{du}{dz}$. В такой

$$\frac{\rho w_c}{\rho w_M^2} = \operatorname{const}\left(\frac{t_H}{t_M}\right)$$

$$\frac{\rho w_c^2}{\sigma} = \cos \theta$$

жидкости могут существовать прогрессирующие внутренние волны, если



но никакие волны, прогрессирующие или экспоненциально неустойчивые, не могут существовать неограниченно, если $\frac{g\beta}{\sigma^2} > \frac{1}{4}$.

Этот результат применим только для жидкости безграничной протяженности. Устойчивость движения вблизи твердой границы при наличии градиента плотности была исследована Шлихтингом, а также Толмином в работах по устойчивости пограничного слоя в изотермической вязкой несжимаемой жидкости (см. гл. 3). В этом случае было найдено, что критическое значение $\frac{g\beta}{\alpha^2}$ зависит от числа Рейнольдса $\frac{\overline{u\delta}}{\gamma}$ и от числа Фруда $\frac{\overline{u}}{\sqrt{(\delta g)}}$ (δ = толщина пограничного слоя). Для больших чисел Рейнольдса и малых чисел Фруда (соответствующих условиям в атмосфере, где δ велико) Шлихтинг нашел, что $\frac{g\beta}{\alpha^2}$ не должно превышать 0,0409, если турбулентность сохраняется.

Самым поздним является исследование Кольдера, пересмотревшего методику Ричардсона, в которой некоторые члены были опущены, так как предполагалось, что они пренебрежимо малы в состоянии перехода к ламинарному движению.

Уравнение Кольдера

$$\begin{split} \overline{\rho} \frac{d\overline{E}}{dt} &= \overline{\rho} K_M \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 - \frac{\overline{\rho}g}{\overline{T}} K_H \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) - \Phi - \\ &- \frac{\partial}{\partial z} \left[w' \left(p' + \frac{1}{2} \overline{\rho} \overline{w'}^2 \right) \right], \end{split}$$

где Ф представляет диссипацию энергии благодаря вязкости. Отличие от уравнения Ричардсона состоит главным образом в существовании последнего члена, который представляет работу, совершаемую пульсирующими градиентами давления в вихревом движении. Кольдер заключает, что в атмосфере с адиабатическим распределением температуры при установившихся условиях $\left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0\right)$ члены, опущенные Ричардсоном, точно уравновешивают величину трансформации энергии среднего движения в вихревую энергию. Из полученного выражения следует, что если $K_M = K_H$, то критерий должен быть написан в такой форме, что турбулентность будет затухать, когда

$$Ri > 1 - a,$$

тде *а* — некоторая положительная величина, значение которой не было определено.

Попытки проверить критерий Ричардсона для нижних слоев атмосферы не имели успеха и можно сомневаться в существовании единственного значения, применимого для всех типов поверхностей (см. гл. 7 в результатах экспериментальных работ). Возможно, что некоторые из этих отклонений возникают из природы обтекаемой поверхности.

Определение числа Ричардсона для тонких слоев, прилежащих к поверхности, бросает некоторый свет на этот вопрос. В ясную ночь температурная инверсия начинается от поверхности земли; таким образом, в ранних стадиях затухания турбулентности движение, граничащее с ламинарным, устанавливается в тонком слое относительно плотного воздуха вблизи земли. В пределах такого слоя градиенты скорости и температуры могут полагаться постоянными с высотой без серьезной ощибки, так что производные могут заменяться конечными разностями, деленными на толщину слоя (δ). Таким образом, в слое (0, δ)

$$\operatorname{Ri} \approx \left(\frac{\Delta T}{T} \frac{g \delta^3}{v^2}\right) \left(\frac{v}{\overline{u\delta}}\right)^2. \tag{4.70}$$

В ламинарном движении

$$\frac{\sqrt{u}}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)_0} = u_*^2$$

M

$$\left(\frac{v}{\overline{u}\delta}\right)^2 = \left(\frac{u_*}{\overline{u}}\right)^4 = \frac{1}{4}C_D^2$$
,

ягде C_D — коэффициент поверхностного трения, определенный соотноящением

$$\tau_0 = \frac{1}{2} C_D \rho \overline{u}^2 .$$

Первая группа членов в выражении (4.70) является числом Грастофа и, таким образом, при близком к ламинарному движению у позверхности земли

$$\operatorname{Ri} \approx \frac{1}{4} \operatorname{Gr} C_D^2.$$

Измерение коэффициента поверхностного трения у земной поверхности показывает, что вообще C_D не зависит от скорости, но изменяется в зависимости от характера поверхности (см. гл. 7). Из общих физических соображений можно ожидать, что турбулентность гораздо легче затухает над относительно гладкой поверхностью, чем над поверхностью, покрытой большими неровностями. Поэтому вероятно, но не установлено, что критическое значение Ri зависит от шероховатости поверхности земли. Результат Шлихтинга и Рейхарда для движения вблизи гладкой поверхности не противоречит заключению Ричардсона о том, что турбулентность вблизи деревьев ослабляется когда Ri > 1. но в целом этот вопрос требует более глубокого изучения. прежде чем может быть получена подробная картина процесса затухания турбулентности благодаря градиенту плотности.

С теопетической стороны до сих пор нет полного, заслуживаюшего доверия исследования действия градиента плотности на профиль средней скорости и на пульсацию скорости. Из наблюдений. проведенных вблизи земли, точно установлено, что при возникновении инверсии градиент скорости возрастает и приближается к постоянной величине (линейный профиль скорости), но еще не найдено теоретическое выражение, которое устанавливает соотношение межлу профилем скорости и профилем температуры. В период инверсии величина колебаний скорости значительно уменьшается, иногда до полного исчезновения. Но здесь снова нет теоретического соотношения, которое направило бы экспериментатора.

Проблемы диффузии при разных температурных градиентах. исследовались в направлении, указанном Сеттоном, при этом профиль скорости выражается степенным законом высоты, а показатель степени рассматривается как функция температурного градиента. Вблизи земли средняя скорость может быть выражена приблизительно в форме

$$\overline{u} = \overline{u}_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m,$$

где $\overline{u_1}$ — скорость на фиксированном уровне $z = z_1$. При больших температурных градиентах т мало, а при глубоких инверсиях т увеличивается до единицы. Такие изменения в форме профиля средней скорости указывают на влияние градиента плотности на передачу количества движения, и можно предположить, что другие диффундирующие качества, такие как концентрация вещества, подвергаются такому же действию. Таким образом, можно получить представление о действии градиента плотности на диффузию. Эта проблема подробно рассматривается в гл. 8.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Brunt D. Physical and Dynamical Meteorology, Cambridge, 1938.
- 2. Fishenden M. and Saunders O. A. The Calculation of Heat Transmission. London, 1932.
- 3. Kaman P. K. Proc. Indian Acad. Sci., 3, 89. 1936.

- Kalman P. K. Proc. Indian Acad. Sci., 5, 69, 1956.
 Bénard H. Rev. gèn. sci., 12, 1261, 1309, 1900.
 Lord Rayleigh. Phil. Mag., 32, 529, 1916.
 Jeffreys H. Phil. Mag., 2, 833, 1926.
 Jeffreys H. Proc. Roy. Soc. London, A 118, 195, 1928.
 Pellew A. and Southwell R. V. Proc. Roy. Soc. London, 176, 312 1940.
- 9. Chandra K. Proc. Roy. Soc. London, 164, 231, 1938.
- Sutton O. G. Proc. Roy. Soc. London, 104, 251, 1930.
 Sutton O. G. Proc. Roy. Soc. London, 204, 297, 1950.
 Ramdas L. A. and Malurkar S. L. Indian J. Phys., 7, 1, 1932.
 Malurkar S. L. Gerlands Beitr. Geophys., 51, 270, 1937.
 Jeffreys H. Phil. Mag., 35, 270, 1918.

12 О. Г. Сеттон

- 14. Johnson N. K. and Heywood G. S. P. Geophys. Mem. 77.
- 15. Roberts O. F. T. Proc. Roy. Soc. London, A 104, 640, 1923. 16. Sutton O. G. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 74, 13, 1948.

- 17. Taylor G. I. Phil. Trans. Roy. Soc., A 25, 1, 1915. 18. Brunt D. Proc. Roy. Soc. London, A 124, 201, 1924. See also (1).
- 19. Ertel H. Meteorol. L., 59, 250, 1942; 60, 246, 1943; 61, 8, 1944; 61, 207. 1944.
- 20. Priestlev C. H. B. and Swinbank W. C. Proc. Soc. London, A 189. 543. 1937.
- 21. Jeffrevs H. Proc. Cambridge Phil. Soc., 26, 170, 1930.

- 22. Richardson L. F. Phil. Mag., 49, 81, 1925.
 23. Taylor G. I. Proc. Roy. Soc. London, 132, 499, 1931.
 24. Schlichting H. Z. angen. Math. u. Mech., 15, 313, 1935.
- 25. Calder K. L. Guart. J. Rov. Meteorol. Soc., 75, 71, 1949.
- 26. Ландау Л. Д. и Лившин Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.
- 27. Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1956.
- 28. Гандин Л. С. Трулы ГГО, вып. 6 (68), 1947. 29. Лайхтман Д. Л. Труды ГГО, вып. 20 (82), 1949.
- 30. Шишкин Н. С. Труды ГГО, вып. 47 (109), 1954.
- 31. Шишкин Н. С. Изв. АН СССР. сер. геогр. и геофиз., № 5. 1948.

ГЛАВА 5

РАДИАЦИЯ

Земля получает основное количество тепла от солнца; другие небесные тела участвуют в нагревании земли незначительно. Теоретический анализ температурного режима поверхности земли и непосредственно прилегающей к ней атмосферы должен, таким образом. включать детальное изучение солнечной энергии, однако это не будет являться полным содержанием проблемы. Поверхность земли в свою очередь излучает в атмосферу и мировое пространство, при этом оказывается, что водяной пар, обычно находящийся в атмосфере, способен сильно поглощать и излучать радиацию в определенных длинах волн спектра земной радиации. К тому же солнечный луч подвергается диффузному рассеянию молекулами воздуха и взвешен-ными частицами, что обусловливает образование так называемой радиации неба. В то же время значительное количество радиации связано с отражением от облаков, снега и водных поверхностей. Атмосфера, таким образом, пронизывается комплексом лучей, часть из которых проходит ее с небольшим поглощением, но при значительном рассеянии и отражении; другая часть лучей замечательна тем, что включает так называемую длинноволновую радиацию, постоянно поглощаемую и вновь излучаемую. Точная математическая трактовка этого очень сложного поля едва ли может быть дана, так как мы имеем здесь дело с такими нерегулярно меняющимися величинами, как количество облаков, содержание водяного пара и степень загрязнения атмосферы.

Радиация, проходя сквозь атмосферу, воздействует на метеорологические процессы благодаря ее свойству передавать энергию воздуху и земле. Эта энергия проявляется в первую очередь как тепло. Сложность метеорологических проблем возникает часто вследствие того, что радиация не является монохроматической, и поглощение атмосферой значительно изменяется с длиной волны и частично из-за неизбежных изменений в среде. Следовательно, при анализе различных процессов надо принимать во внимание такие факторы, как спектры первой и второй радиации в атмосфере, а также селективность переноса и поглощения лучей при различных состояниях атмосферы и поверхности земли.

179

 12^{*}

5. 1. Основные зависимости

Основные законы радиации изложены здесь кратко, для справок. В этой книге они не будут подробно обсуждаться и для более глубокого ознакомления с ними читателю рекомендуется обратиться к специальным трудам.

1. Единицы. Интенсивность радиации определяется как количество энергии, получаемой в единицу времени единицей поверхности, и может быть выражена в эрг см⁻² сек.⁻¹. В метеорологии эта величина обычно выражается числом калорий на квадратный сантиметр в минуту. Следует иметь в виду приведенные ниже зависимости

1 г кал.⁻² мин.⁻¹ = 4,19 · 10⁷ эрг см⁻² мин.⁻¹ = 6,97 · 10⁻² вт см⁻².

2. Определение черного тела. Интенсивность радиации, испускаемая телом, является функцией длины волны радиации, абсолютной температуры тела и площади излучающей поверхности. Для данной температуры, длины волны и площади поверхности интенсивность имеет верхний предел. Тело, которое излучает для каждой длины волны максимальную интенсивность радиации, называется полным излучателем, или черным телом. Необходимо отметить, что последнее название не имеет отношения к естественному цвету тела.

3. Закон Кирхгофа. Отношение интенсивности излучения (интенсивность радиационного излучения) к абсорбции (поглощенная часть радиации) тела есть универсальная функция длины волны и абсолютной температуры. Для черного тела это отношение равно интенсивности излучения. Из этого следует, что каждое тело поглощает радиацию точно таких же длин волн, которую оно способно излучать при той же температуре. Характер и интенсивность радиации черного тела зависит только от абсолютной температуры тела.

4. Закон Стефана. Черное тело при абсолютной температуре T_1 , помещенное в однородную среду с абсолютной температурой T_2 , получает или теряет энергию в количестве

 $\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right),\tag{5.1}$

где σ — абсолютная постоянная, равная 5,77 · 10⁻⁵эрг см⁻² сек.⁻¹.

5. Формула Планка. Радиация $E(\lambda, T) d\lambda$ длины волны, лежащей между λ и $\lambda + d\lambda$, которая излучается единицей поверхности черного тела при абсолютной температуре T, дается выражением

$$E(\lambda, t) d\lambda = c_1 \lambda^{-5} \left(\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1 \right)^{-1} d\lambda \text{ spr cek.}^{-1}, \qquad (5.2)$$

где c_1 и c_2 — постоянные.

6. Закон смещения Вина. Из формулы Планка следует, что

$$f^{-5}E(\lambda, T) = f(\lambda T).$$
 (5.3)

Функция $f(\lambda T)$ равна нулю при $\lambda = 0$ и при $\lambda \to \infty$ и достигает максимума при длине волны λ_{max} , которая выражается уравнением Вина

$$\lambda_{\max} T = 2940, \tag{5.4}$$

где λ — измерена в $\mu = 10^{-4}$ см и T в °К.

Коротковолновая и длинноволновая радиация. Солнце можно принять как черное тело, поверхность которого излучает при температуре около 6000 °К.

Из законов Планка и Вина следует, что максимальная интенсивность солнечной радиации находится около $0,5\,\mu$ и почти все солнечное излучение содержится между 0,15 и $4\,\mu$. Поверхность земли приближенно можно также считать черным телом, излучающим при температуре $300\,^{\circ}$ К. Максимум интенсивности радиации земли приходится на длину волны около $10\,\mu$, границы спектра излучения лежат около 3 и $80\,\mu$. Фактическое несовпадение этих двух спектров дает возможность провести заметное различие между коротковолновой солнечной радиацией и длинноволновой земной радиацией.

Радиационный баланс. Поскольку не наблюдается заметного накопления или потери тепла землей и атмосферой, количество приходящей радиации должно балансироваться с количеством уходяшей. Значения составляющих этого баланса по-разному оцениваются авторами, и этот вопрос более относится к климатологии, чем к микрометеорологии. Имеются следующие значения баланса, подсчитанные Бауэром и Филлипсом [1] и уточненные Мёллером [2]. Около 43% приходящей солнечной радиации достигает поверхности в виде прямой (27%) и рассеянной радиации неба (16%). Около 42% теряется в мировое пространство, главным образом путем прямого отражения от облаков и поверхности земли, и около 15% поглощается атмосферой. Таким образом, для того чтобы поддерживался баланс, 58% от приходящей радиации должно излучаться поверхностью земли и атмосферой в виде длинноволновой радиации.

Чистая ухолящая радиация от поверхности земли составляет около $\frac{1}{4}$ части приходящей радиации, а полная интенсивность излучения поверхности равняется около 120% приходящей солнечной радиации. Из этой величины должна быть вычтена обратная радиация от атмосферы (противоизлучение атмосферы) к поверхности, составляющая около 96% приходящей радиации. Разница составляет 24%, из которых около $\frac{2}{3}$ вновь поглощается атмосферой и $\frac{1}{3}$ теряется в мировое пространство. Одной радиации недостаточно, чтобы обеспечить тепловой баланс поверхности, так как имеется внутренний перенос энергим турбулентным перемешиванием и перенос тепла от поверхности к атмосфере испарением и последующей конденсацией на более высоких уровнях. В целом поверхность земли теряет почти равное количество энергии излучением и переносом водяного пара, и эта потеря почти полностью восполняется приходящей радиацией, прямой и рассеянной. Количество тепла, связанное с турбулентным перемешиванием, мало и, вероятно, менее $\frac{1}{12}$ части приходящей от солнца радиации.

5. 2. Коротковолновая радиация

Солнечная постоянная. Измерения солнечной радиации часто выражаются в значениях солнечной постоянной, определенной как интенсивность радиации солнца на половинном расстоянии от земли, при предположении, что атмосфера отсутствует. На практике солнечная постоянная рассматривается как интенсивность солнечного потока на внешней границе земной атмосферы и определяется экстраполяцией из измерений, сделанных на высокогорных станциях. Принятое значение солнечной постоянной

$$I_0 = 1,94$$
 кал. см⁻² мин.⁻¹. (5.5)

Солнечный спектр. Наблюдения показывают, что солнечный спектр ограничен длинами волн, лежащими между 0,3 и 2 μ . Радиация длин волн ниже 0,36 μ обычно относится к ультрафиолетовому, а радиация длин волн выше 0,76 μ — к инфракрасному участкам спектра.

Спектр солнечного света имеет много линий поглощения, часть из которых вызвана составом солнечной атмосферы, а часть является следствием поглощения земной атмосферой. Почти полное отсутствие радиации длин волн меньше $0,3 \mu$ обусловлено озоном, который имеет полосы поглощения между 0,2 и $0,32 \mu$, и кислородом в верхней атмосфере. Из остальных составляющих атмосферы углекислый газ имеет две небольшие полосы поглощения в участках от 2,3 до $3,0 \mu$ и от 4,2 до 4,4 μ и, следовательно, оказывает небольшое влияние на поток в целом. Кислород поглощает в участках спектра 0,69 и $0,76 \mu$ — эти полосы узкие и вызывают небольшую потерю энергии. Основное поглощение связано с наличием водяного пара в атмосфере, который имеет полосы поглощения в области длин волн 0,72; 0,81; 0,93; 1,13; 1,37; 1,89 и широкие полосы с центрами около 1,91 и $2,03 \mu$.

Таблица 5, для Давоса, показывает процентное распределение солнечной энергии в различных длинах волн для некоторых месяцев.

Процентное распределение энергии солнечной радиации в различных длинах волн для полудня

Месяцы	Ультрафио- летовый 0,295— 0,40µ	Фиолето - вый 0,40—0,47µ	Голубой, зеленый 0,47-0,56µ	Желтый 0,56 — 0,63µ	Красный 0,63—0,76µ	Инфракрас- ный >0, 76µ	Полная ра- диация, г кал. см ⁻² мин1
Март	0,6	10,0	16,1	11,7	17,9	43,6	1,49
Июнь	1,0	11,4	16,7	11,9	17,7	41,2	1,45
Сентябрь	0,8	10,2	16,4	11,8	17,9	42,9	1,45
Декабрь	0,2	.8,7	14,8	11,7	17,1	48,5	1,35

Таким образом, около половины энергии, приходящей от солнца, представляет собой видимый свет, и значительная часть радиации, около 40%, приходится на инфракрасную область спектра.

Закон Беера. Соотнощение между солнечной постоянной и интенсивностью радиации, приходящей на земную поверхность, дается законом Беера. Если $I_0 q$ — интенсивность после прохождения через слой единичной толщины, то интенсивность после прохождения через слой толщиною в *m* единиц будет

$$I = I_0 q^m$$
.

Величина *q* называется коэффициентом прозрачности. Введением коэффициента ослабления *a*, которое определяется выражением

$$a = -\ln q, \qquad (5.6)$$

получаем закон Беера

$$I = I_0 \exp\left(-am\right). \tag{5.7}$$

Воздушная масса, через которую проходит луч, обычно выражается через некоторый фиксированный стандарт, за который условно принимается m = 1, что относится к состоянию, когда солнце находится в зените, а точка наблюдения — на уровне моря. Для других положений солнца m пропорционально секансу зенитного расстояния.

Закон Беера действителен только для монохроматического потока; для радиации, охватывающей широкий ряд длин волн, коэффициент ослабления понижается с увеличением толщины воздушной массы. Коэффициент ослабления может быть выражен в виде

$$a = a_g + sa_s + wa_w,$$

где a_g — коэффициент рассеяния для молекул воздуха, a_s — коэффициент рассеяния для сухих частиц, a_w — коэффициент поглощения для водяного пара, w и s — относительное содержание водяного пара и частиц соответственно.

Значение а дается хорошо известным выражением Релея

$$a_g = \frac{32\pi^3 (n-1)^2}{3N\lambda^4}$$
,

где N — число Лошмидта, n — коэффициент рефракции для сухого воздуха и λ — длина волны. Формула может быть применена к воздуху, содержащему отдельные твердые частицы, диаметр которых меньше, чем длина волны света, подвергающегося рассеянию.

Мутность. Количество радиации, падающей на единицу площади земной поверхности, зависит от ряда астрономических факторов, таких как солнечная постоянная, широта места и время дня и года. Все это может быть учтено сравнительно простыми подсчетами. Фактор, который остается не учтенным — прозрачность атмосферы, является наиболее неприятным. Линке предложил выражать колебания прозрачности, обусловленные содержанием водяного пара и пыли, введением так называемого "фактора мутности" (*Trübungsfaktor*) *T*, который определяет отношение полного коэффициента ослабления к коэффициенту ослабления только для одного молекулярного рассеяния, каким оно дается формулой Релея. Таким образом,

$$T = \frac{a}{a_g} = 1 + \frac{wa_w}{a_g} + \frac{sa_s}{a_g} \,.$$

Комбинируя это выражение с законом Беера, получаем соотношение

$$I_m = I_0 \exp\left(-a_g T m\right)$$

или

$$T = \frac{2,303}{ma_g} \log \frac{I_0}{I_m}$$
.

Аналогичная величина коэффициента мутности была определена Онгстремом.

Фактор мутности, как это и можно было предполагать, показывает заметное изменение со временем и местом. Обычно наблюдается резко выраженное годовое колебание с максимумом летом и минимумом зимой, но наибольшие изменения связаны с колебаниями загрязнения атмосферы. Чистый горный воздух на Цугшпитце (2962 м) показывает наибольшие годовые колебания от T = 1,8 до T = 2,1, в то время как на Кью, вблизи Лондона, фактор мутности от 4,1 зимой повышается до 5,1 летом.

Местная интенсивность солнечной радиации. Если параллельный поток радиации, падающий под углом *h* к горизонтальной поверхности, имеет интенсивность *I* на поверхности, нормальной к лучам, интенсивность на горизонтальную поверхность определяется как

$$I' = I \sin h$$
.
Интенсивность радиации солнца для небольшого ряда длин волн, прошедшая через чистую атмосферу, изменяется как синус угла наклона солнца. Выражая угол наклона солнца через склонение δ , часовой угол солнца τ и широту места φ , получим

 $I' = I (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \tau).$

Это простое соотношение не является точным вследствие того, что поглощение радиации составными частями атмосферы зависит от длины волны. Исходя из закона Беера, q^m является функцией длины волны λ , вследствие чего при низких высотах солнца короткие волны испытывают значительно ббльшие потери, чем длинные волны. Высчитано для ультрафиолетовой области ($\lambda \ll 0.35 \mu$), что около $38^{0}/_{0}$ энергии достигает поверхности земли при солнце в зените и только небольшое количество (около $0.04^{0}/_{0}$) достигает почвы при высоте солнца 7°. Значительно большие изменения наблюдаются для красного конца спектра¹.

Длина пути солнечных лучей через атмосферу не является единственным фактором, воздействующим на годовые и дневные колебания. На Давосе (1600 м) весной радиация превышает осеннюю при той же высоте солнца, и в летнее солнцестояние имеет месторезкое падение максимума. С другой стороны, в Неаполе радиация наиболее интенсивна осенью, тогда как на Яве возрастание радиации происходит в ноябре, после сухого сезона². Такое различие, вероятно, связано с повышением содержания пыли в атмосфере в сухуюпогоду. Эти примеры показывают, что нельзя полагаться ни на один закон для выражения средней величины и дневных колебаний солнечной радиации для какого-то определенного места и времени. Хорошая погода вызывает проявление очень многих "местных" особенностей.

Радиация неба. Земля получает тепло не только от прямого солнечного потока, но также и от коротковолновой радиации, рассеянной воздухом и составными частями атмосферы. Рассеянная радиация создает очень важный источник тепла для земной поверхности, особенно в высоких широтах, где интенсивность прямой солнечной радиации значительно уменьшается в зимние месяцы. Для средних широт Кинг [3] и Траберт [4] оценивают рассеянную радиацию равной около 30—40% от прямой солнечной интенсивности. Онгстрем [5] в табл. 6 приводит значения распределения суммарной радиации (солнца и неба) по ее составляющим — прямой и рассеянной — для Стокгольма (за 1905—1926 гг.).

Цифры этой таблицы ясно показывают большое значение рассеянной радиации неба в поддержании температуры поверхности земли в течение зимних месяцев.

² Shaw, Manual of Meteorology, Vol. II, Cambridge, 1930.

¹ Hann-Süring "Lehrbuch der Meteorologie", 5 th ed., p. 51, Leipziq, 1937.

Распределение приходящей коротковолновой радиации для Стокгольма, 1905—1926 г. (проценты)

Раднация	Ι	11	III	IV	v	VI	VII	VIII	IX	x	XI	XII
Солнца	37	44	57	73	77	76	81	74	66	48	23	13
Неба	63	56	43	27	23	24	19	26	34	52	77	87

Онгстрем предложил эмпирическую формулу для выражения зависимости радиации неба от действительного количества облаков

$$Q_w = Q_0 \left(0,235 + \frac{0,765n}{N} \right),$$

где Q_w — суммарная приходящая коротковолновая радиация в течение данного периода, Q_0 — суммарная радиация для безоблачного неба, n — период ясной, солнечной погоды, N — максимально возможный период ясной, солнечной погоды.

Для n = 0 имеем случай совершенно облачного неба и тогда

 $Q_w = 0,235Q_0$.

Таким образом, при пасмурном небе приходящая коротковолновая радиация в среднем равна около четвертой части радиации при безоблачном небе.

Отраженная коротковолновая радиация. Альбедо. Значительное количество коротковолновой радиации подвергается отражению и рассеянию и теряется в мировом пространстве. Наиболее эффективными отражательными поверхностями являются облака, вода, снежные и ледяные поля. Для очень небольшого элемента шероховатой поверхности луч солнца подвергается диффузному отражению. и часть падающей энергии рассеивается во всех направлениях. Для идеальной шероховатой поверхности количество отраженной энергии не зависит от направления приходящего потока, но для естественных поверхностей интенсивность отраженного луча есть функция направления и угла падения приходящего потока. Для строгого определения альбедо большой ровной поверхности, например поверхности почвы, представим себе небольшую горизонтальную вспомогательную поверхность, установленную на некотором расстоянии от нее. Тогда альбедо поверхности почвы (большой поверхности) определяется как отношение $\frac{r}{i}$, где i — интенсивность радиации, проходящей вспомогательную поверхность по направлению вниз, а r — интенсивность потока, направленного вверх. При этом предполагается, что обе поверхности не излучают. В практике это условие сохраняется благодаря использованию прибора, чувствительного к коротковолновой радиации и нечувствительного к радиации с длиной волны больше 4 и. Прибор направляется приемной поверхностью к небу

и к почве, и для определения альбедо берется отношение этих показаний.

Онгстрем [6] приводит результаты своих наблюдений, полученных таким прибором (пиранометром), а также результаты Люнеланда [7], Стактея и Вегенера [8]. Некоторые данные, полученные Онгстремом, представлены в табл. 7.

Таблица 7

Альбедо различных естественных поверхностей, по Онгстрему

Ровная	почва,	покрыт	ая	тра	воі	ł																. 0,25-0,33
Ровная	почва,	горная	по	род	a.	•	•			•	•				•	•	•	•		•	•	. 0,12-0,15
Песок		• • •	• •	•	• •			a,		•	•			•	•	٠	٠		·	٠	٠	. 0,18
Сухая	черная	земля	• •	•		•	•	٠	• '	٠	•	٠	•	•	·	٠	•	÷	÷	٠	٠	. 0,14
Снег.	••••	••••	•••	•	• •	٠	•	•	·	·	•	•	•	·	·	·	·	•	٠	·	•	. 0,70-0,18

Измерения Онгстрема и подобные им наблюдения Стактея и Вегенера включают ближнюю инфракрасную радиацию солнца.

Из этих наблюдений можно сделать вывод, что отражение длинных волн значительно больше, чем суммарной радиации, которая содержит короткие волны. Этот результат может иметь некоторое биологическое значение, так как ночная радиация состоит из длинных волн и, как полагает Онгстрем, излучательная способность живых растений для длинноволновой радиации мала, то это обеспечивает естественное предохранение их от заморозков. Измерения Онгстрема показывают, что мокрая почва обладает почти в два раза меньшей отражательной способностью, чем сухая.

Такая разница является следствием как поглощения красного конца спектра в тонком слое воды, так и главным образом следствием эффекта, возникающего из-за полного внутреннего отражения в пленке воды.

Облака являются очень действенными отражающими поверхностями, и Онгстрем для количества облаков *n* дает выражение

Альбедо =
$$0,70 + 0,17(1 - n)$$
,

показывающее, что 70% приходящей коротковолновой радиации отражается в мировое пространство при небе, полностью покрытом облаками. По мнению Онгстрема, для водных поверхностей, даже при наличии волн, формула Френеля для ровной поверхности и не-поляризованного света

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\mathrm{tg}^2(i-r)}{\mathrm{tg}^2(i+r)} \right]$$

(i - угол падения, r - угол между нормальным и отраженным лучом) удовлетворительна для высот солнца не ниже 15°.

Из этого следует, что альбедо значительно изменяется с изменением направления падающего луча.

Поглощение коротковолновой радиации растительностью. В табл. 8 приведены данные Онгстрема [6] о трансформации коротковолновой радиации зелеными листьями.

Влияние растительности на приходящую радиацию

	Раннее лето-листья с высоким содержанием воды, %	Позднее лето – листья с низким содержанием воды, %
Отражение	19	29
Поглощение	55,5	38
Прохождение	25,5	33

Влияние древесных насаждений на приходящую радиацию может быть охарактеризовано следующим примером:

Приходящая кор	ОТ	ко	во	лн	101	вая	t j	pa,	циа	aц	ИЯ	•									г	кал	I.	см ⁻² мин. ⁻¹
На открытом мес	сте	•													•							•		0,99
Тонкие стволы	•	•				٠	•	•		•					•	•			٠	•	•		•	.0,04-0,07
Толстые стволы	• '	ø	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	0,007 - 0,01

Влияние высокой травы характеризуется следующими данными:

Приходящая коротк	OE	30,	но	ва	a p)a)	циа	aц	ия							•		. г	H	ал		см	-2	² 1	иин;
На вершине травы	1	М	BĿ	ICO	тоі	ï	•	•									•		•		•				. 1,08
50 см над почвой	•	•		• •			•		. •		•	•		•	•	•	•.	•	•	•	•		•	•	.1,04
10 см над почвой	•		•		•	•	•	٠	•	•	•		•			•								•	.0,28
Поверхность почвы		•	•	• •		•			•		•	•	•	•	•	•	•		•	•		•			. 0,19

Из представленных выше примеров видно, что при наличии плотного растительного покрова поверхность почвы, даже в безоблачный день, получает небольшую часть прямой и рассеянной радиации. Большое количество тепла, получаемое почвой, может быть следствием поступающих к ней потоков тепла, вызванных теплопроводностью и турбулентным перемешиванием. Необходимо отметить, что из наблюдений, проведенных на лугу, нельзя заключить, что на поверхности земли дневные колебания солнечной радиации полностью такие же, как и измеряемые приборами, установленными в нескольких футах над поверхностью. Пренебрежение этим фактом может привести к серьезным ошибкам при изучении распределения тепла в нижней атмосфере.

5. 3. Длинноволновая радиация

В проблеме излучения и поглощения радиации, поступающей от поверхности земли и атмосферы, главную роль играет находящаяся в атмосфере вода в виде пара или жидкости.

Радиация при температурах, наблюдаемых на земле, является длинноволновой ($\lambda > 4 \mu$), и для такой радиации существенную роль играют атмосферные газы — углекислый газ и водяной пар, из которых последний наиболее важен. Большая сложность решения проблемы возникает из-за того, что водяной пар поглощает селективно

во всем спектре. Радиация некоторых длин волн приходит через большие слои атмосферы без поглощения или с небольшим поглошением, а радиация других длин волн поглощается частично или полностью и вновь излучается атмосферой. Подробное исследование изменений температуры в атмосфере влечет за собой необходимость изучения поглощения с помощью специальной аппаратуры. Но и при этом крайне важно развитие теоретической основы, так как процесс происходит на очень длинной траектории, а поглощающие газы находятся при различных давлениях.

Полосатые спектры. Известно, что спектры поглощения газов, состоящих из простых атомов, значительно отличаются от спектров поглощения газов с многоатомными молекулами, такими как H₂O. Первые известны как линейные спектры и содержат ясно отмеченные отдельные линии. Спектр многоатомных газов характеризуется структурой, образующей провалы, известные как полосы. При наблюдении такого спектра прибором с высокой разрешающей силой полосы кажутся составленными из большого числа линий.

Существование полосатого спектра зависит от того, получает или теряет многоатомная молекула 1) энергию электронов, 2) энергию вращения и 3) энергию колебания. В простой двухатомной молекуле (такой как HCl) полная внутренняя энергия образуется в результате движения электронов, общего колебания ядра и от вращения всей молекулы около оси, проходящей через центр тяжести. Между этими тремя движениями не наблюдается взаимодействия, а лишь индивидуальные "квантования" энергии, и в силу этого могут иметь место три вида молекулярного спектра — электронный, колебательный и вращательный.

Теория молекулярного спектра очень сложна и еще не полностью разработана даже для такой на вид простой молекулы, как H_2O , и нами рассматриваться не будет. Для наших целей достаточно отметить, что электронный спектр ограничен почти полностью ультрафиолетовым и видимым концами спектра, колебательный спектр — областью от 1 до $30\,\mu$ и чисто вращательный спектр — от $15\,\mu$ и выше. Таким образом, метеоролога интересуют колебательные, вращательно-колебательные и вращательные полосы спектра водяного пара.

Спектр поглощения водяного пара в далекой инфракрасной части спектра. Молекула водяного пара является примером тех молекул, которые в спектроскопических работах названы ассиметрическими молекулами, т. е. обладающими тремя неравными моментами инерции. Важные исследования инфракрасного спектра поглощения выполнены Хеттнером [9], Рубенсом [10], Вебером и Рандалем [11] и, наконец, наиболее полно Рандалем, Деннисоном, Гинзбургом и Вебером [12].

Подробный обзор результатов Геттнера и последующих уточнений, выполненных Вебером и Рандалем, дан во втором издании Брента: "Физическая и динамическая метеорология".

Оригинальная работа Геттнера имеет большое значение для

метеорологии, так как она создала основу известным исследованиям Симпсона и Брента.

Для областей спектра, обладающих большим поглощением, Геттнер использовал водяной пар при температуре 127°С и там, где поглощение было найдено очень большим, он применял смесь воздуха и пара. Основные результаты работы Геттнера можно сформулировать следующим образом:

1. Полосы поглощения центрированы около 1,37, 1,84 и 2,66 р.

2. Область почти полной прозрачности от 3,5 до 4,5 µ.

3. Интенсивное поглощение в полосе с центром при 6,26 µ.

4. Полная прозрачность от 8,5 до 9,5 µ.

5. Широкая полоса с увеличивающимся поглощением, начиная от 9,5 и и до границы измерений, около 34 и.

Особый интерес вызывает существование двух "окон" при 4 µ и 9 µ соответственно. Из них окно при 9 µ имеет большое значение, так как по закону Вина радиация черного тела при температуре 300° К наиболее интенсивна, около 10 µ. Измерения Вебера и Рандаля в общем подтвердили результаты Геттнера, однако значения коэффициентов поглощения ими получены значительно меньшие. Одним из важных результатов работы Вебера и Рандаля является доказательство того, что "окно" около 10 µ более широкое, чем оно дано Геттнером.

Из газов, составляющих атмосферу, необходимо отметить углекислый газ, который имеет одну узкую, но интенсивную полосу поглощения с центром около 15 µ.

Обширная картина, представленная указанными выше исследованиями, подтверждает мнение, что атмосфера является для части спектра длинноволновой радиации прозрачной, а для части спектра непрозрачной. Наиболее интересные попытки исследовать перенос энергии радиации в такой атмосфере предприняты Симпсоном [13] и Эльзассером [14], результаты которых будут рассмотрены ниже.

Исследования длинноволновой радиации Симпсоном. До работы Симпсона существовало много теорий атмосферной радиации, основанных на представлении о "серой" атмосфере, т. е. такой, в которой излучение радиации для всех длин волн является определенной частью радиации черного тела при той же самой температуре. Такое приближение является очень грубым, особенно когда влажный воздух пересекается лучами длинноволновой радиации, но так как какие-то упрощения должны быть сделаны при решении ряда метеорологических проблем, можно считать, что представление об атмосфере, как "серой", являлось полезным первым приближением. Исследование Симпсона почти не оставляет сомнений, что схема серой атмосферы неприемлема.

Представления о серой атмосфере рассмотрены в первой из трех работ Симпсона. Имеются три основные трудности при использовании этой гипотезы. Во-первых, уходящая радиация оказывается независящей от широты — обстоятельство, которое затрудняет объяснение особенностей стратосферы (область радиационного равновесия); в серой атмосфере трудно объяснить изменения температуры стратосферы с широтой. Во-вторых, имеет место преобладание уходящей радиации над приходящей. И, наконец, схема серой атмосферы не допускает изменений в инсоляции. Мы не будем здесь рассматривать подробно эту работу, но отметим, что проведенное исследование исключает предположение об излучении воляного пара, как серого тела.

Свою вторую работу Симпсон начинает с обсуждения коэффициентов поглощения водяного пара и углекислого газа, основываясьна измерениях Геттнера для водяного пара и на работах Рубенса и Ашкинаса [15] для углекислого газа. По данным этих работ Симпсон построил график, показывающий поглощение воздухом, содержащим 0,3 мм осажденной воды и 0,06 г углекислого газа. Так как данные Геттнера относятся к пару при высокой температуре, а измерения Фоуля для водяного пара в атмосферных условиях показывают по всему спектру меньшее поглощение, Симпсон принял компромиссное решение, полагая правильным принять полную прозрачность для водяного пара в области спектра от 8,5 до 11 µ. Учитывая поглощательные свойства водяного пара и углекислого газа в длинноволновой области для столба воздуха, содержащего 0,3 мм осажденной воды, им получено следующее:

1. Полное поглощение от 5,5 до 7 µ и от 14 µ и выше.

2. Полная прозрачность ниже 4 µ и между 8,5 и 11 µ.

3. Неполное поглощение от 7 до 8,5 µ и от 11 до 14 µ.

Простота и эффективность анализа Симпсона хорошо показаные при рассмотрении проблемы уходящей радиации для средних широт. Оно основано на двух положениях, равнозначных закону Кирхгофа:

1. Слой газа при температуре T, который полностью поглощает радиацию длины волны λ будет излучать радиацию, как если бы он являлся черным телом при той же температуре T.

2. Если слой газа находится непосредственно на черной поверхности бесконечной протяженности при температуре T и если температура внутри газа понижается от поверхности вверх так, что на его внешней границе температура газа равна T_1 , то уходящий поток радиации некоторой длины волны не может быть больше чем поток радиации от черного тела при температуре T, или менее чем поток радиации от черного тела при температуре T_1 .

Второе положение выражает свойства влажной атмосферы, в которой происходит непрерывное поглощение и излучение радиации, а радиационный поток уменьшается с высотой из-за понижения температуры.

Эти законы и интерпретация Симпсоном спектра поглощения дают возможность подсчитать уходящую радиацию обычным планиметрированием.¹ Земная поверхность рассматривается как черное тело при 280° К, а температура стратосферы принята равной 218° К;

¹ Подробнее см. статью Симпсона [13]. Диаграмма также воспроизведена Брентом. Физическая и динамическая метеорология, 2-е изд. 1939: небо предполагается безоблачным. Исходя из первого положения Кирхгофа, имеем уходящую радиацию в стратосфере, возникающую из-за полос излучения от 5,5 до 7 µ и ниже 14 µ.

Земная радиация в прозрачной полосе 8,5—11 µ уходит в мировое пространство. Для полос неполного поглощения от 7 до 8,5 и от 11 до 14 µ Симпсон, принимая во внимание второе положение, полагает, что их эффект может быть представлен на диаграмме некоторой промежуточной площадью.

Конечный результат планиметрирования представлен в нижеследующей таблице.

Длины волн µ.	Область, в которой возникает радиация	Интенсивность, г кал. см ⁻² мин. ⁻¹
5,5-7 7-8,5	Стратосфера Среднее из излучения поверхности и страто- сферы	0,003
8,5—11 11—14	Поверхность земли Среднее из излучения поверхности и стра-	$\frac{1}{2}(0,041+0,007) = 0,024$ 0,079
> 14	тосферы	$\frac{\frac{1}{2}(0,091+0,028)=0.059}{0,128}$
	Bcero	0,293

Величины, приведенные в таблице, относятся к ясному дню. Для облачного неба температуру поверхности земли можно заменить средней температурой верхней поверхности облачного слоя. Когда эта замена произведена и подсчитано среднее количество облаков, то оказывается, что уходящая радиация тесно связана с величиной приходящей радиации, определенной по значению солнечной постоянной и средней величине альбедо, полученной Альдрихом. Таким образом, проблема теплового баланса атмосферы, по-видимому, удовлетворительно решена.

Необходимо отметить, что при решении этой задачи Симпсон непосредственно не использовал значения коэффициентов поглощения, полученные Геттнером. Его работа основана на определении влияния полос пропускания и поглощения и некоторых промежуточных полос, при которых даже грубый подсчет дает приемлемую точность результатов. Но для этого необходимо точное определение границ полос, а это условие подчеркивает важность результатов более поздних исследований, которые показывают, что интервал прозрачности шире, чем он принят Симпсоном.

Более поздняя работа Рандаля на основании других соображений вызывает некоторые сомнения в точности выводов Симпсона. Полученные им коэффициенты поглощения водяного пара значительно меньше, чем коэффициенты, данные Геттнером. Это означает, что для полного поглощения необходимо большее количество водяного пара, и вместо 0,3 мм осажденной воды требуется около 1 мм. Однако Аббот высказал сомнения, что в стратосфере может содержаться 0,3 мм осажденной воды, а так как количество воды в стратосфере из-за меньших коэффициентов поглощения должно быть даже больше 0,3 мм, то пригодность метода Симпсона становится сомнительной.

Радиационная диаграмма Эльзассера. Последовавшие за работой Геттнера лабораторные измерения поглощения водяного пара приборами с высокой разрешающей силой показали, что кривая коэффициента поглощения каждой длины волны является более сложной, чем предполагалось прежними исследованиями. В работе Симпсона эти крайне нерегулярные колебания в поглощении устранялись использованием схемы, в которой коэффициент поглощения принят постоянным или слабоизменяющимся в определенном интервале длин волн. Эльзассер [14] развил этот принцип, разработал диаграмму, которая допускает быстрое определение радиационного потока на любом уровне (включая земную поверхность), если известны профили влажности и температуры. Основные особенности схемы Эльзассера следующие:

1) атмосфера предполагается прозрачной, за исключением водяного пара и углекислого газа;

2) углекислый газ принимается прозрачным, за исключением длин волн с центром около 15 р. В этой полосе поглощение принимается настолько интенсивным, что толщину слоя газа, полностью поглощающего эти длины волн, можно принять очень небольшой:

3) задача поглощения и излучения водяного пара решается методом сглаживания, приводящего к определению обобщенного коэффициента поглощения, который имеет относительно простой вид.

Рассматривая выражение (3), можно закон Беера написать в виде

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) \exp(-k_\lambda u),$$

где k_{λ} — коэффициент поглощения, u — оптическая толщина, равная массе поглощающего вещества в вертикальном столбе единичного поперечного сечения между рассматриваемыми уровнями.

Если весь ряд длин волн разделить на некоторое число подынтервалов, то сглаживание колебаний в поглощении можно выполнить путем замены функции $\exp(-k_{\lambda}u)$ средним значением для подынтервала. По существу это является заменой закона Беера, который действителен только для единичных длин волн, более общим, но менее точным соотношением

$$I = I_0 \tau_1(u),$$

где τ_1 — обобщенная функция переноса для определенного интервала длин волн. Эльзассер показал, что эта функция может быть представлена следующей приближенной формулой:

$$\tau_1 = \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{1}{2} l_{\lambda} u}$$

где l_{λ} — обобщенный коэффициент поглощения, который графически изображен на рис. 17. Ясно, что большая часть изменений истинного коэффициента поглощения k_{λ} удалена сглаживанием.

Вся ценность работы Эльзассера в основном зависит от того, насколько правильно выполнено сглаживание. Оно должно быть точным, чтобы обеспечить практическое применение кривой, но не таким сильным, чтобы терялся действительный характер спектра.



Рис. 17. Обобщенный коэффициент поглощения.

Как известно, поглощение зависит от давления и температуры, и этим нельзя пренебрегать заранее из-за большой длины проходимого радиацией пути. Все же температурный эффект не нуждается в рассмотрении, за исключением очень точных расчетов. По-видимому, не вызывает сомнения, что l_{λ} пропорционально квадратному корню из давления, а так как давление изменяется во всем столбе воздуха, то необходимо ввести поправку на оптическую толщину u', которая определяется уравнением

$$u' = \int \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{2}} du,$$

где p_s — определенное стандартное давление.

Схема диаграммы Эльзассера представлена на рис. 18. Она представляет клинообразную площадь, пересеченную изотермами (вертикальные линии) и изоплетами исправленной оптической толщины (наклонные линии), причем последние пересекаются в точке (находящейся вне диаграммы), в которой абсолютная температура равна нулю. Горизонтальным основанием диаграммы является линия $u' = \infty$. Радиация углекислого газа, по гипотезе Эльзассера, является функцией только температуры и представлена на диаграмме линией, обозначенной словом "черная", выше изоплеты, так что площадь между этой линией и изоплетой u' = 0, расположенная вправо от изотермы, равна потоку радиации углекислого газа при данной температуре (около 18%), радиации черного тела при тропосферных температурах).

Поток радиации, поступающей от основания слоя, определяется планиметрированием. Температура основания слоя T_0 и температура



Рис. 18. Радиационная диаграмма Эльзассера.

 T_1 на верхней границе слоя определяются двумя точками $B(u'=0, T=T_0)$ и $C(u'=u_1, T=T_1)$, где u_1 относится к верхней границе слоя. Площадь *OBCO* соответствует потоку радиации, относящейся к водяному пару, находящемуся в этом слое. Поток, связанный с углекислым газом, определяется площадью *OABO*, где A — точка на пересечении линии "черная" с изотермой T_0 . Это находится в соответствии со вторым допущением Эльзассера. Полный радиационный поток слоя определяется площадью *OABCO*. Поток от черного тела (такого, как почва) эквивалентен потоку от столба бесконечной оптической толщины и дается площадью *OBDO*.

Для подробного ознакомления с диаграммой читателю рекомендуется работа Эльзассера или "Руководство по метеорологии", стр. 301—303 (Нью-Йорк, 1945), в которой приведена диаграмма (по второму исправленному изданию).

Критическое рассмотрение номограммы Эльзассера было выполнено Г. Д. Робинсоном [16], который сравнил радиационный поток, подсчитанный по диаграмме, с данными измерений, выполненных в обсерватории Кью (Англия). Результаты сравнений показывают, что диаграмма дает завышенные значения атмосферной радиации, особенно при небольшой ее интенсивности. Ошибки достигают порядка 6—14% при радиации 0,3 и 0,35 г кал. см⁻² мин.⁻¹ и уменьшаются до + 3% при радиации 0,4 г кал. см⁻² мин.⁻¹ и выше. Большие значения радиации могут наблюдаться или при высокой температуре, или при высокой влажности, но Робинсон показал, что завышение сохраняется, когда разность между подсчитанной и наблюденной радиацией нанесена на график как функция длины пути радиации (полная атмосферная влажность, исправленная на давление), выраженной в миллиметрах осажденной воды. Расхождение между подсчитанными и наблюденными значениями может быть объяснено двумя причинами:

1) излучение, принятое Эльзассером слишком велико для относительно низкого содержания влажности, но оно достаточно точно при большой влажности, или

2) существует добавочный источник радиации, который обычно связан с оптическими путями большой длины (низкая влажность).

Робинсон показал, что, используя метод, предложенный Ф. А. Бруксом [17], можно произвести исправление кривой изотермического излучения для ненаправленной радиации при данной длине оптического пути, причем вклад от CO_2 учитывается добавлением 18,5% радиации черного тела. Эта более сложная кривая дает результаты, лучше согласующиеся с наблюденными, чем расчеты по диаграмме Эльзассера. Робинсон отмечает, что этот метод был использован при конструировании эмпирической радиационной номограммы, которая при испытании на Кью дала хорошие результаты. Диаграмма, разработанная в обсерватории Кью, основана на исследованиях Эльзассера и Брукса для изотермических условий до оптической длины пути, эквивалентной 0,25 см осажденной воды, и на надежных измерениях, выполненных для больших оптических путей по методу Брукса. Эта диаграмма справедливо может рассматриваться как уточнение и дальнейшее развитие диаграммы Эльзассера.

Ночная радиация. Для микрометеорологии важно знать допустимую точность подсчета потери тепла излучением при обычных температурах. Наблюдения показывают, что сильные заморозки имеют место в ясную ночь, когда температура воздуха на высоте нескольких футов над почвой значительно выше точки росы. Экономическая важность изучения заморозков очевидна — "губительные" заморозки могут уничтожить за одну ночь большую часть дорогостоящего урожая. Проблема заморозков подробно будет обсуждена позже. В настоящем разделе мы рассмотрим, как можно методом Симпсона очень просто оценить ночное излучение.

Обычно полагают, что поверхность земли, независимо от того, является ли она обнаженной, покрытой ли растительностью, водой или снегом, обладает свойством черного излучателя. Оценка действительной точности такого допущения затруднительна. Измерение температуры естественной поверхности является трудной задачей, особенно когда "поверхность" представляет собою растительный покров. В таких случаях радиация, поступающая от почвы и новерхности растений, суммируется принимающим радиацию прибором и записывается как "радиация поверхности". Так как температура быстро изменяется с высотой в первых нескольких сантиметрах над

почвой, то почти невозможно определить температуру излучающей естественной поверхности.

Робинсон [16] в ходе указанного выше исследования выполнил важную в практическом отношении работу. В проводимых им опытах температура поверхности определялась стандартным напочвенным минимальным термометром (с цветной жидкостью), установленным на густой, коротко остриженной траве. Показания этого термометра сравнивались с данными радиометра, по которому определялась радиационная температура этой лужайки. По данным 95 сравнений, Робинсон установил, что излучение данной поверхности подобно излучению черного тела при температуре, которую отмечает установленный на ней термометр с отклонением в среднем около ±0,5° С. Данные сравнений получены по наблюдениям за сухой, мокрой и покрытой снегом поверхностями, днем и ночью, при низкой высоте солнца, при освещенных солнцем траве и термометре. Если использовать полученные Робинсоном результаты, то отпадает необходимость в исследовании действительной температуры листьев растительного покрова. По данным термометра, установленного на поверхности, возможно вычислить радиацию, эквивалентную радиации черного тела, с ошибкой, не превышающей ±7.10⁻³ г кал. см⁻² мин.⁻¹.

Разность между радиацией поверхности, которая принимается черным излучателем, и длинноволновой радиацией атмосферы называют эффективным излучением (чистая уходящая радиация) или ночной радиацией поверхности. Последний термин является неверным потому, что эффективное излучение является днем почти таким же, как и ночью, но измерять его значительно легче после захода солнца. В теории черного тела радиация поверхности выражается формулой Стефана (5.1), и определение полного излучения, таким образом, сводится к оценке интенсивности приходящей радиации (противоизлучения) атмосферы.

Для использования метода Симпсона необходимо заранее рассчитать толщину интересующей нас массы воздуха. Теория Симпсона основана на том, что столб воздуха, содержащий 0,3 мм осажденной воды, полностью поглощает радиацию основных длин волн. Длину *l* такого столба легко определить, если рассматривать водяной пар как идеальный газ. Если *e* — давление пара в миллибарах, p_w — плотность водяного пара и R_w — газовая постоянная для водяного пара ($R_m = 4,62 \cdot 10^3$), то:

$$e = R_{w} \rho_{w} T,$$

$$l \rho_{w} = 0,03,$$

а следовательно,

$$l = \frac{139T}{e} \,\mathrm{cm}.$$

Для T = 288° К (15°С) насыщающее значение *е* около 17 мб дает длину столба воздуха l = 24 м. Если воздух не насыщен, например, e = 10 мб (относительная влажность около 60%), то длина

столба увеличится до 40 м. Таким образом, по теории Симпсона, слои воздуха, которые определяют длинноволновую радиацию атмосферы, расположены относительно близко к поверхности почвы. Внутри таких слоев температура и содержание водяного пара могут быть с небольшой ошибкой заменены средними значениями. Метод Симпсона для расчета радиации, поступающей от атмосферы, следующий: поглощение принимается полным в полосах от 5,5 до 7 и. и для длин волн больше 14 и в приземном слое воздуха толщиною около 50 м. Действительная толщина слоя зависит от содержания в нем водяного пара. В таком относительно тонком слое воздуха температуру можно считать постоянной. В этих участках спектра поверхность получает от атмосферы длинноволновую радиацию. Для алин волн между 8,5 и 11 и воздух прозрачен, и, следовательно, в этих длинах волн поверхность при безоблачном небе не получает радиации. В частично прозрачных полосах радиационный поток зависит от содержания водяного пара. Для этих полос можно выполнить расчет по радиационной диаграмме. Пределы колебаний ночного излучения на станциях, где давление пара у поверхности превосходит 1 мб, по расчетам Симпсона, представлены в табл. 9.

Таблица 9

	Ночное излучение, г кал. с										
7°Қ	max	min	среднее								
261 271 280 292 299	0,146 176 211 262 293	0,055 066 079 100 115	0,100 121 145 181 204								

Пределы ночного излучения по Симпсону

Симпсон сравнил значения табл. 9 с результатами наблюдений, выполненных Дайнсом в Бенсоне, и показал, что их результаты находятся в пределах, указанных в таблице. Данные других авторов представлены в табл. 10.

До сих пор наш анализ ограничивался ясным небом. Облачный слой можно принять за черное тело при температуре его нижней поверхности, от которой поверхность земли получает радиацию в прозрачных участках спектра. Таким образом, низкие облака могут быть очень эффективными в предохранении поверхности от потери тепла, и в некоторых случаях, когда имеет место температурная инверсия, поверхность может получать от атмосферы радиации больше, чем она ее излучает. В первом приближении можно принять, что в ясную ночь результирующий уходящий поток энергии составляет около $\frac{1}{3}$ радиации черного тела при температуре воздуха и давлении водяного пара порядка 10 мб. Если температура

Таблаца 10

Ночная радиация при ясном небе

Автор	Mecro	T вблизи поверх- ности °К	Среднее эффек- тивное излучение г кал. см ⁻² мин1	Радиация черного тела, г кал. см ⁻² мин. ⁻¹	Эффективное из лучение, выра- женное в 9/0 ра- диации черного тела
Маурер Пертнер К. Онгстрем Ло Сурдо А. Онгстрем	Цюрих . Зоннблок Упсала . Неаполь Алжир .	288—291 265 273—283 293—303 293	0,128 0,201 0,155 0,182 0,174	$\begin{array}{c} 0,568-0,592\\ 0,407\\ 0,459-0,530\\ 0,609-0,696\\ 0,609\end{array}$	224934-2929-2629

почвы на 5° ниже температуры воздуха, потеря тепла поверхностью уменьшается на величину, составляющую примерно $25^{\circ}/_{0}$ от радиации черного тела. В среднем поверхность земли теряет между 0,1 и 0,2 г кал. см⁻² мин.⁻¹, что составляет потерю в течение всей ночи при отсутствии облаков и ветра (радиационная ночь) порядка 10^2 г кал. см⁻². Эта потеря значительно уменьшается при наличии низких плотных облаков, но очень мало меняется при тонких высоких облаках. Брент [18] полагает, что в среднем чистая потеря тепла почвой составляет около $\frac{1}{7}$ потери тепла, наблюдаемой при ясном небе. Онгстрем [19] предложил эмпирическую формулу, устанавливающую отношение потери радиации R_n , когда *п* десятых неба покрыто облаками, к той потере, которая должна наблюдаться при тех же условиях для температуры и влажности, но при ясном небе (R_0) , а именно

 $\frac{R_n}{R_0} = 1 - 0,09 \ n.$

Брент отметил, что это уравнение имеет ограниченное применение, так как оно не дифференцирует очень эффективные низкие плотные облака и неэффективные высокие тонкие облака.

Влияние твердых частиц на уменьшение потери длинноволновой радиации менее ясно. Верьярд [20] наблюдал, что ночная минимальная температура в Пешаваре (Индия) оставалась неожиданно высокой, но при этом наблюдалась сильная пылевая дымка.

Робинсон считает, что взвешенные частицы могут изменить поток ладающей радиации на несколько процентов, но по общему мнению этот эффект не первого порядка для большинства районов.

Этот вопрос может быть важным при проблеме защиты от заморозков с помощью искусственных туманов.

5. 4. Предсказание ночного минимума температуры

Точное определение скорости потери тепла поверхностью земли в течение ночи имеет большое экономическое значение. Связь ночного понижения температуры с заморозками очевидна и, кроме того, эта проблема находится в поле зрения синоптической метеорологии в связи с "радиационными туманами". Таким образом, вполне естественно, что было сделано много попыток отыскания простого правила, которым можно было бы облегчить предсказание ночного минимума температуры. В основном мы располагаем эмпирическими соотношениями; несколько формул имеют теоретическую основу, но и они не являются более надежными, чем эмпирические.

Полное рассмотрение этой проблемы выходит из рамок настоящей книги, и поэтому мы остановимся здесь только на тех вопросах, которые относятся к микрометеорологии нижней атмосферы.

Формулы для расчета ночного излучения при ясном небе. Из предшествующего раздела очевидно, что низкий ночной минимум температуры имеет место при 1) относительно сухом воздухе, 2) ясном небе или при наличии высоких тонких облаков, 3) слабом ветре и штиле. Эффективное излучение при ясном небе является разностью между излучением черного тела (поверхность земли) в мировое пространство и излучением водяного пара нижних слоев атмосферы и обычно составляет около $\frac{1}{3}$ излучения самой поверхности. Этот факт дает возможность составить приближенное выражение излучения атмосферы

$$R = f(e)(\circ T^4), \tag{5.8}$$

где f(e) — некоторая функция давления пара в нижней атмосфере и T — температура "поверхности". Наиболее известны две формулы такого типа.

1. Онгстрема [21]

 $f(e) = A - B \cdot 10^{-\gamma e}$ (где A, B, γ — постоянные). (5.9) 2. Брента [22]

 $f(e) = a + b \sqrt{e}$ (где a, b – постоянные). (5.10)

Ни то, ни другое выражение не сравнимо по точности с отдельными расчетами, выполненными с помощью радиационных диаграмм по известным профилям влажности и температуры; большей точности и нельзя ожидать от формул этого типа. И выражение Онгстрема и выражение Брента представляют собою статистическое обобщение результатов наблюдений. Для любого ряда наблюдений возможно найти значения постоянных, которые дают высокую корреляцию между данными, полученными по формулам, и данными наблюдений, но обычно наблюдается значительный разброс отдельных точек относительно теоретической линии, и "постоянные" зависят от периода и от места наблюдений. Средние значения постоянных

Онгстрема:

$$A = 0,25, B = 0,32, \gamma = 0,052.$$

Брента:

$$a = 0,44, b = 0,080,$$

если давление пара е измерено в миллибарах.

Имеется некоторое теоретическое обоснование этих уравнений. Оба выражения не принимают во внимание радиацию от CO_2 , и оним ненадежны для малых значений e. При применении уравнений Онгстрема и Брента следует иметь в виду, что не все излучение атмосферы зависит от условий у поверхности земли и что заметная частьрадиации не связана с излучением водяного пара.

Робинсон [16] учел излучение и водяного пара и CO₂, а также нашел, что свыше 8% радиации черного тела при температуре тропосферы должно доставляться дополнительным источником. Однако происхождение дополнительного излучения еще не определено.

Параболическая формула Брента для расчета ночной температуры поверхности. Излучение в ясную ночь зависит от температуры поверхности и температуры и влажности приземных слоев воздуха. Радиационный поток, таким образом, не зависит от природы нижней границы, но температура, которую имеет земная поверхность в ясную тихую ночь, зависит от потока тепла снизу и, следовательно, связана с проводимостью материала, который формирует деятельный слой почвы. Этим деятельным слоем может быть почва, покрытая растительностью, горная порода, песок, вода, снег или лед, имеющие различные тепловые константы. К тому же проводимость почвы существенно зависит от содержания в ней воды. Скорость падения температуры в ясную тихую ночь, вероятно, может определяться влажностью воздуха, физическими свойствами и состоянием поверхности.

Брент [18] построил теорию изменения температуры поверхности: в ясную безветренную ночь. В его анализе оценивается влияние этих факторов. Абсолютная влажность нижнего слоя, выраженная плотностью или давлением пара (гл. 1), обычно подвержена небольшим изменениям в течение ночи.¹ Изменение температуры составляет небольшую часть а б с о лют н о й температуры поверхности и, следовательно, $R_{\rm M}$ — чистая уходящая радиация — дается выражением

$$R_N = \circ T^4 - \circ T^4 \left(a + b \sqrt{e} \right) \tag{5.11}$$

(*T* — температура поверхности в градусах Кельвина, и в первом приближении она может считаться постоянной в течение ночи). Нагревание поверхности благодаря теплопроводности воздуха или теплу, выделяющемуся при конденсации водяного пара, ничтожно. Справедливость этих предположений будет обсуждена позже.

Относительная влажность значительно изменяется в течение суток и (грубо) суточные колебания ее являются "зеркальным отображением" суточной кривой температуры.

Существенная особенность анализа Брента заключается в том, что благодаря этим упрощениям атмосфера как влияющий фактор устранена и температура поверхности определяется переносом тепла в верхних слоях почвы. Математическая формулировка проблемы включает начальные условия. Брентом приняты следующие условия: в начальный момент (например, заход солнца) рассматриваемые слои почвы имеют однородную температуру [$T(z, t) = T_0 =$ постоянной при t = 0]. Задача сводится к определению температуры для полубесконечного тела, которое имеет в начальный момент всюду одинаковую температуру, а через поверхность z = 0 происходит потеря тепла с постоянной скоростью. Решение этой проблемы дано уравнениями (4.30) и (4.31). В принятых обозначениях температура поверхности

$$T(\mathbf{0}, t) = T_0 - \frac{2R_N}{\frac{1}{p_1 c_1 k_1^2}} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.12)$$

где ρ_1 , c_1 и k_1 — плотность, удельная теплоемкость и температуропроводность соответственно для верхних слоев почвы.

Брент сравнил результаты, полученные по этой формуле, с данными наблюдений Джонсона над изменением температуры воздуха вблизи почвы в безоблачные ночи в Южной Англии. Летом, когда почва сухая, совпадение было хорошее. По формуле предсказанное понижение температуры составляло 11°, а наблюденное падение тем-

пературы было 9° С. Для зимних условий значения $\rho_1 c_1 k_1^2$ должны быть увеличены в пять раз, учитывая повышение содержания водяного пара в почве. При использовании этих значений коэффициентов предсказанное падение температуры было 3,3° С, а наблюдение составляло 2,9°. Для условий Исмаилин (Египет) Флоуер [23] нашел очень хорошее совпадение расчетных и наблюденных данных для зимнего сезона и значительное расхождение для летних месяцев. В общем формула Брента находится в удовлетворительном соответствии с фактами, причем должно быть отмечено, что сравнение результатов производится с минимумом, отмеченным в будке (4 фута над почвой), а не с действительной температурой поверхности. Понижение температуры на уровне почвы должно быть больше, но мы не располагаем данными о температуре на поверхности земли.

Развитие формулы Брента. Баланс тепла на поверхности земли может быть записан в виде

$$-k_1\rho_1c_1\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0=R_N-A-C.$$
(5.13)

Это уравнение выражает тот факт, что поток тепла в почву балансируется эффективным излучением R_N , молекулярным или турбулентным потоком тепла из воздуха A и тепловым потоком C, возникающим при конденсации или испарении воды на поверхности.

А и С положительны, когда поток направлен к поверхности. Величины А и С Брент принимает пренебрежимо малыми, а R_N — постоянной, величина которой определяется средними значениями (температуры и содержанием водяного пара) для приземных слоев атмосферы в течение ночи. В более поздних работах некоторые из этих условий были уточнены. Филлипс [24] и Джегер [25] рассмотрели задачу, когда R_N постоянно, C = 0, но A > 0, т. е. имеется добавочный перенос тепла проводимостью от воздуха к почве. Гройн [26] решил задачу при условии, что A = C = 0, а R_N является функцией времени при начальном изотермическом состоянии почвы. Им же рассмотрена эта задача при меняющейся с глубиной начальной температуре почвы. Если перенос тепла в воздухе всегда обусловлен молекулярным процессом, то задача, рассмотренная Филлипсом и Джегером, заключается в нахождении температуры поверхности, разделяющей две среды с различной проводимостью при данных начальных условиях, и она решается классическим методом. Эти результаты получаются, если в уравнение Брента подставить $(\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}} + \rho c_p k^{\frac{1}{2}})$ вместо $\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}}$, где ρ , c_p и k относятся к воздуху.

Характерные значения для сухой почвы $\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 10^{-2}$ в единицах CGS; для воздуха примем k = 0,2 см² сек.⁻¹ и значение $\rho c_p k^{\frac{1}{2}}$ около 10^{-4} в тех же единицах. Таким образом, учет притока тепла из воздуха, если имеет место молекулярная теплопроводность, мало меняет результаты, полученные по формуле Брента.

При порывистом ветре увеличивается проводимость воздуха в результате увеличения вихревого движения. Этот вопрос рассмотрен Джегером [25], который отождествил вихревую проводимость воздуха с вихревой вязкостью (сомнительная процедура, см. гл. 6) и предположил, что коэффициент температуропроводности изменяется с высотой по степенному закону. Задача, таким образом, сводится опять к средам различной проводимости, но с более сложным решением, так как уравнение проводимости тепла в воздухе имеет вид

 $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(a z^p \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad p > 0,$

а распределение температуры в почве удовлетворяется уравнением Фикка. Решение Джегера, полученное методом преобразования Лап-

ласа, довольно сложное, оно включает значение t^2 (как и в решении Брента) вместе с бесконечным рядом, члены которого содержат другие степени времени. Трудность в выборе надежных значений параметров, выражающих вихревую проводимость тепла в неустановившемся потоке воздуха, в котором меняется интенсивность турбулентности, делает это уравнение малопрактичным в проблеме предсказания ночных температур.

В решении Гройна основное внимание обращено на значение $R_{\rm M}$; А и С приняты пренебрежимо малыми. Напишем

$$R_N = \sigma T^4 - R', \tag{5.14}$$

где R' — противоизлучение атмосферы. Гройн отмечает, что предположение Брента о постоянстве значения R_N в течение ночи не является полностью обоснованным, так как такое допущение предполагает, что термическая структура нижней атмосферы в течение всей ночи остается количественно неизменной, что очень редко бывает. Из анализа при помощи радиационной диаграммы Эльзассера (в типичном случае) Гройн нашел, что R_N может понизиться от 0,15 до 0,09 г кал. см⁻² мин.⁻¹ в течение ночи, если температура поверхности падает на 12° С. Эти изменения R_N являются слишком большими, чтобы их игнорировать на практике.

Если бы R_N было известно точно как функция времени, то решение было бы таким, как оно дано в уравнении (4.31а). Но такое рассмотрение вопроса невозможно, так как R_N тесно связано с изменением температуры во времени, т. е. с величиной, которая должна быть определена. Гройн эту трудность преодолел, представив R_N как функцию, зависящую от переменной T, которая и входит в пограничные условия.

Используя первый член ряда Тейлора,

$$R_{N}(T) = R_{0} + (T - T_{0}) \frac{dR}{dT}, \qquad (5.15)$$

где R_0 есть значение R_N и T_0 — значение T при t = 0. В последующем анализе $\frac{dR}{dT}$ будем считать постоянной. Это эквивалентно пренебрежению изменением R_N с изменением скорости ветра и содержания водяного пара в течение ночи, а основное внимание обращается на изменения, связанные с абсолютной температурой. В качестве примера сошлемся на Гройна, который нашел, что $\frac{dR}{dT} =$ = 0,005 г кал. см⁻² мин.⁻¹ соответствует образованию сильной инверсии.

Введем температуру $T_1 = T_0 - \frac{R}{\frac{dR}{dT}}$, для которой, согласно урав-

нению (5.15), $R_N = 0$; граничное условие при z = 0. Тогда

$$-k_{1}c_{1}\rho_{1}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{0}=\left(\frac{dR}{dT}\right)(T-T_{1}).$$
(5.16)

Начальным условием, как и прежде, является

$$T(z, 0) = T_0$$
 для $z < 0$.

Граничные условия относятся к типу [см. уравнение (4.11)], подобному закону охлаждения Ньютона, и, таким образом, задача решается классическим методом.¹ Температура на поверхности T дается в виде

$$T = T_0 + \frac{R_0}{f} \left\{ \exp\left[\frac{f^2 t}{(\rho_1 c_1)^2 k_1}\right] \operatorname{erfc} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\}, \quad (5.17)$$

где через j обозначено $\frac{dR}{dT}$. Раскрывая это выражение, имеем

$$T = T_0 - \frac{R_0}{f} \left[\frac{2f}{\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{ft^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \frac{4}{3\pi^2} \left(\frac{ft^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}}}\right)^3 - \dots \right].$$
(5.18)

Из этого выражения можно получить формулу Брента, если принять f = 0 и $R_N = R_0$; тогда все слагаемые, включающие в себя t, исчезают, за исключением первого. Решение может быть представлено в удобной неалгебраической форме, принимая $u = \frac{R_0}{f}$ за единицу $\left(\frac{1}{2} \right)^2$

температуры и $\tau = \left(\frac{\frac{1}{2}}{f}\right)^2$ за единицу времени. Уравнение (5.17) в этих единицах имеет вид

$$\frac{T-T_0}{u} = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \operatorname{erfc} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right) - 1} \quad . \tag{5.19}$$

На рис. 19, заимствованном из статьи Гройна, дано сравнение уравнений (5.12) и (5.19).

Для небольших значений $\frac{t}{\tau}$ (<0,02) оба выражения находятся в хорошем согласии, но для больших значений t имеет место значительное расхождение, которое становится особенно большим при $t \to \infty$, когда, согласно Гройну, $T \to T_1$ со скоростью, пропорциональной $t^{-\frac{1}{2}}$. Однако показанное на рис. 19 расхождение кажется ббольшим, чем оно есть в действительности. В расчетах Гройна (R = 0,15 кал. см⁻² мин.⁻¹, $\frac{dR}{dT} = 5 \cdot 10^{-3}$ г кал. см⁻² мин.⁻¹, $\rho_1 c_1 k_1^{\frac{1}{2}} = 0,15$ г кал. см⁻² мин.⁻¹) единица температуры $u = 30^{\circ}$ С и единица времени $\tau = 100$ час. Как температурная шкала, так и шкала времени этого графика представлены в мелком масштабе, и разница

¹ Подробности см. в статье Гройна [26].

между результатами, полученными по формулам Брента и Гройна. не должна быть большой для периода порядка ночи для средних и низких широт. Это подтверждается примером. данным Гройном. который, используя указанные выше значения, подсчитал. что за 9 час. температура упадет на 8° С. Формула Брента для этих же условий. дает падение температуры в 10°С. Для полярной ночи расхождение результатов, полученных по этим формулам. будет значительным из-за низкой теплопроводности снега.

В развитие этой работы Гройн рассматривает эффекты. вызываемые другими ограничениями. Задача легко решается, когда начальная изотермия почвы заменяется линейным профилем температуры в слоях. прилегающих к поверхности:



Рис. 19. Сравнение уравнений Брента и Гройна для ночного понижения температуры (І. Meteorol. 4, 1947). 1 - Гройн, 2 - Брент.

$$T(z, 0) = T_0 + mz.$$

Как показал Гройн. это приводит к замене лействительной радиации R "кажушейся радиацией" $R + \rho_1 c_1 k_1 m$.

Влияние теплопроводности воздуха уже рассматривалось. Остается еше проблема конденсации, для решения которой Гройн использовал измерения Франсилла [27]. указывающие на справедливость линейного закона типа.

$$C = C_0 + f'(T_0 - T),$$

где T₀ — T — падение температуры в течение ночи. Таким об-

разом, принципиальное обобщение проблемы достигается подстановкой в формулы $f+f^1$ вместо $f\left(=\frac{d\hat{R}}{dT}\right)$. Как отметил Гройн, выражение (5.19) оказывается еще пригодным для общего случая при условии, что и и т определяются:

$$u = \frac{R_0 + \rho_1 c_1 k_1 m + C_0}{f + f'}, \quad \tau = \left(\frac{1 + r}{f + f'}\right)^2 (\rho_1 c_1)^2 k_1$$

где г -- количество тепла, поступающего посредством теплопроводности из воздуха, и определяется согласно уравнению Филлипса ---Джегера

$$r = \frac{\Pr_{p_{1}k_{1}}^{\frac{1}{2}}}{\Pr_{1}c_{1}k_{1}^{\frac{1}{2}}}.$$

В качестве численного примера Гройн рассматривает наблюдения, выполненные Франсиллом [27] на лугу с низким травяным покровом в летнюю ночь. Значения констант следующие:

$$m = 0,125^{\circ} \text{ C см}^{-1}, \quad R_0 = 0,15$$
 г кал. см⁻² мин.⁻¹,
 $f = \frac{dR}{dT} = 5 \cdot 10^{-3}$ г кал. см⁻² мин.⁻¹ град.⁻¹,
 $\rho_1 c_1 = 0,59$ г кал. см⁻³ град.⁻¹,
 $f' = 2,5 \cdot 10$ г кал. см⁻² мин.⁻¹ град.⁻¹, $k_1 = 3,3 \cdot 10^{-3}$ см⁻² сек.⁻²
 $r = 0,32, \qquad C_0 = 0.$

Из этих значений следует, что

$$u = 22$$
 °С, $\tau = 37$ час.

Гройн сравнил вычисленные кривые с измерениями Франсилла, принимая в качестве исходной температуру, измеренную при заходе солнца. Им получена хорошая согласованность данных для всей ночи.

Наиболее важным в этой работе является выяснение роли термических констант верхних слоев почвы в формулах типа Брента — Гройна. Теплопроводность в почве будет рассмотрена более подробно в гл. 6, где будет показано, что физические константы значительно изменяются с изменением природы и состояния поверхностных слоев, особенно с изменением содержания влаги в почве.

Брент отмечает, что значения $\rho_1 c_1 k_1^2$ для снега составляют толькооколо 0,1 их значений для почвы; из его уравнения вытекает большое различие в величинах температуры на поверхности снежногополя, что подтверждается наблюдениями, выполненными в полярных областях.

Эта изменчивость констант почвы существенно ограничивает практическое применение теоретических формул рассмотренного типа, так как маловероятно, чтобы точные значения плотности почвы, удельной теплоемкости имелись бы у метеорологов для всех: случаев. Средние значения констант малопригодны, так как сравнительно небольшие изменения в содержании влаги в почве, в количестве растительности и т. д. вызывают большие изменения в теплопроводности почвы. Гройн дает некоторые рекомендации для. практического применения формул, но в настоящее время строго математический подход к проблеме предсказания ночного минимуматемпературы вызывает некоторое недоверие у практиков-метеорологов, которые более часто полагаются на эмпирические формулы, неимеющие теоретической базы или, в крайнем случае, имеющие некоторое теоретическое обоснование.

Эмпирические формулы предсказания ночногоминимума температуры. Важность своевременного предсказа-

207*

ния радиационного тумана на аэродромах привела к тому, что в повседневных прогнозах много внимания уделяется смежной проблеме — проблеме прогноза ночного минимума температуры. При этом методе предсказания тумана метеоролог концентрирует внимание на ночном минимуме температуры и точке росы; если ночной минимум ниже точки росы, то туман прогнозируется и указывается время начала его образования; для определения начала образования тумана требуются сведения о скорости понижения температуры поверхности. Исходными данными для прогноза возможного ночного минимума температуры являются данные наблюдений, проведенных в более ранние часы.

Связь между минимальной температурой поверхности и воздуха. Пик и Патон [28] и позднее Пик [29] изучили отношение между минимумом температуры в будке (4 фута над поверхностью) и минимальной температурой травяного покрова по данным наблюдений на аэродроме в Гранвилле (в Англии). Они нашли удовлетворительную связь в виде

$$T_a = aT_s + b$$
,

где T_a — минимальная температура по данным в будке и T_s — температура на поверхности по минимальному термометру в градусах Фарентейта. Для ясных ночей, для которых среднее количество облаков не превышает 4 баллов, были определены значения постоянных; они приводятся в нижеследующей таблице.

	31	има	Лето						
средняя скорость ветра на высоте 13 м, м/сек.	а	b °F	а	b°F					
<3,6 от 3,6 до 6,7 >6,7	0,84 0,89 0,94	11 8 5	0,96 0,97 1,05	8,0 6,6 3,2					

Такая таблица безусловно полезна для общей ориентировки, но "постоянные" *a* и *b* пригодны только для данного места. Приведенная формула согласуется с результатами, полученными Робинсоном, из которых следует, что температура поверхности земли, полученная по данным напочвенного термометра, почти точно равна радиационной температуре поверхности, принятой как черное тело. Так как мы располагаем более полными данными о минимальной температуре в будке, то эмпирические уравнения указанного выше типа бывают часто полезны при отсутствии данных о минимальной температуре почвы.

Формулы для прогноза минимальной температуры на высоте будки. Большое внимание было уделено определению минимальной температуры на уровне будки по значениям других метеорологических элементов. Среди ранее существовавших способов наиболее известно правило Каммермана, по которому минимальная температура получается вычитанием постоянного числа градусов из показаний смоченного термометра за определенное время до начала минимума. Как отмечает Онгстрем, для ясных ночей это правило дает хорошие результаты, особенно если используется отсчет смоченного термометра при заходе солнца. Значительно лучший результат может быть получен, если используются показания сухого и смоченного термометров и учитывается наличие облачности.

Существует много формул, основанных на показаниях сухого термометра T, смоченного термометра T_{w} , точки росы T_{d} , скорости ветра v и количества облаков n. Несколько типовых уравнений приводится ниже.

Автор	Место исследования	Тип уравнения
Онгстрем [30] Пик [31]	Упсала, Швеция Крэнвелл, Англия	$T_{\min} = T_{w}(t) - aT(t) - b$ $T_{\min} = T_{d}(t) - a$
[32] Пиитфилд [33] Мак-Дональд [34]	Исмаилия, Египет Альдергров, Англия Хаббания (Habbaniya)	$T_{\min} = aT(t) + bT_d(t) + c$ $T_{\min} = aT(t) + bT_d(t)$ $T_{\min} = aT(t) + bT_d(t) + c$
Бойден [35]	Различные места Бри- танских островов	$T_{\min} = \frac{1}{2} [T_{w} (\max) + T_{d} (\max)] + c$
Мак-Кензи	Британские острова	$T_{\min} = \frac{1}{2} [T_w(\max) + T_d(\max)] + f(v_1n)$

В данной таблице $T_d(t)$ и другие подобные обозначения выражают значение элемента для какого-то произвольного времени t(обычно для 15 00 или 18 00 час. того же дня); T_w (max) и T_d (max) — максимальные значения температуры смоченного термометра и точки росы соответственно для этого дня. В формуле Мак-Кензи $f(v_1n)$ — величина, зависящая от скорости ветра и количества облачности, но независящая от температуры. Формула Пика сходна с формулой Каммермана, но в формуле Пика значение a главным образом зависит от скорости ветра.

Предсказание ночных заморозков во фруктовых садах. Убытки в урожае фруктов и других плодов, вызванные ночными заморозками в Северной Америке, побудили произвести детальное изучение формул для местного прогноза, основанных на статистическом обобщении данных наблюдений. Сборник статей по данному вопросу издан в виде приложения 16 к журналу "Месячное обозрение погоды" (1920 г.).

Более сложный процесс имеет место в долинах, где низкие температуры являются следствием не только потери тепла почвой, но и результатом стекания холодного воздуха в долину (гравитационный эффект). Динамика таких ветров будет обсуждена в гл. 7. Механизм явления заключается в том, что холодный и, следовательно,

14 О. Г. Сеттон

плотный воздух скользит вниз по склону долины и заполняет ее.

Формулы для предсказания понижения температуры, базирующиеся на статистическом обобщении наблюдений, обычно представляют собой развитие правила Каммермана и его предположения, что влажность воздуха регулирует потерю тепла поверхностью через излуче-





ние. Однако, кроме этого фактора, необходимо учитывать и влияние других, не менее важных факторов, как например, стекание холодного воздуха с тем, чтобы более точно определить значение постоянных для данного места.

Большая часть методов основана на связи между минимальной температурой, точкой росы и относительной влажностью. Если отложить разность между ночной минимальной температурой в будке T_{\min} и вечерней точкой росы $T_d(t)$ в зависимости от вечерней относительной влажности f, мы получим диаграмму типа, представленного на рис. 20. Очевидно, что имеется высокая корреляция между этими переменными, и как это следует из физического анализа явления, разность в температурах тем больше, чем суще воздух. Метод прогноза, предложенный Варреном Смитом, состоит в том, что нужно при помощи параболической формулы

 $T_{\min} - T_d(t) = a + bf + cf^2$

провести среднюю кривую, проходящую через точки. Здесь a, b и *с* — постоянные, которые должны быть определены статистическим методом (таким как метод наименьших квалратов) по ланным этой станции. Если температура выражена в градусах Фаренгейта, то аобычно порядка 40; b - около 2 и с - около 0.01, но они значительно колеблются в зависимости от условий местности. По правилу Каммермана. b = c = 0, и возможную точность этой формулы можно оценить на основании упомянутого выше рис. 20.

Другой тип уравнения был использован Ф. Д. Юнгом для Калифорнии

$$T_{\min} - T_d(t) = V + V' - \frac{f-a}{4}$$
,

где V и V' — переменные, зависящие от вечерней точки росы и относительной влажности: и а — "постоянная местности", также зависяшая от состояния неба.

Уравнения указанных выше видов дают належные результаты. когда они используются опытными метеорологами, хорошо знающими местные условия. Однако эти уравнения эмпирические, и их теоретическая значимость крайне невелика.

Параболическая формула Варрена Смита сводится к удобному статистическому обобщению данных, представленных на диаграмме, и, возможно, что могут быть получены одинаково хорошие результаты формулами разнообразных видов (например. экспоненциальная функция или дробные степени переменной величины).

Теория здесь дает лишь общее руководство тем, что указывает наиболее существенные переменные величины, а конечные, приближенные формулы (определение постоянных) зависят от данных наблюдения. Если местные условия остаются неизменными в течение длительного периода, приемы, описанные выше, будут успешны, поскольку в настоящее время полного теоретического решения этой проблемы еще не предвидится.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Bauer F. and Phillips H. Gerlands Beitr. Geophys., 45, 82, 1935; 47, 218, 1936.

- 210, 1930.
 2. Möller F. Gerlands Beitr. Geophys., 47, 215, 1936.
 3. King L. V. Phil. Trans. Roy. Soc., 22, 1912.
 4. Trabert W. Z. Meteorol., 337, 1907.
 5. Ångström A. Medd. Stat. Meteor. Hydr. Anstalt 4, No. 3, 1928.
- Angström A. Geogr. Ann., 4, 331, 1925.
 Luneland H. Soc. Sci. Fennica, Commentations Phys.-Math, III, 5, 1926; IV, 2, 1927.
- 8. Stucktey K. and Wegener A. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Klasse, 229 (1911).

- 9. Hettner G. Ann. Physik, 55, 476 (1918). 10. Rubens H. Sitzber Akad. Wiss. Berlin, 167, 1916. 11. Weber R. L. and Randall H. M. Phys. Rev., 40, 835, 1932. 12. Randall H. M., Dennison D. M., Ginsburg N. and Weber R. L. Phys. Rev., 52, 160, 1937.

- 13. Simpson G. C. Mem. Roy. Meteorol. Soc., 2, 16, 1927; 3, 21. 1928; 3, 23, 1929.
- 14. Elsasser W. M. Quart. I. Roy. Meteorol. Soc., 66 Suppl. 41, 1940, and Harvard Meteorol. Study, 6, 1942.
- 15. Rubens H. and Aschkinass E. Ann. Physik u. Chem., 64, 584, 1898.
- 16. Robinson G. D. Quart. I. Roy. Meteorol. Soc., 73, 127, 1947.
- 17. Brooks F. A. Inst. Papers Phys. Oceanog. Meteorol., 8, No. 2.
- 18. Brunt D. Physical and Dynamical Meteorology, 2 d ed., 1939.
- 19. Ångström A. Beitr. Phys. fr. Atmos., 14, 1928.
- 20. Veryard R. S. Meteorol. Mag., 71, 69, 1936. 21. Ångström A. Geogr. Ann., 2, 253, 1920.
- 22. Brunt D. Quart. 1. Roy. Meteorol. Soc., 58, 389, 1932.
- 23, Flower W. D. Geophys. Mem. 71.
- 24. Phillipps H. Gerlands Beitr. Geophys., 56, 229, 1940.
- 25. Jaeger I. C. Quart. I. Roy. Meteorol. Soc., 71, 388, 1945.
- 26. Groen P. Koninkl. Nederland. Meteorol. Inst. de Bilt, No. 125, Ser. B. D. 1. No. 9. 1947; Meteorol., 4, 63. 1947. 27. Franssila M. Mitt. Meteorol. Zentral. Helsinki, No. 20, 1936.
- 28. Pick W. H. and Raton I. Meteorol. Mag., 62, 260, 1927.
- 29. Pick W. H. Meteorol. Mag., 63, 211, 1928.
- 30. Ångström A. Geogr. Ann., I III, 1920, 1921, 1923.
- 31. Pick W. H. Meteorol. Mag., 63, 20, 1928.
- Flower W. D. and Davies E. Ll. Meteorol. Mag., 69, 231. 1934.
 Peatfield W. F. Meteorol. Mag., 72, 190, 1937.
 Mac Donald C. G. Meteorol. Mag., 74, 234, 1939.

- 35. Boyden C. J. Quart. I. Roy. Meteorol. Soc., 63, 383, 1937.
- 36. Верлянд М. Е. и Берлянд Т. Г. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1952.
- 37. Берлянд Т. Г. Труды ГГО, вып. 18 (80), 1949.
- 38. Дмитриев А. А. Метеорология и гидрология, № 11, 1940. 39. Калитин Н. Н. ДАН СССР, т. 39, № 8, 1943. 40. Калитин Н. Н. Лучи Солнца. Изд. АН СССР, 1943.

- 41. Кастров В. Г. Труды ЦАО, вып. 8, 1952.
- 42. Ковалева Е. Д. Труды ГГО, вып. 27 (89), 1951. 43. Кондратьев К. Я. Перенос длинноволнового излучения в атмосфере. Гостехиздат, 1950.
- 44. Кузнецов Е. С. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 6, 1940. 45. Кузнецов Е. С. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4, 1951. 46. Савинов С. И. Метеорологический вестник, № 5-6, 1933.

- 47. Савинов С. И. Климат и погода, № 2-3, 1925.
- 48. Украинцев В. Н. Метеорология и гидрология, № 6, 1939.
- 49. Чельцов Н. И. Труды ЦАО, вып. 8, 1952.
- 50. Шаронов В. В. Сб. статей по аэрофотометрии, № 2, 1934. 51. Шехтер Ф. Н. Труды ГГО, вып. 22 (84), 1950. 52. Шехтер Ф. Н. Труды ГГО, вып. 39 (101), 1953. 53. Шифрин К. С. ДАН СССР, т. 94, № 4, 1954.

- 54. Шляхов В. И. Исследование баланса длинноволновой радиации в тропосфере. Гидрометеоиздат, 1956.
- 55. Янишевский Ю. Д. Труды ГГО, вып. 14 (76), 1949.
- 56. Янишевский Ю. Д. Труды ГГО, вып. 26 (88), 1951.

ГЛАВА 6

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В НИЖНИХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ

В данной главе подробно исследуется структура атмосферного поля температур от поверхности земли до высоты около 100 м. В этом слое над ровной местностью в принципе возможны непосредственные измерения с помощью закрепленных приборов. Над большими водными пространствами получать данные труднее и обычно они менее надежны. В результате многочисленных исследований в настоящее время основные черты указанного поля довольно подробно изучены. Однако процессы теплообмена в этом слое во многом еще подлежат теоретическому анализу.

6. 1. Общие характеристики

Для изменений температуры в нижнем слое атмосферы в течение суток характерны определенные суточные колебания. При ясной погоде в профиле температуры в нижних ста метрах также отчетливо проявляются суточные изменения. Это лучше всего обнаруживается при исследовании вертикального градиента температуры $\frac{dT}{dz}$. В течение дневных часов в периоды времени, начинающиеся вскоре после рассвета и примерно за час до захода солнца, температура уменьшается с высотой, причем быстрее в нижнем слое и медленнее на больших высотах. Ночью температура увеличивается с высотой, причем градиент ее остается наибольшим в нижнем слое. Колебания профиля температуры в ясную погоду отчетливо видны на рис. 21, который относится к условиям весны и к высотам от 1,2 до 87,7 м над лугом в пересеченной местности в Лифилде [1] (Южная Англия). Есть короткий период (от 8 до 9 час. утра) вскоре после рассвета, когда в рассматриваемом слое наблюдается состояние, близкое к изотермии, и подобный период с малым температурным градиентом перед заходом солнца (с 15 до 16 час.). Кривизна профиля наиболее отчетлива в нижнем слое (от 1,2 до 12,4 м). Между этими высотами средний градиент численно значительно больше, чем адиабатический.



Рис. 21. Профили температуры воздуха в слое между 1,2 и 87,7 м в Лифилде (Южная Англия) весной (по Джонсону и Хейвуду). 1 — сухоадиабатический градиент.

При облачных условиях суточные колебания профиля температур почти совершенно исчезают, на всех высотах величины градиента малы.

Описанные выше случаи осноданных регистрации, вывались на произведенной на открытой местности в умеренных широтах. Однако такого же типа колебания обна**руживаются** нал пустынями и p тропических странах. Как и можвеличины грано было ожилать. лиентов колеблются в зависимости R Англии. местных **УСЛОВИЙ**. от средние гралиенты R например. Портоне [2, 3] (известковая почва) оказываются значительно больше. (суглинок). чем в Лифилле [1] нахоляшемся от Нортона на расстоянии менее 100 миль. Максимальные же значения градиентов в Портоне почти такие же, как в Исмаилии. в Египте [4]. Обычно дневные значения температурных градиенстранах тов в тропических значительно больше летних градиентов в умеренных климатах. В гористой густом лесу или в местности профиль температуры часто иррегузатенелярен вследствие наличия солнечного излучения ний от возлуха лнем И застоя холодного ночью.

повторяемости различ-Кривые ных температурных градиентов показывают, что на всех уровнях средмало отличается от нее значение Ha алиабатического градиента. нижних уровнях диапазон изменения широкий. а на больших высотах градиенты приближанаблюдаемые ются к их среднему значению. Кривые обычно сильно ассиметричны. наибольшие градиенты на всех уровнях связаны с инверсиями dΤ Сверхадиабатические И dzинверсионные градиенты, численно во много раз превышающие адиабатический градиент, являются существенными характеристиками температурного поля в нижних ста метрах над землей.

Значительно меньше имеется сведений относительно профилей температуры над океаном, и полученные здесь результаты менее достоверны. Чаще всего наблюдаемые градиенты над океаном меньше, чем измеренные в тех же слоях над сушей. Этот результат можно было ожидать вследствие относительно малого влияния приходящей и уходящей радиации на температуру поверхности моря, а также большой интенсивности турбулентного обмена по вертикали в верхних слоях океана. Суточные колебания наблюдаются над мелкими, окруженными сушей водоемами, однако их трудно обнаружить над океаном вдали от суши. Сверхадиабатические градиенты имеют место над водой, но они обычно относятся к сравнительно тонким слоям вблизи поверхности.

Суточный ход температуры отчетливо проявляется на всех высотах в нижних ста метрах над землей в ясные дни, особенно летом, причем амплитуда колебаний уменьшается с высотой. Время наступления максимума температуры также изменяется с высотой. Он запаздывает по мере удаления от земли. Эти факты позволяют трактовать суточный ход температуры как волну, амплитуда и фаза которой изменяются с высотой, а также зависят от сезона и состояния неба.

При ясной погоде средний градиент температуры в нижних слоях быстро увеличивается в течение короткого периода утром, но остается весьма устойчивым в часы около полудня. Максимальное значение достигается примерно в полдень. После полудня градиент уменьшается по величине. Он обращается в нуль в некоторый промежуток времени перед заходом солнца, обычно когда высота солнца составляет от 10 до 15° над горизонтом в открытой местности. При ясной погоде в дневное время для изменений температуры и градиента ее характерны значительные флюктуации. Эти колебания исчезают, когда градиент достигает адиабатического значения. В облачные и ветреные дни как температура, так и температурный градиент очень устойчивы, и резкие колебания не наблюдаются. В течение ясной ночи (инверсионный период) градиент в нижних слоях менее устойчив, но подвержен длиннопериодным колебаниям. Он обычно медленно увеличивается до максимального значения, а затем быстро падает до малых значений, после чего снова медленно растет и т. д. В ветреные и облачные ночи градиент остается малым и устойчивым, как и в дневное время.

6. 2. Условия на поверхности земли

Для подробного исследования температурного поля в нижней атмосфере необходимо рассмотреть условия на самой поверхности, связанные со свойствами почвы как теплопроводной среды.

Вопросы теплопередачи в почве выходят за рамки данной книги

и относящийся к ним подробный материал читатель может найти в специальной литературе¹. Здесь будут приведены лишь краткие сведения.

Почвенные постоянные. Плотность вещества, из которого состоит поверхность земли, существенно изменяется от места к месту. Она зависит от состава почвы, т. е. от того, является ли последняя влажной или сухой, неразрыхленной или свежевспаханной и т. п. При исследованиях почва рассматривается как состоящая из комочков или частиц со значительными пустотами между ними, которые могут быть заполнены или не заполнены водой. Плотность почвы зависит от удельного веса комочков или частиц, отношения объемов пустот и твердого вещества, а также от влажности (определяемой посредством отношения веса воды к весу твердого вещества, выраженного в процентах). Ниже приводится несколько характерных значений плотности.

																						· r/	см ^{—3}
Сухой, рыхлый суглинок					•									۰.								• 1	. 1
Влажный суглинок	•	•	•	•		• .	•	•	•					•	1				•	•	٠	. •	. 1,8
Глина	•	•	•			•		•	• '	•		•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	. 2
Супесок	•	•	·	•	•	•	•		•	·	•	•		•		·	•	•	٠	•	•	•	. 1,5
Песок мелкий, неплотный	•	٠	•	•	٠	·	٠	•	٠	•	•	٠.	•	• ,	•	•	•	٠	٠	•	٠	•	. 0,7
Песок плотный, влажный	•	•	•	•	٠	•	٠	•	•	•	•	·	٠	•	•	٠	·	•	•	٠	•	٠	1,8
Легкая почва (содержащая	1	ко	рн	И	тŗ	Dae	зы)	٠	٠	•	•	•	•	•	•	٠	٠	·	٠	•	01	0,3
																						дC	0,5

Удельная теплоемкость почвы также сильно меняется. Ведмор [5] приводит значения от 0,8 для глины до 0,27 для супеска. Удельная теплоемкость, кроме того, отчетливо зависит от содержания воды. Обычно влажные почвы имеют большую удельную теплоемкость, чем сухие почвы.

Из общих физических соображений следует, что menлопроводность почвы должна быть переменной и, в частности, зависеть в сильной степени от влажности. Последний вопрос исследовался Паттеном [6], который нашел, что теплопроводность песчаного глинозема быстро возрастает с увеличением влажности, а температуропроводность растет до максимума, который достигается при влажности примерно 12%, и затем уменьшается. Несмотря на сложный характер этих зависимостей, можно все же с некоторым приближением установить, что, с одной стороны, средние значения температуропроводности большинства почв лежат в пределах между 10^{-2} и. 10⁻³ см² сек.⁻¹. Это справедливо даже для таких весьма различных сред, как глина ($\rho_1 = 1,8$ г см⁻³, $c_1 = 0,8$, $k_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ см² сек.⁻¹) и легкие почвы, содержащие корни травы ($\rho_1 = 0.32$ г см⁻³, $c_1 = 0.3$, $k_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ cm² cek.⁻¹). (Ведмор [5], Райдер и Робинсон [7].) С другой стороны, из данных Каллендера и Маклеода [8] хорошо видны кратковременные изменения, которые может претерпевать

¹ Б. А. Кин. Физические свойства почвы. ГТТИ, Л. — М., 1933.

температуропроводность почвы в определенном месте. Эти авторых получили в Канаде малые значения $(k_1 = 1, 6 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2 \text{ сек.}^{-1})$ длямерзлой почвы под снегом и весьма большое значение $(k_1 = 0, 3 \cdot \text{ см}^2 \text{ сек.}^{-1})$, когда в ту же почву проникало много воды (последнее значение, возможно, скорее указывает на наличие конвекции теплатри нисходящих движениях воды, чем на истинную проводимостьтепла).

Проникновение тепла в почву. Приведенные выше результаты показывают, что в общем случае температуропроводностьпочвы мала, она значительно меньше температуропроводности неподвижного воздуха ($k_1 = 0.2 \text{ см}^2 \text{ сек.}^{-1}$). Поэтому можно ожидать, чтонаблюдаемая на поверхности почвы суточная волна температуры будет быстро затухать с глубиной. Это хорошо подтверждается наблюдениями. Амплитуда суточной волны пренебрежимо мала на глубинах примерно больше 50—60 см. По наблюдениям Вуевича [9], в Белграде суточные колебания, равные на поверхности почвы в июле 29°C (от 15 до 44°C), уменьшаются до 11°C (от 19,5 до 31,5°C) на глубине 1 см, до 2,5°C (от 22,5 до 25°C) на глубине 20 см и не обнаруживаются на глубине 50 см.

Керенен [21] на основании данных Хомена [10] в Финляндии: составил таблицу значений первых трех гармоник суточной волны: 1) в граните, 2) в песчаной почве, покрытой короткой травой икуманикой, и 3) в торфянике, покрытом травой и мхом.

Из его таблицы видно, что летом имеет место очень малое изменение средней температуры с глубиной в граните и в сухой песчаной почве, а также на уровнях ниже 5 см во влажном торфянике. Наивысшее значение средней температуры наблюдается в граните, при этом оно на 6° выше средней температуры воздуха на обычной высоте наблюдений. В песчаной почве и торфянике амплитуда гармоник. быстро уменьшается с увеличением глубины, и на глубине 40 см. (в песчаной почве) и 20 см (в торфянике) становится пренебрежимомалой. В каменистых слоях уменьшение происходит значительно медленнее. Эти различия связаны с влажностью среды; в торфяниках и в меньшей степени в песке много тепла расходуется на испарение.

Годовой ход температуры проникает на значительно большие глубины. Допустим, что температурные волны распространяются. в почве соответственно теории теплопроводности в твердом теле. Тогда глубина затухания годовой волны должна быть в $\sqrt{365} \approx 19$ раз больше, чем глубина проникновения суточной волны, поскольку отношения глубины пропорциональны корню квадратному из отношения периодов (см. гл. 4). Это подтверждается данными» наблюдений¹.

В северном полушарии минимальная температура верхних слоев почвы наблюдается в феврале. Поток тепла зимой и ранней весной

¹ Keränen [21], ctp. 212-214.

здесь направлен вверх. В марте верхние слои становятся теплее, тогда как нижние остаются холодными. В апреле же направленные вниз потоки тепла приостанавливают охлаждение нижних слоев, приводя к повышению температуры почвы в целом. Максимум достиается в августе. Затем верхние слои почвы начинают охлаждаться, в результате чего в ноябре потоки тепла направлены вверх. Так продолжается до февраля, когда весь цикл начинается снова.

Быстрое уменьшение с глубиной амплитуды суточной волны означает, что очень большие температурные градиенты могут наблюдаться только в самых верхних слоях почвы в некоторые периоды -суток. Интересный пример крайне больших градиентов приводится «Синклером [11] для пустынной почвы в Таксоне, Аризона. В таблице, приведенной ниже, даны максимумы и минимумы температуры, зарегистрированные 21 июня.

Глубина, см	Максимум температуры °С	Время максимума, час. мин.	Минимум температуры °С	Время минимума, час. мин.
0,4 2 4 7	71,562,148,144,1	$\begin{array}{c} 13 & 00 \\ 14 & 00 \\ 15 & 30 \\ 16 & 30 \end{array}$	$15,00 \\ 22,0 \\ 23,5 \\ 25,2$	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

О значении температуры собственно поверхности можно лишь предполагать; ее максимальное значение может достигать 71,5°С «(161°F). Для микрометеорологии значительный интерес представляют очень большие градиенты (>6° С см⁻¹), которые могут наблюдаться вблизи поверхности, особенно во время максимума температуры поверхности, а также огромные амплитуды (56,5°С) суточных изменений температуры в самых верхних слоях почвы в пустыне в течение периода максимальных температур.

Данные для Таксона представляют собой пример крайне больших изменений в температуре, обычно наблюдаемых на очень малых расстояниях от поверхности земли. Изменения с меньшей амплитудой, но еще достаточно большие по сравнению с колебаниями температуры воздуха на обычных высотах наблюдений, обнаруживаются в верхних слоях почвы даже в умеренных климатах. Это обстоятельство имеет большое значение при биологических исследованиях.

Температура поверхности. При исследовании температурного режима трудно дать определение "поверхности" земли; исключение составляет почва, не покрытая растительностью. Для метеорологов вопросом первостепенной важности является установление положения деятельной поверхности. Таковой может быть либо почва, либо листья растений. Даже тогда, когда граница определяется единственным образом, как в случае оголенной почвы, трудно вы-

-218

полнить ее измерение, а особенно осуществить регистрацию истинной температуры поверхности.

Исследование процесса развития растений и жизни мелких животных часто требует сведений об амплитуде колебаний температуры деятельной поверхности. Для этого нужно производить измерения температуры поверхности при различных условиях, включая сюда условия интенсивной инсоляции и значительного эффективного излучения. При идеальной методике измерений излучение должно свободно доходить и уходить от поверхности, сам же прибор должен быть экранирован от прямой радиации. Эти условия на практике нелегко выполнить, в особенности, когда нужна автоматическая регистрация.

Для преодоления этих трудностей были внесены различные предложения, но ни одно из них не оказалось полностью удовлетворительным. Некоторые экспериментаторы помещали термометр так, чтобы половина приемной части находилась в воздухе, а половина в почве; другие слегка углубляли прибор в почву, покрывая приемную часть тонким слоем почвы. Мгновенные измерения температуры поверхности могут быть выполнены с помощью специальных термометров (обычная термопара, прикрепленная к полоске из эластичного металла). Прибор необходимо перемещать быстро от места к месту, и среднее значение можно принять за собственно температуру поверхности. Этот вопрос исследовался Вильдом, Вуевичем, Керененом и др. До сих пор, однако, не найден удовлетворительный метод непрерывной регистрации температуры поверхности. Вследствие этих трудностей приводимые ниже результаты необходимо рассматривать как приближенные и не всегда взаимно согласующиеся.

Годовые изменения температуры поверхности легко определяются. В северном полушарии максимальное значение достигается в июле и августе, а минимум — в январе и феврале. Очень отчетливо сказывается изменение места, наибольшие амплитуды обнаруживаются в низких широтах (например, Павловск, 59° с. ш., имеет годовое колебание около 19° С, тогда как в Лагоре 31° с. ш., изменения составляют 40°С, при этом почва оголенная в обоих пунктах).

Большой интерес для метеорологов представляет вопрос о суточных колебаниях и, в частности, вопрос о максимальной температуре, достигаемой при условиях интенсивной инсоляции. Значение верхнего предела для температуры поверхности указано Джонсоном и Девисом [15]. Они исходили из того, что в наиболее жарких областях земного шара в случаях, когда температура в метеорологической будке (1,2 м над землей) достигает значений, близких к 57°С, маловероятно, чтобы температура поверхности оголенной почвы превышала 93°С. Нет прямых доказательств того, что реальная температура поверхности будет столь высокая, как указано. Однако из примера с Таксоном (Аризона), приведенного на стр. 218, отчетливо видно, что в этой области температуры поверхности должны иметь значительное превышение над 71,5°, а Филд [12], например зарегистрировал 69°С в Агре (Индия). В Америке (Риверсайд, Иллинойс), по измерениям Итона [13], 51°С наблюдался на поверхности асфальтированной дороги в день, когда температура воздуха над соседним газоном не превышала 37°С. Другие примеры высоких температур поверхности приведены Гайгером [14].

Существенное влияние оказывает природа вещества, из которого состоят поверхностные слои. Джонсон и Девис [15] исследовали температуру в слое до глубины 15 см в: 1) просмоленной щебенке (в материале, из которого делают дороги), 2) оголенной земле, 3) почве, покрытой травой, 4) песке, 5) гальке и 6) оголенной глине. Они избежали прямого измерения температуры поверхности благодаря экстраполяции наблюденной суточной волны на глубине 1 см, используя для этой цели классическое решение уравнения теплопроводности (гл. 4). Для условий Портона (Южная Англия) они нашли, что наивысшие температуры достигаются в слое просмоленной щебенки, поверхность которой нагревается до 60°С в самые жаркие дни. Соответствующий максимум для песка был 55°С, а для поверхности, покрытой травой, 44°С.

Амплитуда суточных колебаний температуры поверхности в значительной степени зависит от широты, сезона, природы поверхности и состояния неба. Из данных Синклера для Таксона видно, что максимальное значение может достигать 56,5°С. в пустынях. Для Финляндии в один и тот же период в августе Хомен определил амплитуды 34,5° (в песчаной степи), 21,4° (в торфянике) и 20,3°С (в граните). Для ясных суток и оголенной или почти оголенной поверхности везде, кроме тропиков, в сезон, когда наблюдается максимум температуры, суточные колебания обычно составляют примерно 25°С. Вместе с тем суточные изменения могут ослабляться почти до полного исчезновения в периоды со значительной и плотной облачностью и при сильных ветрах.

Время наступления максимума температуры поверхности представляет интерес для теоретического анализа теплопередачи в нижней атмосфере. Бест [3] в Портоне (Южная Англия) провел специальное исследование этого вопроса. Он пришел к заключению, что в ясные дни температура на поверхности достигает своего максимума в 13 час. 17 мин. по гринвичскому времени, примерно через 1 час после наступления максимума солнечной радиации. Данные наблюдений Шрайберга [16] в течение ясных июньских дней в Дрездене (песчаная почва) показывают, что кривая температуры достигает максимума около 13 час. 00 мин., однако здесь имеются небольшие колебания от 12 до 14 час.

Наблюдения Вильда и Вуевича [9] также показывают, что максимум температуры поверхности наступает примерно через час после местного полудня. Минимум температуры поверхности во время ясной погоды определяется главным образом соотношением между эффективным излучением и потоком тепла из почвы. Обычно он наблюдается незадолго до рассвета. Эта задача уже рассматривалась в гл. 5.
Максимальная температура поверхности достигается тогда, когда поток тепла в почву в точности равен потоку, направленному вверх, и это зависит не только от приходящей радиации, но и от теплопередачи в почве и воздухе. Поэтому неудивительно, что максимум температуры поверхности наступает через довольно значительное время и после полудня. Ночью поверхность обычно продолжает охлаждаться, пока падение температуры не приостановится с появлением солнечной радиации после рассвета; с этого момента температурная кривая начинает круто подыматься.

Влияние покрытия поверхности. Приведенное выше рассмотрение относится либо к оголенным почвам, либо к почвам, покрытым редкой и низкой растительностью. Если растительность густая или высокая, температура поверхности не может быть определена простыми способами. В таких случаях сами листья образуют собственно деятельную поверхность, уменьшающую приходящую радиацию вследствие поглощения и отражения, и действующую, как первичный источник радиации в ночное время. В общем этот эффект приводит к тому, что температура поверхности почвы, имеющей то или иное покрытие, колеблется значительно слабее, чем температура оголенной поверхности.

Наблюдения Вильда [17] в Павловске показывают, что в период май — август почва, покрытая травой, в среднем на 2—3°С холоднее оголенной почвы. Измерения Любославского [18] в Ленинграде представляют значительный интерес, поскольку они четко иллюстрируют, как снежный покров защищает почву от очень больших холодов. Наблюдения проводились в оголенном песке и на соседнем участке, покрытом растительностью (главным образом травой), а зимой покрытом снегом. От декабря до марта самый верхний слой почвы, покрытый снегом, был на 6°С теплее, чем на оголенном участке. Летом же (от мая до августа) почва, на которой была растительность, оказалась на 2—4°С холоднее, чем оголенный песок.

Приведенные выше примеры иллюстрируют общую тенденцию уменьшения амплитуды температурных колебаний благодаря наличию растительности. Для более подробного ознакомления читателю рекомендуются многочисленные примеры, приведенные Гайгером [14] в его исследовании по микрометеорологии.

Теплообмен в верхних слоях почвы. Во многих микрометеорологических задачах (например, при определении испарения) необходимо оценить возможно точнее различные члены уравнения теплового баланса. Поток тепла через поверхность q_0 определяется посредством

$$q_0 = -k_1 c_1 \rho_1 \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0},$$

где k_1 , c_1 , ρ_1 относятся, как обычно, к почве. На основании тщательных исследований теплопередачи в песчаной почве в Дрездене Шрайбер [16] получил выражение для первых нескольких членов ряда Фурье, представляющего температуру в некоторый момент времени года на глубине 2,5 м. С помощью такого выражения можно рассчитать q_0 , предположив, что k_1 , c_1 и ρ_1 известны. В следующей таблице приводятся осредненные результаты расчетов для каждого месяца.

	I	I	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX.	. X -	XI	XII
Температура												
°С	-1,5	,0,9	5,5	1.1 , 5	17,1	20,9	21,7	19,4	14,5	8,5	2,9	-0,7
сутки ⁻¹ Поток тепла,	10	34	105	236	330	408	372	308	172	69	34	7
г кал. см ⁻² сутки ⁻¹	-7,8	-4,4	2,5	12,9	18,3	14,6	7,3	1,3	- 5,5	-12,9	-15,6	-12,1

Эти расчеты показывают, что в типичный июньский день, когда солнечная радиация достигает максимума, только небольшая доля (менее 4%) приходящей радиации проникает в почву. В течение зимних месяцев количество тепла, отдаваемое землей (отрицательный знак), достигает, а иногда превышает (в декабре) количество тепла, получаемого от солнца.

В подобном исследовании суточных колебаний, выполненном Шрейбергом, также обнаруживаются некоторые интересные особенности. В приводимой ниже таблице даются значения для ясных суток в июне в Дрездене.

Время	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура поверхности °С Поток тепла, г кал. см ⁻² мин. ⁻¹	15,1 -0,07	15,1	-0,01	19,3 0,06	22,5 0,09	25,1 0,11	26,7 0,09	26,7 0,06	25,1 0,01	22,5 -0,04	-0,07	16,7	15,1

Согласно этому анализу, поток тепла в почву достигает своего максимального значения (0,1 г кал. см⁻² мин.⁻¹) между 9 и 11 час. Наибольшее значение направленного вверх потока (0,08 г кал. см⁻² мин.⁻¹) имеет место непосредственно перед полуночью. Этот ход Шрайдер выразил посредством формулы

 $q_0 = 0,01 + 0,097 \sin(\varphi + 300^\circ)$ г кал. см² мин.,

где $\varphi = 360^{\circ} \frac{t}{24}$, а t выражается в часах после полуночи.

Приведенные выше данные выражают общий характер потоков: тепла на поверхности. Теплообмен в почве изучался Бецольдом [19]. Пусть AB и CD на рис. 22 представляют профили температуры. $T = T(z, t_1)$ и $T = T(z, t_2)$ соответственно в моменты времени. t_1 и t_2 . Площадь между этими профилями и линиями $z = 0, z = z_1$ показывает количество тепла, которое получает почва за период. от t_1 до t_2 . С помощью формул это записывается следующим. образом:

$$H = c_1 \rho_1 \int_0^{z_1} [T(z, t_2) - T(z, t_1)] dz.$$

При условиях, когда нет источников или стоков тепла в почве (совершенно сухая почва, температура выше точки замерзания), годовой или суточный тепло-

очно

довой или суточный теплообмен ΔH определяется как разность между наибольшим и наименьшим значениями H в рассматриваемый период. Обобщенная задача, в которой учитываются также источники тепла, рассматривалась Керененом.



Рис. 22. Изменение теплообмена.

тичным способом, используя "температурный интеграл"

$$V = \int_{0}^{\infty} (T - \overline{T}) \, dz \, ,$$

где T — средняя по вертикали температура почвы. Величина теплообмена выражается посредством

$$\Delta H = c_1 \rho_1 \, \Delta V,$$

где ΔV — разность между экстремальными значениями V.

Когда \hat{T} известно как функция z и t, V (а отсюда и ΔH) легкоопределяются.

Несколько характерных суточных значений ΔH , основанных на данных Керенена [21], приведены в табл. 11.

Предел изменений ΔH очень велик, примерно от 10 до 1. Кюльтакже получил обширную сводку годовых значений V и ΔH для различных широт и самых разнообразных типов почв. Для ознакомления с подробностями читатель может обратиться к статье Керенена или оригинальным работам.

223

7=0

7=7

Суточные значения изменений теплосодержания в поверхностных слоях почвы

Тип местности										۰.'			Δ	H	r	кал. с	м ⁻²
Лес, песок или торфяная почва	•					•							÷			15-24	
Торфяной луг	•			•			•									33 - 43	
Песчаная почва, оголенная (лето)	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•			•	95 - 10	5
Песчаная почва, оголенная (осень)	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	·	·	•	•	•	27 - 42	
Песчаная почва, покрытая травой	•	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	•	•	•	·	52 - 67	
Камень (гранит)	•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	·	٠	•	•	•	. 128	

Тепловой баланс. Полное определение теплового баланса поверхности является сложным вследствие трудностей, возникающих из-за испарения и конденсации. Пэсквилл [22] провел подробное исследование ряда отдельных случаев. Эта работа имеет большое значение, поскольку производились прямые измерения различных тепловых потоков, однако выводы из нее, естественно, требуют обобщения. В табл. 12 приведен ряд величин потоков тепла, полученных Пэсквиллом в ясный день в марте на пастбище с глинистой почвой вблизи Кэмбриджа, Англия. Температура поверхности измерялась при помощи спиртового термометра, положенного на землю; большинство из приведенных величин получены путем прямого измерения, а турбулентный поток оценивался как остаточный член.

Таблица 12

Время (гринвичское)	10 час. 33 мин.	12 час. 30 мин.	15 час. 30 мин.	17 час. 30 мин.	19 час. 30 мин.
Температура поверхности Приходящая солнечная ра- диация	16,3 0,715	17,9 0,770	13,4	7,3	5,7 0
Отраженная солнечная ра- диация	0,123 0,191 0,057	0,128 0,196 0,105	0,073 0,153 0,017	0,008 0,116 -0.048	0 0,109 0.063
Затраты тепла на испарение Турбулентный поток тепла	0,037 0,120 0,224	$0,126 \\ 0,215$	0,017 0,097 -0,004	0,048 0,029 -0,074	$0,003 \\ 0,023 \\ -0,069$

Тепловые потоки в ясный весенний день на пастбище с глинистой почвой, по Пэсквиллу °С и г кал. см $^{-2}$ мин. $^{-1}$

Эти результаты можно сравнить с данными Хомена [10] для участка в Финляндии (табл. 13).

Ряд значений был дан (в графической форме) Леттау [23] на основе наблюдений в пустыне Гоби во время экспедиции Свена Гедина в 1931 г. Один такой ряд, осредненный за шесть дней в июне, приведен в табл. 14.

Tab.auga 13

Оценка теплового баланса поверхности, по Хомену мин.-1

Tab Auya 14 $0,13 \\ 0,19 \\ 0,20$ uñt 33 Поток тепна атмосферу полученные Леттау на основании обработки данных наблюдений Хауде $0, 19 \\ 0, 13 \\ 0, 1$ **сте**пь <u>кбнб</u>роэп $0,24 \\ 0,24 \\ 0,13 \\ 0,13$ квмни на 0,35 0,22 0,08 ոչը Расходы тепла испарение $0,12 \\ 0,18 \\ 0,06 \\$ апэтэ вб**нб**рээп 000 камни 0,05 0,05 m ղչո Поток тепла почву за период г кал. см⁻² 0,13 0,11 0,12 апэтэ **Кенбрээ**и $0, \frac{30}{23}$ 0, 180, 18ин» ея 0,18 0,16 0,10 Эффективное излучение $0,72 \\ 0,64 \\ 0,41 \\ 0,41 \\ 0,10 \\$ кильид средние потокв sq выненко. Период, час. мин. ଛଚ୍ଚ 50 - 17 50 - 16 30 - 15 (Потоки тепла в пустыне Гоби, ഗഗം Месяц Октябрь. Сентябрь ABLVCT

15 - 0, 130,08 -0,05 22 -0,14-0,00 0,00 61 କ୍ଷ -0,02 $^{28}_{0,01}$ 0,01 260 18 37 0,28 0,06 0,20300 19 $0,10 \\ 0,17$ $\frac{41}{0.53}$ 0,33430 14 í 43 0,64 $0,11 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,11 \\ 0,18 \\$ 0,36500 12 и см сек. 39 0,56 0,08 0,3058010 Мин.-1 0,03 0,14 0, 15 $25 \\ 0, 32$ 510∞ °С, г кал. см⁻² 15 0,07 0,0 0,01 400 9 -0,0 -0,00 -0,08 -0,06 $^{0,0}_{-0,06}$ -0.05-0,1100 S -0,12-0,05-0,07 2 Ó Температура поверхно-Затраты тепла на испа-Скорость ветра на вы Радиационный баланс Поток тепла в поч. у рение Гурбулентный поток Время, час core 6 M тепла CIN

В этой сводке член "радиационный баланс" включает прямую и рассеянную радиацию, за вычетом отраженной от поверхности радиации, и эффективное излучение. Радиационный баланс уравновешивается суммой затрат тепла на испарение, потока в почву и турбулентного потока тепла.

Для этих трех примеров характерна определенная степень согласованности, несмотря на то, что они относятся к совершенно различным типам почвы и климатических условий. Хотя данные Хомена получены как средние за много часов, все же видно, что приведенные числа имеют тот же порядок, что и у Пэсквилла и Хауде.

Эти измерения трудно сравнивать с лабораторными данными, но все же здесь можно привести один из результатов такого сопоставления. Для свободной конвекции от нагретой горизонтальной поверхности Фишенденом и Саундерсом дано следующее выражение:

$$q = 3,6 \cdot 10^{-3} (\Delta T)^{\frac{5}{4}}$$
г кал. см² мин.⁻¹

(уравнение (4.15) стр. 135).

Это дает

q = 0,15 г кал. см⁻² мин.⁻¹ при $\Delta T = 20^{\circ}$ С, q = 0,2 г кал. см⁻² мин.⁻¹ при $\Delta T = 25^{\circ}$ С.

В ясный летний день поверхность, если она будет оголена или покрыта редкой либо густой растительностью, может иметь температуру на 20—25° С выше, чем воздух на обычной высоте наблюдений (например, 1 м). Эти данные хорошо согласуются с лабораторными наблюдениями свободной конвекции.

6. 3. Профиль температуры

Сведения о температурном поле в нижней атмосфере (от 0 до 100 м), приводимые в этом параграфе, основаны главным образом на данных наблюдений Джонсона [2] и Беста [3] в Портоне (Англия), Джонсона и Хейвуда в Лифилде (Англия) и Флауера в Исмаилии (Египет). Портонские записи относятся к условиям открытой долины в Солсбери Плейн, где подпочва представляет собой мел, покрытый тонким слоем дерна. Лифилд лежит на севере от Солсбери Плейн, в Котсволде — области с холмистыми лугами и пахотными землями. В отношении Исмаилии можно принять, что она характеризует условия на периферии пустыни.

В рамках данной книги невозможно дать обширный обзор существующих результатов по профилям температуры вблизи земли в различных климатических условиях. Поэтому остановимся на главных особенностях, обнаруженных в указанных выше исследованиях. Такое рассмотрение будет связано с некоторым уменьшением общности, но это, вероятно, будет более чем компенсировано тем, что эти частные разработки основаны на систематических и непрерывных исследованиях детальной структуры температурного поля, проведенных специально в микрометеорологических целях. К тому же все четыре исследователя использовали, по существу, один и тот же тип аппаратуры — защищенный и аспирационный электротермометры, установленные на башнях на открытой местности. Результаты эти надежны и сопоставимы между собой.



Рис. 23. Средний суточный ход разностей температур на высотах 2,5 и 30,5 см (1) и 30,5 и 120 см (2) над поверхностью с короткой травой в январе (а) и в июне (б) в Портоне (Южная Англия) в единицах суходиабатического градиента.

Величина температурного градиента. Бест измерил разность температур в интервалах высот от 2,5 до 30 см и от 30 до 120 см в том же месте, где Джонсон исследовал разности в интервалах от 120 до 710 см и от 710 до 1710 см. Интервалы высот в Лифилде составляли 120—1240 см, 1240—3050 см, 3050—5740 см и 5740—8770 см, а в Исландии 110—1620 см, 1620—4640 см и 4640—6100 см.

На рис. 23 показан суточный ход разностей температур в Портоне для января и июня. В табл. 15 даны средние полуденные раз-

ности температур, представленные как градиенты, выраженные через адиабатический градиент Г для высот до 1710 см (Портон).

Таблица 15

Слой. см	Температурны градиент			
	ян в арь	июнь		
2,530 30120 120710 7101710	100 Г 11 Г 2 Г 1 Г	625 Г 78 Г 14 Г 5 Г		

Средние полуденные градиенты температур над травой в Портоне, Южная Англия, по Бесту

Характерной особенностью здесь являются наличие больших градиентов в нижних слоях, даже зимой, и быстрое уменьшение температурного градиента с высотой в метровом слое над почвой. Сверхадиабатические градиенты должны поэтому рассматриваться как характерная особенность температурного поля нижних слоев в период времени около полудня.

Приведенные значения не представляют собой абсолютного максимума, и часто в течение коротких промежутков времени наблюдаются большие градиенты. Наибольшие часовые значения разностей, зарегистрированные Бестом во время его работ, были 9,7°C, в слое от 2,5 до 30 см, что эквивалентно среднему градиенту в 1800 Г. Бест сравнивал эти результаты с теоретическими выводами Брента. Согласно последним, если 1 — приходящая радиация в г кал. см⁻² мин. $^{-1}$, а e — давление водяного пара в миллибарах, значение градиента вблизи поверхности не может превзойти 100 е ІГ. Согласно данным измерений солнечной радиации в обсерватории в Кью, вблизи Лондона, значение I = 1,5 г кал. см⁻² мин⁻¹ может быть достигнуто при чистой атмосфере (максимальное значение в Кью I == =1,39 г/кал. см⁻²мин.⁻¹). При этом значении I и измеренном значении е = 11,7 мб формула Брента дает = 1755Г. что находится в полном соответствии с наблюдениями. Зимой инверсия преобладает в течение 24 час., летом в течение большей части этого периода преобладают сверхадиабатические градиенты.

Величины сверхадиабатических градиентов во много раз больше летом, чем зимой, в отношении же почных инверсий отмечается несколько меньшая их зависимость от сезона. В зимние месяцы наибольшие значения ночной инверсии в слое от 2,5 до 30 см обычно относятся к полуночи. Численно они имеют порядок 1000 Г и

в общем больше, чем максимальные значения сверхадиабатических градиентов в том же интервале высот. Летом наибольшие значения инверсионных разностей обычно отмечаются после полуночи, однако численно они меньше, чем максимум сверхадиабатических градиентов в том же интервале высот.

Влияние скорости ветра на величину температурного градиента довольно сложно. Данные Беста показывают, что в сверхадиабатический период градиенты уменьшаются с ростом скорости ветра больше 400 см сек.⁻¹ (измеренной на высоте 13 м над землей). При скорости ветра меньше 400 см сек⁻¹ имеется тенденция к уменьшению градиента с ослаблением ветра. В инверсионный период градиент очень быстро уменьшается, когда ветер усиливается от штиля до 200 см сек.⁻¹, а при больших скоростях усиление ветра оказывает малое влияние.

Эти результаты не легко объяснить, поскольку можно было ожидать, что турбулентный обмен, обусловленный увеличением скорости ветра, должен неизменно приводить к уменьшению температурного градиента.

Суточное изменение. В табл. 16 приведены данные по суточному ходу температуры в ясные дни в Портоне и Лифилде.

Таблица 16

·	Портон		Лифилд					
месяц	высота, см	суточный ход, °С	месяц	высота, см	суточный ход, °С			
Декабрь	2,5 30 120 710 1710	3,7 3,3 3,1 2,7 2,4	Декабрь	120 1240 3050 5740 8770	3,2 2,2 1, 6 1,2 0,9			
Июнь	2,5 30 120 710 1710	11,8 10,2 9,4 8,3 7,1	Июнь	120 1240 3050 5740 8770	10,8 8,8 8,1 7,4 7,0			

Суточные изменения температуры в ясные дни в Портоне и Лифилде

Бестом для Портона, а Флауером для Исмаилии суточные изменения были также представлены посредством ряда Фурье. Их результаты даны в табл. 17.

Эти результаты имеют некоторые интересные особенности. В Портоне в декабре амплитуда второй гармоники c_2 сравнима по величине с амплитудой первой гармоники c_1 . Таким образом, зимой суточная кривая температуры не может быть представлена с достаточной точностью посредством простой синусоидальной волны. Летом

Месяц	В ысо та, см	<i>c</i> ₁ , °C	Ψ1	<i>c</i> ₂, °C	φ ₂
•					-
		Портон			
Декабрь (все дни)	2,5 30 120 710 1710	1,37 1,23 1,16 1,03 0,93	244° 238 233 225 218	$0,84 \\ 0,72 \\ 0,64 \\ 0,54 \\ 0,46$	59° 55 52 45 40
Июнь (все дни)	2,5 30 120 710 1710	5,78 5,14 4,72 4,10 3,76	246 238 235 228 223	0,48 0,29 0,25 0,28 0,31	108 107 110 107 103
		Исманли	r a		
1		ricmann	ГЛ		
Декабрь (ясные дни)	$110 \\ 1620 \\ 4640 \\ 6100$	$\begin{array}{c} 6,40 \\ 4,06 \\ 2,49 \\ 1,94 \end{array}$	228 219 209 204	1,97 1,32 0,98 0,92	61 42 28 27
Август (ясные дни)	$110 \\ 1620 \\ 4640 \\ 6100$	$6,56 \\ 5,28 \\ 4,82 \\ 4,69$	225 219 218 219	1,41 1,30 1,41 1,41	$50 \\ 42 \\ 31 \\ 28$

Коэффициенты первых двух гармоник суточной волны температуры

Температурная разность (отклонение от средней) = $c_1 \sin(t + \varphi_1) + c_2 \sin(2t + \varphi_2)$, t — время от полуночи, измеренное в градусах; $\frac{\pi}{12} = 15^\circ = 1$ час.

вторая гармоника имеет меньшее значение, и суточную волну температуры можно выразить без большой погрешности простым синусоидальным изменением в течение всех 24 часов. Имеется также большое изменение в величинах амплитуды гармоник при переходе от зимы к лету. В Египте амплитуды второй гармоники всегда составляют значительно большую часть от амплитуд первой гармоники, особенно на больших высотах, а сезонные изменения отмечаются только в поверхностных слоях.

Зависимость времени наступления максимума температуры от высоты имеет большое значение при теоретическом анализе. В табл. 18 приведены данные для Портона, Лифилда и Исмалии.

Таблица 18

Время наступления максимума температуры на различных высотах

	П	ортон	÷.,			
an an the second se	· ·			i i	1 .	
Высота, см Время (гринвичское) на- ступления максимума	0	2,5	· 30	120	710	1710
температуры Ясные дни в марте, 1932 Ясные дни в марте, 1933	1317	1403 1348	1424 1405	1445 1430	1518 1445	1533 1500
			and the second			1.6.3.
	JÍ	ифилд		· •		
and the second					} .	
Высота, см Время (гринвичское) максимальной темпе- ратуры	120	1240	3050	5740	8770	
Ясные дни в декабре Ясные дни в июне	1330 1545	1342 1635	1400 1700	1438 (?) 1714	1514 (?) 1724	
	Исм	аилия	•	an a'		
Высота, см Время (зональное) мак-	110	1620	4640	6100		
симума температуры Ясные дни в декабре	1447	1524	1603	1623		a Sanatan

6. 4. Анализ наблюдений температуры вблизи поверхности земли

1522

1459

Ясные дни в августе

1525

1525

Приведенные в предыдущем параграфе данные могут быть проанализированы двумя способами:

1) посредством применения достаточно развитой в математическом отношении теории, позволяющей детальное сопоставление с наблюдениями, или

2) с помощью исследований эмпирических соотношений, которые впоследствии могут послужить основанием для рациональной теории. Историческая последовательность в исследовании этих вопросов указывалась выше; в первую очередь развивался второй способ подхода, приведший, естественно, к различным теориям, которые развивались в соответствии с наблюдениями.

Эмпирические соотношения. Профили. Изменчивость температурного поля вблизи земли создает трудности в получении простого математического выражения для профиля, который был бы справедлив для любых условий. Было бы безосновательно ожидать существования такого выражения, поскольку физические факторы, которые преобладают в период сверхадиабатических градиентов и в период инверсий, совершенно различны. Более обещающим подходом является выделение некоторых периодов суток с квазиустановившимися условиями, когда можно ожидать, что профиль температуры имеет относительно простую форму. Один такой период существует в часы около полудня, и Бест [3], анализируя профили в ясные июньские дни от 10 до 14 час., нашел, что температура приближенно выражается линейной функцией lgz (z — высота) между 30 и 1710 см. Подобный закон справедлив и для средины инверсионного периода. Шеппард [24] установил, что в слое от 0 до 100 м температура уменьшается примерно пропорционально логарифму высоты в течение дневного времени, но он не дал точного выражения этой зависимости.

Сделанные выше заключения относились к молекулярным температурам на различных уровнях. На основании исследований профилей в ясные июньские дни в Лифилде, Сеттон [25] заключил, что в часы около полудня $\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma$ уменьшается, как $z^{-1,75}$, для z между 7 и 45 м. Это означает, что в период максимального сверхадиабатического градиента потенциальная температура уменьшается примерно, как $z^{-0,75}$. Быстрое уменьшение градиента потенциальной температуры в нижних слоях означает, что температурный градиент достигает адиабатического значения с увеличением высоты. Поэтому два закона, соответственно для молекулярной и потенциальной температур, не противоречат друг другу. Следует заметить, что эти выражения не выполняются на очень близких к земле расстояниях.

В недавно выполненном исследовании Дикона [26] утверждается, что профили потенциальной температуры в нижних слоях атмосферы удовлетворяют соотношению

$$\frac{d\theta}{dz} = \operatorname{const} z^{-\delta}, \qquad (6.1)$$

где δ — положительное и большее, чем единица, число в период сверхадиабатического градиента, а в период инверсии отрицательно и численно меньше единицы. Наблюдениями это предположение не подтверждено и не получено действительных значений для δ . Следует заметить, что для сверхадиабатических периодов это соотношение, по существу, того же типа, что и полученное Сеттоном для ясных дней в Лифилде.

Если обмен тепла и количества движения осуществляется совершенно одним и тем же способом, то профили температуры и скорости должны быть подобны при установившихся условиях, если всеми изменениями, кроме тех, что происходят по вертикали, можно пренебречь. Граничные условия могут быть одинаковыми, если определять температуру, как отклонение от ее значения на поверхности. При таких обстоятельствах уравнением обмена является

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} \right] = 0, \qquad (6.2)$$

где под Е понимается либо температура, либо скорость.

Изменение скорости с высотой в приземном слое происходит медленнее в сверхадиабатические периоды, и профиль скорости может быть представлен логарифмом от высоты или степенной функцией с малым показателем степени. Профиль температуры также может быть выражен посредством логарифма высоты. Однако эта задача чрезвычайно сложная и данные слишком неопределенны для того, чтобы сейчас уже утверждать о наличии полного подобия между обменом тепла и количеством движения при всех условиях. Имеются некоторые основания и для противоположного заключения.

Суточное изменение. Для того чтобы описать уменьщение суточной амплитуды с высотой, Бест [3] предложил логарифмические и степенные законы на основании данных наблюдений в ясные мартовские и июньские дни, а также за полные месяцы — декабрь, март и июнь. Во всех случаях диапазон изменения температуры R выражался посредством линейной функции от $\lg z$ для 2,5 см $\ll z \ll 1710$ см. Бест также нашел, что степенной закон типа

$$R = \operatorname{const} z^s \tag{6.3}$$

может быть применен к данным наблюдения в слое z от 2,5 см. до 120 см. Значения s изменялись от -0.04 до -0.07.

Эти законы должны рассматриваться как чисто эмпирические, поскольку не было теоретически показано, что суточные изменения зависят от z ни как $\lg z$, ни как z^s .

Из теоретических соображений следует, что фаза смещения суточной волны увеличивается пропорционально высоте (в некоторой степени), и это хорошо согласуется с большинством данных наблюдений. Бест нашел, что время наступления максимума температуры в Портоне возрастает, как $z^{0,19}$. Это соотношение было найдено независимо от предположений, касающихся времени наступления максимума температуры на поверхности. Из эмпирического же закона должен что максимум на поверхности следует. достигаться: в 13 час. 18 мин. (по гринвичскому времени), а это почти в точности согласуется со временем, полученным другими способами. в частности с 13 час. 17 мин. Запаздывание максимума температуры с высотой для ясных июльских дней в Лифилде [1] также подтверждает простой степенной закон, если время наступления максимума температуры на поверхности принято за 13 час. 15 мин. (по-Гринвичу). Однако показатель степени здесь хотя такого же порядка, как и у Беста, но все же меньше, и примерно равен 0,1. Данных. наблюдений в Исмаилии недостаточно, чтобы получить хорошовыраженный степенной закон. Лишь для ясных дней в декабре положение максимума температуры, если принять, что на поверхности

он наступает через 75 мин. после полудня, может быть приближенно представлено с помощью степенного закона от высоты с показателями степени 0,13. Отсюда следует вывод, что в ясные дни фаза смещения суточной волны обычно увеличивается пропорционально высоте в небольшой степени. При этом показатель степени находится в пределах от 0,1 до 0,2. Учитывая же трудности точного определения времени наступления максимума по данным наблюдений (особенно на больших высотах, где кривая зависимости температуры от времени имеет тенденцию к выпрямлению), следует признать нецелесообразным попытки определить показатель степени с большей точностью.

Время нулевого градиента. В течение суточного периода при ясной погоде температурный градиент дважды меняет знак: вскоре после восхода и перед заходом солнца. Бест [3] нашел, что вечерний переход наблюдается в большинстве случаев в одно и то же время перед заходом солнца в течение года, тогда как время утреннего перехода значительно изменяется от зимы к лету. Его результаты приведены в табл. 19.

Таблица 19

Утренний по нутах после в	ереход, в ми- осхода солнца	Вечерний переход, в ми- нутах до захода солнца				
2,5-30 см	30—120 см	2,5—30 см	30—120 см			
91 35	96 78	115 107	111 98			
	Утренний п нутах после в 2,5-30 см 91 35	Утренний переход, в ми- нутах после восхода солнца 2,5-30 см 30-120 см 91 96 35 78 с	Утренний переход, в ми- нутах после восхода солнца Вечерний пе нутах до за 2,5-30 см 30-120 см 2,5-30 см 91 96 115 35 78 107			

Время изменения знака $\frac{\partial T}{\partial z}$, по Бесту

По наблюдениям в Исмаилии, Флауер [4] получил значительно большую изменчивость во времени для вечернего перехода, чем для утреннего. Учитывая значение радиационного охлаждения для наступления ночной инверсии, Флауер исследовал эти данные в зависимости от влажности. Он предположил, что время вечернего перехода можно представить в форме

$$\frac{T}{e}(t+av+b)=c+d\log v,$$

где t — время в минутах от захода солнца, v — скорость ветра, *е* — давление водяного пара, *a*, *b*, *c*, *d* — постоянные. Для данных Т и v, если e увеличивается, время нулевого градиента наступает позже. Это можно ожидать, поскольку при большей влажности в нижней атмосфере потеря тепла от почвы меньше. Для утреннего перехода подобное соотношение не удается получить.

Температурные пульсации. Имеется мало надежных данных о величине и распределении флюктуаций Т', обусловленных турбулентностью. Шмидт [27] нашел, что суточные изменения Т'

на фиксированном уровне подобны колебаниям солнечной радиации и порывистости ветра. Все три величины имеют один и тот же тип колебаний, каждая из них достигает максимума в часы около полудня.

Температурные флюктуации в сильной степени зависят от градиента температуры и стремятся к нулю, когда градиент становится малым. Из небольшого ряда наблюдений, относящихся к ясным летним дням в Лифилде, Сеттон [25] нашел, что путь смешения для температуры l_{H} , определяемый формулой

$$l_{H} = -\frac{T'}{\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma}, \qquad (6.4)$$

удовлетворяет соотношению

$$l_H = \text{const} z^{1,35}$$
 7 M $\leqslant z \leqslant 45$ M. (6.5)

Те же исследования показывают, что $\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma$ уменьшается, как $z^{1,75}$ (см. стр. 232), так что

$$T' = \operatorname{const} z^{-0,4}.$$
 (6.6)

К этому небольшому числу данных не нужно относиться с большим доверием, особенно из-за того обстоятельства, что значения T', полученные Джонсоном и Хейвудом [1], включают инструментальную ошибку. Эта ошибка может отразиться и не отразиться на полученных выводах об изменении T' с высотой.

Суточное изменение $\frac{\partial T}{\partial t}$. Значения $\frac{\partial T}{\partial t}$ в течение суток при ясной июльской погоде были получены Сеттоном [25] по данным в Лифилде для высот от 1,2 до 87,7 м. Наибольшие значения относились к раннему утру и вечеру, они приведены в табл. 20.

Таблица 20

Максимальные изменения температуры со временем в ясные июньские дни, по Сеттону (время дано с точностью до получаса)

	Сверхадиабати	ческий период	Инверсионный период				
Высота, см	та, см время (грин- вичское) $10^4 \frac{\partial T}{\partial t}$, °C сек. ⁻¹		время (грин- вичское)	$10^4 \frac{\partial T}{\partial t},$ °C ces. ⁻¹			
120 1240 3050 8770	06 30 06 30 07 30 07 30	5,93 4,20 3,43 2,47	19 30 20 30 20 30 20 30 20 30	-6,78 -4,57 -3,83 -3,42			

В часы около полудня от 10 час. 30 мин. до 13 час. 30 мин. $\frac{\partial T}{\partial t}$ почти не зависит от высоты и времени. Среднее значение за эти часы для высот от 1,2 до 87,7 м

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1,83 \cdot 10^{-4} \,\text{°C cek.}^{-1} \qquad 1,2 \,\,\text{M} \leqslant z \leqslant 87,7 \,\,\text{M}. \tag{6.7}$$

Обнаруживается тенденция к независимости величины $\frac{\partial T}{\partial t}$ от высоты за короткий промежуток времени перед полуночью, но почисленному значению она больше, чем для полудня.

Отчетливо проявляется интересная особенность, заключающаяся в том, что $\frac{\partial T}{\partial t}$ обращается в нуль почти одновременно на всех высотах в утренние часы, тогда как вечером $\frac{\partial T}{\partial t}$ изменяет знак сначала на нижнем уровне и гораздо позже на больших высотах. На рассвете температура в течение короткого промежутка времени начинает быстро возрастать на всех высотах до уровня 100 м. Вечером же охлаждение атмосферы начинается на нижних уровнях и медленно распространяется к большим высотам. Подобные особенности отмечены Джонсоном для Портона и Чэпменом по данным, полученным на Эйфелевой башне.

Профили температуры над водой. Немногочисленные наблюдения, относящиеся к температурному полю над морем, были подытожены Шеппардом [24]. Он показал, что репрезентативные средние профили почти полностью согласуются с линейной зависимостью $T - T_0$ ($T_0 -$ температура поверхности) от lg z в интервале от 0 до 38 м (Вюст [28], Джонсон [29], Монтгомери [30]). Общий характер поля значительно отличается от того, что наблюдается над сушей главным образом вследствие различных свойств поверхности по отношению к радиации. Шеппард заключил, что знак и величина температурного градиента над морем в основном определяется характером атмосферной циркуляции и океаническими течениями. На профилях сказывается сильное влияние предшествующей истории воздушных масс, особенно вблизи материка. Суточные колебания здесь обычно очень малы по сравнению с теми, какие имеют место на суше.

6. 5. Теоретическое исследование теплообмена в нижних слоях

Классическая теория теплопроводности. В тейлоровском исследовании турбулентной теплопроводности основной гипотезой является то, что перенос тепла через некоторый уровень zвыражается посредством $-K_H c_p \rho \frac{\partial \theta}{\partial z}$, где θ — средняя потенциальная температура и K_H — коэффициент турбулентного обмена. В слоях воздуха вблизи земли это выражение очень близко к тому, что было предложено Брентом для потока

$$-K_{H}c_{p}\left(\frac{\partial T}{\partial z}+\Gamma\right),$$

где T — средняя температура на высоте z. Если пренебречь изменением плотности, то эти выражения приводят к следующим уравнениям (см. параграф 4.7):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_H \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$
 (Тейлор), (6.8)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_{H} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) \right] \quad (\text{Брент}). \tag{6.9}$$

В первом приближении можно предположить, что K_H не зависит от высоты. Тогда указанные уравнения приобретают вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K_H \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \tag{6.10}$$

И

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_H \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} . \tag{6.11}$$

На этой основе можно рассмотреть два типа задач.

1. Вертикальное распространение тепла в атмосфере с заданным начальным распределением температуры и постоянной температурой на нижней границе.

2. Распространение в атмосфере суточной волны температуры.

Классическим примером первой из этих задач является анализ вертикального распределения температуры над Гренд Бенксом в Ньюфаундленде, выполненный Тейлором [31]. При наблюдениях во время тумана, типичного для этих морей, обнаружилась четко выраженная инверсия в нижних слоях, вызванная натеканием теплого воздуха на холодное море.

В математическом отношении данное исследование сводится к задаче о прохождении воздуха с начальной температурой, равной $T = T_0 - \beta z$ ($\beta = \text{const}$), над поверхностью, температура которой $T_1 < T_0$. Решение ее дано в гл. 4 и в настоящих обозначениях выражается следующим образом:

$$T(z, t) = T_0 - \beta z + (T_1 - T_0) \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{4K_H t}}.$$

Теоретически эффект холодной поверхности распространяется до бесконечности для всех t > 0. Практически же достаточно предположить, что высота слоя, в котором обнаруживается влияние поверхности, определяется посредством равенства $\frac{z^2}{4K_{H}t} = 1$.

На основании измерений высоты инверсионного слоя в движущемся над холодным морем воздуже и времени перемещения воздуха Тейлор нашел, что K_H примерно пропорционально силе ветра и имеет порядок 10³ см² сек.⁻¹.

Исследования этого типа позволяют установить порядок величины коэффициента турбулентного обмена и предложить простую зависимость K_H от скорости ветра. Они, однако, не позволяют достаточно проверить предпосылки теории. Более тщательная проверка возможна путем анализа распространения суточной волны температуры при ясной погоде.

Температура поверхности земли в период безоблачной погоды может быть представлена с желаемой точностью посредством конечного числа членов ряда Фурье.

В ясную летнюю погоду суточные колебания температуры поверхности хорошо апроксимируются одним синусоидальным членом, а в общем случае требуются две гармоники. Тогда проблема сводится к решению задачи при заданных начальных условиях и известном изменении температуры во времени на границе ее, представленном с помощью ряда Фурье.

Эта задача математически рассматривалась в гл. 4. Если начальные условия таковы, что температура везде равна нулю, то полное решение содержит начальный член плюс выражение типа затухающей волны. Если для ряда дней (как, например, в период хорошей погоды) изменения температуры поверхности однотипны, то начальный член можно исключить, сместив начало отсчета времени. При этих обстоятельствах, если температура поверхности задается рядом

$$T(0, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{N} T_n \cos(n\omega t - \varepsilon_n), \qquad (6.12)$$

искомым решением является

$$T(z, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{N} T_n \exp\left(-z \sqrt{\frac{n\omega}{2K_H}}\right) \cos\left[n\omega t - \left(\varepsilon_n + z \sqrt{\frac{n\omega}{2K_H}}\right)\right].$$
(6.13)

Это решение, обычно при N = 1 или 2, применялось Шмидтом [27], Тейлором [32], Джонсоном [2], Бестом [3], а также Джонсоном и Хейвудом [1]. В общем, этот метод применялся для оценки K_H в различных слоях, толщина которых обычно обусловливалась высотами установки термометров.

Прежде чем рассматривать подробно эти результаты, целесообразно исследовать тщательно их предпосылки. Во-первых, предполагается, что условия типичны для среды, которая подвержена продолжительному воздействию ряда совершенно подобных температурных волн, так что начальным членом вполне можно пренебречь. Во-вторых, для успешного применения метода требуется, чтобы характеристики суточной волны могли быть легко определены на всех рас-

сматриваемых высотах, и, наконец, высота интервалов не должна. быть большой, если K_H изменяется с высотой.

Первые два условия практически означают, что можно ожидать согласования результатов только с полем температур, измеренных в период теплой ясной погоды, когда обеспечены большие суточные изменения. При таких условиях обычно наблюдаются слабые ветры или штили. Поэтому сразу возникает вопрос, как представлять процесс теплопередачи в такие дни: посредством уравнения диффузии или с помощью свободной конвекции, которая должна здесь игратьтакую же, а может быть даже преобладающую роль.

Результаты, полученные Бестом [3] (для Портона) и Джонсоном. и Хейвудом [1] (для Лифилда), являются типичными для подобных исследований. Бест использовал две гармоники (см. табл. 17) и получил значения K_{rr} с помощью различных методов:

1) по времени наступления максимума температуры,

2) по величине суточной амплитуды колебаний температуры,

3) по амплитуде и фазе каждой из двух гармоник.

Его данные относятся к совокупности ясных дней в марте, июне и ко всем дням декабря, марта и июня. Его метод расчета может быть проиллюстрирован путем рассмотрения одного из членов решения (6.13), соответствующего первой гармонике ряду. Форма этогочлена

$$T_{1}e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2K_{H}}}}\cos\left[\omega t-\left(\varepsilon_{1}+z\sqrt{\frac{\omega}{2K_{H}}}\right)\right].$$
 (6.14)

Отношение амплитуд на высотах z_1 и z_2 равно

$$e^{(z_2-z_1)}\sqrt{\frac{\omega}{2K_H}},\qquad(6.15)$$

и если t_1 и t_2 — время наступления максимума, а температуры соответственно на высотах z_1 и z_2 , то

$$\omega\left(t_{2}-t_{1}\right)=\left(z_{2}-z_{1}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2K_{H}}}. \tag{6.16}$$

Отсюда могут быть вычислены значения K_H , соответствующие интервалу высот $z_2 - z_1$, если известен вид суточной волны на этих высотах. При этом не нужно делать никаких предположений относительно точного вида суточной волны для z = 0, кроме того, что она может быть представлена рядом Фурье. Результаты Беста дляшести принятых методов расчета обнаруживают некоторые расхождения между собой, однако в целом они хорошо согласуются. Средние значения по всем методам для ряда выбранных месяцев даны в табл. 21.

Таблица 21

Значения K_H, полученные на основе анализа суточной температурной волны, по Бесту, см² сек.⁻¹

Лериод	2,5—30 см	30—120 см	120—710 см	710—1710 см
Март, ясные дни Июнь, ясные дни Декабрь, все дни Июнь, все дни Среднее по всем расче- там	2,7 1,0 3,8 1,3 2,2	29 39 406 48 43	1310 510 1015 750 917	6800 4100 4700 4950 4940

Результаты, полученные другими исследователями при использовании этих методов, в общем подобны, имеются лишь отдельные расхождения. Значения, представленные в табл. 21, дают только порядок величин.

Из этих и других результатов отчетливо видно, что предположение о $K_H = \text{сопst}$ не согласуется с фактическими данными. Очень быстрый рост K_H с высотой указывает на то, что гипотеза о постоянстве коэффициента обмена неприемлема, за исключением случаев крайне грубого приближения. Часто встречающееся в метеорологической литературе утверждение о том, что коэффициент обмена имеет порядок 10³ или 10⁴ см² сек.⁻¹, является необоснованным упрощением. Если его применять для очень близких расстояний от поверхности почвы, то можно прийти к результатам, весьма далеким от истины.

Существует тенденция объяснить подобные результаты посредством "модели" теории турбулентности, интерпретируя увеличения K_H с высотой, как указание на то, что средний "размер" вихря увеличивается с расстоянием от границы. Хотя это в некотором смысле справедливо, легко видеть, что такое объяснение неудовлетворительно. Предположение, что K_H не зависит от высоты, приводит, например, к тому, что фаза суточной волны должна увеличиваться прямо пропорционально высоте. Однако столь быстрые изменения фазы не наблюдаются. Согласно фактическим результатам, увеличение фазового угла пропорционально очень малой степени высоты. Таким образом, функциональная форма решения (6.13) не согласуется с данными наблюдений. Она должна поэтому приводить к противоречиям и несоответствиям в случаях применения к анализу наблюдений.

Каулинг и Уайт [33] подвергли тщательному исследованию данные, полученные в Лифилде, с целью определить законность соображений о коэффициенте обмена и, в особенности, установить возможность использования в первом приближении $K_H = \text{const.}$ Они убедительно показали, что методы анализа, основанные на этом предположении, если они даже применены к тонким слоям, должны приводить к несогласующемуся с наблюдениями результату. В частности, Каулинг и Уайт получили, что суточное изменение K_H , которое может быть большим, и некоторые особенности кривой зависимости потенциальной температуры от высоты не могут быть объяснены с помощью концепции турбулентного обмена, как это имеет место в классических теориях. В атмосферном теплообмене существенную роль должны играть и другие факторы, в частности радиация.

Дальнейшее развитие; переменное K_H . Бест [3] применил средние значения K_H , данные в табл. 21, для определения возможной зависимости K_H как функции высоты. Средние значения удовлетворяют с достаточной степенью точности эмпирическому закону

$$K_{\mu} = \operatorname{const} z^{p} \tag{6.17}$$

при p = 1,8. Примерно такие же результаты следуют из данных Хомена и Росси, проанализированных Бестом. Джонсон и Хейвуд [1] также нашли отчетливые изменения K_H с высотой по степенному закону и получили значения p, представленные в следующей таблице:

	6—21 м	2172 м
Асные июньские дни Асные декабрьские дни.	p = 2,3 p = 0,9	p = 1,9не определялось

Эти результаты показывают, что в ясную теплую погоду K_H с удалением от поверхности земли приближенно увеличивается, как квадрат высоты. Зимой же, когда температурные градиенты значительно меньше, чем летом, увеличение K_H примерно пропорционально высоте в слое до 20 м.

Вследствие закономерных изменений K_H с высотой, отмеченных Бестом и другими исследователями, желательно искать решение задачи, описываемой уравнением теплопроводности и обычными граничными условиями, заменив при этом постоянное значение K_H на степень высоты. Если принять брентовское определение потока тепла, то должно быть решено уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_1 z^p \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \right) \right], \qquad (6.18)$$

где $K_H = K_1 z^p$, $K_1 = \text{const.}$ Вводя приближенно потенциальную температуру $\theta = T + \Gamma z$, сведем это уравнение к

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_1 z^p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \qquad (6.19)$$

что представляет собой уравнение Тейлора с переменным К_н.

16 О. Г. Сеттон

Это уравнение рассматривалось Кёлером [34], который получил общее решение его, удовлетворяющее начальному условию $\theta = f(z)$ при t = 0 и граничному условию $\theta = g(t)$ при z = 0. Решение для периодического источника может быть получено из выражения, данного Кёлером, если подставить вместо g(t) соответствующую тригонометрическую функцию и положить f(z) = 0. Такое же решение может быть получено посредством метода источников.

Решение уравнения (6.19) для мгновенного плоского источника тепла мощностью Q при t = 0 на плоскости z = 0 легко найти с помощью простого обобщения решения подобной задачи классической теории теплопроводности в твердом теле, а именно:

$$\theta = \frac{Q}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{z^2}{4Rt}}$$

(гл. 4). Для $K = K_1 z^p$, p > 0, соответствующее решение обобщенного уравнения есть

$$\theta = \frac{Q}{q^{\frac{2}{q}} \kappa_{I}^{\frac{1}{q}} \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) t^{\frac{1}{q}}} e^{-\frac{2^{q}}{q^{2} \kappa_{I} t}},$$

где q = 2 - p. Это выражение справедливо для $0 \le p \le 2$.

Решение для периодического источника мощностью $Q_0 \sin \omega t$ можно получить, заменив Q на $Q_0 e^{\Re t}$, где Ω — комплексная частота $\omega \sqrt{-1}$, и разложив найденный после интегрирования результат на действительную и мнимую части.

Предполагается, что исследуемая температурная волна есть одна из совокупностей подобных волн. Таким образом, принимается, что состояние квазиустойчивое и бесконечно удалено от начального момента времени. Этим в решении устраняется член, представляющий влияние начальных условий (стр. 149). При данном условии решение для периодического источника будет

$$\theta = \operatorname{const} \int_{-\infty}^{t} e^{\Omega t' - \frac{\left(\frac{2}{q}\right)^{s} z^{q}}{4K_{1}(t-t')}} \frac{dt'}{\left(t-t'\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Если заменить переменную интегрирования, положив $t - t' = \frac{\varphi}{\Omega}$, то

$$\theta = \operatorname{const} e^{\mathfrak{Q}t} \int_{0}^{\infty} e^{-\varphi - \frac{\mathfrak{Q}\left(\frac{2}{q}\right)^{\mathfrak{g}} z^{q}}{4K_{1}\varphi}} \frac{d\varphi}{\frac{1}{\varphi^{q}}}$$

Этот интеграл может быть выражен с помощью функций Бесселя

второго рода от мнимого аргумента $K_{u}(x)$, используя тождество ¹

$$K_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \int_{0}^{\infty} e^{-\varphi - \frac{x^{2}}{4\varphi}} \frac{a\varphi}{\varphi^{\nu+1}}.$$

Искомое решение тогда приобретает форму

$$\theta = \operatorname{const} e^{\Re t} \left(\frac{2}{q} \sqrt{\frac{\Omega}{K_1}} z^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{q-1}{2}} K_{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{2}{q} \sqrt{\frac{\Omega}{K_1}} z^{\frac{q}{2}} \right). \quad (6.20)$$

До сих пор проводился формальный анализ и необходимо удостовериться, удовлетворяет ли полученное выражение для θ граничным условиям. Согласно этим условиям, $\theta \to 0$ при $z \to \infty$ и θ остается конечным (равным $Q_0 e^{\Re t}$) при $z \to 0$.

Для очень больших и очень малых значений z решением будет

$$\theta = z^{\frac{q-1}{2}} K_{\frac{q-1}{q}} \left(z^{\frac{q}{2}} \right) = z^{\frac{1-p}{2}} K_{\frac{1-p}{2-p}} \left(z^{1-\frac{p}{2}} \right).$$

Если $z \to \infty$, то $\theta \to 0$ при $0 \le p < 2$. Если же $z \to 0$, значение θ может остаться конечным тогда, и только тогда, когда $p \le 1$. Отрицательные значения p не имеют физического смысла в данной задаче. Таким образом, следует предположить, что $0 \le p \le 1^2$. Окончательным решением, удовлетворяющим обоим граничным условиям, является

$$\theta = \frac{2Q_0 e^{l\omega t}}{\binom{1-p}{2-p}} \left(\frac{2}{2-p} z^{1-\frac{p}{2}} \sqrt{\frac{i\omega}{K_1}} \right)^{\frac{1-p}{2-p}} K_{\frac{1-p}{2-p}} \left(\frac{2}{2-p} z^{1-\frac{p}{2}} \sqrt{\frac{i\omega}{K_1}} \right), \quad (6.21)$$

причем принимается, что $0 \ll p \ll 1$.

Физический смысл этого выражения легко понять, рассмотрев форму решения для больших значений z. Для больших |x| и $-\frac{3}{2}\pi \leqslant \arg x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ асимптотическим представлением функции Бесселя является

$$K_{v}(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 - \frac{4v^2 - 1}{8x} + \dots\right) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

если пренебречь при этом членами $\frac{1}{x}$ и членами более высоких степеней. Для достаточно больших значений z мнимая часть (6.21)

¹ Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИИЛ, М, 1949, стр. 203. ² Это ограничение для *р* было дано Е. Найтингом (Knighting, Quart. J Mech. Applied. Math. 5, 1952.

В решении, полученном Кёлером, имеется также ограничение значений *р* в пределах от 0 до 1.

будет равна

$$\vartheta \sim \operatorname{const} z^{-\frac{p}{4}} e^{-\frac{2}{2-p}z^{1-\frac{p}{2}}\sqrt{\frac{\omega}{2K_{1}}}} \sin\left(\omega t - \frac{2}{2-p}z^{1-\frac{p}{2}}\sqrt{\frac{\omega}{2K_{1}}}\right). (6.22)$$

Это выражение сводится к классическому решению при $K_H = \text{const}$, когда p = 0. На достаточно больших высотах решение проявляется в виде затухающей волны, фаза которой увеличивается пропорцио-

Из наблюдений следует, что для высот до 100 м нально zфаза суточной волны запаздывает как $z^{0,1}$ или $z^{0,2}$ (стр. 233). Для согласования этого результата с теоретическим решением при больших z необходимо в последнем положить p = 1.8 или 1.6. Такие значения лежат вне пределов справедливости данного решения, но они согласуются с результатами, получаемыми не строгим путем, при предположении, что К_и не зависит от высоты (стр. 241). Вместе с тем, если $p \leq 1$, из асимптотической формы решения следует, что увеличение фазы с высотой не может происходить медленнее, чем \sqrt{z} . Наблюдения же за временем наступления максимума температуры в нижних слоях показывают, что сдвиг фазы происходит значительно медленнее. Отсюда ясно, что решение, которое удовлетворяет обоим граничным условиям, не может быть согласовано с результатами наблюдений. Этот анализ, однако, не должен рассматриваться, как окончательный, поскольку не была доказана возможность пренебрежения начальным членом, а также не показано, что асимптотическая форма бесселевой функции справедлива в интервале высот, для которых применим эмпирический закон сдвига фаз. В задаче о переносе количества движения достаточно удовлетворительное согласование с наблюдениями может быть достигнуто, если положить, что коэффициент турбулентной вязкости растет, как z^p ($0 \le p \le 1$). Однако для теплообмена положение иное. В настоящее время нет бесспорных доказательств того, что подобное предположение для коэффициента турбулентной теплопроводности может дать значительно лучше согласующиеся с опытами результаты, чем это можно получить при предположении о постоянстве K_{H} .

Случай, когда p = 1, представляет значительный интерес, поскольку наблюдения за профилем ветра подтверждают линейное изменение коэффициента обмена с высотой. Гаурвиц [35] подробно рассмотрел эту задачу, используя закон

$$K_H(z) = K(0) + K_1 z,$$

где K(0) — температуропроводность при z = 0 и K_1 — постоянная. Гаурвицем получено решение в форме

$$\theta = a(y) \cos \left[\omega t - \delta(y)\right], \qquad (6.23)$$

$$a(y) = a_0 \left[\sqrt{\frac{(\text{kei } y)^2 + (\text{ker } y)^2}{(\text{kei } y_0)^2 + (\text{ker } y_0)^2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{tg } \delta = -\frac{\text{kei } y \text{ ker } y_0 + \text{ker } y \text{ kei } y_0}{\text{ker } y \text{ ker } y_0 + \text{kei } y \text{ kei } y_0}$$

и

$$y^2 = \frac{4}{K_1^2} K_H(z).$$

Функции ker y и kei y представляют собой действительную и мнимую части функции Бесселя второго рода и нулевого порядка K_0 . Эти функции затабулированы, так что возможно подробное исследование данного частного случая.

В числовом примере Гаурвиц полагал, что коэффициент перемешивания $A = K_H \rho$ увеличивается от 10 до 100 г см⁻¹.сек.⁻¹ от поверхности до 100 м, так что при принятых здесь обозначениях

$$K(0) = 8 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \text{ cek.}^{-1}$$
, $K_1 = 7,2 \text{ cm} \text{ cek.}^{-1}$

(эти значения постоянных должны рассматриваться только в отношении порядка величин). Из табл. 22 и рис. 24 видна степень согласованности рассчитанных Гаурвицем амплитуд с фактическими значениями для ясных дней в июне и декабре в Лифилде. Для удобства все результаты даны по отношению к амплитуде, равной 10 м, наблюденные значения при этом интерполировались и экстраполировались (от 87,7 до 100 м) по данным табл. 16.

Таблица 22

Изменение амплитуды суточной волны для ясных июньских дней (a), для ясных декабрьских дней (б) в Лифилде и вычисленные при $K_H = 8,3 \cdot 10^3 + 0,72 \ z \ cm^2 \ cek.^{-1}$ (в) (по Гаурвицу)

Высота, м	0	10	25	50	75	100
(a) июнь	1,20	1,00 1,00 1,00	0,90 0,74 0,845	0,84 0,54 0,701	0,79 0,44 0,614	0,77 0,40 0,552

При принятых значениях постоянных теоретическое решение лежит между двумя рядами величин, полученных на основании наблюдений. Отчасти это, без сомнения, обусловлено выбором постоянных, но тем не менее видно, что, согласно теоретическому решению, уменьшение амплитуд происходит значительно быстрее, чем это наблюдается в летнее время. Имеется, однако, некоторая согласованность кривых, полученных теоретически и представляющих зимние наблюдения на больших высотах. Это подтверждает возможность их совпадения, если выбрать соответствующим образом постоянные, определяющие K_H . Однако трудно сказать, можно ли это сделать для летних данных.

Приведенное выше сопоставление является скорее качественным, чем количественным. Тем не менее, оно убедительно показывает, что если сохранить концепцию турбулентного обмена, то необходимо допустить некоторые изменения в функциональной форме K_H при



Рис. 24. Изменение амплитуды суточных колебаний температуры с высотой. 1- ясная погода, декабрь, 2 — по теории Гаурвица, 3 — ясная

I — ясная погода, декаорь, 2 — по теории I аурвица, 3 — ясная погода, июнь.

переходе от зимы к лету. Это предположение подкрепляется и результатами сравнения теоретических и наблюденных данных, касающихся изменения фазы с высотой. В теоретическом решении фаза запаздывает приблизительно, как $z^{0.6}$ в рассматриваемом интервале высот (для больших z асимптотическим значением является \sqrt{z}), а это не может быть согласовано с наблюдениями в летние месяцы. Зимние наблюдения времени наступления максимума температуры являются слишком скудными и неопределенными для того, чтобы можно было выполнить определенное сравнение.

Относительно малое изменение амплитуды суточной волны выше 10 м в летнее время по сравнению со значениями для зимы указывает на то, что летом действует более эффективный, чем зимой, механизм переноса тепла вверх. Согласно теоретическим исследованиям, нет возможности найти простую формулу для увеличения значений K_H от зимы к лету. Понятно, что, допуская наличие достаточно большого потока тепла вверх в этих слоях, необходимо принять значительно более быстрое изменение K_H с высотой летом, чем зимой. Это подтверждает то, что летом появляется дополнительная форма переноса тепла. Отсюда следует обратить внимание на

роль свободной конвекции, в противоположность тепловому переносу, обусловленному динамической неустойчивостью, связанной со срезывающим усилием среднего движения.

Прежде чем подробно рассматривать теорию конвекции, необходимо указать на одну из многих неопределенностей, связанных с этой задачей. Данные, полученные в Лифилде, показывают, что имеется отчетливое различие в процессах переноса тепла вверх при ясной погоде в летнее и зимнее время. Однако весьма трудно сделать такое же заключение на основании анализа данных по Нортону. В слое от 2,5 до 1710 см (табл. 16, Портон), как это видно из эмпирического закона Беста [уравнение (6.3)], степень уменьшения амплитуды с высотой не сильно различается в декабре и июне. Неизвестно, с чем это связано, с местными особенностями, в частности топографическими, или же с тем, что сезонные изменения не столь отчетливы в нижних слоях. Данный вопрос может быть решен только с помощью систематических наблюдений в других местах.

Роль конвекции в теплообмене. Сеттоном [25] была выдвинута гипотеза, согласно которой наблюдаемые свойства температурного поля в слое между 10 и 100 м при ясной летней погоде обусловлены главным образом конвекцией. Основы его метода уже были изложены в гл. 4., где было показано, что свободная конвекция может быть приближенно описана посредством введения характерной длины l_{H} , определяемой как

$$l_{H} = -\frac{T'}{\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma} \; .$$

Она называется путем смешения для температуры, и коэффициент обмена может быть определен, как

$$K_{H} = \operatorname{const} l_{H}^{2} \sqrt{-\frac{g}{T} \left(\frac{\delta T}{\delta t} + \Gamma \right)}.$$
(6.24)

В последующем анализе принимается, что постоянная в формуле для K_H равна 1. Далее предполагается, что обусловленный конвекцией поток тепла q через уровень z может быть выражен обычным уравнением

$$q = -K_{H}c_{p} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \Gamma\right), \qquad (6.25)$$

так, что уравнение теплопроводности запишется, как

$$C_p \rho \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} ,$$

После интегрирования это дает

$$\frac{q}{q_0} = 1 - \frac{c_p \rho}{q_0} \int_0^z \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} dz,$$

где q_0 — поток тепла через z = 0.

В часы около полудня в ясные летние дни $\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$ почти совсем не зависит от высоты и времени в слое между 1,2 и 87,7 м и в среднем равно

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = 1,83 \cdot 10^{-4} \, ^{\circ} \mathrm{C} \, \mathrm{cek.}^{-1}$$

Тогда для этого периода и между этими высотами

$$\frac{q}{q_0} = 1 - \frac{c_p \rho}{q_0} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}\right) r \approx 1 - \frac{5.4 \cdot 10^{-8}}{q_0} z, \qquad (6.26)$$

где подставлены соответствующие значения c_p и ρ , а z измеряется в сантиметрах. Необходимо еще оценить значение q_0 . Здесь требуется лишь порядок величины. Мы не сделаем большой ошибки, если предположим, что q_0 находится в пределах между 0,1 и 0,3 г кал. см⁻² мин.⁻¹, в соответствии с порядком величин из табл. 12—14.

Отсюда приближенно

$$\frac{q}{q_0} = 1 - 1.8 \cdot 10^{-5} z, \tag{6.27}$$

так что поток тепла вверх в ясный летний день в Южной Англии фактически не зависит от высоты между 120 и 10⁴ см.

Если q не зависит от высоты, то из анализа, выполненного в гл. 4, следует, что величина $K_H(z)$, $\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma$, T' и вертикальная составляющая скорости $w' = \sqrt{\overline{w'^2}}$ могут быть выражены через l_H . Из данных Сеттона следует, что

$$l_{H} = \text{const} z^{1,3b}$$
 (6.28)

Отсюда, используя уравнения (4.65)—(4.68), получим

$$w' = \operatorname{const} z^{0,45} , \qquad (6.29)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma = \operatorname{const} z^{-1,8} , \qquad (6.30)$$

$$K_H(z) = \operatorname{const} z^{1,8} \cdot \tag{6.31}$$

Анализ данных наблюдения показывает, что эти выводы могут быть проверены независимо друг от друга. Для слоя 7 м < z < 45 м получено, что

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma = \operatorname{const} z^{-1,75} \,. \tag{6.32}$$

Это хорошо согласуется с уравнением (6.30). Из данного результата и уравнения (6.25), используя принятые значения для q_0 ,

получим, что $K_H(z)$ изменяется от 10^4 до $5 \cdot 10^5$ см² сек.⁻¹ в интервале высот 7—60 м. Эти оценки также согласуются по порядку величин с тем, что следует из уравнения (6.24), если использовать значения l_H , получаемые на основании наблюдений, совместно с измеренными величинами температурного градиента.

В выполненном выше анализе предполагалось, что теплообмен при теплой ясной погоде обусловлен главным образом движением отдельных "пузырей" нагретого воздуха, подымающегося вследствие конвекции. Математическая модель конвекции, основанная на этой идее, была развита Сеттоном в упомянутой статье. Имеется достаточно указаний на то, что при некоторых обстоятельствах (нагретая поверхность, слабый ветер) действительно наблюдается конвекция такого типа.

Джонсон и Хейвуд [1] нашли, что при значительной инсоляции, записи наблюдений показывают четко выраженные отдельные флюктуации температуры. Они встречаются примерно каждую минуту и возникают в слоях нагретого воздуха вблизи земли, который, в конечном счете, становится неустойчивым и движется вверх. Подобные флюктуации были обнаружены Свинбэнком, использовавшим более чувствительную аппаратуру.¹

Нет больших сомнений в том, что в теплую погоду изолированные массы нагретого воздуха прорываются от поверхности и попадают в верхние холодные слои воздуха. Суммарный эффект от таких пузырей над большой горизонтальной плошадью подобен эффекту. вызванному непрерывным рядом мгновенных плоских источников тепла, расположенных на уровне земли. При этом объемы теплого: воздуха, окруженные более холодной средой, подымаются вертикальновверх. Типичная конвекция вихрей может рассматриваться подобнораспространению клубов дыма, первоначально расположенных тонким слоем на большой горизонтальной площади и подымающихсяв атмосферу благодаря перегреву. При подъеме вихрей их размеры. увеличиваются в вертикальном направлении и их перегрев уменьшается аналогично тому, как становятся менее плотными клубы дыма при движении в холодном воздухе. При этом они охлаждаются благодаря адиабатическому расширению. Поток тепла, обусловленный конвекцией, такой же, как и при подъеме воздуха, нагретого от твердого тела. Средняя температура поля определяется средним повремени эффектом прохождения этих нагретых масс через различные уровни. Исходя из этих соображений, Сеттон пришел к выводу, чтораспределение температуры, наблюдаемое в Лифилде в ясные летние дни, может быть объяснено действием мгновенных плоских источников тепла. Мощность этих источников должна быть взята около-

¹ Свинбэнк описывает эти флюктуации следующим образом: "В ясные: дни имеются очень кратковременные флюктуации температуры, и это проявляется весьма отчетливо в записи. Частота несколько меньше минуты... Характерным для этих колебаний... является тонкая структура, которая не может быть достаточно точно зарегистрирована современными приборамик и записывающей аппаратурой" (цитируется по Сеттону [25]).

 $5 \cdot 10^{-2}$ г кал. см⁻², скорость возникновения — около четырех в минуту, а средняя скорость подъема на высоте 2 м должна составлять примерно 25 см/сек.⁻¹.

Введение конвекции при рассмотрении процессов теплообмена в атмосфере позволяет объяснить, в частности, почему коэффициент турбулентного обмена увеличивается с высотой более быстро летом, чем зимой. Когда температура поверхности земли лишь немного выше, чем температура воздуха, как это имеет место зимой, или когда скорость ветра велика, теплообмен должен быть обусловлен полностью турбулентностью, являющейся результатом действия трения. Это обычный случай вынужденной конвекции. Теплообмен в атмосфере следует рассматривать в общем случае, как взаимодействие вынужденной и свободной конвекции, соотношение между которыми изменяется соответственно общим условиям погоды.

Изложенные соображения являются основой теории, развитой К. Пристли и В. Свинбэнком [36], которая уже кратко рассматривалась в гл. 4. Поток тепла представляется посредством двух членов, один из которых определяется "механической турбулентностью" (или турбулентностью, которая ранее связывалась со сдвигом среднего движения) и другой "конвективной турбулентностью", либо свободной конвекцией (или же движением, связанным с "всплыванием"). Таким образом, поток может быть записан, как

$$q = c_{\rho} \rho \left[- \overline{w' l} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right) + \overline{w' T''} \right]$$

(см. стр. 168). При исследовании этой теории возникают трудности, связанные главным образом с тем обстоятельством, что отклонение температуры T" не является наблюдаемой величиной.¹ Пристли и Свинбэнк положили, что Т" должно быть равным по величине изменению температуры Т' на фиксированном уровне. Благодаря использованию модели вихрей со сферической формой, они нашли, что наблюдаемые пульсации на высоте 1,4 м не могут быть обусловлены только механической турбулентностью. С другой стороны, придавая разумные значения величинам, входящим в различные члены выражения для потока, они указывают, что даже при малой корреляции между w' и T" может иметь место конвективный поток, несколько больший, чем поток, связанный с механической турбулентностью. Этот вывод является существенным, поскольку механический поток тепла направлен от областей с высокой к областям с низкой потенциальной температурой. Конвективный же поток не зависит от знака $\frac{\partial \theta}{\partial z}$. Если в целом поток записать в форме

$$q = c_{\rho} \rho \overline{w'(l-l')} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right),$$

¹ См. стр. 169. *Т*" представляет собой разность между температурой вихря и средней температурой уровня, на которой этот вихрь возникает.

где l' — "конвективная длина", определяемая как

$$l' = \frac{T''}{\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma} ,$$

то отсюда следует, что коэффициент турбулентного обмена K'_H можно определить, как

$$K'_{\rm H} = \overline{w'(l-l')}.$$

В отличие от обычного коэффициента обмена, K'_H не обязательно должен быть положительным. Поэтому направление потока тепла в атмосфере не всегда определяется знаком градиента потенциальной температуры. Величина K'_H в большой степени определяется амплитудой температурных пульсаций на рассматриваемом уровне.

Из анализа этой задачи, выполненной Эртелем еще до работы Пристли и Свинбэнка, следует, что поток тепла в основном определяется градиентом температуры $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$, а не градиентом потенциальной температуры $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ или же разностью между градиентом температуры и его адиабатическим значением $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \Gamma$. Аргументы Эртеля оспаривались Прандтлем, и эти вопросы теории пока не ясны.

В общем, представляется, что при больших скоростях ветра и малых разностях температур теплообмен в атмосфере подчиняется обычным законам вынужденной конвекции и во многом подобен переносу количества движения. При таких условиях конвективным влиянием можно пренебречь без значительной погрешности. Обычные метеорологические задачи относятся к промежуточной зоне между вынужденной и свободной конвекцией и поэтому являются сложными для математического решения. По причинам, которые становятся понятными после ознакомления с характерными данными регистрации наблюдений, имеется стремление сосредоточить внимание на данных, полученных в ясную теплую погоду, когда градиенты достаточно велики для более точных измерений. Это неизбежно придает преувеличенное значение условиям, в которых преобладает влияние конвекции. Теплообмен при сильных ветрах является несколько менее сложной задачей, но здесь имеется значительно больше трудностей для сравнения теории с наблюдениями вследствие весьма однородной структуры температурного поля.

Дальнейшее исследование задачи о теплообмене в атмосфере требует изучения поля скоростей. Это рассматривается в гл. 7.

Радиационный перенос тепла. Выполненный выше анализ является неполным, поскольку не было учтено возможное влияние радиации на распределение температуры. Эта задача, являющаяся одной из наиболее сложных в метеорологии, рассмотрена подробно в "Физической и динамической метеорологии" Брента (гл. 6), и дальнейшее изложение в основном следует этой работе.

На температуру воздуха влияет радиация, которая поглощается или излучается атмосферой. Из анализа, приведенного в гл. 3, следует, что необходимо рассмотреть только длинноволновую радиацию ($\lambda > 4 \mu$), поскольку коротковолновая радиация в нижней атмосфере при ясном небе очень мало ослабляется. Единственной составляющей атмосферы, которая весьма существенна в этой задаче. является водяной пар. Трудности анализа возникают вследствие трех главных причин: 1) радиация поступает не строго параллельно. а образует пучки различной интенсивности. падающие под разными углами к земной поверхности; 2) распределение влажности с высотой необходимо знать очень точно; 3) коэффициент поглощения для водяного пара в далекой инфракрасной области является сложной функцией длины волны, которую нельзя выразить посредством некоторой простой математической формулы. Длинноволновая радиация. излучаемая поверхностью земли, частью поглощается атмосферой, а частью проникает через различные "окна" в спектре поглощения с очень малым ослаблением. Кроме того, водяной пар, содержащийся в атмосфере, сам излучает.

Брент полагал, что некоторые из этих трудностей можно преодолеть, принимая пучки лучей вертикальными и используя метод Симпсона по упрощению спектра поглощения водяного пара для длинных волн. Главной особенностью этого спектра является то, что столб воздуха, содержащий 0,3 мм осажденной из влаги воды, полностью поглощает всю радиацию с длинами волн между 5,5 и 7 μ , а также больших 14 μ , и пропускает ее в остальной части спектра (стр. 191). Для нижней атмосферы при нормальной влажноности это означает полное поглощение радиации с данными длинами волн слоями воздуха толщиной порядка 50 м. Разделив атмосферу на слои с толщиной такого порядка, Брент показал, что радиационный перенос тепла по вертикали является простым диффузионным процессом, описываемым уравнением

 $\frac{\partial T}{\partial t} = K_R \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} ,$

где K_R — коэффициент обмена, называемый коэффициентом радиационного обмена. Это уравнение означает в первом приближении, что радиационный перенос тепла в нижней атмосфере подобенмолекулярной теплопроводности в твердом теле. Брент получил, что

$$K_R = \frac{139T}{60\rho c_p e} \frac{\partial E}{\partial T},$$

где E — интенсивность радиации в непрозрачном участке спектра поглощения водяного пара, e — давление водяного пара в миллибарах, другие же символы имеют обычное значение. Данные Симпсона показывают, что $\frac{\partial E}{\partial t}$ очень мало изменяется с высотой в интересуемом диапазоне значений T. Отсюда Брент заключил, что K_R является практически постоянной в нижней атмосфере со значением около 10³ см² сек.⁻¹. Согласно этим результатам, коэффициент радиационной проводимости значительно больше, чем коэффициент молекулярной температуропроводности воздуха, и имеет тот же порядок величин, что и коэффициент турбулентного обмена на высоте нескольких метров от поверхности земли. Брент далее применил уравнение диффузии, показав с помощью данных наблюдений за температурой на Эйфелевой башне в Париже, что на высоте 300 м радиация влияет на суточные изменения температуры незначительно. При оценке справедливости этих результатов следует иметь в виду, что выполненный анализ непосредственно зависит от значений коэффициента поглощения, полученных Хеттнером и теперь замененных данными Рэндалла (стр. 190). Последние данные указывают на значительно большую толщину слоев воздуха, необходимую для полного поглощения. Метод Брента не дает никаких сведений относительно нижних слоев атмосферы, например, ниже 50 м. На основе концепции радиационного обмена вполне удовлетворительно доказывается, что на высоте нескольких сот метров радиация не может оказывать первостепенного влияния на суточный ход температуры. Наблюдаемое на этих высотах поле может быть описано только посредством перемешивания, т. е. с помощью динамической турбулентности или свободной конвекции.

Данный вопрос не будет подробнее разбираться, поскольку в настоящее время нет достаточно удовлетворительных результатов относительно радиационного переноса в нижней атмосфере и нет возможности убедительно установить, в какой степени наблюдаемое распределение температуры вблизи земли обусловлено непосредственным влиянием радиации. Малый прогресс в этом вопросе отчасти объясняется отсутствием надежной непрерывной регистрации данных о концентрации водяного пара в нижних 100 м над поверхностью земли, но главным образом он обусловлен математической сложностью всей задачи. В настоящее время радиационный обмен тепла от поверхности земли к вышележащим слоям воздуха и, наоборот, должен рассматриваться, как нерешенная задача метеорологии.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Johnson N. K. and Heywood G. S. P. Geophys. Mem. 77.
- 2. Johnson N. K. Geophys. Mem. 46.
- 3. Best A. C. Geophys. Mem. 65. 4. Flower W. D. Geophys. Mem. 71.

- 5. Wedmore F. B. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 67., 38, 1941. 6. Patten H. E. U. S. Dept. Agr. Bur. Soils Bull. 59, 1909. 7. Rider N. E. and Robinson G. D. London Meteorol. Office M. R. P. (не опубликовано).
- 8. Callendar H. L. and Mc Leod C. H. Proc. Roy. Soc. Canada (2), 3, 31, 1897.
- 9. Vujević P. Z. Meteorol., 29, 570, 1912.
 10. Homén Th. Der tägliche Warmeumsatz in Boden usw. Leipzig, 1897.
 11. Sinclair J. G. Monthly Weather Rev., 50, 142, 1922.
- 12. Field J. H. Mem. Indian Meteorol. Dept., 24, 38.

- 13. Eaton G. S. Monthly Weather Rev., 47, 861, 1919.
- 14. Geiger R. Das Klima der bodennahen Luftschicht, 3d ed, Brunswick, 1950.
- 15. Johnson N. K. and Davies E. Ll. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 53. 45. 1927.
- 16. Schreiber P. Jahrb K. Sächs Landes Wetterwarte, 29, 1910, 1912. 17. Wild H. Mem. Pètersb. S. VIII Physik. math. Klasse, 5, No. 8.
- 18. Luboslawsky G, Mitt. d, k. Forstinst. St. Petersburg, 19, 1909.
- 19. Bezold W. v. Sitzber, preuss, Akad, Wiss, Physik, math Klasse, 1139. 1892.
- 20. Kühl W. Gerlands Beitr. Geophys., 8, 519.
- 21. Keränen J. Einfuhrung in die Geophysik, Vol. II, Berlin, 1929.
- 22. Pasquill F. Proc. Roy. Soc. (London) A 198, 116, 1949.
- 23. Lettau H. Geophys. Research Papers 1, 1949.
- 24. Sheppard P. A. Meteorological Factors in Radio Wave Propagation The Physical Society, London, 1947.
- 25. Sutton O. G. Quart, J. Roy. Meteorol. Soc., 74, 13, 1948.
- 26. Deacon E. L. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 75, 89, 1949.
- 27. Schmidt W. Der Massenaustausch in freier Luft. Hamburg, 1952.
- 28. Wüst G. Meteorol. Z. 54, 4, 1937.
- 29. Johnson N. K. Quart, J. Roy. Meteorol. Soc., 53, 59, 1927.
- 30. Montgomery R. B. Papers Phys. Oceanog. Meteorol., Mass. Inst. Technol. and Woods Hole Oceanog. Inst. 7, N 4, 1940.
- 31. Taylor G. T. Phil. Trans. Roy. Soc. A 215, 1 1915.
- 32. Taylor G. T. Proc. Roy. Soc. London, A 94, 137, 1918. 33. Cowling T. G. and White A. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 75, 71, 1949.
- 34. Köhler H. Kgl. Svenska Vetenskansakad. Handl., 13, No 1; Beitr. Phys fr. Atmos., 19, 91, 1932.
- 35. Haurwitz B. Trans. Roy. Soc. Canada, 3d ser., Ill, 30, 1, 1936.
- 36. Priestley C. H. B. and Swinbank W. C. Proc. Roy. Soc. London. A. 189, 543, 1947.
- 37. Ertel H. Meteorol. z, 59, 250, 1942; 60, 246, 1943; 60, 289, 1943; 61, 8 1944; 61, 207, 1944.
- 38. Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы.. Гидрометеоиздат, Л., 1956.
- 39. Будыко М. И. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4, 1946.
- 40. Гутман Л. Н. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1953.
- 41. Добрышман Е. М., Белоусов С. Л. ДАН СССР, т. 93, № 6. 1953. 42. Дородницын А. А. ДАН СССР, т. 50, № 5, 1941.
- 43. Дюбюк А. Ф. и Монин А. М. Труды ЦИП, вып. 23 (50), 1950.
- 44. Лайхтман Д. Л., Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы, ГИТТЛ. 1949.
- 45. Лайхтман Д. Л. Труды ГГО, вып. 22 (84), 1950.
- 46. Лайхтман Д. Л. и Юдин М. И. ДАН СССР, т. 93, № 2, 1953. 47. Лютерштейн И. Г. и Чудновский А. Ф. Труды НИУ ГУГМС, сер. І, вып. 28, 1946.
- 48. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности. Гидрометеоиздат, 1955.
- 49. Сапожникова С. А. Микроклимат и местный климат. Гидрометеоиздат, 1956.
- 50. Швец М. Е. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 2, 1943.
- 51. Шехтер Ф. Н. и Цейтин Г. Х. Труды ГГО, вып. 53 (105), 1956.

52. Юдин М. И. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4, 1948.

ГЛАВА 7

ПРОБЛЕМЫ СТРУКТУРЫ ВЕТРА ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ

Жизнь на Земле, и в особенности жизнь людей, в значительной степени зависит от наличия активного обмена воздушных масс вблизи поверхности. Трудно представить себе Землю, окруженную неподвижным воздухом или воздухом, двигающимся только ламинарно. Однако с уверенностью можно сказать, что если бы такое состояние имело место, условия жизни очень сильно отличались бы от современных. Основное содержание микрометеорологии определяется не только тем, что атмосфера находится в постоянном движении, но и тем, что это движение обычно имеет турбулентный характер и сопровождается непрерывной диффузией свойств из одного района в другой. Проблемы структуры ветра в самых нижних слоях атмосферы являются, таким образом, фундаментальными, и при исследовании этой стороны вопроса потрачено много энергии и проявлена известная изобретательность.

7. 1. Общий характер поля скорости у поверхности

Движение воздуха в средней тропосфере обусловливается градиентами давления и влиянием вращения Земли. На достаточно больших высотах (выше 500 м над уровнем местности) установившееся движение близко к геострофическому ветру (см. гл. 2). В нижних слоях движение более сложное вследствие возмущающего влияния поверхности. В этих слоях ветер зависит от силы трения, величина которой меняется с изменением характера поверхности и распределения плотности по вертикали; влияние этих факторов трудно выразить точным математическим законом. Дополнительные трудности возникают за счет наличия местных воздушных течений, не связанных с основным полем давления, особенно ночью в холмистой или горной местности.

Наблюдается хорошо выраженное суточное изменение ветра. В континентальных областях ветер в самых нижних слоях достигает максимальной скорости днем, со слабовыраженным пиком около полудня. На высотах порядка 100-300 м наблюдается обратный ход с максимумом ночью, а минимумом днем. На промежуточных высотах изменение более сложное. Так, наблюдения Гельмана [1] на ровном лугу в Науене (анемометры были установлены на высотах 2, 16, 32 м над землей) указывают, что на верхних уровнях могут встречаться два максимума — один около полудня, а другой около полуночи и два минимума — ранним утром и после полудня. Брент [2] считает, что при слабых ветрах обратный суточный ход наблюдается ниже 40 м, а при сильных ветрах обращение происходит выше 40 м. Общий характер этих результатов подтверждается анализом Хейвуда для ветров в Лифилде, Южная Англия.

Для представления о суточном изменении ветра над большими водными пространствами имеется сравнительно мало данных, но эти данные говорят о том, что амплитуда над водой намного меньше, чем над сушей. На побережье нормальный суточный ход нарущается бризами.

В направлении ветра также наблюдается суточная изменчивость. Однако регулярность такого изменения всегда нарушается локальными явлениями, особенно ночью.

При теоретическом изучении атмосферной турбулентности очень важны точные определения профиля ветра вблизи земли, и метеорологи должны уделять этому вопросу большое внимание. Более ранние исследователи выражали профиль ветра формулой $\overline{u} = \overline{u}_1 z^p$, при p > 0, или $\overline{u} = a \log z + b$. При сравнительно грубых наблюдениях этого периода выбор выражения, по-видимому, определялся главным образом удобством. Вскоре, однако, выяснилось, что для точного определения профиля не только необходимы специальные чувствительные анемометры, которые могут измерять как слабые, так и сильные скорости ветра, но следует также уделять внимание влиянию градиента плотности и шероховатости поверхности. В 1932 г. Сеттон [4] показал, что индекс p в степенном законе $\overline{u} = \overline{u}_1 z^p$ имеет суточный ход при ясной погоде и изменяется от $\frac{1}{6}$ при боль-

ших инверсиях до $\frac{1}{14}$ при больших сверхадиабатических градиентах.)

Подобные же изменения были найдены другими исследователями. Скрейс [5], рассматривая наблюдения при очень малых температурных градиентах, показал, что профиль ветра на высотах от 3 до 13 м над уровнем поверхности можно достаточно точно выразить законом $\overline{u} = \overline{u_1} z^{0,13}$. Это выражение представляет особый интерес для теории атмосферной турбулентности, так как, по существу, является тем же самым профилем, что и хорошо известный "закон корня седьмой степени" изменения скорости ветра с высотой в турбулентном пограничном слое над плоской поверхностью. Другие исследователи, в частности Бест и Пешке, подтвердили справедливость логарифмического профиля.

Эги результаты выражают тот факт, что турбулентный перенос количества движения от одного уровня к другому или усиливается,
или ослабляется под влиянием градиента плотности. В условиях сверхадиабатического градиента турбулентность максимальна, и при этом имеется значительный поток количества движения сверху вниз для компенсации затрат кинетической энергии на преодоление трения на поверхности. В таких условиях скорость сильно выравнена по высоте, за исключением непосредственной близости к поверхности. При инверсии вертикальный обмен количеством движения уменьшается, скорость вблизи земли резко падает, в результате чего наблюдается более резко выраженная кривизна профиля скорости. В этом состоит объяснение низких величин индекса *p* в середине дня и высоких ночью.

Функциональная форма профиля скорости ветра вблизи земли значительно прояснилась за счет исследований Торнтвейта, Кейзера [6] и более современных исследований Дикона [7]. Торнтвейт и Кейзер провели точные наблюдения профиля от 1 до 28 футов (0,3—8,5 м) в течение июньского дня в Нью-Филадельфии, Огайо. Они нашли, что при условиях небольшого температурного градиента зависимость \overline{u} от log z в рассматриваемом слое линейная, а при других условиях значительно отклоняется от прямой линии. При сверхадиабатических градиентах график связи $\overline{u}_1 \log z$ был выпуклым по отношению к оси \overline{u} , а в периоды инверсий — вогнутым к той же самой оси (см. рис. 25). Таким образом, логарифмический закон изменения ветра с высотой справедлив только тогда, когда поток воздуха однородный или близок к нему. Дикон на основании анализа тщательно измеренных профилей над равниной на высотах от 0,5 до 4 м (и в некоторых случаях до 13 м) сформулировал общий закон

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = az^{-\beta}$$

(*a* не зависит от *z*), при $\beta = 1$ для небольших или адиабатических температурных градиентов, $\beta > 1$ для сверхадиабатических градиентов и $\beta < 1$ — для инверсий. Величина $\beta = 1$ приводит к логарифмическому профилю, а при других условиях выражение для профиля включает высоту в некоторой степени.

Измерения величины и повторяемости вихревых скоростей u'(вдоль ветра), v' (поперек ветра) и w' (вертикальной) были проделаны несколькими экспериментаторами, из которых в первую очередь следует отметить Скрейса [5] и Веста [8]. При таких исследованиях необходимо с большой тщательностью выбирать период осреднения из-за широкого предела частот, найденных в колебаниях естественного ветра. Данные показывают, что для "промежуточной шкалы турбулентности" (средние величины за периоды порядка нескольких минут) при небольшом температурном градиенте все три составляющие приблизительно пропорциональны средней скорости ветра, но горизонтальная компонента v' примерно на 50% больше, чем вертикальная компонента w' на высоте 2 м над уровнем местности. Асимметрия уменьшается с высотой, и на уровнях, превы-

17 О. Г. Сеттон

шающих 25 м над поверхностью, все три компоненты приблизительно равны. Таким образом, равенство вихревой энергии наблюдается в верхних областях приземного слоя, а не вблизи земли. Этот факт имеет большое значение в проблемах диффузии. Частота распределения вихревых скоростей следует нормальному закону Максвелла и, следовательно, имеет близкое сходство с распределением молекулярных скоростей в газах. При больших сверхадиабатических градиентах вихревые скорости значительно больше (для той же самой средней скорости ветра), чем скорости, наблюдаемые при адиабатических или близких к ним условиях; обратная картина имеет местопри больших инверсиях, когда флюктуации стремятся к нулю.

Ниже эти особенности будут рассмотрены более подробно.

7. 2. Профиль ветра

При анализе структуры ветра в самых нижних слоях атмосферы полезно рассматривать эти слои как часть развитого турбулентного пограничного слоя, в котором как сила Кориолиса, так и изменения градиента давления в направлении среднего ветра незначительны. Это означает, что для установившегося движения вихревое касательное напряжение не меняется с высотой. Поэтому анализ ограничивается движением в слое мощностью, не превышающей нескольких десятков метров [см. уравнения (3.34) и (3.35)]. Изменения направления ветра с высотой в таком слое также малы, в связи с этим системой фиксированных осей можно считать такую, в которой xизмеряется в направлении среднего ветра, y — поперек ветра и z вертикально. В такой системе

$$\overline{u} = \overline{u}(z), \quad \overline{v} = \overline{w} = 0.$$

Равновесное состояние. Если температурный градиент небольшой по всему слою, т. е. воздух фактически является однородным по плотности, движение должно быть таким, каким оно найдено в лабораторных экспериментах по исследованию потока над плоской поверхностью.

Из анализа пп. 3.9 и 3.10 следует, что профили скорости можно подчинить одному из следующих уравнений.

Для потока над гладкой поверхностью

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{u_* z}{v}\right) + \text{const.}$$
(7.1)

Для потока над шероховатой поверхностью

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{z_0},$$
 (7.2)

или

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right),$$
(7.3)

где $u_* = V(\frac{\tau_0}{\rho})$ является динамической скоростью, а z_0 — параметром шероховатости. Удобно ввести коэффициент трения поверхности C_D , определяемый как

$$C_D = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho \bar{u^2}} = 2\left(\frac{u_*}{\bar{u}}\right)^2.$$
(7.4)

Предположение о том, что профиль естественного ветра должен соответствовать вышеприведенным уравнениям в условиях равновесного состояния $\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = 0$, по-видимому, принадлежит Прандтлю (1932). После этих данных точные наблюдения Беста [8], Свердрупа [9], Пешке [10], Тортнтвейта и Кейзера [6], Дикона [7] и др. установили несомненность этого факта, а также дали возможность определить основные параметры u_* и z_0 для разнообразных естественных поверхностей. Обширный материал по величинам z_0 был собран Диконом [7]. В табл. 23 Сеттоном приведены величины z_0 и u_* и макровязкости $N = u_* z_0$ (см. гл. 3) по данным, опубликованным П. А. Шеппардом [11]. Эти величины следует принимать только для общего руководства.

Таблица 23

Тип поверхности	<i>z</i> 0 см	u_* см сек. ⁻¹	<i>N</i> см² сек. ^{−1}
Очень гладкая (грязевая поверх- ность, лед)	0,001 0,1 0,7 2,3 5 9	16 26 36 45 55 63	0,016 2,6 26 104 275 560

Характерные величины z_0 и u_* для естественных поверхностей (равновесное состояние; величины u_* соответствуют u = 500 см сек.⁻¹ на 200 см)

В большинстве случаев z_0 , по существу, не зависит от u, но Дикон показал, что над высокой травой z_0 уменьшается с возрастанием средней скорости ветра; этот эффект приписывается сгибанию стеблей растений ветром, что производит или сглаживание, или увеличение шероховатости поверхности.

Леттау [12] показал, что наблюдения Пешке над рядом разнообразных поверхностей (снег, луг, корнеплодные посевы) указывают на постоянство $\frac{u_*}{\overline{u}}$ для данной поверхности при \overline{u} (измеренных на 500 см над землей), изменяющихся примерно от 20 до 500 см сек.⁻¹.

Величины u_* меняются в пределах от 3 до $12^{9}/_{0}$ от средней скорости ветра, причем меньшие величины связаны с внешне гладкими поверхностями. Величины N, однако, показывают, что только в исключительном случае естественная поверхность может быть гладкой в аэродинамическом смысле. Критерий Никурадзе для потока над вполне шероховатой поверхностью состоит в том, что N должно превышать 0,4 см² сек.⁻¹, а для потока над гладкой поверхностью необходимо, чтобы N было меньше 0,02 см² сек.⁻¹, принимая $\gamma =$ = 15 см² сек.⁻¹ во всех случаях (см. гл. 3). Таким образом, для среднего ветра в 500 см сек.⁻¹ на высоте 200 см можно назвать гладкой только поверхность, залитую водой, или обширную ледяную поверхность. Скошенный и хорошо выровненный луг может быть аэродинамически гладким для ветров (на высоте 200 см) ниже 100 см сек.⁻¹, а шероховатым — при более умеренных скоростях.

Заключение о том, что почти все естественные поверхности аэродинамически шероховаты, имеет очень большое значение в проблемах диффузии. Для метеорологических целей, по-видимому, наиболее подходящим является профиль, предложенный Россби [уравнение (7.3)]. Теоретически он справедлив до z = 0, но следует отметить, что при наличии плотной и высокой растительности это не реально. Ясно, что на пшеничном поле, например, движение воздуха среди стеблей должно значительно отличаться от движения над вершинами растений. Уравнения профиля выражают интегральный эффект флюктуаций на перенос количества движения и поэтому могут применяться только в тех областях, где такой перенос имеет место. Ниже будет показано, что при густой растительности можно использовать измененную форму уравнения профиля для потока над шероховатой поверхностью.

Устойчивая и неустойчивая атмосфера. На рис. 25 приведены некоторые наблюдения Торнтвейта и Кейзера [6], которые ясно показывают, что логарифмический профиль является переходным типом профиля по сравнению с профилем, наблюдающимся при заметном градиенте плотности. Характер профиля исследовался также Диконом [7], который ввел в качестве основного параметра число Ричардсона. В общем,

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = f(\text{Re, Ri, } z_0).$$

Если движение происходит над поверхностью с развитой шероховатостью, то влияние вязкости, а отсюда и числа Рейнольдса, незначительно, а если наблюдения проводятся всегда над одной и той же поверхностью, шероховатость можно принять постоянной. При этих предположениях $\frac{\overline{u}}{|u_*|}$ должно зависеть только от Ri, которое, таким образом, выполняет ту же роль, что и число Рейнольдса при движении однородного воздушного потока. Если температурный градиент сверхадиабатический, то Ri < 0, а при инверсии потеншиальной температуры Ri > 0; случай Ri = 0 подразумевает, что $\frac{\partial T}{\partial z} = \Gamma$.





На рис. 26, взятом из работы Дикона, дан ход отношения средней скорости ветра на z = 4,5 м к скорости на z = 0,5 м в зависимости от средней величины Ri в том же слое (по наблюдениям над короткой травой на открытой равнине). По этой связи градиент ветра с хорошим приближением можно считать функцией только числа Ричардсона при постоянной шероховатости поверхности. Из рис. 27 можно видеть дальнейшее развитие этой идеи. На этих графиках профили скорости разделены, согласно знаку и величине Ri. Как видно из рисунков, профили ветра (в координатах $u_1 \log z$) являются выпуклыми по отношению к оси x для Ri < 0 и вогнутыми к той же оси при Ri > 0, т. е. подтверждают тот тип изменения скорости ветра с высотой, какой был найден Торнтвейтом и Кейзером.

Дикон показал, что для таких групп связь

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = az^{-\beta} \tag{7.5}$$

(a не зависит от z) "совсем близко" удовлетворяет данным при

$$\beta > 1$$
 для $Ri < 0$,
 $\beta = 1$ для $Ri = 0$,
 $\beta < 1$ для $Ri > 0$.



Рис. 26. Связь отношения скорости ветра на высотах 4 и 0,5 м с числом Ричардсона (по Дикону).

Изменение β с Ri показано на рис. 28, который построен более чем на 600 наблюдениях продолжительностью 15 минут в пределе величин β от 0,75 до 1,2. Некоторые признаки говорят о том, что, когда Ri > 0,1, соотношение становится очень неопределенным.

Интегрируя уравнение (7.5) при условии $\overline{u} = 0$ при $z = z_0$, Дикон находит¹

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k(1-\beta)} \left[\left(\frac{z}{z_0} \right)^{1-\beta} - 1 \right],$$
 (7.6)

¹ Это уравнение найдено значительно раньше исследований Дикона и опубликовано в [55]. — *Ред*.











Рис. 27. Изменение профилей скорости при изменении устой-чивости (по Дикону).

при этом постоянная a в уравнении (7.5) взята равной $\frac{u_*}{kz_0^1-\beta}$, чтобы иметь возможность выполнить переход к обычному логарифмическому профилю [уравнение (7.2)].



Рис. 28. Зависимость в от стратификации (по Дикону).

1 — поверхность — короткая трава, $z_0 = 0.27$ см; 2 — по наблюдениям Свердрупа над снегом, $z_0 = 0.25$ см.

Если раскрыть правую часть уравнения (7.6), то выражение профиля станет

$$\frac{\overline{u}}{u_{*}} = \frac{1}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_{0}} \right) + \frac{1-\beta}{2!} \ln^{2} \left(\frac{z}{z_{0}} \right) + \dots \right],$$

что дает уравнение (7.2), так как $\beta \rightarrow 1$.

Следует отметить, что величина шероховатости z_0 предполагается постоянной для данной местности и всех условий устойчивости. При решении уравнений z_0 является просто постоянной интегрирования в предположении, что скорость приближается к нулю на плоскости $z = z_0$, высота которой над землей определяется только средней высотой неровностей, однородно распределенных по поверхности. Связь между z_0 и размером неровностей была установлена только для движения однородного воздушного потока (см. гл. 3), но пока не ясно, можно ли с равной вероятностью считать справедливым соотношение для потока при различных градиентах плотности. Сеттоном было показано, а позже подтверждено Шеппардом [11], что, если предположить справедливость логарифмического профиля для всех градиентов, неизбежно следует изменение z_0 с температурным градиентом. На основании более поздних исследований было установлено, что логарифмический профиль не выполняется в условиях. заметных градиентов плотности; это дает возможность рассматривать z_0 независимым от термической стратификации, что значительнопроще, а это и делает Дикон [7]. Этот вопрос нуждается в детальном исследовании.

При данных обстоятельствах имеется некоторое доказательствов защиту профилей Дикона при условиях, отличающихся от адиабатических, но эта истина никоим образом не является полностьюустановленной. Дикон полагает, что β зависит от высоты при неустойчивом состоянии; это можно объяснить вторжением значительных возмущений от шероховатой поверхности, которая окружала площадку в 200 квадратных ярдов с низкой скошенной травой и установленными на ней анемометрами. Этот вопрос также нуждается в дополнительной проверке.

Профили, о которых шла речь выше, измерялись в относительно тонком слое вблизи земли. Более высокие слои, от 5 до 400 футов (1,5—122 м) и от 4 до 1000 футов (1,2—305 м), исследовались-Фростом [13] при использовании подвешенных на привязных аэростатах приборов на аэродроме в Кардингтоне, Южная Англия. Егорезультаты указывают на то, что в этих слоях профиль можнопредставить степенными законами для любых условий температурного градиента.

Используя соотношение

$$\overline{u} = \overline{u}_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^p,$$

где u — средняя скорость на фиксированной высоте z_1 , значения p были найдены (табл. 24) для высот от 400 до 5 футов для нескольких групп температурных разностей.

Таблица 24

(7.7)

Величины $p\left[$ из уравнения $\overline{u} = \overline{u}_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^p \right]$ в зависимости от разностих

температуры $\Delta T = T_{400'} - T_{5'}$ в слое 5—400 футов (по Фросту) (Разность температуры во всем слое, соответствующая адиабатическому градиенту, равна $\Delta T = -2,15^{\circ}$ F)

Δ <i>Τ</i> °F	от —4 от —2,5	то —2	от —1	от ()	от 2	от 4	от 6	от 8	от 10
	до —2 до —1,5	до 0	до 1	до 2	до 4	до 6	до 8	до 10	до 12:
p	0,145 0,17	.0,25	0,29	0,32	0,44	0,59	0,63	0,62	0,77

265~

Из лальнейшего исследования профилей в слое от 4 до 1000 футов Фрост заключает, что в условиях адиабатических градиентов значечение *p* составляет 0,149, что близко к $\frac{1}{7}$ (= 0,142) в обычно принимаемом степенном законе для профиля в турбулентном пограничном слое плоской пластины, помещенной в аэродинамической трубе. Можно не сомневаться в том, что в условиях равновесной стратификации форма профиля по степенному закону не совпадает с логарифмической формой, особенно вблизи поверхности: но результат Фроста находится в хорошем соответствии с выводом Скрейса [5]. «который нашел, что p = 0,13 при небольшом температурном градиенте в слое от 3 до 13 м, и формула корня седьмой степени. удовлетворительное вероятно. имеет приближение к профилю в довольно большом слое, когда равновесная стратификация оценивается величиной температурной разности по всему слою.

В большинстве попыток приспособить степенные законы к наблюденным профилям применялось уравнение (7.7) и неизменно обнаруживалось, что 0 . Наибольший (из до сих пор известных)предел наблюденных величин <math>p дал Баркат Али [14], а именно, 0,02 , но в величине верхнего предела можно усомнитьсявследствие недостаточной надежности регистрации нижнего анемометра в некоторых случаях при сильной устойчивости. Наибольшаяиз опубликованных надежных величин <math>p составляет p = 0,85 по данным, полученным Бестом [8] в небольшом слое от 10 до 110 см в условиях исключительной устойчивости. Степенной закон, предложенный Диконом [уравнение (7.6)], значительно отличается от закона, который дается уравнением (7.7), так как он состоит из члена, не зависящего от высоты, плюс член, включающий высоту в степени, а величины p, приведенные выше, имеют сложную связь с показателем $(1 - \beta)$.

Случай p = 0 является предельным для атмосферы, в которой турбулентность настолько велика, что обеспечивает постоянную скорость по всему рассматриваемому слою. Наблюдения Барката Али и данные Джиблета [15] для Кардингтона, Южная Англия, показывают, что такое состояние наблюдается при случаях очень больших сверхадиабатических градиентов.¹ Верхний предел p = 1 соответствует профилю, полученному при ламинарном движении над плоской поверхностью в отсутствии градиента давления (см. гл. 2). Близкие к линейным профили, наблюдавшиеся Баркатом Али и Бестом, означают приближение к ламинарному движению в самых нижних слоях в условиях большой устойчивости.

Очень шероховатые поверхности. Все вышесказанное относится к поверхностям, оголенным или покрытым очень короткой растительностью, не превышающей нескольких сантиметров. Большая

¹ Джиблет констатировал, что при очень больших сверхадиабатических традиентах отношение скорости на 150 футах к скорости на 50 футах составляло 1, 01, но в данном случае имеется некоторое сомнение относительно установки анемометров (см. Фрост [13]).

часть земли, однако, покрыта более мощной растительностью (высокая трава, посевы хлебов или деревья), и в этих условиях профиль скорости становится более сложным, а в некоторых случаях едва ли возможно его математическое представление.

Некоторое приближение можно получить за счет эмпирической модификации уравнения профиля, если элементы шероховатости достаточно неизменны по высоте и плотности. Если логарифмический профиль написать в виде

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right), \qquad (7.8)$$

где d — смещение нулевой плоскости, то указанные выше положения можно распространить на слои воздуха над поверхностью, покрытой высокой растительностью. Величина d принимается за условный уровень, над которым происходит нормальный турбулентный обмен; поэтому уравнение (7.8) справедливо только для $z \ge d + z_0$. Если d и z_0 — независимые произвольные постоянные, то выражение (7.8) нельзя вывести из основного дифференциального уравнения (3.36), так как уравнение (3.36) — первого порядка и решение его должно включать не более чем одну произвольную постоянную.

Профиль (7.8) использовался многими исследователями. Пешке, который рассматривал как гладкие, так и шероховатые поверхности, принимал d равным средней высоте элементов шероховатости. Дикон считает, что при небольших температурных градиентах логарифмический закон в пределах высот от 1 до 13 м с очень большой точностью дает распределение скорости ветра над поверхностями, покрытыми травой различной длины, при условии, что d и z_0 выбираются независимо (чтобы дать наилучшую подгонку). Калдер [16] при изучении диффузии дыма над равниной (см. гл. 8) дает следующие величины для постоянных в уравнении (7.8).

Короткая трава (1-3 см):

$$u_* = 33$$
 см сек.⁻¹,
 $z_0 = 0.5$ см, $d = 0.$

Высокая трава (60-70 см):

 $u_* = 50$ см сек.⁻¹, $z_0 = 3$ см, d = 30 см

при $\overline{u} = 500$ см сек.⁻¹ для z = 200 см над землей. Задача о выражении для профиля над высокой травой при неадиабатических условиях не изучена в достаточной степени.

Профили над водой. Распределение скорости ветра над большими водными пространствами существенно отличается от изменения ветра с высотой над сушей главным образом из-за образования волн. Влияние устойчивости при этом мало выражено вследствие меньших колебаний температурных градиентов, но встает вопрос о влиянии скорости ветра на "шероховатость" поверхности. В дополнение к этому, чисто экспериментальные трудности проведения надежных измерений структуры ветра над морем дают сомнительную оценку некоторым опубликованным работам.

Россби и Монтгомери [17] рассматривали условия на границе вода - воздух и пришли к заключению, что взаимодействие происходит как через тангенциальное, так и через нормальное напряжение, причем последнее важно только при более сильных ветрах. Пля слабых ветров движение в самых низких слоях соответствует уравнению (7.1). Для умеренных и сильных ветров поверхность становится аэродинамически шероховатой, и Россби и Монтгомери считают, что при этих условиях вблизи вершины волны имеется разрыв в характере напряжения, причем ниже этого уровня профиль соответствует сглаженному потоку. Для ветра менее 6-7 м/сек. морская поверхность рассматривается как аэродинамически гладкая. Для более сильного ветра поверхность считается шероховатой, а Zo обычно принимают равной 0.6 см. Работа Мунка [18] подтверждает выводы Россби и Монтгомери в отношении величины критической скорости ветра. при которой море становится аэролинамически шероховатым. Модель [19], анализируя наблюдения Браха над Балтикой и внутренним озером, пришел к выводу, что наилучшим выражением профиля ветра над морем является уравнение (7.8) с d = 4 см и $z_0 = 0,03$ см. Величина z_0 значительно меньше, чем полученная Россби и Монтгомери, но два выражения для профиля, строго говоря, несравнимы вследствие смещения нулевой поверхности.

Из вышеприведенного видно, что собранный до сих пор разными авторами экспериментальный материал не вполне согласуется, а удовлетворительная оценка движения воздуха над океаном еще не найдена. Общая картина, однако, несущественно отличается от структуры ветра над сушей, если принять во внимание нарушающее влияние волн. Вопрос структуры ветра над водой (отчасти океанографический и отчасти метеорологический) включает проблемы, которые пока еще недостаточно разрешены в каждой из указанных наук.

7. 3. Приближение к геострофическому ветру

В предшествующем разделе рассматривались условия для небольшого слоя вблизи поверхности, не превышающего 100 м. В данном разделе рассматривается задача об изменении ветра в более мощном слое, распространяющемся от поверхности до 500—1000 м (в зависимости от широты); при этом за верхний уровень принимается высота, на которой нет систематических отклонений от движения геострофического ветра. Этот более мощный слой называется *планетарным пограничным слоем* Леттау [12], в отличие от приземного пограничного слоя, рассмотренного ранее.

Геострофическое равновесие наступает при отсутствии трения. Поэтому верхний предел планетарного пограничного слоя можно рассматривать как уровень, на котором движение воздуха подчиняется уравнению Эйлера для невязкой жидкости (см. гл. 2). Математически это означает, что вихревые касательные напряжения равны нулю для $z \ge H$, где H— высота планетарного пограничного слоя. Для z < H распределение скорости определяют следующие факторы: 1) градиент давления; 2) сила Кориолиса, обусловленная вращением земли; 3) трение на поверхности; 4) гравитационные силы. В дальнейшем градиент давления принимается не зависящим от высоты по величине и направлению для всего слоя. Среднее движение предполагается двухмерным с горизонтальными компонентами u, \overline{v} ; поэтому сила Кориолиса имеет компоненты $\rho \lambda \overline{v}, -\rho \lambda \overline{u}$ в направлениях x и y соответственно, где

 $\lambda = 2\omega \sin \varphi \approx 1.458 \cdot 10^{-4} \sin \varphi \text{ cek.}^{-1}$,

при этом ω есть угловая скорость вращения земли, а φ — широта места наблюдения. Кроме того, изменение плотности с высотой будет приниматься незначительным для $0 \ll z \ll H$.

Общий анализ задачи. Если поле давления устойчивое или медленно меняется, то, как показывают наблюдения, среднее движение воздуха над некоторым уровнем z = H соответствует геострофическому ветру и, следовательно, происходит параллельно изобарам. На более низких уровнях ветер не только ослабляется по скорости за счет трения о поверхность, но направлен под углом к изобарам. Общее объяснение этим особенностям дается спиралью Экмана (см. гл. 3), но для объяснений деталей распределения скорости при $0 \le z \le H$ необходимо более тщательное исследование. Одним из дополнительных факторов является учет изменения турбулентности с высотой, и уже показано, что наилучшее согласование с наблюдениями можно получить, если принять вихревую вязкость, зависящей от высоты (см. гл. 3).

Математическая постановка задачи требует особого внимания, Планетарный пограничный слой можно считать состоящим из двух слоев: приземного пограничного слоя и лежащей над ним зоны перехода к движению без трения в свободной атмосфере. В нижнем слое лвижение в значительной степени зависит от состояния поверхности. а в верхнем слое шероховатость поверхности должна играть незначительную роль. Влияние температурного градиента, устойчивого или неустойчивого, трудно выделить, и, по крайней мере, для начала следует предполагать его влияние на движение для всех уровней. В приземном слое касательное напряжение фактически не зависит от высоты, и существующие в этой области теории турбулентности предполагают, что вихревая вязкость безгранично увеличивается с высотой. Турбулентный перенос количества движения на уровне геострофического ветра незначительный, поэтому касательное напряжение в переходной зоне должно с заметной скоростью уменьшаться до нуля. Математически это не противоречит предположению о том, что вихревая вязкость повсюду возрастает с высотой, где градиент скорости быстро уменьшается, так что произведение $\frac{K_M dV}{dz}(V-$ скорость в области $0 \le z \le H$) стремится к нулю для $z \ge H$; но с физической точки зрения можно выдвинуть возражение о нереальности предположения о больших величинах $K_M(z)$ на уровне, где турбулентность пренебрежимо мала. Этого возражения можно избежать, если предположить, что вихревая вязкость нормально возрастает с высотой во всем приземном слое, а затем медленно уменьшается до нуля или до некоторой малой величины на z = H, так что $K_M(z)$ достигает максимальной величины на некотором уровне между поверхностью и высотой, на которой влияние трения является незаметным.

Профиль этого типа не должен означать, что турбулентный обмен достигает максимума на некотором уровне (порядка 100 м) над поверхностью. За исключением сложного изменения в небольшом слое вблизи земли, турбулентность, характеризуемая средней квадратичной величиной амплитуды колебаний с периодом порядка нескольких минут, равномерно уменьшается от поверхности вверх. Физически существенным фактом является то, что касательное напряжение и градиент средней скорости уменьшаются с высотой по всему планетарному пограничному слою; но изменения в касательном напряжении настолько малы, что ими можно пренебречь в слое. находящемся под воздействием шероховатости поверхности. Возрастание $K_{M}(z)$ с высотой внутри этого слоя отражает просто уменьшение $\frac{dV}{dz}$ с z. Уменьшение $K_M(z)$ выше в переходном слое является следствием исчезновения турбулентных напряжений на уровне геострофического ветра, а своеобразное изменение $K_{M}(z)$ вытекает из принимаемого математического метода и не имеет особого физического значения.

Таким образом, имеется два возможных подхода к проблеме структуры ветра в пограничном слое земли. Один из них состоит в том, чтобы принимать $K_M(z)$ монотонно возрастающим по всему планетарному пограничному слою и отыскивать решение уравнения среднего движения, которое удовлетворяет необходимым граничным условиям на z = 0 и $z \to \infty$. Этот метод введен Прандтлем и Тольмиеном [20] в 1923 г., а позже развит Кёлером [21] в ученых записках, опубликованных в 1933 г. При этом подходе не принимаются во внимание изменения в шероховатости поверхности.

Второй метод, предложенный Россби и Монтгомери [22, 17], как указано в предыдущем параграфе, учитывает влияние неровностей поверхности для относительно тонкого приповерхностного слоя, а в переходном слое им пренебрегают. Этот подход находится в большем соответствии с физической концепцией, так как шероховатость поверхности не может значительно влиять на структуру ветра, за исключением непосредственной близости к поверхности.

Решение для $K_M = K_1 z^m$ по всему слою. Используемая координатная система та же, что и в п. 3.6, ось x лежит вдоль

прямой, параллельной изобарам, и на основании геострофическогоравновесия $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \lambda G$, где G — геострофический ветер. Развивая анализ п. 3.6, легко показать, что уравнения установившегося двухмерного движения сводятся к

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K_M(z) \frac{\partial V}{\partial z} \right] = i\lambda (V - G), \qquad (7.9)$$

где V = u + iv — результирующий ветер. Граничными условиями: являются, как и раньше,

$$\begin{array}{ccc} V = 0 & \text{Ha} & z = 0 \\ \lim_{z \to \infty} V = G \end{array}$$
 (7.10)

В анализе Прандтля — Тольмиена K_M принимается пропорциональным $z^{0,843}$, что соответствует профилю $\overline{u} = \overline{u}_1 z^{0,157}$ в слое постоянного касательного напряжения (выражение, полученное из профиля» ветра по наблюдениям в пограничном слое в трубе). Тогда решение уравнения (7.9) при условиях (7.10) получается в виде бесконечногоряда. Кёлер рассмотрел более общий случай

$$K_M(z) = K_1 z^m \quad 0 \le m < 1,$$
 (7.11)

где K_1 — величина $K_M(z)$ для z = 1. Это выражение учитывает влияние как шероховатости поверхности, так и устойчивости, которая должна отражаться через соответствующие изменения K_1 и m.. Уравнение (7.9) тогда становится

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K_1 z^m \, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = i\lambda \, (V - G). \tag{7.12}$$

Чтобы свести уравнение (7.12) к обычной форме, Кёлер вводит

$$\zeta = \frac{1}{K_1(1-m)} z^{1-m} \tag{7.13}$$

и обозначает

V-G=W

Так как m < 1, то отсюда следует, что $\zeta \rightarrow 0$, когда $z \rightarrow 0^{<}$ и $\zeta \rightarrow \infty$, когда $z \rightarrow \infty$. Преобразованное уравнение и граничные условия будут:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = i a^2 \zeta^{\frac{m}{(1-m)}} W, \qquad (7.14)$$

$$\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{G} \quad \text{ha} \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{0}, \quad (7.15)$$

$$\lim_{x \to \infty} W = 0,$$

где $a^2 = K_1^{\frac{1}{(1-m)}} (1-m)^{\frac{m}{(1-m)}}.$

Уравнение (7.14) является уравнением типа Бесселя.

Решение, стремящееся к нулю, когда $\zeta \to \infty$, и не равное нулю для $\zeta = 0$, будет

$$W = A\zeta^{\frac{1}{2}} K_{\underbrace{(1-m)}} \left[\frac{2(1-m)}{2-m} a \sqrt{i\zeta^{2(1-m)}} \right], \qquad (7.16)$$

сгде $K_{\nu}(x)$ является функцией Бесселя второго рода порядка ν^{1} , а A является постоянной, найденной при раскрытии степенного ряда для $K_{\nu}(x)$ и условия, что W = G на $\zeta = 0$. Подробное выражение для A можно найти в работе Кёлера вместе с таблицами величин других постоянных в выражении для V, для $m = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-4}$ сек.⁻¹ (соответственно широте 60°), $|K_1| = 15,4$ CGS единиц.²

Анализ Кёлера, таким образом, дает возможность представить ветер в планетарном пограничном слое через выражение типа

$$V(z) = G + Cz^{\frac{1}{2}(1-m)} K_{\frac{(1-m)}{(2-m)}} \left(Dz^{1-\frac{1}{2}m} \right), \qquad (7.17)$$

тде G — геострофический ветер, а C и D — сложные величины, зависящие от λ , m, K_1 и G. Для m = 0 [$K_M(z) = \text{const}$] рещение можно выразить через элементарные функции, используя известные результаты теории функций Бесселя:

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-x}.$$

Полученное таким путем выражение идентично уравнению (3.20), т. е. аналитическому представлению спирали Экмана.

Принципиальные результаты исследования Кёлера следующие. 1. В слоях воздуха, прилегающих очень близко к земле, профиль равнодействующего ветра близко приближается к простому степенному закону типа $V = V_3 z^{1-m}$, где V_1 — величина, зависящая от λ , m, K_1 и G и, таким образом, не зависящая от высоты. Это выражение совпадает с профилем, получаемым из объединенного степенного закона Шмидта, и означает, что равнодействующее касательное напряжение $\tau = \rho K_M \frac{dV}{dz}$ не меняется с высотой в этих слоях. Из исследования порядка величин различных постоянных Кёлер

¹ Watson G. N. A Treatise on Bessel Functions, 2 d. ed., Chap. VII, Cambridge, 1944. $K_{v}(x)$ не следует путать с вихревой вязкостью $K_{M}(z)$.

² Кёлер [21], стр. 12—14. Читатель должен заметить, что обозначения, использованные Кёлером, не идентичны с теми, которые даны выше.

заключает, что это приближение справедливо для $z \ll 10$ м и согласуется с наблюдениями в приземном слое.

2. Угол а между приземным и геострофическим ветром дается выражением

$$\alpha = \frac{1 - m}{2 \left(2 - m\right)} \pi \,. \tag{7.18}$$

В табл. 25 даны величины α для ряда значений *m*, использованных Кёлером.

Таблица 25

Угол а между поверхностным и геострофическим ветром как функция *m* в соотношении $K_M(z) = K_1 z^m$

m			1	2	3	4	6	6	7	8
	•	•	2	3	4	5	6	7	8	9
α.			30°	28°30′	18°	15°	12°48′	11°15′	10°	9°

Уравнение (7.18) указывает, что α зависит только от экспоненты *m* (т. е. главным образом от устойчивости движения) и не зависит, от параметра Кориолиса λ и, следовательно, от широты.

Имеется хорошее доказательство как для подтверждения этого вывода, так и величин α , данных в табл. 25. Окерблом [24] зарегистрировал изменения α в Северной Атлантике на широтах 9—10°; его величины α колеблются от $\alpha = 22^{\circ}$ до $\alpha = 12^{\circ}$ со средней величиной в 18° и не показывают систематического изменения с широтой. Джеффрис [25], проведя 600 наблюдений над Северным морем, нашел, что α имеет несимметричную повторяемость распределения со средней величиной в 16° и модой в 11°. Вестфатер [26], используя данные полетов над морем, нашел средний угол поворота в 8° между 30 и 3000 футов (9—900 м). Эти результаты говорят о том, что для ветров над океаном *m* лежит между $\frac{3}{4}$ и $\frac{8}{9}$, и означают, что над

морем приземный ветер увеличивается, как $z^{\overline{4}} - z^{\overline{9}}$. Очень важно отметить, что величина моды, данная Джеффрисом ($\alpha = 11^{\circ}$), соот-

ветствует профилю вида $V = V_1 z^{\overline{7}}$, т. е. для типичной равновесной стратификации. Приведенные данные согласуются с результатами наблюдений, по которым в большинстве случаев над нетропическими морями в нижних слоях имеются очень небольшие отклонения от адиабатического градиента.

Вышеприведенное сравнение относится к ветру над морем. Над сушей средняя величина α около 20°, т. е. *m* около $\frac{2}{3}$; отсюда

средний профиль вблизи земли можно представить через $V = V_1 z^{\frac{4}{4}}$, что указывает на несколько более выраженный градиент скорости, чем над морем. Такой результат можно объяснить большей шероховатостью суши и возрастающим влиянием температурного градиента.

18 О. Г. Сеттон

3. Характер структуры ветра для больших величин z можно видеть при использовании асимптотического разложения K_w (x). Coxpa- $\left| Dz^{1-\frac{1}{2}m} \right|$

няя только основные члены, для больших величин

$$V(z) \approx \mathbf{G} + A' z^{-\frac{1}{4}m} \exp\left(-D z^{1-\frac{1}{2}m}\right),$$
 (7.19)

где A' — постоянная; отсюда видно, что как $\frac{dV}{dz}$, так и $K_M(z)\frac{dV}{dz}$ стремится к нулю, когда $z \rightarrow \infty$. Таким образом, вихревое касательное напряжение уменьшается на больших высотах, несмотря на то. что $K_{M}(z)$ безгранично увеличивается с z и система физически возможна.

Вывод, полученный из исследования работы Кёлера, состоит в том, что он дает убедительное объяснение основных свойств структуры ветра в планетарном пограничном слое. Изменения условий на поверхности можно учесть, подбирая соответствующие величины K₁, но это не вполне удовлетворительно, так как означает, что влияние неровностей поверхности равнозначно на всех высотах до уровня геострофического ветра; при всяком практическом приложении на K₁ следует смотреть, как на среднюю величину, которая дает наилучшее приближение к наблюдениям по всему слою, где влияет трение. Некоторые другие положения Кёлера и, в частности, его анализ характера атмосферной турбулентности являются более умозрительными и не будут здесь рассматриваться, но все его многочисленные работы (как пример удачного приложения степенного закона к проблемам атмосферной турбулентности) заслуживают более тщательного изучения.

Высота планетарного пограничного слоя. В предшествующем разделе планетарный пограничный слой теоретически предполагается простирающимся до бесконечности. Из решения для $K_{M} = \text{const}$ можно сделать грубую оценку высоты этого слоя. По уравнению (3.20), следуя Бренту [2], векторное влияние поверхностного трения на ветер оценивается через

$$\sqrt{2}\mathbf{G}\sin\alpha\exp\left(-z\sqrt{\frac{\lambda}{2K_{M}}}\right)$$

Принимая $K_{M} = 10^{5}$ см² сек.⁻¹, высота, на которой экспоненциальный член равен 0,1, будет $z = 10^5$ см для $\varphi = 60^\circ$. Таким образом, влияние трения на поверхности ограничивается слоем, не превышающим 1 км высоты, а для многих практических целей достаточно принимать гораздо меньшие высоты, скажем, 500 м. Для данного K_{M} высота слоя меняется, как $\frac{1}{V \sin \varphi}$, т. е. он будет больше в низких широтах. Таким образом, теоретически вихревое трение в тропиках должно влиять на ветер до гораздо больших высот, чем в умеренных зонах. Но, принимая во внимание уменьшение зна-

274 -

чимости компоненты Кориолиса по мере приближения к экватору и ограниченный характер предположения о том, что движение точно двухмерное на всех высотах, такое заключение нельзя считать достаточно надежным.

Двухслойное решение Россби — Монтгомери. Изложение решения задачи, предложенной Россби и Монтгомери, содержится в двух статьях: первая (1932) Россби [22] и вторая (1935) Россби и Монтгомери [17]. В нижнем слое ($0 \ll z \ll h$) касательное напряжение предполагается неизменным по высоте, при этом путь перемешивания принимается равным

$$l = k \left(z + z_0 \right),$$

что ведет к обычному логарифмическому профилю (7.3). В верхнем слое, простирающемся от z = h до z = H, где H — высота, на которой ветер геострофический, градиент давления принимается постоянным во всех точках, а напряжение трения параллельно ветру на z = h. В более ранней работе Россби показывает, что при этом путь перемешивания должен выражаться через

$$l = \frac{0.065}{\sqrt{2}} (H-z),$$

так что l становится нулем при z = H. Если τ_0 — касательное напряжение на z = h, то

$$\tau_0 = \frac{\rho \lambda^2 H^2}{9 (0.065)^2}$$

и равнодействующий ветер на z = h будет

$$V(h) = G\left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right).$$

Вихревая вязкость дается через

$$K_{M} = \frac{\lambda}{3\sqrt{2}} (H-z)^{2},$$

т. е. К_м становится нулем на уровне геострофического ветра.

Решения для верхнего и нижнего слоев удовлетворяют условию неразрывности пути перемешивания, касательного напряжения, скорости и направления ветра на уровне z = h. Из условия неразрывности пути перемешивания

$$k(h+z_0) = \frac{0.065}{V2}H$$

или, так как z_0 мало по сравнению с h и H,

$$h = 0,12H.$$

Таким образом, путь перемешивания и вихревая вязкость достигают максимальных значений на уровне, который составляет около одной восьмой мощности планетарного слоя (т. е. h = 50 - 100 м).

18*

Условие неразрывности в касательном напряжении и скорости ветра дает соотношение

$$\frac{h+z_0}{z_0} = \exp\left[\frac{2k}{9(0,065)}\left(\operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

из которого можно вывести уравнение

$$\frac{G}{\lambda z_0} = \frac{2\sqrt{2k}}{9(0.065)^3} \operatorname{cosec} \alpha \exp\left[\frac{2k}{3(0.065)} \left(\operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Безразмерный параметр $\frac{G}{\lambda z_0}$, который зависит только от начальных условий (величины геострофической скорости ветра, широты и шероховатости земли), дает возможность легко оценить угол а. Найдено, что а почти не зависит от G и λ , но возрастает примерно от 15° при $z_0 = 0,1$ см до 21° при $z_0 = 10$ см. Эти результаты применимы только к условиям равновесной стратификации вследствие использования логарифмического профиля в нижнем слое, и поэтому можно заключить, что при таких условиях возрастание шероховатости поверхности производит небольшое, но заметное увеличение а.

Соотношение между скоростью ветра, измеренной анемометром в нижнем слое, и геострофической скоростью ветра найдено следующим:

$$\frac{V(z_1)}{G} = \frac{3(0,065)}{2k} \sin \alpha \ln \left(\frac{z_1 + z_0}{z_0} \right) \qquad (z_1 < h).$$

В примере Тейлора для сильных ветров над Салисберийской равниной G = 1560 см сек.⁻¹, $\alpha = 20^{\circ}$, $z_0 = 3,2$ см (ориентировочно), $\frac{V(z_1)}{G} = 0,595$, т. е. имеется превосходное согласование с измеренным соотношением 0.61.

Для холмистой местности Россби и Монтгомери, принимая $z_0 = 320$ см, находят (если другие величины те же, что и принятые раньше) $\frac{V(z_1)}{G} = 0,29$; но это, возможно, выводит теорию шероховатой поверхности за пределы законного применения.

При развитии этой работы Россби и Монтгомери снимают ограничение о том, что вихревое движение исчезает полностью на z = H, а вместо этого принимают, что на всех уровнях существует "остаточная турбулентность", соответствующая постоянной величине коэффициента обмена,

$$A_{M} = K_{M} \rho = 50 \ r \ cm^{-1} \ cek.^{-1}$$

Это предположение вызывает радикальное изменение в соотношении между $\frac{G}{\lambda z_0}$ и а. В первом решении, соответствующем $K_M = 0$ на z = H, а возрастает равномерно с $\frac{G}{\lambda z_0}$, а во втором решении а примерно постоянно (около 20°) для широкого предела величин $\frac{G}{\lambda z_0}$.

Имеющиеся наблюдения недостаточно надежны, чтобы выявить преимущества одного из двух предположений.

При дальнейшем развитии теории влияние изменения устойчивости исключается. Предположения, на которых основывается анализ, до некоторой степени сомнительны и рассматриваются ниже (стр. 294).

7. 4. Структура ветра вблизи поверхности

Флюктуации скорости. Если производить анализ записи скорости ветра, полученной, например, манометрическим анемометром, характерной чертой является беспорядочное изменение скорости ветра; подобные колебания имеются и в направлении. При равномерной шкале времени следы имеют вид "лент", ширина которых (приближенно) пропорциональна средней скорости ветра. Порывистость ветра, определенная как отношение средней ширины полосы скорости к средней скорости, обычно используется в качестве грубой меры степени турбулентности в данном месте.

Шоу [27] при рассмотрении характеристик ветра различных местностей как в открытых местах или на побережье, так и в заселенных районах, дает величины порывистости, колеблющиеся в пределах от 0,25 до 1. Эти величины типичны для записей, получаемых по манометрическому анемометру Дайнса, когда датчик находится в 30 или 40 футах над землей. Некоторые сведения о флюктуациях ветра верхних слоев были даны Дайнсом [28] в 1911 г. на основании измерений натяжения воздушного змея. Современное систематическое исследование пульсаций скорости ветра или вихревых скоростей начинается с изучения Тейлором [29] расчленения вихревой энергии вблизи земли.

Если конечная точка вектора, представляющего мгновенную скорость, движется внутри круга, то

$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}} = \sin \frac{1}{2} \theta,$$

где в — угловая ширина полосы колебаний направления ветра.

При исследовании записей, полученных на вершине отдельной трубы, Тейлор показал, что это соотношение практически подтверждается и что поэтому средняя величина компоненты вихревой скорости в направлении среднего ветра равна средней величине компоненты, поперечной ветру. При исследовании колебаний привязного шара включается вертикальная компонента скорости, при этом было получено, что на умеренных высотах вихревая энергия разделена вдоль всех трех осей поровну. С другой стороны, Тейлор показал (посредством двойной флюгарки¹), что поперечная компонента вихревой скорости больше, чем вертикальная компонента до высот в несколько футов над землей.

¹ Флюгарка расположена так, что свободно двигается поперек ветра и вертикально. Для полного описания см. Best A. G., Geophys. Mem. 65.

Для того чтобы охватить широкий предел условий, встречающихся в микрометеорологии, необходимо точное определение системы координат и некоторых функций скорости. Примем поверхность земли за плоскость z = 0, над которой дует ветер V. В общем, V меняется быстро от точки к точке и от одного момента времени к другому, но если наблюдения сделаны в фиксированной точке, то средний ветер \overline{V} можно определить следующим образом:



где T период осреднения с серединой интервала в момент t. Предполагается, что условия неизменны по всей горизонтальной поверхности, так что \overline{V} зависит только от высоты z, времени t и выбранного периода осреднения T. С направлением \overline{V} совмещается ось x, принимаемая горизонтальной, поэтому компоненты скорости обозначаются в обычных терминах так, как это дано в следующей таблице.

Оси	x	у	z
Мгновенная скорость Средняя скорость Вихревые скорости (флюктуации)	u u u'	v 0 . v'	w 0 w'

Так как по горизонтали условия не меняются, скорости являются только функциями z, t и T. По определению, $\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0$, *а среднюю величину вихревых скоростей* можно обозначить или как $|\overline{u'}|$, $|\overline{v'}|$ и $|\overline{w'}|$, или через их средние квадратичные величины $\sqrt{\overline{u'}^2}$, $\sqrt{\overline{v'}^2}$, $\sqrt{\overline{w'}^2}$.

Компоненты порывистости: продольной (g_x) , поперечной (g_y) и вертикальной (g_z) определяются через отношения средних величин флюктуаций к средней скорости ветра. Подобно вихревым скоростям, компоненты порывистости являются функциями z, t и T.

Время *t*, которое входит во все выщеприведенные выражения, можно без ущерба исключить из дальнейшего рассмотрения за счет предположения (которое обычно удовлетворяется в практике) о достаточной стационарности условий в течение периода наблюдений; поэтому отдельный момент, около которого центрируется период осреднения, является несущественным. С другой стороны, во всякой работе, имеющей дело с флюктуациями естественного ветра, выбор

периода осреднения существенен вследствие широкого диапазона частот колебаний в вихревом спектре. Скрейс [5] при анализе вихревых скоростей над поверхностью разделил свои результаты на следующие типы: турбулентность большого масштаба ($T \approx 1$ часу), турбулентность промежуточного масштаба (T = 2 - 3 мин.) и турбулентность малого масштаба (T равно нескольким секундам). Такое подразделение является произвольным и определяется характеристиками приборов и методикой, использованной для исследования, но необходимо для того, чтобы ясно отразить широкий диапазон периодов флюктуаций ветра вблизи поверхности.

Скрейс исследовал довольно тонкую структуру ветра (турбулентность малого масштаба) посредством киноаппарата (16 кадров в секунду) на шарнирной плите и легкой двойной флюгарки и пришел к результатам, которые показывают, какую важную роль играют флюктуации периодов порядка секунд. Анализ подтверждает, что, по крайней мере, две трети вихревой энергии связано с флюктуациями, продолжающимися менее 5 сек., а в некоторых случаях можно обнаружить значительное увеличение вихревой энергии, когда период уменьшается от 0,2 до 0,06 сек. Если эти результаты типичны, то отсюда следует, что значительные вклады в вихревую энергию естественного ветра возникают от колебаний, частота которых довольно высока (10—20 циклов в секунду). Для другого конца шкалы (что видно из просмотра записей анемометра) большие колебания, продолжающиеся в течение минут, являются редкими.

Наиболее важные результаты, полученные Скрейсом, относятся к разделу вихревой энергии вблизи земли. Для турбулентности промежуточного масштаба, анализ которой проводился посредством двойной флюгарки при небольших температурных градиентах, Скрейс подтвердил результат, полученный ранее Тейлором, а именно, что на высотах порядка 2 м горизонтальная вихревая скорость v' примерно на 50% больше по сравнению с вертикальной компонентой w', так что $\overline{v'^2}$ равна удвоенному значению $\overline{w'^2}$. На более значительных высотах асимметрия уменьшается и стремится к нулю на высоте 20 м в соответствии с наблюдениями Тейлора по шарам-пилотам, о которых говорилось выше. Это неравное расчленение вихревой энергии в слоях воздуха у земной поверхности является очень важным для проблемы диффузии (см. гл. 8). Скрейс показал, что при небольших температурных градиентах u', v' u w' приблизительно пропорциональны средней скорости (порывистость не зависит от средней скорости ветра), за исключением, может быть, очень слабых ветров.

Работа Скрейса ограничивается в основном рассмотрением периодов малых температурных градиентов. Более детальное исследование структуры турбулентности вблизи земли, охватывающее широкий диапазон температурных градиентов, было сделано Бестом [8], использовавшим термоанемометр и двойную флюгарку. Для точного измерения флюктуаций ветра необходимо использовать чувствительный быстро реагирующий прибор, а при реальном изучении атмосферной турбулентности нельзя игнорировать характеристики измерительных приборов.

Бест показал, что термоанемометр, состоящий из тонкой платиновой проволоки длиной около 1 см, измеряет не *u*, а

$$u+\frac{{v'}^2}{2\bar{u}}$$
.

• Отсюда измеренная таким прибором

мгновенная средняя скорость
$$= \frac{u'}{\overline{u}} + \left[\frac{v'^2}{2\overline{u^2}} - \left(\frac{\overline{v'^2}}{2\overline{u^2}}\right)\right].$$
 (7.20)

Бест приходит к заключению, что член в скобках в уравнении (7.20) обычно достаточно мал; это позволяет считать прибор пригодным для измерения скорости (с достаточной степенью приближения) только вдоль оси x. Во время работы в течение 3 минут левая часть уравнения (7.20) оценивалась через 10-секундные интервалы; 19 таких записей были осреднены для получения g_x . Наблюдения были сделаны на стадионе с травой 1—2 см высоты для следующих условий.

Пределы	высоты z	СМ			. 2,5-20)0
Пределы	средней	скорости	(измере	нной н	a	
z = 200	см), см се	к.—1			. 5080	ю
Пределы	температу	рного гради	ента (10-	-110 см)	Ι,	
°С см ⁻¹		• • • • •		• • • •	0,015-+	0,0

Результаты можно суммировать следующим образом:

• 1. Почти все величины g_r лежат между 0,1 и 0,2.

2. g_x не дает заметно выраженного изменения с высотой для 2,5 $\leqslant z \leqslant 200$ см.

3. g_x фактически не зависит от температурного градиента для высот $2,5 \ll z \ll 10$ см, но уменьшается для $z \gg 25$ см с изменением от сверхадиабатического состояния до инверсии.

4. Изменения g_x со средней скоростью нерегулярны; имея в виду результаты в целом, можно считать, что продольный компонент порывистости в первом приближении не зависит от средней скорости. Так как $g_x = \frac{|\vec{u}'|}{\vec{u}}$ заметно не меняется с высотой, то отсюда следует, что для рассмотренного интервала u' возрастает с высотой почти с той же самой скоростью, что и \vec{u} . Бест дает уравнение

$$|u'| = 0,15 \log (z-1) + c,$$

где z измеряется в сантиметрах. Ясно, что возрастание u' с высотой ограничивается небольшим слоем.

Повторяемость распределения вихревых скоростей была исследована Хессельбергом и Бьоркдалем [30], Вагнером [31] и Бестом. По аналогии с кинетической теорией газов и более ранними теориями

турбулентности следует, что обычное распределение Максвелла должно хорошо выполняться и для флюктуаций скоростей. Это подтверждается наблюдениями. Бест выразил результаты в виде

$$f = f_0 \exp\left(-kg_r^2\right), \qquad (7.21)$$

где f — число флюктуаций, выраженное в процентах от общего рассмотренного числа к единице диапазона в $100 g_x$ (т. е. порывистость, выраженная как процентное отношение). Величины лежат между 9,8 и 25,4 в соответствии с тем, выше или ниже 400 см сек.⁻¹ на z = 200 см средняя скорость ветра; имеется также некоторое доказательство влияния температурного градиента.

Вышеприведенные результаты относятся к флюктуациям в направлении среднего ветра. Продольные и вертикальные флюктуации исследовались также Бестом [8], который так же, как Тейлор. и Скрейс, использовал двойную флюгарку. Этот прибор устанавливается так, что движение в плоскостях (x, y) и (x, z) представляется в виде беспорядочных площадей из линий и петель. Площади — или овальные, или круглые; горизонтальные и вертикальные диаметры их связаны с g, и g, соответственно. Однако при анализе записей возникают большие трудности. Довольно легко, как показывает Бест, провести совпадающие овалы, которые огораживают почти все петли, сделанные пером, а диаметры этих кривых можно считать "экстремальными" величинами g_y и g_z . Более трудно провести кривые, которые представляют средние отклонения пера, и поэтому данные, полученные для "средних" g_y и g_z , менее определенны. Несмотря на эти трудности, двойную флюгарку следует считать удобным прибором при изучении структуры турбулентного ветра, а выводы, полученные из исследования записей прибора, в общем, являются належными.

Основные результаты следующие.

На высоте 200 см над травянистой поверхностью:

1. Экстремальные горизонтальные и вертикальные порывистости практически не зависят от величины средней скорости ветра в условиях сверхадиабатических градиентов $\left(\frac{\partial T}{\partial z} < 0\right)$, но обе компоненты резко возрастают с увеличением скорости ветра при инверсиях. $\left(\frac{\partial T}{\partial z} > 0\right)$.

2. Экстремальные горизонтальные и вертикальные порывистости уменьшаются по мере изменения величины температурного градиента от сверхадиабатического до инверсии (средняя скорость постоянная).

3. Отношение экстремальных величин g_y к экстремальным величинам g_z составляет около 1,8 независимо от средней скорости ветра и величины температурного градиента.

4. Средние величины g_y и g_z возрастают со средней скоростью в периоды инверсий и сверхадиабатических градиентов.

В интервале высот 25-506 см:

1. Отношение экстремума g_y к экстремуму g_z на различных высотах показано в следующей таблице:

Высота, см. . 25 49 100 200 506 Отношение . . 2,93 2,58 2,13 1,81 1,40

Асимметрия очень заметна на 25 см, где горизонтальная вихревая энергия $\rho v'^2$ может быть почти в 9 раз больше, чем вертикальная вихревая энергия $\rho v'^2$. При возрастании высоты наблюдается приближение к равномерному распределению; по экстраполяции Беста горизонтальная и вертикальная компоненты должны быть почти равны на высотах более 25 м. Наиболее интересный факт, обнаруженный этим исследованием, состоит в том, что в то время как горизонтальная компонента экстремальной порывистости уменьшается с высотой между 25 и 500 см, вертикальная компонента увеличивается с высотой в том же самом интервале.

Бест дает эмпирические законы для:

экстремальной горизонтальной компоненты

$$g_v \sim z^{-0.062}$$
, (7.22)

экстремальной вертикальной компоненты

$$g_{z} \propto z^{0,175}$$
 (7.23)

Таким образом, вертикальная компонента экстремальной порывистости возрастает с высотой почти с той же самой скоростью, как и средняя скорость в слое 25—500 см над травой.

2. Изменение вихревых скоростей с высотой (средние величины) дается в табл. 26.

Таблица 26

<i>z</i> cm	ū	<i>u'</i>	v'	<i>w'</i> см сек. ⁻¹
25	262	$\begin{array}{r} 41\\ 44\\ \underline{-52}\\ \underline{-}\end{array}$	86	24
49	299		96	29
100	331		103	37
200	370		111	50
506	405		109	64

Изменение компонент вихревой скорости с высотой при температурном градиенте, равном нулю, над травяной поверхностью (по Бесту)

Из табл. 26 видно, что изменение сложное. Можно предполагать, что горизонтальная компонента v' достигает максимума на высоте между 200 и 500 см, а вертикальная компонента w' увеличивается во всем интервале. Это несколько отличается от результата, ранее

полученного Скрейсом, что как v', так и w' имеют хорошо выраженный максимум около 1,5 м над землей. Бест считает, что эмпирические законы

$$v' = \operatorname{const} z^{0,11}$$
, (7.24)

 $w' = \operatorname{const} z^{0,34} \tag{7.25}$

справедливы для $25 \ll z \ll 500$ см и температурного градиента, равного нулю. Такое заключение совпадает с данными Фейджа и Таунсенда [32] для движения вблизи стенки в трубе. Относительно влияния шероховатости на компоненты порывистости сведения невелики, но достаточно точные. Некоторое общее представление можно получить из табл. 27 (стр. 286), в которой даны величины коэффициента трения на поверхности C_p для различных поверхностей.

Так как $C_D = 2\left(\frac{u_*}{\overline{u}}\right)^2$, а u_* численно имеет почти ту же величину, что и u', то, следовательно, между C_D и g_x^2 должна быть тесная связь. Также известно, что шероховатость поверхности влияет на расчленение вихревой энергии вблизи земли; над очень гладкой поверхностью (снег) одинаковое расчленение достигается на более низком уровне, чем над шероховатой поверхностью. Полное объяснение этого вопроса отсутствует.

Можно привести один добавочный результат вследствие его важности в проблемах диффузии (гл. 8). Величина площади, описываемой пером двойной флюгарки, быстро возрастает только в первую минуту, а затем растет очень медленно. Это можно интерпретировать как влияние, вызванное смещением больших или маленьких вихрей при естественном ветре.

Вышеприведенный результат показывает, что объяснение структуры ветра вблизи земли далеко не полное и картина поля скорости пока не выяснена. Сведения, полученные до сих пор, вызывают сомнение в некоторых предположениях, обычно принимаемых в математическом анализе атмосферной турбулентности; например, обычно считается, что вихревые скорости фактически не зависят от высоты вблизи земли, тогда как наблюдения указывают на изменение их с высотой того же самого порядка, что и средней скорости [сравните уравнения (7.22) и (7.25)].

Сомнительно, чтобы данные, полученные при использовании совершенно различных приборов (термоанемометр и двойная флюгарка), были бы вполне сравнимы. Все эти сомнения можно разрешить только систематическими наблюдениями микроструктуры воздушного потока вблизи поверхности. Пока еще таких исследований проводилось очень мало.

Трение на поверхности и касательное напряжение. Оценки трения на поверхности земли были сделаны: 1) из наблюдений о приближении к геострофическому ветру, 2) из профилей ветра в нижних слоях, 3) непосредственным измерением с помощью "заторможенных пластинок". Метод (1) дает среднюю величину трения на поверхности над большой площадью, и результаты его относятся больше к области общей климатологии, чем к микрометеорологии. Метод (2) обычно дает величины для типичных площадей порядка нескольких тысяч квадратных метров, тогда как метод (3) можно рассматривать как самый удачный (в настоящее время) для определения трения в точке на земной поверхности.

1. Оценка трения на поверхности из профиля ветра в планетарном пограничном слое обычно включается в учебники динамической метеорологии¹, поэтому здесь она будет дана только в самых общих чертах. Равнодействующее касательное напряжение на каком-либо уровне по определению есть

$$\tau_{zx} + i\tau_{zy} = K_M \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(u + iv \right)$$

в обычных обозначениях и в общепринятой системе координат. Для определения порядка величины напряжения на поверхности, τ_0 , достаточно рассмотреть профиль для $K_M = \text{const}$ (гл. 3). Отсюда

$$\tau_{zx} + i\tau_{zy} = K_M \rho G \left(1 + i\right) \left(\frac{\lambda}{2K_M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(1 + i\right) \left(\frac{\lambda}{2K_M}\right)^{\frac{1}{2}} z\right].$$

Если Z высота, на которой ветер становится геострофическим, то касательное напряжение на поверхности дается через

$$\tau_0 = \frac{\lambda \rho Z G}{\pi \sqrt{2}}$$

Из наблюдений Добсона за Z над Салисберийской равниной получены следующие величины:

 $G \operatorname{cm} \operatorname{cek}^{-1} \ldots 460 \ 910 \ 1560$ $\tau_0 \ \text{ah} \ \operatorname{cm}^{-2} \ldots 0.8 \ 2.2 \ 4.2$

Обычно трение на поверхности выражается через коэффициент C_D по уравнению

$$\tau_0 = \frac{1}{2} C_D \rho \overline{u}_s^2 ,$$

где $\overline{u_s}$ — скорость ветра "вблизи" поверхности, т. е. скорость на некоторой высоте, удобной для непрерывных наблюдений. При анализе наблюдений Добсона Тейлор [33] принял $\overline{u_s}$ как ветер на 30 м и

¹ См., например, Brunt. Physical and Dynamical Meteorology. 2 d ed., pp. 259—260, Cambridge, 1939 или Berry, Bollay and Beers. Handbook of Meteorology, pp. 454—455, Mc Graw-Hill, 1945.

нашел C_D , равным около 0,005.¹ Из работы Тейлора ясно, что τ_0 пропорционально $\overline{u_s^2}$, т. е. C_D почти не зависит от величины скорости ветра.

Оригинальное исследование Тейлора было продолжено другими. Сатклиф [34], используя несколько иной метод, получил C_D для суши около 0,01, принимая в качестве рекомендуемой скорости ветер на высоте 10 м. Для океана Сатклиф дает среднюю величину C_D , равную 0,0008. Дарст [35] считает, что имеется значительное различие в C_D для полярного и экваториального воздуха, причем большая величина для экваториального воздуха ($C_D \simeq 0,0014$ по сравнению с $C_D \simeq 0,0006$ для полярного воздуха) приписывается большей устойчивости экваториального воздуха по сравнению с полярным. Дарст нашел, что для океанов C_D изменяется так же, как и скорость ветра, и что K_M пропорционально четвертой степени скорости ветра на поверхности.

Существенно отметить, что величины C_D , полученные описанным выше путем, имеют тот же порядок, как и применяемые в аэродинамике. Для больших чисел Рейнольдса ($10^5 \ll \text{Re} \ll 10^8$) коэффициент для искусственных поверхностей (крылья самолета и стойки, плоские пластины и корпус самолетов) меняется в пределах от 0,001 до 0,007 (Пирке [36]); этот предел включает большинство величин, найденных для суши. Особенность этого результата становится еще более замечательной, если сравнить масштабы двух систем определений километры в метеорологической задаче и сантиметры при работе в аэродинамической трубе. Очень маленькие величины C_D для океанов несомненно вызваны особыми условиями, которые преобладают на поверхности раздела вода — воздух.

2. Величины τ_0 или C_D , полученные из профилей ветра вблизи поверхности, более интересны для микрометеорологии. При равновесной стратификации или небольших отклонениях от нее уравнения (7.1) - (7.3) справедливы для гладких и шероховатых поверхностей, если покрывающая их растительность не слишком высока. По определению [см. (7.4)]

 $C_D = \frac{2\tau_0}{\rho \overline{u}^2} = 2 \left(\frac{u_*}{\overline{u}}\right)^2.$

¹ Читателю следует обратить внимание на то, что нет единообразия в определении коэффициента трения на поверхности. Некоторые исследователи пренебрегают коэффициентом $\frac{1}{2}$ и принимают $\tau = k\rho u^2$ вместо $\tau = \frac{1}{2} C_D \rho u^2$. Результаты Тейлора вначале были даны в зависимости от k, который равен $\frac{1}{2} C_D$, по определению в этой книге.

Отсюда уравнения профиля можно написать как

$$\sqrt{\frac{2}{C_D} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{u_* z}{v}\right) + \text{ const}}$$
 (гладкая поверхность),

$$\sqrt{\frac{2}{C_D} = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{z_0}}$$
(шероховатая поверхностн

$$\sqrt{\frac{2}{C_D} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{z + z_0}{z_0}\right)}$$

или

5)

Выражения для шероховатых поверхностей указывают на то, что коэффициент трения на земной поверхности должен зависеть от высоты z₁, на которой измеряется скорость, а не от самой величины скорости. При использовании профиля Россби (7.3)

 $C_D = \frac{2k^2}{\left(\ln \frac{z_1 + z_0}{z_0}\right)^2}$,

где z_1 — некоторая удобная высота (100 или 200 см). Утверждение о том, что C_D для шероховатой поверхности не зависит от величины скорости на фиксированной высоте, подтверждается всеми наблюдениями, кроме наблюдений над поверхностями, геометрическая форма которых изменяется со скоростью ветра (поле с высокой травой или водное пространство). Во всех случаях величины C_D, полученные из профилей, отражают до какой-то степени непосредственную историю ветра и являются типичными для поверхности, над которой движется воздух (прежде чем он достигает анемометров). При изучении дымовых облаков на уровне земли в условиях равновесного состояния (см. гл. 8) на анемометр на высоте h будет влиять характер поверхности на расстоянии от 10 hдо 20 h по ветру, если неровности не превышают высоты нескольких десятков сантиметров. Более крупные неровности (деревья, дома и небольшие холмы) будут влиять на профили (особенно на их подветренной стороне) на более значительных расстояниях.

В табл. 27 даны величины C_D , полученные по уравнению (7.4) из величин u_* , приведенных в табл. 23 (стр. 260) для u = 500 см сек.⁻¹ на z = 200 см.

Таблица 27

Величины коэффициента трения С_D для естественных поверхностей (равновесное состояние, скорость $\overline{u} = 500$ см сек.⁻¹ на z = 200 см)

Тип поверхности				C_D
Очень гладкая (лед, залитая водой суша)		۰.		0,002
Луг, трава до 1 см высотой	•	•		0,005
Равнина, редкая трава высотой до 10 см.				0,010
Густая трава высотой до 10 см			•	0,016
Редкая трава высотой до 50 см			•	0,023
Густая трава высотой до 50 см				0,032
Mope				0,002

Для поля с высокой травой C_D уменьшается с увеличением скорости ветра за счет снижения торможения поверхности при сгибании стеблей под действием ветра.

Вышеприведенные величины не показывают какой-либо выраженной зависимости от скорости ветра. Величина для моря, данная Моделем [19] из анализа профилей Браха, является такой же, что и для очень гладкой суши. Это, вероятно, объясняется движением воды, вызванным ветром.

Величина Моделя для C_D над морем несколько больше, чем она получается при анализе замедления геострофического ветра над океанами, но независимо от этого можно сказать, что анализ профилей ветра подтверждает результаты, данные методом (1) для больших масштабов.

Вышеприведенные величины C_D справедливы для условий равновесной стратификации. Вопрос о возможных изменениях с устойчивостью рассматривается ниже (на стр. 290).

3. Метод непосредственного измерения трения на поверхности в точке был предложен Шеппардом и продолжен Пэсквиллом [37]. По существу метод Шеппарда заключается в том, что небольшой кусок поверхности помещают на горизонтальную пластинку, плавающую в масле и находящуюся под влиянием момента скручивания; пластинка отклоняется от своего первоначального положения за счет напряжения ветра. Из измерений отклонения можно найти горизонтальную силу, действующую на пластинку, а отсюда — касательное напряжение на поверхности. Шеппард использовал гладкую плоскую пластинку в центре обширного обтекаемого круга и поместил весьприбор вблизи наветренного края горизонтальной круглой площадки из бетона диаметром около 160 м на гребне Салисберийской равнины. Поэтому его результаты относятся только к очень гладкой поверхности.

Прибор Пэсквилла имел, в общем, тот же характер, за исключением того, что гладкая тормозящая пластина заменялась невысоким цилиндром, наполненным той же дерновиной, на которой проводились опыты. Выводы Пэсквилла типичны для ровного луга с травой от 1 до 15 см высоты. Основные результаты измерений приведены в табл. 28.

Эти результаты находятся в удовлетворительном соответствии с величинами, полученными из структуры ветра.

Определение постоянной Кармана k и пути перемешивания l. Шеппард в той же работе [11] анализировалтакже непосредственные определения k и l вблизи земли. В аэродинамических задачах обычно принимают k = 0,4; эта величина также используется в большинстве исследований по атмосферной турбулентности. Для равновесной стратификации k можно получить непосредственно при использовании уравнений (7.1)—(7.3). Шеппард, принимая логарифмическую формулу для профиля скорости в слое $0 \ll z \ll 200$ см для всех температурных градиентов, получил вели-

чины **k** (приведенные в нижеследующей таблице) из профилей Беста над короткой травой:

Разность температуры, °С

Пэсквилл считает, что средний профиль над травой согласуется с теоретическим уравнением

$$\frac{\overline{u}(z)}{\overline{u}(100)} = \frac{\log_{10} e}{k} \left[\frac{u_*}{\overline{u}(100)} \right] \log_{10} \frac{z-d}{z_0} ,$$

если $z_0 = 0,66$ см и $\frac{\log_{10} e}{k} \left[\frac{u_*}{\overline{u} (100)} \right] = 0,466$. Средняя величина

 $\frac{u_*}{u(100)}$ по опытам Пэсквилла была 0,075 с небольшими колебаниями

при изменении температурного градиента. Это дает k = 0.37 — величину, находящуюся в хорошем согласовании с величиной, полученной из лабораторных исследований.

Таблица 28

Величины трения на поверхности τ_0 и коэффициента трения C_D , измеренные тормозящими пластинками

I	ладкая (бетонная	поверхность	(по Ш	Іеппарду)

Скорость ветра на высоте 100 см, см сек.—1	τ ₀ дин. см ⁻²	C_D^1	Разность температур °С на высоте 710—120 см
480	0,310	0,0020	$ \begin{array}{r} -0,44 \\ -0,44 \\ -0,56 \end{array} $
377	0,206	0,0021	
356	0,193	0,0023	

Травяная поверхность (по Пэсквиллу)

Скорость ветра на высоте 100 см, см сек. ⁻¹	^т 0 дин. см ⁻²	C_D^2	Разность тем- ператур, °С на высоте 150—37,5 см	Высота травы, см
402	0.00	0,000	0.40	1
403	0,90	0,009	-0,40 -0.47	1-0
483	1.53	0.011	-0.34	5-10
513	1,53	0,010	-0,18	-
429	1,38	0,013	+0,41	10-15
440	1,59	0,014	+0,40	

Изменения в k, таким образом, близко связаны с изменениями в $C_D = 2\left(\frac{u_*}{\overline{u}}\right)^2$, и их трудно разделить на данном этапе знаний. Если k рассматривать просто как постоянную в уравнении профиля,

¹ Относительно \overline{u} , измеренного на z = 200 см.

² Относительно \overline{u} , измеренного на z = 100 см.

:288

то всякое распространение результатов на неадиабатические градиенты можно считать сомнительным вследствие нарушения логарифмического профиля при больших сверхадиабатических градиентах и мощных инверсиях. Если k определяется уравнениями

$$l = k \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}},$$
$$w' = l \frac{d\bar{u}}{dz}$$

[(уравнение 3.42)], то отсюда следует, что

$$k = \frac{w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

(7.26)

Это определение можно принимать для всех условий устойчивости. Применяя его к простому степенному профилю

$$\overline{u}(z) = \overline{u}(z_1) \left(\frac{z}{z_1}\right)^p \qquad p > 0,$$

следует, что

$$\frac{|w'|}{\overline{u}} = g_z = k \left| \frac{p}{p-1} \right|. \tag{7.27}$$

Шеппард использовал это уравнение и величины Беста по g_z и получил уменьшение k с изменением от неустойчивых к устойчивым условиям.

Если принять те изменения для k, о которых говорится выще, то для применения логарифмического профиля к наблюдениям Беста по скорости ветра над травой необходимо ввести некоторое усложнение, а именно, что z_0 должен также зависеть от устойчивости в небольшой степени для неусточивых профилей и в сравнительно большей — для устойчивых условий. При этих предположениях C_D остается приблизительно постоянным в пределах устойчивостей, встречающихся в работе Беста. Эти взгляды противоречат мнению Дикона о том, что z_0 можно считать параметром, фактически независящим от термической стратификации. Величины z_0 и k в профиле степенного закона Дикона для неадиабатических условий аналогичны величинам, применяемым в логарифмическом профиле для равновесной стратификации.

В настоящее время не представляется возможным провести с достаточной пользой дальнейшее развитие различных теорий, и окончательное решение проблемы зависит от экспериментальной работы. Однако из работ Шеппарда и Пэсквилла очевидно, что для данной

19 О. Г. Сеттон

поверхности C_D мало меняется при любых условиях, кроме случаев очень больших отклонений от равновесного состояния.

Шеппард [11] рассчитал путь перемешивания *l*, как функцию высоты, из уравнения

$$l = \frac{u_*}{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)}$$

Шеппард считает, что для температурных градиентов, данных в табл. 28 (сверхравновесные условия), полученные точки соответствуют линии

$$l = 0.45z$$

для $20 \ll z \ll 100$ см, а для z > 100 см l возрастает быстрее, чем высота. Величина 0,45 (тангенс наклона линейной части зависимости) находится в хорошем соответствии с величиной k, полученной выше. Вся кривая связи l от z хорошо представляется через

$$l = 0.25z^{1,15}$$

для $20 \ll z \ll 200$ см. Из того факта, что кривая $u_1 \log z$ выпуклая по отношению к оси u при сверхадиабатических условиях и вогнутая при инверсии (рис. 25), следует, что если изменение l с высотой при всех условиях представить степенным законом

$$l = l_1 z^q$$
,

то можно ожидать, что q > 1 при неустойчивых условиях, q = 1 для равновесного состояния и q < 1 для устойчивых условий. При сверхадиабатических градиентах путь перемешивания возрастает быстрее, чем высота, а при инверсиях менее быстро.

Непосредственные измерения напряжения Рейнольдса. Скрейс [5] рассчитал напряжение Рейнольдса

$$\tau = -\rho \overline{u'w'}$$

непосредственно из записей движения легких флюгарок на кинопленке на высотах 1,5 и 19 м над равниной при равновесном состоянии. Его расчеты основаны на найденной корреляции между u'и w'. При первом опубликовании величины Скрейса давали значительное увеличение (грубо: от 4 до 1) τ с высотой в этом интервале. Такой вывод находится в резком противоречии с обычным предположением о том, что τ не меняется с высотой для $z \leq 25$ м (стр. 94). Позднее Скрейс исправил этот результат и дал соотношение $\frac{\tau_{19}}{\tau_{1,5}} = 2,5$. Это соотношение также еще слишком велико, чтобы устранить вышеуказанное противоречие; оно пока не объяснено. Пэсквилл указывает, что поскольку напряжение на высоте 1,5 м всецело зависит от характера поверхности в пределах нескольких десятков метров от анемометра, оно не является в точ-

ности сравнимым с напряжением на 19 м, так как последнее подвергается влиянию условий поверхности на гораздо больших расстояниях; если это так, то нельзя ожидать, что наблюденные в этих слоях профили достаточно согласуются с рассчитанными по теории. Абсолютная величина, полученная Скрейсом ($\tau = 0.9$ дин. см⁻² для $\overline{u} = 468$ см сек.⁻¹ на z = 150 см), хорошо согласуется с величинами, полученными Пэсквиллом для однородной поверхности.

Работа Скрейса по непосредственному определению $\overline{u'w'}$ имеет фундаментальное значение, так как вся теория атмосферной турбулентности основана по концепции напряжения Рейнольдса; следует отметить, что необходимо проводить дополнительные наблюдения по широкому пределу различных условий.

Россби дал некоторые величины

 $r = \frac{\overline{u'w'}}{\overline{u'}^2} = -\frac{\tau}{\rho \overline{u'}^2}$

на семи различных высотах между 0,5 и 7,7 м в непосредственной близости к песчаным дюнам восточного берега озера Мичиган. Его результаты приведены в следующей таблице:

Высота, см 50 100 200 400 500 600 770 *г*... 0,51 0,31 0,28 0,23 0,27 0,23 0,22

Эти величины хорошо согласуются с данными, найденными Ваттендорфом [39] в прямоугольной трубе, а именно, r = 0,32 на расстоянии 0,3 от центра трубы до стенки и в непосредственной близости к стенке. Рейхард [40] нашел в Геттингене r = 0,23. Россби не определил $p\overline{u'}^2$, поэтому непосредственное сравнение с величинами τ , полученными другими исследователями, невозможно. Вследствие неопределенного характера изменения u' с высотой неблагоразумно делать какое-либо детальное заключение относительно изменения τ , но, по-видимому, любое изменение его с высотой не будет настолько большим, как это найдено Скрейсом.

Корреляции. Статистическая теория турбулентности исходит из корреляций между флюктуациями скорости. Такие корреляции могут быть во времени (например, автокорреляции между скоростью в фиксированной точке за разные промежутки времени) или в пространстве (например, корреляция между скоростями в фиксированный момент в различных точках).

Измерения коэффициента автокорреляции (корреляция скорости с самой скоростью) были впервые опубликованы Джиблетом [15] для аэродрома в Кардингтоне, Англия. Один такой пример дается в нижеследующей таблице, основанной на записях, взятых по манометрическому анемометру на высоте 50 футов над землей.

Время, сек. 0 5 10 20 30 40 50 60 Коэффициент корреляции 1,0 0,69 0,50 0,11 -0,08 -0,19 -0,42 -0,38

Это можно рассматривать, как доказательство наличия модели, которая повторяется примерно через 100 сек., что при средней ско-

19*

рости около 17 м сек.⁻¹ указывает на вихревую структуру размера около 1700 м.

Автокорреляционный коэффициент $R(\xi)$, который встречается в теории Тейлора (гл. 3), находится как корреляция между флюктуаниями скорости, которые действуют на частицу в промежуток времени t и через ($t + \xi$). Измерения подобной величины были сделаны Шеппардом в 1936 г. с помощью термоанемометра и приводились Сеттоном [40] в 1939 г. Данные приведены в нижеследующей таблице:

 ξ сек. . . 0 0,05 0,1 0,2 0,5 1 2 3 4 5 10 R (ξ) . . 1,0 0,907 0,885 0,788 0,680 0,572 0,456 0,431 0,358 0,281 0,034 Высота наблюдений: 200 см.

Местность: равнина, трава высотой до 30 см. Корреляция для u', где ${u'}^2 = 6.51 \cdot 10^3$ см² сек.⁻²

Сеттон показал, что изменение, данное в этой таблице, в среднем хорошо выражается формулой

$$R(\xi) = \left(\frac{N}{N + \overline{u'^2}\xi}\right)^n, \qquad (7.28)$$

где $N = u_* z_0 = 100$ см² сек.⁻¹ и n = 0,15. Это выражение важно для проблемы диффузии (гл. 8).

Вихревая вязкость К_м дается через

$$K_{M} = \overline{u^{\prime 2}} \int_{0}^{t_{0}} R(\xi) d\xi, \qquad (7.29)$$

где t_0 — время пробега возмущения по ветру до смешения с основным потоком турбулентной жидкости. Это расстояние должно быть того же самого порядка, что и вертикальный путь перемешивания l, и составляет около 100 см на высоте 200 см над землей. Таким

образом,
$$t_0 \approx \frac{l}{\sqrt{(\overline{u'^2})}}$$
 не превышает 2 сек. Величина $\int_0^{\infty} R(\xi) d\xi$

около 1,32 сек., так что

$$K_{\mu} = 6.51 \cdot 10^3 \cdot 1.32 = 8.6 \cdot 10^3$$
 см² сек.⁻¹

Эта оценка согласуется с величинами, полученными другими методами.

7. 5. Влияние расслоения потока

Типичная ночная инверсия в нижней атмосфере исключительно устойчива во время ясной ночи, но обычно характеризуется последовательным возрастанием до больших величин, которые сменяются относительно быстрым падением до нуля или до некоторой малой величины. Возрастание температурного градиента обычно сопровождается увеличением градиента скорости и резко выраженным
уменьшением порывистости ветра. В общих чертах, по видимому, при стабилизации градиента плотности движение приближается к ламинарному потоку, но при больших разностях скорости между смежными слоями жидкости движение становится очень чувствительным к влиянию случайных возмущений и рано или поздно переходит в турбулентное. Последующее перемешивание вызывает быстрое падение градиентов температуры и скорости. Хорошо выраженный пример этого процесса дан Дарстом [41] при исследовании структуры ветра над аэродромом в Кардингтоне, Англия; этот пример был использован для получения критического числа Ричардсона (п. 4.9).

В то время, когда $\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2$ примерно равно $g\left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial z}\right)$, манометрические анемометры указывали совершенно устойчивое движение, но такое состояние продолжалось только в течение короткого периода, а затем быстро заменялось вновь появившимися порывами с одновременными быстрыми падениями $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$ и $\frac{\partial \theta}{\partial z}$. Из этих наблюдений Дарст пришел к заключению, что турбулентность затухает, когда $\operatorname{Ri} = \frac{g\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)}{\theta\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2} = 1$. Это согласуется с известным выводом Ричард-

сона.

По другим метеорологическим исследованиям получен широкий диапазон величин для Ri_{kp} . Некоторое рассеяние связано с отсутствием ясно выраженного определения турбулентности, и поэтому имеется основание полагать, что выводы зависят от типа использованного анемометра. Пешке [10] сравнил свои результаты, относящиеся к ветру вблизи поверхности, с теоретическим критерием Шлихтинга $Ri_{kp} = \frac{1}{24}$, но при этом не сделано никакого определенного заключения, кроме того, что величина колебаний уменьшается по мере возрастания Ri. Другое доказательство, подтверждающее величины Ri_{kp} между $\frac{1}{2}$ и 1, было приведено Сеттоном [42]. Возможное влияние шероховатости поверхности отмечалось в гл. 4, а имеющиеся до сих пор сведения подтверждают, что одна величина для Ri_{kp} не может иметь места.

Бесспорно важные основания против этого предположения были получены Диконом [7] при анализе работы Россби и Монтгомери [17], а также работы Гольцмана [43] по профилям скорости в термически стратифицированном потоке. Россби и Монтгомери полагали, что главное влияние устойчивого градиента состоит в уменьшении пути смешения по сравнению с его величиной при безразличном равновесии ($l_s < l$). Если $\frac{\partial u}{\partial z}$ — градиент скорости при безразличном равновесии, а $\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)_s$ — то же для устойчивого равновесия, соответствую-

щие турбулентные кинетические энергии пропорциональны $l^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2$ и $l_s^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)_s^2$. Ослабление кинетической энергии флюктуаций пропорционально работе, проведенной против сил тяжести при вертикальном перемещении вихрей в устойчивом состоянии. Россби и Монтгомери выражают это через уравнение

$$l^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)_s^2 - l_s^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)_s^2 = \beta \frac{g}{\theta} \, l_s^2 \, \frac{\partial \theta}{\partial z} \, ,$$

где предполагается, что β — абсолютная постоянная, а различия между градиентами скорости незначительны. Отсюда

$$l_s = \frac{l}{\sqrt{(1+\beta \operatorname{Ri})}} = \frac{kz}{\sqrt{(1+\beta \operatorname{Ri})}}, \qquad (7.30)$$

и профиль скорости поэтому должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{u_*}{l_s} = \frac{u_*}{kz} \sqrt{1 + \beta \operatorname{Ri}}$$
(7.31)

при всех условиях. Уравнение (7.31) приводится к обычной форме (3.36) при безразличном равновесии (Ri = 0), и в этом отношении уравнение Россби—Монтгомери согласуется с предыдущей работой; но предположение о том, что существует одно лишь значение для β , является произвольным, оно может быть подтверждено только благодаря привлечению наблюдений. Свердруп при широком анализе профилей ветра над снегом (обычно при Ri > 0) дал подтверждение этой теории и получил величину $\beta = 11$; но Дикон, используя профили, измеренные над короткой травой и в пустыне, нашел, что β систематически увеличивается по мере роста устойчивости.

В ламинарном потоке перемешивание характеризуется бесконечно малым молекулярным путем свободного пробега с исчезанием турбулентного пути перемешивания, что указывает на угасание турбулентности. Выражение Россби—Монтгомери для l_s очень медленно стремится к нулю при возрастании Ri и не исчезает при любом конечном значении числа Ричардсона. Это свойство противоречит большинству наблюдений. Гольцман сделал предположение (чисто эмпирически), что более приемлемой формой для l_s является

$$l_s = l \sqrt{(1 - \sigma \operatorname{Ri})} = kz \sqrt{(1 - \sigma \operatorname{Ri})}, \qquad (7.32)$$

где σ — другая (положительная) постоянная. Это приводит к $l_s = 0$ при Ri = $\frac{1}{\sigma}$, т. е. к конечной величине. Дифференциальным уравнением для профиля будет

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{kz \sqrt{(1 - \sigma Ri)}}$$
(7.33)

при условии, что σRi > 1. Предположение Гольцмана можно проверить двумя путями: во-первых, указывает или не указывает о на какое-либо систематическое изменение при изменении шероховатости поверхности и устойчивости, и, во-вторых, путем исследования предположения о том, исчезает ли турбулентность, когда Ri = 1. Эти проверки с очень удовлетворительными результатами были доведены до конца Диконом для сравнительно широкого диапазона условий, при этом в первую очередь использовались профили, измеренные над травяным покровом и пустыней $(0,03 \le z_0 \le 0.4; -0.4 \le \text{Ri} \le 0.3),$ и во вторую очередь — записи по двойным флюгаркам и манометрическому анемометру Дайнса (приемная часть на высоте 13 м над равниной). Величины с, полученные из профилей ветра, не дают никакого систематического изменения ни с zo, ни с Ri, а группируются случайным образом около средней величины $\sigma = 7$, причем диапазон отдельных величин варьирует от 4 до 11. При проверке вторым способом как двойная флюгарка, так и анемометр показали полное отсутствие порывистости, когда Ri≥0,15. Это хорошо согласуется с величиной $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{7} \approx 0,14$, полученной из профилей. Если Ri очень мало, выражение Гольцмана для l. почти одина-

Если Ri очень мало, выражение Гольцмана для l_s почти одинаково с выражением, предложенным Россби и Монтгомери, но в отличие от него уравнение (7.32) не имеет теоретического обоснования. Вывод Дикона о том, что $Ri_{\kappa p} = 0,15$, по-видимому, основан на более достоверном материале, чем большинство прежних результатов, но для окончательного заключения необходимо продолжить исследования над различными поверхностями. Наиболее положительные черты этой работы состоят в том, что она указывает на возможную связь между турбулентным и ламинарным состоянием. При данном состоянии развития теории атмосферной турбулентности трудно достаточно надежно описать диффузию процессов при экстремальных температурных градиентах, и поэтому следует приветствовать любое развитие этих вопросов. Общая задача перехода от турбулентного к ламинарному потоку остается пока еще одной из самых трудных и непонятных в метеорологии.

7. 6. Ветры местного происхождения

Предыдущее изложение относилось к ветрам, которые образуют часть динамической системы больщих масштабов. Но вблизи поверхности земли существуют воздущные движения чисто местного происхождения, только косвенно связанные с основным полем давления. Такие ветры обычно продолжаются всего несколько часов и распространяются, самое больщое, на несколько десятков километров на земной поверхности. Очень часто они оказывают важное влияние на сельское хозяйство и другие виды человеческой деятельности.

Береговые и морские бризы. Наиболее знакомый пример местного ветра встречается на побережьях. При сильном солнечном сиянии поверхность земли нагревается больше, чем примыкающий океан, и в результате давление над сушей падает с высотой медленнее, чем над морем. На границе раздела суши и моря изобарические и изотермические (равной плотности) поверхности наклоняются в различных направлениях, пересекаясь над береговой линией. Это условие, как показывает Брент [2], приводит к циркуляции, и ветер днем дует с моря на сушу. Холодный воздух, приходящий с моря, вытесняет теплый воздух, находящийся над сушей. Ночью, когда суша холоднее поверхности моря, движение воздуха происходит с суши на море.

Наблюдения морского бриза на побережье Новой Англии были сделаны Виллетом [44], который нашел, что это течение невысокое, обычно от 250 до 400 м по высоте. Влияние морского бриза обнаруживается до 30 миль (50 км) в глубь суши от открытого моря. Вечером морской бриз становится параллельным береговой линии.

Гаурвиц [23] рассмотрел общую теорию морского бриза и нашел, что сила Кориолиса имеет при этом важное значение. Член, эквивалентный градиенту давления в теореме циркуляции, пропорционален разности температуры над сушей и морем. Пирсон [45] недавно продолжил эту работу, включив влияние силы трения; но полное математическое выражение для скорости чрезвычайно громоздко и сложно и здесь не приводится. Качественно результаты согласуются с данными Виллета для Новой Англии, а также с наблюдениями в Бостоне, Массачусетсе, но в деталях имеются противоречия.

Горные и долинные ветры. Явление горных и долинных ветров, которое имеет большое значение в экономике сельского хозяйства в горных районах, исследовалось Вагнером, Дефантом и др. Наблюдения показывают, что хорошо выраженные местные циркуляции проявляются в долинах, связывающих равнины с горами. Такие циркуляции дают заметное суточное изменение в условиях. где основное поле давления устойчивое. Дефант [46] на основании работы Вагнера дал следующее идеализированное описание долинных ветров. Перед восходом солнца имеется устойчивое движение воздуха вниз по долине к равнине, так называемый горный ветер (Bergwind). По мере того, как солнце поднимается, склоны долины нагреваются и более легкий воздух начинает двигаться по ним. чтобы снова опуститься к центру долины. Этот поднимающийся по склонам ветер (Hangaufwinde) преобладает до полудня, когда он соединяется вместе с ветром, поднимающимся по долине с равнины. После полудня долинный ветер преобладает, а поднимающийся по склонам ветер слабеет и исчезает. Вечером охлаждение воздуха от верхних частей склонов дает начало спускающемуся по склону, или нисходящему, горному ветру, при котором воздух скатывается по склонам и подтекает к центру долины. Поздно ночью такая циркуляция сменяется горным ветром и начинается перемещение воздуха с центра долины к равнине, продолжающееся до рассвета.

Математическое рассмотрение ветра склонов. Кинематика движения воздуха в холмистой местности рассматривалась в гл. 2 как пример невращательного движения идеальной жидкости. Прандтль [47] дал простое решение задачи конвективного движения на склоне с учетом трения.

Рассмотрим случай ветров вверх по склону (для течений вниз по склону анализ требует незначительного изменения). Пусть OP^* будет частью плоскости, расположенной над углом φ к горизонту, а ξ , ζ — координаты, измеряемые вдоль склона и нормально к нему. Если z — высота над горизонтальной плоскостью Ox, то

 $z = \xi \sin \varphi + \zeta \cos \varphi. \tag{7.34}$

Ночью атмосфера находится в устойчивом состоянии, при этом потенциальная температура растет вверх. На рассвете лучи солнца нагревают поверхность и тепло передается воздуху, вызывая отклонения θ' от начального состояния. Примем, что ночью потенциальная температура линейно возрастает с высотой. Вскоре после рассвета

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\theta}'\left(\boldsymbol{\zeta}\right), \tag{7.35}$$

где A и B — постоянные. Ускорение воздуха по вертикали за счет плавучести равно $g\alpha\theta'$, где α — коэффициент термического расширения (гл. 4). При рассмотрении движения параллельно склону уравнение движения для ветра u вверх по склону будет

$$\frac{du}{dt} = g \alpha \theta' \sin \varphi + K_M \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} . \qquad (7.36)$$

Оно предполагает, что u есть функция только ζ и всегда параллельна склону, так что $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$; K_M — вихревая вязкость, постоянна. Уравнение переноса тепла есть

$$\frac{d\theta}{dt} = K_H \Big(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \Big), \qquad (7.37)$$

где K_H — вихревая проводимость, также принимаемая постоянной. Предполагается, что $K_M \neq K_H$.

Устойчивое состояние, определяемое через $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, означает, что- $\frac{d\theta}{dt} = u \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$, а далее принимается, что $\frac{\partial^{2\theta}}{\partial \xi^{2}}$ исчезающе мало в сравнении с $\frac{\partial^{2\theta}}{\partial \xi^{2}}$. Уравнения (7.36) и (7.37) сводятся к

$$0 = g\alpha\theta' \sin\varphi + K_M \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}, \qquad (7.38)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = K_H \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} . \tag{7.39}$$

Преобразуя координаты через (7.34), получаем

$$uB\sin\varphi = K_H \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \zeta^2} . \qquad (7.40)$$

Дифференцируя уравнение (7.40) дважды по ζ и заменяя $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$ в уравнении (7.38), получаем уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^{4\theta'}}{\partial\zeta^4} + \left(\frac{g\alpha}{K_M K_H}\right) B \sin^2 \varphi \theta' = 0.$$

Решение этого уравнения, которое ограничено для $\zeta = 0$ и стремится к нулю, когда $\zeta \rightarrow \infty$, будет

$$\theta'(\zeta) = \theta'_0 \cos \frac{\zeta}{l} \exp\left(-\frac{\zeta}{l}\right),$$
 (7.41)

где θ_0' — приращение температуры на поверхности склона ($\zeta = 0$), а l — постоянная длина, определяемая уравнением

$$l^4 = 4 \left(\frac{K_M K_H}{g^{\alpha}} \right) \frac{\csc^2 \varphi}{B} \, .$$

Профиль скорости ветра на склоне по нормали к склону дается через

$$u = \theta_0' \left(\frac{g^{\alpha} K_M}{B K_H} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\zeta}{l} \exp\left(-\frac{\zeta}{l}\right).$$
 (7.42)

Этот профиль имеет вид затухающего колебания относительно u = 0 с амплитудой, уменьшающейся с расстоянием по нормали к склону. Скорость приближается к нулю и меняет знак при $\zeta = 0$ πl , $2\pi l$..., но практически ветер ограничивается слоем (0, πl) вследствие быстрого уменьшения фактора $\exp\left(\frac{-\zeta}{l}\right)$, так как ζ становится большим (рис. 29). Градиент скорости, нормальный к єклону.

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \theta_0' \left(\frac{g \alpha K_H}{B K_M} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\zeta}{l}\right) \left(\cos \frac{\zeta}{l} - \sin \frac{\zeta}{l} \right).$$

Таким образом, ветер достигает своего первого и абсолютного максимума на расстоянии по нормали к склону, которое определяется через

$$\zeta = \frac{1}{4} \pi l. \tag{7.43}$$

Наблюдения за ветрами склонов. Дефант привел результаты наблюдений, сделанных по шарам-пилотам на крутом склоне (42°) в Инсбрукской горной цепи. Они даны в табл. 29.



Рис. 29. Схема строения ветра склонов.

Примечательно, что хотя оба течения достигают довольно хорошо выраженного максимума около $\zeta = 27$ м, ветер вверх по склону не дает заметного уменьшения на $\zeta = 130$ м, тогда как ветер вниз по склону уменьшается до нуля примерно на $\zeta = 100$ м.

Таблаца 29

Ветры вверх и вниз по склону для крутого холма ($\varphi = 42^{\circ}$), по Дефанту

Ветер вверх по склону

Расстояние по нормали

к склону С, м . . . 5 10 15 20 25 30 35 40 50 100 120 130 Скорость и см сек.⁻¹ 229 291 339 370 386 386 380 367 339 242 226 238

Ветер вниз по склону

Расстояние по нормали

к склону **ζ**, м . . . 5 10 15 20 25 30 35 40 50 100 110 Скорость и см сек.⁻¹ 96 150 195 222 234 235 227 215 191 23 -2

Из уравнения (7.43) и отмеченного максимума скорости на $\zeta = 27$ м следует, что

l = 34,4 M.

Следовательно, ветер как вверх, так и вниз по склону не является мощным течением, а ограничивается слоем $0 \ll \zeta \ll \pi l = 108$ м. Этот факт согласуется с наблюдениями за ветром вниз по склону, но опровергается измерениями течения вверх по склону. Для определения фактических скоростей, которые для данного l зависят только от отношения $\frac{K_H}{K_M}$, принимается, что вихревая проводимость на 50%, больше, чем вихревая вязкость; это заключение основано на наблюдениях Элиаса и Лоренца в аэродинамической трубе. Результаты дают приемлемое согласование с абсолютными величинами, полученными из анализа шаропилотных данных, за исключением противоречия (отмеченного выше) между теоретическим и наблюденным ветрами вверх по склону для величин ζ вблизи 100 м.

Дефант обобщил решение Прандтля для случая, отличающегося от равновесного, подробности этого читатель может найти в оригинальной работе. Таким образом, элементарный анализ Прандтля, несмотря на смелый характер предположений, дает результаты, которые находятся в хорошем согласовании с наблюдениями. Поэтому его можно рассматривать, как первое удачное решение чрезвычайно важной проблемы. Сток холодного воздуха в долину может оказать серьезное влияние на посевы и даже на благосостояние людей. особенно если при этом существует источник загрязнения; в связи с этим проблема заслуживает самого глубокого изучения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Hellmann G. Meteorol. Z., 32, 1, 1915.
- 2. Brunt D. Physical and Dynamical Meteorology, Cambridge, 1939.
- 3. Hevwood G. S. P. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 57, 433, 1931.
- 4. Sutton O. G. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 58, 74, 1932.
- 5. Scrase F. J. Geophys. Mem. 52.
- 6. Thornthwaite C. W. and Kaser P. Trans. Am. Geophys. Union, 1, 166, 1943.
- 7. Deacon E. L. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 75, 89, 1949. 8. Best A. C. Geophys. Mem. 65.
- 9. Sverdrup H. U. Geophys, Pub., 11, 7, 1936.
- Paeschke W. Beitz. Phys. fr. Atmos., 24, 163, 1937.
 Sheppard P. A. Proc. Roy. Soc. (London). A 188, 208, 1947.
- 12. Lettau H. Atmosphärische Turbulenz, Leipzig, 1939.
- Frost R. Meteorol. Mag., 76, 14, 1947.
 Barkat Ali. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 58, 285, 1932.
- 15. Giblett M. A. et al., geophys. Mem. 54.
- 16. Calder K. L. Quart. J. Mech. Applied Math., 2, 153, 1949.

- 21. Köhler H. Kgl. Svenska Vetenskansakad. Handl., 13, 1, 1933.
- 22. Rossby C. G. Mass. Inst. Technol., Meteorol. Papers, 1, 4, 1932.

- 22. ROSSBY C. C. Mass, first. rectifion, meteorol. Lapers, 1, 7, 1362.
 23. Havrwitz B. J. Meteorol, 4, 1, 1947.
 24. Å kerblom F. Arkiv. Mat. Astron. Fysih, 11, No 18, 1916.
 25. Jeffreys H. Proc. Roy. Soc., London, A 96, 233, 1920.
 26. Westwater F. L. Quart, J. Roy. Meteorol. Soc., 69, 207, 1943.
 27. Sir Napier Shaw. Manual of Meteorology, Vol. IV, Cambridge, 1930.
 28. Dines J. S. Aeronaut. Research Committee, R. and M., No. 36.
 29. Taxlor G. L. Aeronaut. Research Committee, R. and M., No. 345.
- 29. Taylor G. I. Aeronaut. Research Committee, R. and M., No. 345
- 30. Hesselberg Th. and B. Bjorkdal. Beitr. Phys. fr. Atmos., 15, 1921-31. Wagner A. Gerlands Beitr. Geophysik, 24, 368, 1929. 32. Fage A. and Townsend H. C. H. Proc. Roy. Soc. (London), A 135,
- 656, 1932.

- 33. Taylor G. I. Proc. Roy. Soc. London, A. 92, 196, 1916.
- 34. Sutcliffe R. C. Quart, J. Roy. Meteorol. Soc., 62, 3, 1936.
- 35. Durst C. S. Monthly Notes Roy. Astron. Soc., 5. 369, 1949.
- 36. Piercev N. V. Aerodynamics, London, 1947.

- 37. Pasquill F. Proc. Roy. Soc., London, A 202, 143, 1950. 38. Rossby C. G. Ann. N. V. Acad. Sci., 44, 1943. 39. Wattendorf; see v. Kàrmàn, J. Aeronaut. Sci., 1, 20, 1934.
- 40. Sutton O. G. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 75, 335, 1949.
- 41. Durst C. S. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 59, 131, 1933.
- 42. Sutton O. G. Atmospheric Turbulence, London, 1949.
- 43. Holzman B. Ann. N. V. Acad. Sci., 44, 13, 1943.
- 44. Willett H. C. Descriptive Meteorology. New lork, 1944. 45. Pierson W. J. Yr., N. V. Univ., Meteorol. Papers 1, 2, 1950.
- 46. Defant F. Arch, Meteorol, A 1, 421, 1949.
- 47. Prandtl L. Strömungslehre. Brunswick, 1942. 48. Верлянд М. Е. Труды НИУ ГУГМС, вып. 25. 1947.
- 49. Гайдин Л. С., Лайхтман Д. Л., Матвеев Л. Т., Юдин М. И. Основы динамической метеорологии, Гидрометеоиздат, Л., 1955.

- 50. Гутман Л. Н. Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948. 51. Дородницын А. А. Труды ГГО, вып. 8 (31), 1940. 52. Дородницын А. А. Труды ЦИП, вып. 2 (48), 1950. 53. Константинов А. Р. Метеорология и гидрология, № 9, 1953.
- .54. Кузьмин П. П. Труды ГГИ, вып. 11, 1941.
- 55. Лайхтман Д. Л. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., т. VIII, № 1, 1944.
- 56. Лайхтман Д. Л. Труды НИУ ГУГМС, сер. І, вып. 39, 1947.
- 57. Лайхтман Д. Л., Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы. Гостехиздат, 1949.
- 58. Лайхтман Д. Л., Огнева Т. А. Труды ГГО, вып. 39 (101), 1953.
- 59. Матвеев Л. Т. Метеорология и гидрология, № 3, 1949.

- 60. Монин А. С. Труды ЦИП, вып. 8 (35). 1948. 61. Огнева Т. А. Труды ГГО, вып. 59 (121), 1956. 62. Сапожникова С. А. Труды НИУ ГУГМС, сер. I, вып. 33, 1946. 63. Юдин М. И. Швец М. Е. Труды ГГО, вып. 8 (31), 1940.
- 64. Юдин М. И. Уч. зап. ВАМУ, вып. 5, 1954.

ГЛАВА 8

ДИФФУЗИЯ И ИСПАРЕНИЕ

Проблемы диффузии в нижних слоях атмосферы подразделяются на два основных класса в зависимости от того, влияют ли свойства окружающей атмосферы на скорость возникновения диффундирующего вещества. Диффундирующее вещество может быть газообразным или твердым в дисперсной форме.

Типичная проблема первого класса — это проблема распространения дыма из промышленного района, в котором мощность источника практически не зависит от метеорологических условий. Во втором классе важной проблемой является испарение со свободной поверхности воды или с почвы, в этом случае необходимо определить мощность источника в зависимости от скорости ветра, температуры и влажности воздуха.

Большинство экспериментальных данных по атмосферной диффузии, известных в настоящее время, получены из исследований, которые проводились в армии в связи с необходимостью точногоопределения рассеивания ядовитых газов при различных метеорологических условиях в период химической войны. Такие данные получают обычно по скорости диффузии от контролируемых источников, и из-за своей точности и сравнительной простоты эти данные позволяют выяснить особенности турбулентности в нижнем слое атмосферы.

8. 1. Характеристики облаков от искусственных источников

Проблема атмосферной диффузии наиболее легко может быть исследована для случая распространения дыма от установившегося непрерывного источника, расположенного на уровне земли. При умеренном ветре дым от такого источника движется по направлению ветра в виде длинного расширяющегося облака. Мгновенная фотография, сделанная сбоку, покажет характерную неровную кромку вершины, поднимающейся вверх от источника под углом, зависящим в большей или меньшей степени от скорости ветра, природы источника (горячего или холодного) и устойчивости атмосферы. Форма облака на горизонтальной плоскости, как показывает аналогичная фотография, сделанная сверху, напоминает по виду перо с неровными границами. Таким образом, облако от непрерывного точечного источника расширяется вертикально и горизонтально с изменением расстояния от источника, а частицы движутся от места возникновения со скоростью ветра. Основная теоретическая проблема атмосферной диффузии состоит в установлении соотношений между разбуханием облака и связанным с ним падением концентрации взвеси от скорости и турбулентности потока.

Важной проблемой является нахождение путей определения скорости диффузии из измерений чисто метеорологических характеристик, таких как ветер, температура и влажность. Концентрация вещества характеризуется флюктуацией в любой точке, но внимание неизменно направлено на поведение средней концентрации за выбранный период забора пробы.

Терминология. В главе используются следующие понятия.

1. Мощность источника Q есть скорость возникновения вещества в виде газа или мелкой взвеси. Если вещество образуется мгновенно, как при взрыве, то мощность источника является просто массой вещества, поступившей при этом в атмосферу. Когда вещество постоянно возникает в точке, как в случае с газовым баллоном, дымовым генератором или трубой, Q выражается в граммах в секунду. Перпендикулярный ветру линейный источник состоит из целого ряда точечных генераторов, расположенных перпендикулярно направлению среднего ветра, а Q выражается в г сек.⁻¹ см⁻¹ и представляет собой количество вещества, которое поступает в атмосферу с единицы длины источника за единицу времени. При плоском источнике, который возникает при испарении, Q выражается в г сек.⁻¹ см⁻².

2. Средняя концентрация, или плотность, взвешенного газообразного или диспергированного вещества выражается в граммах на кубический сантиметр. Чтобы избежать очень маленьких чисел, удобно при военно-химических исследованиях измерять концентрацию в миллиграммах на кубический метр. Стехиометрическая система часто используется для реальных газов, особенно в работах, относящихся к атмосферному загрязнению. При этом концентрация выражается в количестве частиц на единицу объема. Соотношение между плотностью и стехиометрическим отношением зависит от закона Авагадро, согласно которому одна граммолекула газа при нормальных температуре и давлении занимает приблизительно объем в 22,4 литра. Для двуокиси серы (SO₂, молекулярный вес 64), наиболее частого загрязнителя атмосферы, соотношение есть 1 mg m⁻³ == 0,35 ppm.

В этой главе используется абсолютная система единиц, так что результаты применимы к любому газу и твердому веществу во взвешенном состоянии при условии, что частицы достаточно малы, чтобы можно было пренебречь седиментацией.

3. Размеры облака (высота и ширина) удобно определить условием, что граница облака проходит через точки, где концентрация

является фиксированной дробью, обычно одной десятой от наивысшей концентрации в той же самой плоскости.

Влияние периода забора пробы. Определение концентрации от фиксированного точечного источника обычно выполняется помещением аппаратов, берущих пробу по центрированным относительно источника дугам, расположенным перпендикулярно ветру на фиксированных расстояниях от источника. Аппаратами можно взять пробы для периодов, колеблющихся от "мгновенных" (т. е. полное время взятия пробы меньше 1 сек.) до минут или часов.



Рис. 30. Концентрация примеси в облаке от точечного источника.

1 - мгновенные заборы, 2 - осредненные по времени заборы.

Результаты очень ясно выявляют важность периода забора пробы в области, где происходит диффузия. Мгновенная проба, если ее нанести в зависимости от расстояния перпендикулярно направлению ветра, изображается кривой с одним максимумом типа "поднятой шляпы" с относительно высокой вершиной и узким основанием. Осредненная по времени проба, характеризующая среднюю концентрацию за несколько минут, с аппаратурой для забора проб, закрепленной в определенном положении относительно источника, показывает кривую того же типа с более низкой вершиной и более широким основанием.

На рис. 30 приводится обычный характер этих результатов, которые относятся к концентрации от точечного источника дыма при небольшом температурном градиенте.

Полная ширина облака на расстоянии 100 м от источника около 20 м, осредненная по времени — около 35 м. По-видимому, аналогичный эффект характерен и для высоты облака, но он не так резко выражен. Измерения показывают, что ширина облака от точечного источника довольно быстро возрастает, когда продолжительность забора проб увеличивается от нуля до 2 мин., но с дальнейшим увеличением продолжительности забора скорость возрастания ширины становится намного меньше, и можно ожидать, что устойчивые результаты будут получены, если направление средней скорости ветра не изменится, а период забора проб не меньше 3 мин. Это установлено для малых температурных градиентов (Сеттон [1]), но не для больших температурных градиентов и больших инверсий, и возможно, что в этих условиях требуются более длительные заборы, чтобы полностью исключить действие продолжительности забора.

Действие продолжительности забора отражает широкую зону частот в вихревом спектре естественного ветра. Мгновенные характеристики обусловлены множеством маленьких вихрей и одного или двух больших вихрей, что приводит к узкому конусу дыма. Этот конус колеблется над широким фронтом под влиянием больших вихрей, так что средние по времени характеристики обусловлены как диффузией малых масштабов, так и больших масштабов турбулентности.

Аналогичное явление обнаруживается при анализе записи двойной флюгарки (гл. 7) и может быть сравнено с лучом прожектора, который движется под влиянием случайных порывов. В любой момент луч имеет определенную ширину и определенное распределение интенсивности освещения, но суммарное действие за любой очень длинный период времени составляется из нормального рассеяния луча и широких размахов прожектора.

Публикуемая работа относится главным образом к осредненному во времени распределению, имеется в виду, что заборы проб брались не менее 3 мин.

Эмпирические соотношения для диффузии при небольших температурных градиентах. Приводимые ниже данные осредненных по времени проб были установлены для облаков дыма и газа над гладкой поверхностью земли при небольшом температурном градиенте (Сеттон). Во всех случаях источники были помещены на уровне земли.

1. В любой точке, расположенной по направлению ветра от непрерывного источника, концентрация изменяется прямо пропорционально мощности источника, при условии, что источник не вызывает заметных конвективных потоков.

2. Средневременная концентрация в каждой точке по направлению ветра от непрерывного точечного источника изменяется (приблизительно) обратно пропорционально средней скорости ветра.

3. Средневременная ширина и высота облаков от непрерывных источников мало зависит от средней скорости ветра. Величины, полученные при условиях небольших температурных градиентов, даны в табл. 30.

Результаты могут быть экстраполированы для больших расстояний на основании следующих эмпирических соотношений.

20 О. Г. Сеттон

Таблица 30

Данные для диффузии от установившихся непрерывных точечных и линейных источников (перпендикулярно ветру), расположенных на уровне земли при небольших температурных градиентах, по Сеттону

Тип источника	Мощность	Скорость ветра на 200 см, см сек1	Расстояние от источ- ника, м	Макси- мальная концеитра- ция, мг/м ³	Ширина, м	Высота над поверхно- стью почвы
Непрерывный то- чечный источ- ник Непрерывный ли- нейный источ-	1 г сек.—1	500	100	2	35	10
ник бесконеч- ной длины, пер- пендикулярный ветру	1 г сек.—1 см ⁻¹	500	2000 1000 1000	3500		10

Непрерывный точечный источник. Центральная, или максимальная, концентрация уменьшается с расстоянием вдоль ветра, соответственно закону

$$\frac{\chi(x_1)}{\chi(x_2)} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1,76},$$
 (8.1)

где $\chi(x)$ — концентрация в (x, 0, 0).

Непрерывный линейный источник бесконечной длины, расположенный перпендикулярно ветру

$$\frac{\chi(x_1)}{\chi(x_2)} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.9},$$
(8.2)

где $\chi(x)$ — концентрация в (x, 0).

Данные, приведенные выше, и эмпирические законы применимы только к условиям небольшого температурного градиента (облачное небо и средние или сильные ветры). Данные для больших температурных градиентов до сих пор не опубликованы.

Изменения концентрации перпендикулярно ветру и по вертикали следуют приблизительно нормальному закону ошибок. Таким образом, если изменение концентрации перпендикулярно ветру на фиксированных расстоянии и высоте представлено

$$\chi(y) = \chi(0) e^{-ay^2}$$

то следует, что полуширина облака уо дается

$$e^{-ay_0^2} = 0,1$$

или

$$y_0 = \sqrt{\frac{1}{a} \ln 10} \approx \sqrt{\frac{2.30}{a}} \,.$$

Подобное соотношение справедливо для высоты z_0 . Следует заметить, что ширина и высота, определенные таким образом, не зависят от мощности источника. Вообще, эти размеры не имеют никакой определенной связи с видимым контуром облака, который, помимо степени рассеяния облака, определяется оптическими свойствами дыма, такими, как поглощение и рассеяние.

8. 2. Теоретическое изучение диффузии от искусственных источников

Система координат, применяемая в математическом анализе, та же, что и в гл. 7, в ней ось x горизонтальна и имеет направление среднего ветра, ось у горизонтальна и направлена перпендикулярно ветру, а ось z — вертикальна. Средний ветер предполагается установившимся и зависящим только от высоты над землей (z = 0), так что $\overline{u} = \overline{u}(z), \overline{v} = \overline{w} = 0$. Земля предполагается непоглощающей и непроницаемой для диффундирующего вещества.

Проблемы, рассмотренные в этом разделе, относятся к установившемуся непрерывному точечному и бесконечному (перпендикулярному ветру) линейному источнику, сохраняющемуся неограниченно долго. Выражения для концентрации в облаках от источников, действующих в течение ограниченного времени, могут быть получены стандартными математическими методами из основных решений, но поскольку они не имеют никаких метеорологических приложений и интересны главным образом в военных целях, они здесь рассматриваться не будут.

Проблемы этого типа влекут в первую очередь решение уравнения диффузии для турбулентного потока:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)$$
(8.3)

(см. гл. 4), где $\chi(x, y, z, t)$ — средняя концентрация диффундирующего вещества, а K_x , K_y , K_z — коэффициенты турбулентной диффузии в направлении главных осей. Поскольку $\overline{v} = \overline{w} = 0$, то следует, что

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial\chi}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial\chi}{\partial x} ,$$

а в установившемся состоянии $\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0.$

Краевые условия для мгновенного источника были рассмотрены в гл. 4. Для непрерывных источников, помещенных на уровне земли, граничными условиями являются:

(1) $\chi \rightarrow 0$ при $x, y, z \rightarrow \infty$.

(2) $K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, x > 0 (земля непроницаема для газа). (3) $\chi \rightarrow \infty$ в x = y = z = 0. (4) Условие непрерывности:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\bar{u}^{\chi}(x, y, z)\,dz\,dy=Q.$$

Условне (4) выражает тот факт, что вещество при движении облака не исчезает и не возникает.

Решения при постоянном коэффициенте турбулентности. Основные особенности математической проблемы выясняются при исследовании решения уравнения (8.3), данного О. Ф. Т. Робертсом [2] для K_x , K_y , K_z — постоянных и u — не зависимого от z. Эти решения были уже получены в гл. 4 [уравнения (4.46) и (4.47)].

На основании приведенных выше определений полуширины y₀ и высоты z₀ облака показательные члены в решении дают

$$y_0 = \left(\frac{4\ln 10 K_y}{\bar{u}} x\right)^{\frac{1}{2}},$$
 (8.4)

$$z_0 = \left(\frac{4\ln 10 K_z}{\overline{u}} x\right)^{\overline{2}}.$$
 (8.5)

Для $x = 10^4$ см табл. 30 дает $y_0 = 1,75 \cdot 10^3$ см, $z_0 = 10^3$ см; опыты были проведены при средней скорости ветра около 500 см сек.⁻¹. Эти данные и уравнения (8.4) и (8.5) дают $K_y = 1,6 \cdot 10^4$ см² сек.⁻¹, $K_z = 5 \cdot 10^3$ см² сек.⁻¹. Эти значения согласуются с данными, полученными для вихревой вязкости и вихревой температуропроводности при тех же предположениях. Боковое и вертикальное распределения концентраций следуют нормальному закону ошибок в соответствии с наблюдениями.

Исследование результатов для концентрации как функции расстояния по направлению ветра, однако, показывает, что предположения о постоянстве вихревого коэффициента диффузии неприемлемы. Максимальные концентрации в облаке от точечного источника обнаружены на линии y = z = 0, а для безграничного перпендикулярного ветру линейного источника — на плоскости z = 0.

Из решений (4.46) и (4.47) следует, что для непрерывного точечного источника

$$\chi_{\max} = \frac{Q}{4\pi x \left(K_y K_z\right)^{\frac{1}{2}}},$$
 (8.6)

для безграничного линейного источника

$$\chi_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{2\pi K_z x}} . \tag{8.7}$$

Из сравнения с эмпирическими формулами (8.1) и (8.2) вытекает, что теоретическая скорость уменьшения концентрации с расстоянием от источника слишком мала. Наблюдения показывают, что в состоянии безразличного равновесия концентрация от точечного источника у земли уменьшается очень быстро, а именно, как $x^{-1,76}$, тогда как в теоретическом выражении скорость падения дается, как x^{-1} . Такого же рода расхождение обнаружено в выражении для линейного источника. Следовательно, численные значения для K_y и K_z , полученные из наблюдений над максимальными концентрациями и из выражений (8.6) и (8.7), неограниченно возрастают с расстоянием от источника.

Невозможно приписать определенный физический смысл параметрам, численное значение которых определяется расстоянием точки наблюдения от произвольного начала. Этот результат попросту означает, что допущения о постоянстве K_y и K_z не применимы в проблемах турбулентной диффузии в атмосфере. Такое допущение позволяет получить выражение, дающее лишь качественное описание процесса.

Решения при меняющемся коэффициенте турбулентности. Двухразмерная проблема. Уравнение установившегося состояния диффузии в двух измерениях имеет вид:

$$\overline{u}(z)\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(z)\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right], \qquad (8.8)$$

если пренебречь членом $\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)$. Проблема, рассматриваемая здесь, является проблемой диффузии от линейного источника неограниченной длины, расположенного на линии x = z = 0; в течение длительного времени источник выделяет вещество с постоянной скоростью Q. Краевые условия следующие:

(1)
$$\chi \to 0$$
 при $x, z \to \infty$.

(2) $K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, x > 0.

(3)
$$\chi \to \infty$$
 вдоль $x = z = 0$
(4) $\int_{0}^{\infty} \overline{u} \chi(x, z) dz = Q$ для $x > 0$.

Наблюдения показывают, что в состоянии безразличного равновесия высота облака, возникающего на земной поверхности, составляет 5—10% от пройденной дистанции. Следовательно, для расстояний, не превышающих километр, диффузия имеет место внутри слоя постоянного касательного напряжения, где применяется степенной закон Шмидта (гл. 3). Если допустить, что коэффициент турбулентности подчиняется тому же закону изменения с высотой, что и вихревая вязкость, то следует, что

$$K_z = \operatorname{const}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{-1}.$$

Здесь возникает математическая трудность. В условиях безразличного равновесия профиль скорости наиболее точно описывается логарифмической функцией (гл. 7). Это значит, что $K_z(z)$ пропорционально z, но решение уравнения (8.8) для $\overline{u} = \log z$, $K_z = z$ неизвестно.

С другой стороны, если

$$\overline{u}(z) = \overline{u}_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m \tag{8.9}$$

$$K_z(z) = K_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \tag{8.10}$$

(где u_1 и K_1 являются соответственно величинами u и K_z на фиксированной высоте z_1 , которая для удобства может быть принята за единицу), уравнение очень легко решается через элементарные функции.

Если обозначить $s = \left(\frac{m+1}{m-n+2}\right)$, то решение есть

$$\chi(x, z) = \frac{Q}{\overline{u_1}\Gamma(s)} \left[\frac{\overline{u_1}}{(m-n+2)^2 K_1 x} \right]^s \exp\left[-\frac{\overline{u_1} z^{m-n+2}}{(m-n+2)^2 K_1 x} \right] (8.11)$$

при условии, что m-n+2>0. В частном случае, когда касательное напряжение не меняется с высотой, из степенного закона Шмидта следует соотношение n=1-m ($0 \le m \le 1$), и уравнение (8.11) сводится к

$$\chi(x,z) = \frac{Q}{(2m+1)^{\frac{2(m+1)}{(2m+1)}} \Gamma\left[\frac{(m+1)}{(2m+1)}\right] K_1^{\frac{(m+1)}{(2m+1)}} u_1^{\frac{m}{(2m+1)}} x^{\frac{(m+1)}{(2m+1)}}} \times \exp\left[-\frac{\tilde{u}_1 z^{2m+1}}{(2m+1)^2 K_1 x}\right].$$
(8.12)

Над гладкой поверхностью или над поверхностью с невысокой травой при безразличном равновесии структура ветра приближается к известному профилю корня седьмой степени. Для $m = \frac{1}{7}$, уравнение (8.12) становится

$$\chi(x,z) = \frac{Q}{\left(1\frac{2}{7}\right)^{\frac{16}{9}}\Gamma\left(\frac{8}{9}\right)K_1^{\frac{8}{9}}u_1^{\frac{1}{9}}x^{\frac{8}{9}}} \exp\left[-\frac{\overline{u_1}z^{\frac{7}{7}}}{\left(1\frac{2}{7}\right)^2K_1x}\right].$$
 (8.13)

Если допустить, что K_1 пропорционально u_1 , то выражение (8.13) хорошо согласуется с наблюдениями диффузии от непрерывного линейного источника, перпендикулярного ветру. Теоретические результаты показывают, что концентрация у земли обратно пропор-

циональна $\overline{u_1}$ и уменьшается, как $x^{-\frac{8}{9}} \approx x^{-0,9}$. Высота облака не зависит от скорости ветра и возрастает с расстоянием вдоль ветра,

как x^{9} . Эти свойства были проверены измерениями диффузии дыма над открытой равниной при небольших температурных градиентах (стр. 306).

Результаты, приведенные выше, применимы к любой поверхности, для которой простой степенной закон (8.9) хорошо описывает профиль ветра, в частности для гладкой местности. Величина K_1 может быть найдена, если известно τ_0 (или u_*). Для шероховатых поверхностей К. Л. Кэлдер [3] предложил приближенное решение, которое состоит в вычислении u_* и z_0 из логарифмического профиля

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{z_0} ,$$

который годится для безразличного равновесия. Для того чтобы избежать математических трудностей, встретившихся, когда \overline{u} выражается как логарифм высоты в члене $\overline{u} \frac{\partial \chi}{\partial x}$, Кэлдер заменяет точный профиль приближенным степенным законом

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = q \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha}$$
,

где q и а выбираются так, чтобы достигнуть наилучшего приближения к логарифмическому профилю. Поскольку степень не может равняться логарифму для всех значений переменной, q и а изменяются с толщиной рассматриваемого слоя, а потому и с расстоянием площадки наблюдений от начала. Это значит, что предварительная оценка высоты облака должна быть сделана до того, как найдены q и а, но на практике это не является серьезным препятствием, так как на больших расстояниях (≥ 100 м) от источника q и а изменяются очень мало с высотой слоя z. Когда степенной закон принят, то следует, что

$$K_{z} = \frac{\frac{u_{*}^{2}}{\frac{\partial u}{\partial z}}}{=} \frac{N}{\alpha q} \left(\frac{z}{z_{0}}\right)^{1-\alpha},$$

где $N = u_* z_0$ — макровязкость. Решение проблемы двухразмерной диффузии теперь дается уравнением (8.12) со значением K_1 , которое следует из приведенного выше выражения.

Для поверхности с высокой растительностью Кэлдер применяет эмпирический профиль

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = q' \left(\frac{z-d}{z_0}\right)^{\alpha'},$$

где d — смещение нулевой плоскости, а q' и a' — числа, выбранные,

как и раньше, так, чтобы наилучшим образом представить логарифмический профиль

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{z-d}{z_0} \right).$$

Для z < d отсутствует какой-либо определенный профиль, и Кэлдер поэтому перемещает начало оси z на плоскость z = d, которая, таким образом, становится действующей поверхностью земли. Решение (8.11), использованное таким образом, дает результаты, которые практически превосходно согласуются с наблюдением (Кэлдер [3]), но такой метод встречает возражение, поскольку плоскость z = d не является действительно непроницаемой поверхностью, такой как земля, и возможность применения этого решения к условиям, требующим больших значений d, вызывает сомнение. Основной результат этой работы двоякий: во-первых, показано, что, по крайней мере, в условиях безразличного равновесия обмен количеством движения и массой осуществляется по одинаковым законам, во-вторых, понятие о параметре шероховатости, установленное в работах с аэродинамическими трубами, непосредственно применимо к атмосфере и играет значительную роль в проблемах диффузии.

Трехразмерные проблемы. Типичная трехразмерная проблема — это проблема непрерывного точечного источника, ее решение связано с математическими затруднениями, которые необходимо преодолеть. Если, как и раньше, пренебречь $\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \ \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)$, то уравнение диффузии есть

$$\overline{u}(z)\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right).$$
(8.14)

Функциональная форма для K_z выражается степенным законом, но невозможно найти аналогичный путь для определения K_y ; очевидно, что K_y не может рассматриваться как функция от y, потому что это означает, что боковая диффузия зависит от расстояния диффундирующих частиц от произвольной плоскости, при этом единственная рациональная возможность состоит в том, чтобы K_y , подобно K_z , принять функцией высоты. Наиболее естественным является принятие для K_y степенного закона. Уравнение

$$\overline{u}_{1}z^{m}\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(az^{p}\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(bz^{1-m}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)$$
(8.15)

не может быть решено для любых значений p. Если p = m, то решение, соответствующее непрерывному точечному источнику, может быть найдено без труда через степенные функции x и через показательные функции, но такое решение не согласуется с наблюдением. По-видимому, индекс p должен быть или немного больше или немного меньше, чем 1 - m, чтобы сохранить согласование с экспериментальными данными. В целом проблема нуждается в радикальном математическом исследовании.

Метод, основанный на статистической теории. Один из путей изучения проблемы, который дает возможность найти приближенные решения для двух- и трехмерных задач, был развит Сеттоном [4] в 1932 г. Метод, по существу, состоит в нахождении подходящей формы для $R(\xi)$ — коэффициента корреляции между скоростью вихря в моменты t и $t + \xi$ (гл. 3) — на основании анализа размерности. Развитие теории основывалось на идеях Тейлора.

До сих пор средствами точного анализа не было найдено выражения для $R(\xi)$ в неизотропном поле. По определению,

$$R(\xi) = \frac{\overline{w'(t) w'(t+\xi)}}{\overline{w'^2}},$$

где $\overline{w'^2}$ полагается постоянной. Для движений вблизи гладкой поверхности корреляция между флюктуационными скоростями в последовательные моменты времени может приниматься зависящей в основном от интенсивности турбулентности (мерой интенсивности является вихревая энергия $\rho \overline{w'^2}$) от вязкости μ , которая в конечном счете приводит к затуханию флюктуаций, и времени ξ . Единственной безразмерной комбинацией, которая может быть образована из этих ве-

личин, является $\frac{\mu}{\rho w'^2 \xi}$, а отсюда

 $R(\xi) = f\left(\frac{\nu}{\overline{w'^{2}\xi}}\right),$

где f — неизвестная функция. Очевидно, R(0) = 1, и естественно ожидать, что $R(\xi) \rightarrow 0$, когда $\xi \rightarrow \infty$. Простейшая функция, обладающая этими свойствами, есть

$$R(\xi) = \left(\frac{\nu}{\nu + \overline{\omega'}^2 \xi}\right)^n, \qquad (8.16)$$

где n — некоторое положительное число. [Было показано, что показательная форма для $R(\xi)$ соответствует броунову движению (см. гл. 3)].

Выбор определенного вида для $R(\xi)$ дает возможность развить теорию турбулентного обмена двумя путями. Первый из них основан на концепции пути смешения. Если смешение определено как последовательное уменьшение корреляции между флюктуациями, которой подвергается элемент жидкости в различные моменты времени, то путь смешения может быть определен как расстояние, которое проходит вихрь за время t_0 , пока корреляция не упадет до нуля или достаточно малой величины. Таким образом,

$$K_{\mathcal{M}}(z) = \overline{w'l} = \overline{w'^{2}} \int_{0}^{t_{0}} R(\xi) d\xi \approx \frac{\sqrt{n}}{1-n} \left(\overline{w'^{2}} t_{0}\right)^{1-n}, \quad (8.17)$$

если w²t₀≫ ν. На основании выражения Кармана для пути сме-

шения

$$l = k \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

и соотношения между $\overline{w'^2}$ и $|\overline{w'}|^2$, которое следует из максвелловского закона распределения, может быть показано, что

$$K_{M}(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}\pi k^{2}\right)^{1-n}}{1-n} v^{n} \left(\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right|^{8} \left|\frac{\partial^{2}\overline{u}}{\partial z^{2}}\right|^{-2}\right)^{1-n}$$
(8.18)

Поскольку $K_M(z)$ существенно положительно, то следует, что $0 \le n \le 1$.

Если профиль скорости выражается уравнением (8.9), то легко видеть, что

$$m = \frac{n}{2-n} \,. \tag{8.19}$$

Это соотношение дает возможность найти n из наблюдений над структурой ветра вблизи земли, например, если используется профиль, описываемый корнем седьмой степени, то значение n есть $\frac{1}{4}$. Из профиля

$$\overline{u}(z) = \overline{u}_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{n}{(2-n)}}$$
(8.20)

и уравнения (8.18) следует, что

$$K_{M}(z) = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\pi k^{2}\right)^{1-n}(2-n)n^{1-n}}{(1-n)(2-n)^{2}(1-n)}\right] \sqrt{n\overline{u}} \sqrt{n\overline{u}} \sqrt{n\overline{u}} \frac{1-n}{(2-n)} z_{1}\frac{-n(1-n)}{(2-n)}.$$
 (8.21)

Выражение (8.21) дает возможность оценить вихревую вязкость для потока вблизи аэродинамической гладкой поверхности при условии, что профиль скорости может быть выражен как степенной закон типа (8.20). Если профиль, описанный корнем седьмой степени, годится, то следует, что

$$\frac{\tau}{\rho} = K_m(z) \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = 0,020 \nu^{\frac{1}{4}} \frac{7}{u_1} z_1^{-\frac{1}{4}}.$$

Экспериментальный результат для касательного напряжения вблизи гладкой поверхности есть ¹

$$\frac{\tau}{p} = 0,0225 \, v^{\frac{1}{4}} \overline{u_1}^{\frac{7}{4}} z_1^{-\frac{1}{4}}.$$

¹ Prandtl. The Physics of Solids and Fluids. Ewald, Poschl, and Prandtl, p. 282.

Следовательно, выражение (8.16) дает удовлетворительные результаты для аэродинамически гладкой поверхности.

Сеттоном было показано, что для шероховатых поверхностей подходящей формой для $R(\xi)$ является

$$R(\xi) = \left(\frac{N+\nu}{N+\nu+\overline{w'^2}\xi}\right)^n \approx \left(\frac{N}{N+\overline{w'^2}\xi}\right)^n, \qquad (8.22)$$

если N ≫ v, где N — макровязкость (гл. 3).

Введение макровязкости (которая включает размер неровности и скорость сдвига, определяемые из логарифмического профиля) вызывает необходимость использования степенного закона, приближающегося к профилю, полученному Россби [уравнение (7.3)]. Таким профилем является

$$\bar{u} = \frac{\bar{u_1}}{\left(\frac{z_1 + z_0}{z_0}\right)^p - 1} \left[\left(\frac{z + z_0}{z_0}\right)^p - 1 \right], \quad (8.23)$$

где p — положительное число, которое нельзя смешивать с индексом mуравнения (8.9). Для $z_0 = 2$ см, $u_* = 50$ см сек.⁻¹ (значение, характерное для равнины) Сеттон показывает, что профиль, найденный Россби, аппроксимируется, если p = 0,08. Из уравнения (8.22) следует, что $p = \frac{n}{(2-n)}$, как и для гладкой поверхности, так что в этом примере n = 0,15. С этим значением решение проблемы диффузии для безграничного линейного источника в виде (8.12) согласуется с наблюденными значениями, данными в табл. 30. Этот метод является альтернативой по отношению к методу Кэлдера, и оба дают адекватные представления диффузии в двух измерениях над аэродинамически шероховатой поверхностью в условиях безразличного равновесия. Для ознакомления с точными формулами, использованными в вычислениях, довольно громоздкими в обоих методах, читатель должен обратиться к оригиналу.

Второй метод развития теории использует теорему Тейлора (гл. 3), из которой следует, что если σ — средние рассеяния частиц за время T, первоначально сконцентрированных на плоскости (x, z), то

$$\sigma^2 = 2 \,\overline{\omega'}^2 \int\limits_0^T \int\limits_0^t R(\xi) \,d\xi dt. \qquad (8.24)$$

Решение проблемы диффузии, таким образом, сводится к нахождению функций, представляющих распределение концентрации, которая при заданном $R(\xi)$ удовлетворяет уравнению (8.24), уравнению непрерывности и граничным условиям. Асимметричная природа диффузии вблизи земли учитывается введением трех различных корреляционных коэффициентов для трех составляющих флюктуаций:

$$R_{x}(\xi) = \left(\frac{v}{v + \overline{u'^{2}\xi}}\right)^{n}$$

$$R_{y}(\xi) = \left(\frac{v}{v + \overline{v'^{2}\xi}}\right)^{n}$$

$$R_{z}(\xi) = \left(\frac{v}{v + \overline{w'^{2}\xi}}\right)^{n}$$
(8.25)

Эти выражения применяются к аэродинамически гладким поверхностям. Для шероховатых поверхностей кинематическая вязкость заменяется, как и ранее, макровязкостью N.

Из уравнения (8.24) следует, что

$$\sigma_x^2 = 2\overline{u'^2} \int_0^T \int_0^t \left(\frac{v}{v + \overline{u'^2} \xi} \right)^n d\xi dt = \frac{2v^n}{(1-n)(2-n)\overline{u'^2}} \left(v + \overline{u'^3} T \right)^{2-n} - \frac{2v^2}{(1-n)(2-n)\overline{u'^2}} - \frac{2vT}{1-n}.$$

В этом уравнении членами порядка у можно пренебречь по сравнению с $\overline{u'^2}T$, и для достаточно большого T выражение сводится к

$$\sigma_x^2 = \frac{2v^n}{(1-n)(2-n)\overline{u'^2}} \left(\overline{u'^2} T\right)^{2-n} =$$
(8.26)

$$=\frac{1}{2}C^{2}(\overline{u}T)^{2-n},$$
 (8.27)

где

$$C^{2} = \frac{4v^{n}}{(1-n)(2-n)\bar{u}^{n}} \left(\frac{\bar{u'}^{2}}{\bar{u}^{2}}\right)^{1-n}$$
(8.28)

— обобщенный коэффициент диффузии. Аналогичные выражения имеют место для σ_y и σ_z . При изотропной турбулентности $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, а $C_x = C_y = C_z = C$. Это условие выполняется выше приземных слоев атмосферы.

Уравнение (8.27) указывает, что размер движущейся серии частиц возрастает, как некоторая степень расстояния от источника.

Для n = 1 этот закон напоминает закон, данный Эйнштейном для броунова движения

 $\sigma^2 == 2Kt.$

В противоположной области масштабов n = 0, это указывает, что при любой турбулентности радиус диффундирующей серии не будет возрастать быстрее пройденной дистанции.

Сэттон показал, что выражение для $n = \frac{1}{4}$, а именно,

$$\sigma^2 = \operatorname{const}\left(\overline{u}T\right)^{\frac{1}{4}} \tag{8.29}$$

дает точное описание диффузии в атмосфере для расстояний, изменяющихся от метров до десятков или сотен километров. Есть основание полагать, что закон (8.29) достаточно точен для описания всех процессов диффузии больших и малых масштабов в свободной атмосфере.

Для применения этого метода к диффузии вблизи поверхности земли рассмотрим задачу о мгновенном точечном источнике (гл. 4). Выражение

$$\chi(x, y, z, t) = \frac{Q}{\pi^{\frac{3}{2}} C_x C_y C_z (\overline{u}t)^{\frac{3}{2}(2-n)}} \exp \times \left[(\overline{u}t)^{n-2} \left(\frac{x^2}{C_x^2} + \frac{y^2}{C_y^2} + \frac{z^2}{C_z^2} \right) \right], \qquad (8.30)$$

где x, y, z отсчитываются от начала координат, перемещающегося вместе с облаком с постоянной скоростью u, является выражением требуемого типа. Граничные условия для мгновенного источника и условие непрерывности удовлетворены, а распределение плотности частиц вдоль осей следует закону (8.27). Решение, полученное ранее для постоянного коэффициента турбулентности в неизменном установившемся поле ветра [уравнение (4.47)], получается из (8.30) при n = 1 и $C^2 = \frac{4K}{2}$.

Из уравнения (8.30) путем интегрирования могут быть получены решения для непрерывного точечного, конечного линейного и безграничного линейного источников при постоянной скорости ветра. Эти решения следующие.

Непрерывный точечный источник

$$\chi(x, y, z) = \frac{2Q}{\pi C_y C_z \overline{u} x^{2-n}} \exp\left[-x^{n-2} \left(\frac{y^2}{C_y^2} + \frac{z^2}{C_z^2}\right)\right].$$
 (8.31)

Непрерывный перпендикулярный ветру линейный источник ллиной 2 уо

$$\chi(x, y, z) = \frac{Q \exp\left(-\frac{z^2}{C_z^2} x^{2-n}\right)}{\sqrt{\pi C_z \overline{u} x^{1-\frac{1}{2}n}}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_0 - y}{C_y x^{1-\frac{1}{2}n}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y_0 + y}{C_y x^{1-\frac{1}{2}n}}\right) \right].$$
(8.32)

Непрерывный перпендикулярный ветру безграничный линейный источник

$$\chi(x, z) = \frac{2Q}{\sqrt{\pi C_z \overline{u} x^{1-\frac{1}{2}n}}} \exp\left(-\frac{z^2}{C_z^2 x^{2-n}}\right).$$
(8.33)

Множитель 2 в числителе выражений (8.31) и (8.33) и отсутствие того же множителя в (8.32) выражает "отражение" дыма непроницаемой почвой.

Вышеприведенные выражения дают простейшие обобщения решений для постоянного коэффициента турбулентности при постоянном среднем ветре, которые можно получить из выражения (8.16) для $R(\xi)$. Эти обобщения не единственные, поскольку возможно удовлетворить уравнению (8.27) выражениями, включающими члены типа $\exp\left(-\frac{y^s}{ax^p}\right)$, где $\frac{s}{p} = \frac{2}{(2-n)}$.

Развернутые формулы этого типа были получены Сэттоном [1], который показал, что с их помощью можно обеспечить лучшее согласование с наблюдениями, но для большинства целей более простые решения (8.31), (8.33) удовлетворительно согласуются с опытными данными и легче для расчетов.

Турбулентная диффузия как случайный скачкообразный процесс. Недавно Найтинг показал, что (8.30) может быть получено на основании теории случайных скачкообразных процессов. Если движение частицы состоиг из серии шагов a_v в какомлибо направлении, то вероятность P_v , что она будет в (x, y, z)после у шагов, есть

$$P_{\nu}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} P_{\nu-1}(x - a_{\nu}\sin\vartheta\cos\varphi, y - a_{\nu}\sin\vartheta\sin\varphi, d\vartheta d\varphi) d\vartheta d\varphi.$$

Это выражает тот факт, что частица приходит из любой точки на поверхность сферы радиуса a_{y} имеющего центр в (x, y, z). Методом трансформации Лапласа Найтинг показывает, что

$$P_{v} \approx \left(\frac{3}{2\pi\nu\sigma^{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \exp\left[-\frac{3\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)}{2\nu\sigma^{2}}\right],$$

где о определяется так, что

$$\sum a_{\nu}^2 = \nu \sigma^2.$$

Если все шаги a_{v} равны, а т — время, необходимое для совершения одного шага, то продолжительность диффузии есть $t = v\tau$. Выражение для P_{v} , данное выше, ведет тогда к распределению вещества вокруг мгновенного точечного источника такого же, как и при фикковской диффузии (4.36). Из физических соображений ясно,

что Σa_{y} должна расходиться (иначе частицы не могут рассеиваться за сферу конечного радиуса), так как часть a_{y} не ограничена.

Предположим, что $a_v = kv^{\alpha}$, так что $v\sigma^2 = \left(\frac{k^{2v}2^{\alpha+1}}{2\alpha+1}\right)$ и $t = v\tau$, как раньше. Выражение для P_v становится в этом случае

$$\left[\frac{3(2\alpha+1)\tau^{2\alpha+1}}{2\pi k^2 l^{2\alpha+1}}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{3(2\alpha+1)\tau^{2\alpha+1}(x^2+y^2+z^2)}{2k^2 l^{2\alpha+1}}\right].$$

Это дает (8.30), если удовлетворить условию сохранения вещества и α положить равным $\frac{1}{2}(1-n)$. Отсюда формула диффузии Сэттона может быть получена из случайного ступенчатого процесса при условии, что длина шага возрастает с продолжительностью диффузии. Это может рассматриваться как эквивалент аналогичному понятию, т. е. что в атмосфере влияние больших вихрей чувствуется во все возрастающей степени при увеличении продолжительности диффузии, но точная физическая интерпретация такого случайного ступенчатого процесса ясна не полностью.

Обобщение для случая неадиабатических градиентов. Определение скорости рассеяния дыма при крайних температурных градиентах представляет большой интерес в практических приложениях, но удовлетворительная трактовка этих процессов дело будущего. Двухразмерная проблема рассматривалась Диконом [5], который использует обобщенный профиль скорости [уравнение (7.6)], пригодный для всех состояний устойчивости. В слое постоянного касательного напряжения этот профиль приводит к соотношению

$$K_{M}(z) = k N \left(\frac{z}{z_{0}}\right)^{\beta},$$

где $N = u_* z^0$ — макровязкость и k — постоянная Кармана. Индекс β меньше, чем единица в инверсиях, и больше единицы при больших вертикальных градиентах. Это выражение применимо для K_z в проблеме диффузии при условии, что количество движения и масса переносятся одинаково при любых температурных градиентах. В трактовке Кэлдера профиль скорости в члене $\overline{u} \frac{\partial \chi}{\partial x}$ заменяется на основании соотношения

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = q\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha},$$

где q и а находятся сравнением с точным профилем (7.6). Решение (8.12) может быть представлено тогда в форме

$$\chi(x, z) = \frac{Qq^{s-1}}{ANX^s} \exp\left(-\frac{qZ^p}{kp^2X}\right),$$

$$X = \frac{x}{z_0}, \quad Z = \frac{z}{z_0},$$
$$P = 2 + \alpha - \beta,$$
$$S = \frac{(1+\alpha)}{p},$$
$$A = k^s p^{2s-1} \Gamma(s),$$
$$N = u_* z_0.$$

Дикон сравнивает это выражение с суммарными концентрациями перпендикулярно ветру от непрерывного источника, измеренными над степью ($z_0 = 0.7$ см) в Альберте, [Канада. Так как в этих случаях число Ричардсона колеблется от +0.02 до -0.8, то соответствующие пределы для β — от 0.97 до 1,135. Эти результаты неубедительны, поскольку они дают хорошее согласование между теорией и практикой лишь для небольших отклонений от безразличного равновесия, но при большой неустойчивости имеют место заметные расхождения, а наблюденные концентрации разбросаны в больших пределах. Сравнение также показывает, что при больших вертикальных градиентах скорость уменьшения концентраций с расстоянием происходит быстрее, чем предсказывает теория.

Наблюдения, отнесенные к вышеизложенному, очень ясно демонстрируют действия стабилизирующих градиентов на вертикальную диффузию. В ста ярдах по ветру от источника изменения Ri от 0,25 до 0,02 сопровождалось увеличением суммарной перпендикулярной ветру концентрацией от 155 до 1360 мг м³ при одинаковой средней скорости ветра 2 м/сек.

Метеорологическая литература содержит очень много примеров точного измерения диффузии при устойчивом состоянии, и данная выше иллюстрация, хотя и единичная, указывает на необходимость точного определения температурного градиента (или лучше числа Ричардсона) во всех расчетах по диффузии вблизи земли.

Формулы, полученные статистическим методом [уравнения (8.30) — (8.33)], обеспечивают простые, с первого взгляда, средства оценки стабилизирующих или не стабилизирующих действий температурных градиентов при условии, что величина *n* может быть определена как функция температурного градиента. На практике это сделать нелегко, и трудности, встречающиеся при этой работе, рассматриваются в следующем разделе.

8. 3. Формулы диффузии при полевых исследованиях

Теории диффузии, описанные выше, допускают, что перенос массы следует тем же законам, что и перенос количества движения, и их практическое применение поэтому зависит от точного измерения профиля скорости в слое, через который распространяется диффундирующее вещество. В ранней стадии развития этих работ, предшествующих опубликованию исследований Никурадзе и Шлихтинга о потоке над шероховатой поверхностью, влияние поверхности почвы на профиль скорости было выяснено не полностью, и выражения для диффузии при потоке над гладкой поверхностью сравнивались с измерениями диффузии над шероховатой землей. Такие работы были выполнены Сеттоном [1] и Кэлдером [3].

Обобщенные коэффициенты диффузии C_x , C_y и C_z в статистической теории диффузии зависят от составляющих порывистости, средней скорости на фиксированном уровне и величины n. Порывистость может измеряться различными путями; двойная флюгарка, в частности, полезный инструмент для полевой работы при условии, что может быть найден способ, посредством которого определяется среднее значение порывистости из полученных записей. Наибольшая трудность, несомненно, состоит в определении соответствующего значения n, которое должно быть точным из-за чувствительности формул к небольшим изменениям n. Прямое определение n из измерения $R(\xi)$ совершенно не осуществимо при установившейся практике полевой работы. Первоначально примененный метод основан на допущении, что n определяется профилем скорости

 $\overline{u}(z) = \overline{u}_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{n}{(2-n)}},$

полученным из представления о пути смешения. Этот образ действия несовместим с тем, который использовался для получения выражений (8.31) — (8.33), в которых средний ветер предполагается неизменным с высотой, но может быть показано, что ошибка, допущенная в этом случае, небольшая. Облако от непрерывного источника ослабляется боковым ветром и вертикальной диффузией и разбавляется воздухом благодаря среднему ветру; последний процесс учитывается членом $\tilde{u} \frac{\partial \chi}{\partial x}$ в уравнении диффузии.

Статистический метод содержит допущение, что изменения ветра с высотой могут игнорироваться в этом члене, предположение, вероятно, правильное для всех условий, за исключением глубоких инверсий. Статистический метод поэтому использует изменение ветра с высотой только как меру скорости переноса количества движения (а отсюда и массы) и пренебрегает другими действиями градиента ветра как второстепенными.

Если бы профиль ветра точно соответствовал степенному закону, то измерение отношения скорости ветра на любых двух высотах было бы достаточным для определения n, но на практике установлено (по крайней мере в условиях безразличного равновесия), что n не только быстро изменяется с высотой в слое 0—200 см, но также зависит от размера и распределения неровностей поверхности. На больших высотах степенной закон лучше выполняется, и в этих слоях значение n определяется главным образом устойчивостью.

21 О. Г. Сеттон

Изменения неровности поверхности имеют, таким образом, первостепенное значение для профиля ветра в непосредственной близости к почве и второстепенное значение для диффузии облаков в целом. С другой стороны, устойчивость оказывает большое действие на профиль скорости и на скорость диффузии, и трудно, если не невозможно, различить два влияния использованием простого степенного закона, который не включает влияние неровностей поверхности.

Сеттоном [6] был предложен метод для расчета диффузии над шероховатыми поверхностями, который преодолевает эти трудности в условиях безразличного равновесия. Для этого заменяют кинематическую вязкость в выражении для $R(\xi)$ макровязкостью, так что обобщенные коэффициенты диффузии даются выражениями типа

$$C_{y}^{2} = \frac{4N^{n}}{(1-n)(2-n)\overline{u}^{n}} \left(\frac{\overline{v'^{2}}}{\overline{u}^{2}}\right)^{1-n}.$$

При таком предположении и значении $n = \frac{1}{4}$, соответствующем профилю, найденному Скрейсом для интервала высот $300 \ll z \ll 1300$ см над равниной, формулы диффузии (8.31) и (8.33) дают результаты, хорошо согласующиеся с наблюдением для $N = 10^2$ см² сек.⁻¹.

Замена у через N в выражении для $R(\xi)$ означает, что приближения, использованные для вывода уравнения (8.26), требуют больших значений T, чем в случае гладкой поверхности, так что над очень неровной поверхностью в непосредственной близости к источнику нельзя ожидать удовлетворительных результатов от решений на основе статистической теории.

Для диффузии над ровными поверхностями, такими как равнина, в условиях небольшого температурного градиента и умеренного ветра формулы (8.31) — (8.33) дадут удовлетворительные результаты до нескольких километров от источника, если используются следующие величины:

$$n = \frac{1}{4}$$
, $C_y = 0.4 \text{ cm}^{\frac{1}{8}}$, $C_z = 0.2 \text{ cm}^{\frac{1}{8}}$.

Эти величины основаны на данных, полученных в Портоне (Англия). Для больших вертикальных градиентов и больших инверсий достоверных величин еще нет.

8. 4. Диффузия от высотных источников

Решения, рассмотренные в предыдущем разделе, применимы к облакам, возникающим на поверхности земли. В проблемах атмосферного загрязнения источники находятся обычно на значительной высоте над землей, и основная задача, которую надо решить, заключается в определении концентрации дыма на уровне земли, создаваемой дымом или газом от изолированных промышленных труб. Математическая формулировка этой задачи рассматривалась в гл. 4, а решение получено по тому же принципу, что и в случае с постоянным коэффициентом диффузии. Особой трудностью проблемы для реальной атмосферы, в которой коэффициент диффузии не может рассматриваться независимым от высоты, является то, что неизвестно ни одно точное решение для точечного источника при переменном ветре и для переменного коэффициента диффузии, в связи с чем должно быть использовано приближенное решение (8,32).

Разработка проблемы, данная Сеттоном, следующая: наблюдения над разрывами снарядов на значительных высотах показывают, что диффузия в свободной атмосфере удовлетворяет, уравнению (8.29), но значения *C* гораздо меньше значений, полученных вблизи земли. Было найдено, что коэффициент *C* уменьшается с высотой в соответствии с эмпирическим законом

$$C = C(0) - 0.075 \log_{10} z, \qquad (8.34)$$

где C (0) — значение C на уровне земли, а z измеряется в метрах (Сеттон). Дым, выделяющийся из труб на значительной высоте над землей, вначале диффундирует в потоке с относительно небольшой порывистостью и ведет себя таким образом, как если бы земля отсутствовала: но с увеличением расстояния по направлению ветра постепенно увеличивается действие земли. Это проявляется не только в "отражении" частиц дыма от непроницаемой поверхности, но также в возрастании турбулентности ветра в нижних слоях. Учет этого факта представляет огромные математические трудности, которые могут быть частично преодолены путем использования среднего коэффициента диффузии для слоя, определяемого высотой трубы. Такой образ действия допустим благодаря сравнительно медленному изменению С с высотой [уравнение (8.34)]. Таким образом, масштаб диффузии уменьшается с высотой источника, но использованные решения соответствуют коэффициенту диффузии, возрастающему с продолжительностью диффузии. В этом смысле нижний слой атмосферы может сравниваться с рядом слоев, которым свойственен коэффициент диффузии, постоянно уменьшающийся вверх, с тем же типом нефикковской диффузии в каждом слое.

Рассмотрим прямоугольную систему осей Ox в направлении среднего ветра, который считается горизонтальным, Oy перпендикулярно ветру и Oz вертикально. За плоскость z = 0 принимается поверхность земли. Непрерывный точечный источник, помещенный в x = y = z = 0 с учетом непроницаемости поверхности z = 0, обусловливает концентрацию $\chi(x, y, z)$, где

$$\chi(x, y, z) = \frac{2Q}{C_y C_z \vec{u} x^{2-n}} \exp\left[-x^{n-2} \left(\frac{y^2}{C_y^2} + \frac{z^2}{C_z^2}\right)\right]. \quad (8.31)$$

В этом выражении принято, что: 1) средний ветер установившийся и равномерный, 2) нет подъема облака из-за плавучести и 3) облако состоит из невыпадающих частиц.

21*

Если аналогичный источник поместить в x = y = 0, z = h, тогда проблема будет заключаться в нахождении выражения для $\chi(x, y, z)$, которое становится бесконечным, как $x^{n-2} \exp\left[-\frac{(z-h)^2}{x^{2-n}}\right]$, когда $x \to 0$, $z \to h$, причем учитывается непроницаемость поверхности z=0.

 $x \rightarrow 0$, $z \rightarrow n$, причем учитывается непроницаемость поверхности z=0. Это последнее условие означает, что

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{u}\chi(x, y, z)\,dydz = Q$$

для всех x > 0. Искомое решение получается методом отображений (гл. 4) и представляет собой

$$\chi(x, y, z) = \frac{Q \exp\left(-\frac{y^2}{C_y^2 x^{2-n}}\right)}{\pi C_y C_z \overline{u} x^{2-n}} \left\{ \exp\left[-\frac{(z-h)^2}{C_z^2 x^{2-n}}\right] + \exp\left[-\frac{(z+h)^2}{C_z^2 x^{2-n}}\right] \right\}.$$
(8.35)

Для h = 0 это выражение сводится к решению для источника на уровне земли (8.31).

Легко выводятся следующие свойства решения.

1. Максимальная концентрация на уровне земли

$$\chi_{\max} = \frac{2Q}{e\pi u \hbar^2} \begin{pmatrix} C_z \\ C_y \end{pmatrix}, \qquad (8.36)$$

2. Расстояние точки, в которой достигается максимальная концентрация на земле, от основания трубы

 $x_{\max} = \left(\frac{\hbar^2}{C_z^2}\right)^{\frac{1}{(2-n)}}.$ (8.37)

Эти выражения указывают на наиболее важные черты распределения, а именно.

1. Концентрация дыма на уровне земли возрастает до максимума на расстоянии, приблизительно пропорциональном высоте трубы, а затем падает до нуля с увеличением расстояния по направлению ветра.

2. Максимальная концентрация на уровне земли прямо пропорциональна мощности источника и обратно пропорциональна скорости ветра и квадрату высоты трубы.

Закон обратного квадрата (2) для влияния высоты трубы был впервые сформулирован Ц. Х. Бозанкетом и Я. Л. Пирсоном и имеет фундаментальное значение в проблемах атмосферного загрязнения.

Результаты, полученные на основании этой теории, показаны в табл. 31 и 32.

Таблица 31

	Конц	ентрации	на ур	овне	е земли	от	высотных	исто	чников	
для	Q = 1	г сек. ^{—1} ,	$\overline{u} = 100$	см (сек.—1	при	безразлич	ном	равновеси	И
				(в мг м	⁻³)				

Высота		Pa	сстояние	от источн	ика, м	
трубы	0	50	100	500	1000	2000
0 10 25 50 75 100	0 0 0 0 0	$\begin{array}{c} 26,9\\0,02\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}$	8,0 0,89 0 0 0 0	0,48 0,42 0,37 0,01 0	$\begin{array}{c} 0,14\\ 0,137\\ 0,195\\ 0,088\\ 0,009\\ 0\end{array}$	0,04 0,04 0,07 0,07 0,07 0,04 0,007

Изменение концентрации по направлению ветра аналогично кривой, представленной на рис. 16 (гл. IV).

Проблема осаждения загрязнений от трубы, выделяющей дым, содержащий частицы ощутимого размера, была рассмотрена Бозанкетом, Кореем и Холтоном [9].

Таблица 32

Расстояние точки максимальной концентрации на уровне земли от основания трубы χ_m и концентрация в этой точке χ_m для Q=1 г сек.⁻¹

hм	<i>х_т</i> м	X _m мг м ⁻³		
0 10 45 50 75 100	0 158 439 1224 2350 4070	1,34 0,375 0,094 0,042 0,023		

Скорость осаждения частиц на земле в точке, расположенной на расстоянии x от основания трубы, можно представить следующим выражением:

$$0,0032 \frac{Qb\left(20\frac{h}{x}\right)^{\left(20\frac{f}{u}\right)+2}}{h^{2}\Gamma\left(20\frac{f}{u}\right)} \exp\left(-\frac{20h}{x}\right),$$

где

f — скорость частиц, h — высота трубы, Q — скорость эмиссии, u — скорость ветра, выраженные в общепринятых единицах. Величина b означает время, в течение которого ветер находится в секторе 45°, ограничивающем рассматриваемую точку, с вершиной в источнике; b, таким образом, соответствует фактору порывистости в формуле Сеттона. Вывод формулы в опубликованной работе не приводится.

8. 5. Свободная конвекция в атмосфере

Большая часть загрязнений в атмосфере создается в форме клубов нагретого, загрязненного дымом воздуха, поступающего из фабричных труб; изучение динамики таких струй очень важно. Хилл, Томас и Аберзольд [10] выяснили, что нагрев источника двуокиси серы вызывает уменьшение концентрации газа на поверхности земли. Высокие трубы, предназначенные сохранять как можно больше тепла, должны рекомендоваться как средство наибольшего рассеяния струи дыма. Поведение струи горячего газа в гравитационном поле — очень трудная проблема в динамике жидкости, особенно при наличии ветра. Если атмосфера неподвижна и в ней существуют только конвективные потоки, то струя поднимается вертикально, при этом происходит проникновение холодного воздуха через ее границы. Вертикальная скорость непрерывно возрастает от границы к центру струи, так что процесс смешения, который вносит холодный воздух, аналогичен процессу, имеющему место в турбулентном пограничном слое вблизи твердой поверхности. При наличии ветра струя наклонена к вертикали, в этом случае процесс проникновения обусловлен как динамической, так и термической неустойчивостью.

Проблема клуба дыма в неподвижной атмосфере была решена Шмидтом [11], использовавшим гипотезу пути смешения Прандтля. Шмидт рассматривает двухразмерную задачу о струе над длинным линейным источником и трехразмерную задачу для струи от точечного источника тепла.

Линейный источник тепла. Выберем ось z вертикально (направление движения) и ось у перпендикулярно оси z и нагретой линии. Направленное вверх ускорение частицы есть $ga\theta$, где α коэффициент расширения и θ — разность между температурой струи и окружающего воздуха (гл. 4). Уравнения движения, теплопроводности и непрерывности примут вид:

$$w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} + g \alpha \theta,$$

 $c_{\rho} \rho \left(w \frac{\partial \theta}{\partial z} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial q}{\partial y},$
 $\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$

где ρ — плотность газа, w и v — составляющие скорости вдоль z и y соответственно, τ — касательное напряжение и q — поток тепла на единицу площади.

Проблема состоит в решении этих уравнений при соответствующих граничных условиях, но можно получить основные свойства явления простым применением анализа размерности и законов динамики. Шмидт допускает динамическое и геометрическое подобие для процессов смешения в поперечных сечениях струи, перпендикулярных направлению движения, и следует Прандтлю, принимая путь смешения l пропорциональным ширине струи b на всех уровнях. Можно полагать, что b пропорционально z, и отсюда l = cz, где c — коэффициент пропорциональности.

Если мощность источника Q постоянна, то тепло, передаваемое через поперечное сечение, есть

$$Q = wb\rho c_{\rho}\theta = \text{const}, \tag{8.38}$$

откуда

$$w = \operatorname{const}(\rho \theta z)^{-1}. \tag{8.39}$$

Изменение количества движения J вдоль пути dz равно подъемной силе, так что

$$\frac{dJ}{dz} dz = \frac{d}{dz} \left(\rho b w^2\right) dz = b g \rho_2 \theta dz. \tag{8.40}$$

Принимая $\theta = Dz^{-m}$, где *m* неизвестно и *D* — постоянная пропорциональности, получим, что

$$J = \operatorname{const}(\rho D^2 z^{2n-1})^{-1}.$$
 (8.41)

Если разность между температурами струи и окружающего воздуха достаточно мала, чтобы можно было считать $\alpha\theta$ малым по сравнению с единицей, то плотность р может приниматься равной плотности окружающего воздуха. Подъемная сила тогда пропорциональна z^{1-m} и, следовательно, из уравнений (8.40) и (8.41)

или

$$m = 1$$
.
Следовательно, избыток температуры в струе θ уменьшается как $\frac{1}{z}$, где z — высота над источником, а из уравнения (8.39) вытекает,

2m-2=1-m

что скорость с не зависит от z.

Точечный источник. Рассмотрение точечного источника проводится аналогичным образом. Шмидт пишет, что $\theta = Dz^{-m}$, как и раньше, и полагает $w = \text{const } z^p$. Из условия, что тепло, перенесенное через любое сечение струи, постоянно следует, что

$$Q = \rho \pi b^2 w c_{\rho} \theta,$$

где *b* — радиус струи. Следовательно.

$$2 + p = m. \tag{8.42}$$

Скорость изменения количества движения есть

$$\frac{dJ}{dz} = z^{2p+1},$$

а подъемная сила равна

$$b^2 ga \rho \theta = \operatorname{const} z^{2-m},$$

так что

$$2 - m = 2p + 1. \tag{8.43}$$

Из уравнений (8.42) и (8.43) следует, что

$$m = \frac{5}{3}, \quad p = -\frac{1}{3},$$
 (8.44)

таким образом, температурный избыток в струе уменьшается, как $-\frac{5}{3}$ $-\frac{1}{3}$

z, и скорость — как z

Определение точных выражений для скорости и температуры сводится к решению дифференциальных уравнений. Это может быть сделано только в форме бесконечных рядов, с которыми вычисления затруднительны. Для подробного ознакомления с вопросом читатель может обратиться к первоначальной работе Шмидта.

Другой способ рассмотрения. Последующие исследования трехразмерной проблемы, проведенные Сеттоном [12], приводят к тем же самым результатам, но они не связаны с трудностями вычислений, встречающимися в работе Шмидта. Рассмотрим неподвижную атмосферу при постоянной потенциальной температуре, которую можно принять равной нулю без уменьшения общности. Как и в теории Шмидта, избыток температуры в струе предполагается малым по сравнению с абсолютной температурой воздуха и анализ применяется только к струям, в которых газы заметно смешаны с воздухом.

Сеттон, следуя Шмидту, принимает путь смешения l пропорциональным радиусу r струи на любом уровне, но отходит от теории Прандтля, предполагая, что флюктуации скорости в струе $w' = l \frac{dw}{dz}$, т. е. пропорциональны градиенту скорости по направлению течения. Скорость, с которой воздух увлекается благодаря процессу турбулентного смешения на границе струи, зависит от подвергающейся воздействию площади A, скорости флюктуации w' и пути смешения l.

В рассмотренных выше гипотезах

скорость увлечения = const
$$\rho A l \frac{dw}{dz} = \rho A c r \frac{dw}{dz}$$

где *с* — постоянная пропорциональности.
Рассмотрим (рис. 32) элемент струи, лежащий между плоскостями z и $z + \delta z$. Поток через нижнюю поверхность есть ρwS , вытекание через верхнюю поверхность — $\rho (w + \delta w) (S + \delta S)$, где S — площадь поперечного сечения πr^2 ; при этом предполагается, что изменениями ρ можно пренебречь. Разность с точностью до бесконечно малых величин первого порядка есть $\rho (S\delta w + w\delta S)$, она





Рис. 32. Поток в струе-

Рис. 31. Облако от точечного источника, расположенного на поверхности земли.

должна равняться массе увлеченного воздуха, который, на основании

исходных гипотез, есть $\rho A cr \frac{dw}{dz}$, где A — площадь поверхности элементарного цилиндра.

Отсюда

$$\pi r^2 \delta w + 2\pi r w \delta r = 2\pi r^2 c \frac{dw}{dz} \delta z$$

или в пределе при $\delta z \rightarrow 0$

$$r\frac{dw}{dr} + 2w\frac{dr}{dz} = 2rc\frac{dw}{dz}.$$
 (8.45)

Вторым исходным допущением является то, что радиус струи связан с высотой над источником уравнением типа, аналогичного уравнению, встречающемуся в теории диффузии дыма при наличии ветра, а именно

 $r = (\ln 10)^{\frac{1}{2}} C z^{\frac{1}{2}m} \approx 1.5 C z^{\frac{1}{2}m},$

где C — обобщенный коэффициент диффузии; множитель ln10, встречающийся в выражении, связан с тем, что при распределении плотности в соответствии с нормальным законом ощибок граница струи определяется, как геометрическое место точек, в которых концентрация падает до одной десятой от концентрации в центре. Индекс *m* не фиксируется. Подставляя это эначение *r* в (8.45) и решая полученное уравнение первого порядка, имеем

$$w = w_1 z^{\frac{m}{(1-2c)}}, \qquad (8.46)$$

где w_1 — постоянная интегрирования, значение которой будет найдено позднее.

Если 0 — избыток температуры, средний по какому-нибудь поперечному сечению, то условие постоянства мощности источника дает

 $\bar{\theta} = \frac{Q}{\pi r^2 c_p \rho w} \approx \frac{Q}{2 \cdot 3 \pi C^2 z^m c_p \rho w} \,.$

Вертикальная скорость определяется по принципу, сформулированному Тейлором, согласно которому интенсивность конвективных потоков определяется балансом между скоростью диссипации энергии, благодаря дроблению нагретых масс в меньшие вихри, и скоростью уменьшения потенциальной энергии. Отсюда (гл. 4, стр. 150)

$$w^2 = \operatorname{const} \frac{\overline{\theta}gl}{T_a}$$
,

где T_a — абсолютная температура невозмущенного воздуха. Принимая "постоянную" за единицу, получим

$$w^2 = \frac{Qgcr}{2,3\pi C^2 z^m c_n \rho w T_n}$$

или

$$w^3 = \frac{Qgc}{1,5\pi Cc_p \rho T_a z^{\frac{1}{2}m}}.$$

Следовательно, из уравнения (8.46) имеем

$$\frac{3m}{2c-1} = \frac{1}{2}m$$

 $c = \frac{7}{2} \,. \tag{8.47}$

Теперь проблема полностью решается в замкнутой форме, если С и *m* считать известными. Решение есть:

$$\overline{\theta} = \frac{Q}{2,3\pi c_{p}\rho C^2 w_1 z} , \qquad (8.48)$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{z}^{-\frac{1}{3}m}, \qquad (8.49)$$

$$w_1 = \left(\frac{7Qg}{3\pi c_p \rho T_a C}\right). \tag{8.50}$$

330

или

В решении Шмидта r пропорционально z и, таким образом, m = 2. Наблюдения над облаками дыма показывают, что m = 1,75 (стр. 306). Таким образом, имеем следующие два решения:



Сеттон сравнивает свое решение с экспериментальными данными, полученными Шмидтом из лабораторных экспериментов со струей, образованной нагретыми кольцами, и показывает, что в целом ононесколько лучше согласуется, чем решение Шмидта. Особенный интерес представляет то, что значение обобщенного коэффициентах диффузии *C*, выведенное из экспериментов Шмидта, равно прибли-

зительно 0,26 см⁸, что совпадает с величиной, найденной для диффузии дыма вблизи земли при безразличном равновесии (см. стр. 322). Это ведет к поразительному заключению, что один и тот же коэффициент диффузии относится как к смешению маленького столба нагретого воздуха с холодным воздухом лаборатории, так и к дыму, проходящему расстояния порядка сотен метров или более.

Сеттон применил теорию к случаю типичной промышленной трубы, беря $Q = 3,5 \cdot 10^6$ кал. сек.⁻¹, и нашел, что на расстоянии 10 м от выходного отверстия трубы вертикальная скорость около 6 м сек.⁻¹, т. е. сравнима со средней скоростью ветра. По-видимому, это подтверждается наблюдениями.

Нагретая струя при наличии ветра. Точное решение задачи о струе нагретого воздуха, возникающей из-за термической и динамической неустойчивости при боковом ветре, оказывается невозможным при современном состоянии теории турбулентности. Сеттон применил приведенную выше теорию, чтобы достигнуть относительно грубого приближения к решению, допуская, что форма оси нагретой струи напоминает траекторию частицы, имеющей постоянную горизонтальную скорость ветра и вертикальную скорость, которая убывает вдоль траектории соответственно установленным выше законам. Если принять решение Шмидта, то формулы можнодать в замкнутом виде.

Если *s* — расстояние вдоль траектории, $w = w_1 s^{-\frac{1}{3}}$ — вертикальная скорость и u = const — боковой ветер, легко показать, $s = \left(\frac{w_1}{u}\right)^3 \cot^3 \psi, \tag{8.51}$

$$z = \frac{3}{2} \left(\frac{w_1}{u}\right)^3 \left[\cot\psi\csc\psi - \ln\left(\cot\psi + \csc\psi\right)\right], \qquad (8.52)$$

тде ψ — наклон траектории к горизонтали, когда частица достигла высоты z над источником. Для типичной промышленной трубы Сеттон нашел, что струя фактически горизонтальна ($\psi < 10^{\circ}$), когда z = 100 м, s = 400 м, если u = 5 м сек.⁻¹, но для u = 10 м сек.⁻¹ струя горизонтальна, когда z = 12,5 м. Достигаемая высота пропорциональна u^{-3} , что показывает существенное влияние бокового ветра на отклонение струи от вертикали. Это влияние можно также наблюдать по колебаниям пламени свечи в легком потоке воздуха.

Формулы для вычисления пути, пройденного дымовым следом в боковом ветре, также были даны Босанквитом, Кореем и Холтоном [9], которые рассматривают распространение нагретого газа, поступающего с вынужденной скоростью v и температурной разностью Δ между газом и окружающим воздухом T_a . Данные ими выражения следующие: подъем, вызванный только вынужденной скоростью,

$$z = z_{\max} \left(1 - 0.8 \frac{z_{\max}}{x} \right),$$
 когда $x > 2z_{\max}$
 $z_{\max} = \frac{4.77}{1 + 0.43 \frac{u}{u}} \frac{V(Qv)}{u},$

при этом x — расстояние по горизонтали от трубы по направлению ветра. Подъем, вызванный избытком температуры поступающего газа, и путь струи даются уравнениями:

$$x = 3,57 \frac{\sqrt{(Qv)}}{u} X,$$
$$z = 6,37 \frac{Q\Delta}{u^3 T_a} Z,$$

тде $u^2 > \left(\frac{\Delta g}{T_a}\right) \left(\frac{Q}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$; X и Z — величины, которые находятся по графикам. Вывод этих выражений не дается в опубликованной работе. Установлено, что формула для скорости подъема согласуется с экспериментальными результатами в аэродинамической трубе и что сравнение формул с наблюдениями, проведенными над действительными струями из труб, удовлетворительны. Влияние подвода тепла к источнику загрязнения. Предположим, что из трубы высотой h поступает вещество со скоростью Q_M г сек.⁻¹, имеющее температуру воздуха. Из уравнения (8.36) следует, что максимальная концентрация на

Из уравнения (8.36) следует, что максимальная концентрация на уровне χ_{max} пропорциональна $\frac{Q_M}{uh^2}$, где u — скорость ветра. Если добавляется источник тепла Q_H кал. сек.⁻¹, то в результате ось облака поднимается так, что источник фактически будет на высоте $h + \delta h$. Из уравнения (8.52) δh пропорциональна $\left(\frac{w_1}{u}\right)$, которая в свою очередь пропорциональна $Q_H u^{-3}$ [уравнение (8.50)].

В этом случае

$$\chi_{\max} \approx \frac{Q_M}{u (h + aQ_H u^{-3})^2} = \frac{Q_M}{u h^2 (1 + 2aQ_H h^{-1} u^{-3} + a^2 Q_H h^{-2} u^{-6})},$$

яде *а* равно постоянной. Пренебрегая членом $a^2 Q_H h^{-2} u^{-6}$ (что всегда допустимо, за исключением очень слабых ветров), получим, что

$$rac{ ext{Hobbin }\chi_{ ext{max}}}{ ext{CTapbin }\chi_{ ext{max}}} = \left(1 + rac{2aQ_H}{hu^3}\right)^{-1} \approx 1 - rac{2aQ_H}{hu^3}.$$

Это показывает, что в результате добавления источника тепла мощностью Q_H максимальная концентрация на поверхности земли уменьшается на величину, пропорциональную $\frac{Q_H}{u^3h}$ или $\frac{Q_H}{h}$, если u рассматривается как постоянная. Несмотря на медленное возрастание конвективной скорости при подводе тепла, уменьшение концентрации на уровне земли пропорционально силе теплового источника. Это действие особенно эффективно для низких труб. Следовательно, добавление тепла к источнику загрязнения является эффективным путем уменьшения нежелательной концентрации на уровне земли. Преимущество, достигнутое таким образом, ослабляется при сильных ветрах, но при этих условиях облако обычно и так достаточно разбавляется.

8. 6. Теоретическое изучение испарения

В атмосфере испарение воды происходит с поверхности морей, озер, рек, с твердых тел, таких как почва, растительности, со снежных поверхностей и ледников, с капель воды, снежинок и кристаллов льда. Результаты, приведенные ниже, ограничиваются наиболее простыми процессами в нижних слоях атмосферы. Будет рассмотрено испарение со свободной поверхности жидкости и с насыщенной водой твердой поверхности.

Проблема высыхания почвы чрезвычайно сложна, она включает не только механизм диффузии пара, но также движение жидкости из внутренних слоев почвы к поверхности, до сих пор теория этого процесса мало развита. Суммарное испарение воды из резервуара или озера можно найти, измеряя в течение наблюдаемого периода приток и сток, осадки и уровень воды. Расчеты этого типа часто достаточно точны для инженерных нужд, но такие результаты мало освещают всю сложность проблемы. Испарение из небольших изолированных бассейнов, определенное таким образом, входит в программу некоторых метеорологических наблюдений, но получаемые результаты представляют сомнительную ценность (см. стр. 346). Методы этого типа содержат или слишком мало, или совсем не содержат теории.

Теоретическое изучение испарения развивается двумя совершенно отдельными путями. Первый путь концентрирует внимание на механизме перемещения пара диффузией и в первую очередь применим для определения местных скоростей испарения. Второй не требует какихлибо знаний о механизме процесса испарения, но основывается на количестве энергии, использованной для превращения воды из жидкой фазы в фазу пара за определенный интервал времени. Этот метод находит свое естественное применение при определении испарения с больших площадей. Эти два способа будут соответственно отнесены к методу диффузии и к методу энергобалансовому.

Испарение как процесс диффузии. Ограниченные площади. При отсутствии ветра водяной пар поступает в атмосферу благодаря молекулярной диффузии; этот процесс до некоторой степени аналогичен охлаждению тела. Если V — масса водяного пара на единицу массы воздуха, то уравнение установившейся диффузии есть

$$\Delta^2 V = 0.$$

Это уравнение Лапласа, и проблема испарения легко сводится к хорошо известной проблеме электростатики, проблеме распределения потенциала вблизи заряженной плоскости. Скорость испарения при этом дается по аналогии с известной формулой в электростатике

$$E = -\int \int k\rho \, \frac{\partial V}{\partial z} \, dS = 4\pi k\rho C V_0, \qquad (8.53)$$

где dS — элемент площади, k — коэффициент молекулярной диффузии воды в воздух, C — электростатическая емкость поверхности и V_0 — разность между значением V на бесконечности и на z = 0 (Джеффрис [13]). Поскольку C пропорционально площади заряженной поверхности, то следует, что испарение в спокойную атмосферу также пропорционально поверхности, если форма в обоих случаях одна и та же.

Испарение при постоянном ветре представляет много больше трудностей. Математически эта задача обратна задачам, разобранным в предыдущих разделах, в которых задан источник, а ищется концентрация. В проблеме испарения источник должен определяться, а сведения, касающиеся концентрации пара, даются в форме граничных условий.

Процесс диффузии описывается, как и в упомянутых задачах, общим уравнением диффузии

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right).$$

Для установившегося двухразмерного случая $\frac{d\chi}{dt} = \tilde{u} \frac{d\chi}{dx}$, а член, содержащий у, отсутствует. Пренебрегая, как обычно, диффузией по направлению ветра, получим

$$\overline{u}(z)\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right). \tag{8.8}$$

Это уравнение рассматривалось выше для безграничного, расположенного перпендикулярно ветру линейного источника, оно должно



Рис. 33. Двухразмерная задача.

теперь применяться к испарению с площали, которая безгранична перпендикулярно ветру и ограничена по направлению ветра. Такая площадь определяется, как $0 \le x \le x_0$; z = 0. Предполагается, что для $x > x_0$ или x < 0 земля сухая (рис. 33). Сформулируем граничные условия. Очевидно, что $\chi = 0$ для x < 0 и для всех $z, \chi \to 0$ при $z \to \infty$ для $0 \le x \le x_0$, но этих условий недостаточно, поскольку в них не задано χ при $z \to 0$ для $0 \le x \le x_0$. Здесь возможны три типа условий.

1. Значение х задается на испаряющей поверхности, т. е.

$$\lim_{z\to 0} \chi(x, z) = \chi_s = \text{const} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

2. Задается скорость испарения, т. е.

$$\lim_{z\to 0} \left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) = f(x, \overline{u}),$$

где f — некоторая функция положения и скорости ветра.

3. Комбинация из (1) и (2) подобна условию о внешней теплоотдаче в теории тепла (гл. 4), а именно, что значение χ на испаряющей поверхности и местная скорость испарения связаны линейной зависимостью.

Сеттон выбрал условие (1): концентрация на поверхности отождествляется с насыщающей концентрацией χ_s , которая зависит только от температуры поверхности и природы испаряющейся жидкости. Правильность этого допущения частично подтверждается лабораторными измерениями влажности в непосредственной близости от испаряющей поверхности и частично правильностью формул для определения скорости испарения с небольших насыщенных поверхностей в аэродинамических трубах. В такой формулировке проблема испарения сводится к определению плоскостного источника, который поддерживает постоянную концентрацию водяного пара на плоскости z = 0, несмотря на непрерывное удаление водяного пара турбулентным потоком воздуха.

Условие (2) было применено Джиблетом, который использовал эмпирическое соотношение, указанное Байглоу, чтобы выразить локальную скорость испарения через упругость водяного пара и скорость ветра; изменением испарения с расстоянием от наветренного края источника он пренебрегал. Такая трактовка не может быть доказана математически или опираться на наблюдения. Третий тип граничных условий, по-видимому, никем не применялся.

Детальный анализ двухразмерной диффузии и соответствующих граничных условий был дан Сеттоном, чье исследование является обобщением работы Гурса по теории теплопроводности. Необходимо также упомянуть работы Жеври, Егера, Кёлера [18] в этой же области.

Решение двухразмерной задачи. Проблема испарения с насыщенной или свободной поверхности жидкости, имеющей безграничную протяженность поперек ветра и ограниченную длину по направлению ветра, была разрешена Сеттоном для ветрового профиля (8.20) и коэффициента вихревой диффузии (8.21). Граничные условия, принятые для вещества, которое не содержится в воздухе, поступающем на испаряющий участок, следующие:

- (1) $\lim_{z\to 0} \chi(x, z) = \chi_s$ для $0 \le x \le x_0$,
- (2) $\lim_{x\to 0} \chi(x, z) = 0$ для z > 0,
- (3) $\lim_{z\to\infty}\chi(x, z) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0.$

Для вещества, которое содержится в поступающем воздухе, условия (2) и (3) должны быть заменены через

(2')
$$\lim_{x\to 0} \chi(x, z) = \chi_0$$
 для $z > 0$
(3') $\lim_{z\to\infty} \chi(x, z) = \lambda_0$ для $0 \le x \le x_0$,

где χ_0 — концентрация (постоянная) в воздухе прежде, чем он достигает испаряющую полосу. В последующих формулах это просто означает замену χ через $\chi - \chi_0$ и χ_s через $\chi_s - \chi_0$. Необходимо заметить, что решение дает концентрацию пара только над влажной поверхностью. Полная скорость испарения

$$E(\overline{u}, x_0) = \int_0^\infty \overline{u}\chi(x_0, z) dz, \qquad (854)$$

поскольку интеграл, очевидно, представляет полную массу пара, которая переносится ветром через плоскость $x = x_0$.

Решение уравнения (8.8) для K_z , данного выражением (8.21), удовлетворяющее приведенным выше граничным условиям, есть

$$\chi(x, z) = \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{2+n} \Gamma\left(\frac{2}{2+n}\right) \Gamma\left[\frac{\overline{u_1^n z^{(2+n)}}}{\left(\frac{2+n}{2-n}\right)^2 a z_1^{\frac{n}{(2-n)} x}}, \frac{n}{2+n}\right] \right\}, \quad (8.55)$$

где

$$a = \frac{\left(\frac{1}{2}\pi k^2\right)^{1-n} (2-n)^{1-n} n^{1-n} \sqrt{n} z_1^{\frac{(n^2-n)}{(2-n)}}}{(1-n)(2-2n)^{2-2n}}$$
(8.56)

и $\Gamma(q, p)$ — неполная гамма-функция, определяемая через

$$\Gamma(\theta, p) = \int_{0}^{\theta} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Полная скорость испарения с полосы, ширина которой перпендикулярна ветру и равна единице, есть

$$E(\overline{u}, x_0) = A\overline{u_1}^{\frac{(2-n)}{(2+n)}} x_0^{\frac{2}{(2+n)}}, \qquad (8.57)$$

где

$$A = \chi_s \left(\frac{2+n}{2-n}\right)^{\frac{(2-n)}{(2+n)}} \left(\frac{2+n}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{2+n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{2+n}\right) a^{\frac{2}{(2-n)}} z_1^{-\frac{n^2}{(4-n^2)}}.$$
 (8.58)

Эти выражения показывают, что скорость испарения с гладкой поверхности можно рассчитать, зная n, u_1 и постоянную Кармана k. Выражение (8.57) можно легко проверить на основании лабораторных данных. Для $n = \frac{1}{4}$ [для которого уравнение (8.20) соответствует профилю, описываемому корнем седьмой степени] следует,

22 О. Г. Сеттон

Значение 0,78 показателя степени для скорости ветра было установлено экспериментально Гимузом, Пауэллом и Гриффитсом, а также Тизенгаузеном и Хайном (данные анализированы Сеттоном). Эксперименты Дерффила дали для показателя степени величину 0,71, но Мроуз, использовавший ту же аппаратуру, нашел значение 0,75. Леттау и Дерффил получили показатель степени для x_0 , равный 0,873, это очень близко к теоретическому значению. Пауэлл и Гриффитс установили, что в их исследованиях этот показатель степени зависит от размеров испаряющей площади в направлении, перпендикулярном ветру, это означает, что в их экспериментах диффузия не была действительно двухмерной.

Наиболее удовлетворительной проверкой решения является проверка, выполненная Пэсквиллом в очень тщательном и глубоком исследовании, которое проводилось с помощью специально сконструированной аэродинамической трубы; опыты проводились с различными жидкостями. В этих экспериментах большое внимание было уделено тому, чтобы избежать искажающего влияния края сосуда, с которого происходит испарение, и обеспечить полное развитие турбулентного пограничного слоя над насыщенной поверхностью. Результаты показывают близкое согласование между теорией и опытом не только относительно характера зависимости от основных параметров, но также и по абсолютным значениям величины испарения (рис. 34).

Кривая, отмеченная через $\lambda = D$, изображает результат видоизмененной теории, предложенной Пэсквиллом. Выражение (8.21) для коэффициента вихревой диффузии на основании (8.20) может быть написано как

$$K_z = f(n) \,\overline{uz} \left(\frac{v}{\overline{uz}}\right)^n. \tag{8.60}$$

Пэсквилл предположил, что кинематическую вязкость у в этом выражении, которая фигурирует при рассмотрении переноса количества движения, следует заменить общим коэффициентом λ и что $\lambda = D$ — молекулярный коэффициент диффузии при расчете переноса вещества, а $\lambda = k - \kappa$ оэффициент температуропроводности, если речь идет о переносе тепла. Данные по бромо-бензину не показывают значительного улучшения, когда D заменяется v, но для других жидкостей это видоизменение первоначальных формул имеет определенное основание. Дополнительным доказательством служит использование Пэсквиллом уравнений (8.57) и (8.58) для определения теплоотдачи при вынужденной конвекции с плоской поверхности. имеющей постоянную температуру. Если концентрация у заменяется $C_n \rho T$ и у через k, то дифференциальное уравнение и граничные условия для диффузии пара переходят в дифференциальное уравнение и граничные условия для переноса тепла. Скорость теплоотдачи

тогда может быть вычислена, если известен профиль скорости, и Пэсквилл нашел хорошее согласование между теоретическим результатом и измерениями (Элиаса) вынужденной конвекции с металлической плошадки при сильном ветре (около 35 м сек.⁻¹). Большая скорость существенно уменьшает действия свободной конвекции, и достойно внимания то, что в этих условиях Элиас нашел почти полное подобие между профилями скорости и температуры над площадкой.



Рис. 34. Экспериментальные и теоретические величины испарения бромбензина.

Эти результаты показывают, что решение (8.55) достаточно точное для определения испарения с гладкой поверхности при лабораторной работе, если горизонтальной диффузией можно пренебречь. Эксперименты на открытом воздухе с небольшими насыщенными листками промокательной бумаги (разложенными на стекле), которые устанавливались в середине стадиона с низко подстриженной травой, дали достаточное согласование при небольших температурных градиентах (Сеттон [1]).

Результаты этой теории могут быть важны для метеорологии, их следует тщательно изучить. Во-первых, необходимо заметить, что скорость испарения пропорциональна концентрации насыщения или для таких веществ, как вода, которая уже находится в поступающем

22*

воздухе, — разности между насыщенной концентрацией при температуре поверхности и концентрацией пара в воздухе.

Во-вторых, скорость испарения прямо пропорциональна продольному размеру не в первой степени, а в некоторой степени, меньшей единицы. Это значит, что местная скорость испарения уменьшается с расстоянием от наветренного края, так что выражение "испарение на единицу площади" не однозначно, пока не указан весь размер площадки. Уменьшение скорости испарения с расстоянием по направлению ветра обусловливается тем, что воздух насыщается паром по мере своего движения от наветренного края, и если влажная поверхность простирается безгранично по направлению ветра, то будет в конце концов достигнуто такое состояние, когда воздух над поверхностью станет насыщенным и испарение прекратится. Математиследует из того, что для $0 < z < \infty$, $\gamma(x, z) \rightarrow \gamma_{z}$, чески ЭТО когда $x \rightarrow \infty$. Изменение E в зависимости от скорости ветра показывает, что простое соотношение, принятое во многих эмпирических исследованиях, о том, что скорость испарения прямо пропорциональна скорости ветра, строго говоря, не оправдывается.

Шероховатая поверхность. Приведенные выше решения относятся к аэродинамически гладкому потоку. Для потока над шероховатой поверхностью Кэлдер использовал те же самые методы, что и в задаче о бесконечном точечном источнике, заменив логарифмический профиль приближенным степенным законом (см. стр. 310). Выражения, полученные таким путем, фактически аналогичны выражениям, приведенным выше, но были получены методом источников, приводящим к интегральному уравнению типа Абеля. Для ознакомления с этими формулами, которые довольно сложны, читателю надлежит обратиться к оригинальной работе.

Кэлдер сравнил теорию с результатами измерений концентраций пара над площадями, политыми анилином. Результаты дали достаточно хорошее согласование теории с наблюдением для высот около 2 м при безразличном равновесии.

Концентрация вне испаряющего участка. Для $x > x_0$ земля предполагается сухой, так что в этой области взамен условия (1) приравнивается нулю локальная скорость испарения. Выражение для $\chi(x, z)$ в этой области было получено У. Д. Л. Сеттоном, а позднее Кэлдером (использовавшим метод источников) в форме

$$\chi(x, z) = \chi_s \sin\left(\frac{2\pi}{2+n}\right) \int_0^{x_0} \theta^{-\frac{n}{(2+n)}} (x-\theta)^{\frac{2}{(2+n)}} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{\frac{\overline{u_{1}^{n}z^{\frac{(2+n)}{(2-n)}}}}{\left(\frac{2+n}{2-n}\right)^{2}a(x-\theta)z_{1}^{\frac{n}{(2+n)}}}\right]d^{\theta}.$$
 (8.61)

Ло сих пор этот интеграл не был затабулирован. Вышепривеленные решения применимы к площадям, которые простираются перпенликулярно ветру безгранично, или к условиям, в которых горизонтальной диффузией можно пренебречь. Трехразмерная проблема испарения с площади, ограниченной как поперек ветра, так и вдоль ветра. все еще нуждается в удовлетворительном решении. Д. Р. Дейвис [27] рассмотрел уравнение (8.15) для p = m и нашел решение для полубесконечной области, ограниченной параболической кривой. но допущение, что К, возрастает с высотой так же, как и скорость ветра, не имеет теоретического обоснования и, как известно, ведет к неправильному результату для непрерывного точечного источника (см. стр. 313) С. Дж. Тренте [28] недавно рассмотрел эту проблему, использовав методы, примененные при решении уравнения теплопроводности для твердого тела; полученное им решение представлено в виде бесконечного ряда интегралов. содержащих функции Матье. Приводим решение задачи об испарении методом Тренте для постоянных К, и К,

Рассмотрим полосу шириной 2h, которая представляет собой либо поверхность, насыщенную водой, либо свободную поверхность воды, расположенную на плоскости z = 0, более длинная сторона ее параллельна направлению среднего ветра. Уравнение диффузии в этом случае имеет следующий вид:

$$\overline{u} \frac{\partial \chi}{\partial x} = K_y \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}.$$

Граничные условия задачи:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ z \to 0}} \chi(x, y, z) = 0 \quad z > 0,$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ z \to 0}} \chi(x, y, z) = \chi_s \quad x > 0, \quad -h \leqslant y \leqslant h,$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ z \to 0}} K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \quad x > 0, \quad -h > y > h$$

и $\chi \to 0$ на больших расстояниях от полосы. Введем замену переменных:

$$x = \overline{ut}, \quad y = K_y^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad z = K_z^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

тогда

$$\frac{\partial^{2\chi}}{\partial\xi^{2}} + \frac{\partial^{2\chi}}{\partial\eta^{2}} = \frac{\hbar^{2}}{2} \left(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta \right) \frac{\partial\chi}{\partial t} \,.$$

Это уравнение аналогично уравнению, рассмотренному в теории теплопроводности, и то же решение (с некоторыми несущественными изменениями) применяется к проблеме испарения. Следовательно, для постоянных коэффициентов диффузии известно точно решение, но оно содержит незатабулированные функции Матье, поэтому в настоящее время не может найти практического применения.

Неограниченные поверхности. Имея в виду метеорологические приложения, необходимо заметить, что данные выше решения применимы только к сравнительно небольшим поверхностям, таким как озера и водоемы. Испарение с центральных областей океанов или других насыщенных поверхностей представляет собой совершенно другую проблему. В этих случаях скорость испарения на единицу площади имеет вполне определенный однозначный смысл, поскольку нет зависимости от горизонтальных координат.

В этих условиях концентрация пара зависит только от высоты и времени, и уравнение диффузии имеет следующую форму:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \,.$$

При решении этого уравнения необходимо знать временные изменения K_z на всех высотах; в настоящее время этот вопрос недостаточно изучен. Большая часть исследований касается установившегося состояния $\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = 0$, откуда следует, что

$$K_z \frac{\partial \chi}{\partial z} = \text{const}$$

Поскольку $\left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_{z=0}$ — местная скорость испарения, то отсюда вытекает, что поток водяного пара не зависит от высоты, и если K_z тождественно вихревой диффузии, то профиль водяного пара подобен профилю ветра, видоизмененному соответствено новым граничным условиям. Из

$$\overline{u} = \overline{u}_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m$$

следует, что

$$\chi_{\rm s} - \chi = {\rm const} \, F_0 z^m, \tag{8.62}$$

где $F_0 = \left(K_z \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_{z=0}$ — поток водяного пара на поверхности. Такое выражение достаточно хорошо согласуется с наблюдениями влажности при неустойчивом состоянии и несколько лучше в условиях инверсии (Шеппард). Если K_z предполагается прямо пропорциональным высоте, то разность $\chi_s - \chi$ пропорциональна логарифму высоты, что согласуется с наблюдениями при небольших температурных градиентах, но существенно расходится с наблюдениями при других состояниях (Свердруп, Фаерзах).

Хорошо известная и наиболее широко применяемая формула испарения, выведенная из этих соображений, — это формула Торнтвейта и Хольцмана, опубликованная в 1939 г. и впоследствии обобщенная Хольцманом в 1943 г. В условиях адиабатического градиента, когда профиль ветра логарифмический, выражение для скорости испарения запишется как

$$E = \frac{\rho k^2 (q_1 - q_2) (u_2 - u_1)}{\left(\ln \frac{z_2}{z_1}\right)^2} , \qquad (8.63)$$

где q_1 , q_2 и u_1 , u_2 — удельные влажности и средние скорости ветра на высотах z_2 и z_1 соответственно, k — постоянная Кармана. Эту формулу нетрудно получить из обычного логарифмического профиля для шероховатой поверхности [уравнение (7.2)] при предположении, что K_z тождественно вихревой вязкости, и, таким образом,

$$K_z = \frac{u_1 k^2 z}{\ln \left(\frac{z_1}{z_0}\right)} \,.$$

Как указано Пэсквиллом, выражение (8.63) может быть написано с достаточной точностью в более удобной форме

$$E = Bu_2 (e_1 - e_2), \tag{8.64}$$

где

B ==	k^2M	(1 -	$-\frac{u_1}{u_2}$
	RT	(In	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

 $(M - молекулярный вес воды, <math>R - газовая постоянная, T - абсолютная температура воздуха, <math>e_1$ и e_2 - давление пара) постоянна для факсированной шероховатости, поскольку в условиях адиабатического градиента $\frac{u_1}{u_2}$ зависит только от шероховатости поверхности, которая предполагается постоянной. Таким путем получается очень простое выражение, в котором скорость испарения с единицы площади может быть получена из измерений скорости ветра на какой либо одной небольшой высоте и давления пара на двух высотах.

Пэсквилл испытал эту формулу в ряде работ и рассмотрел видоизмененную форму для очень шероховатых поверхностей, а именно

$$E = \frac{\rho k^2 (u_2 - u_1) (q_1 - q_2)}{\left[\ln \left(\frac{z_2 - d}{z_1 - d} \right) \right]^2} , \qquad (8.65)$$

где d — смещение начальной плоскости (гл. 7). Теоретическая формула, которая содержит только метеорологические параметры, сравнивалась со скоростью испарения, найденной по взвешиванию образцов через равные интервалы. Такая процедура, требующая тщательной проверки и мер предосторожности, необходимых для получения достоверных результатов, выполнена Пэсквиллом. Конечный результат, основанный на 41 сравнении скорости испарения E_c , вычисленной по уравнению (8.65) и скорости, найденной по потере веса образцами почвы в условиях действительно адиабатического градиента при скорости ветра, колеблющейся от 300 до 900 см сек.⁻¹, дал среднее значение $\frac{E_c}{E_0} = 0,99$. Отдельные отклонения были в пределах 10, 20 и 30°/₀ в 24, 66 и 90°/₀ случаев. Это означает, что в состоянии безразличного равновесия расчет средних скоростей испарения за периоды порядка часа, из градиентных измерений, имел бы ошибку не более чем на 20°/₀, в 70°/₀ случаев это является удовлетворительным результатом.

Хольцман, используя эмпирическое соотношение для пути смешения при неадиабатических условиях, рассмотренных в гл. 7, вывел выражение для испарения в любых условиях, аналогичное формуле для состояния безразличного равновесия, а именно

$$E = \frac{\rho k^2 (q_1 - q_2)(u_2 - u_1)}{\ln \frac{z_2}{z_1} \ln \frac{z_2(1 - sz_1)}{z_1(1 - sz_2)}}, \qquad (8.66)$$

где s — экспериментально определенный параметр устойчивости.

В условиях адиабатического вертикального градиента s == 0, и уравнение (8.66) приводится к уравнению (8.63).

Р. Б. Монтгомери исследовал испарение с океана. В его работе профиль влажности описывается через коэффициент испарения, определенный как

$$\Gamma_{E} = -\frac{1}{(e_{0} - e_{z})} \frac{de}{d(\ln z)}, \qquad (8.67)$$

где e_z — давление пара на уровне z. Для гладкой поверхности Монтгомери принимает во внимание наличие ламинарного подслоя и пишет:

$$K_z = D + k \overline{u} z$$
 для гладкой поверхности, (8.68)

 $K_z = D + k\bar{u} (z + z_0)$ для шероховатой поверхности, (8.69)

где D — молекулярный коэффициент диффузии водяного пара в воздух. В ламинарном подслое все свойства меняются линейно с высотой, и, таким образом,

$$E = \frac{5\rho D}{8p} \left(\frac{e_0 - e_\delta}{\delta} \right), \qquad (8.70)$$

где δ — толщина ламинарного подслоя и p — атмосферное давление. Для δ Монтгомери использует уравнение

$$\delta = \frac{7.8\nu}{u_{\star}} \,. \tag{8.71}$$

В турбулентном слое

$$E = \frac{5pk u_* (e_{\delta} - e_z)}{8p \ln \frac{D + ku_* z}{D}}, \qquad (8.72)$$

что следует на основании уравнения (8.68). Исключая & из уравнений (8.70) и (8.72) и используя уравнение (8.67), Монтгомери получает

$$E = \frac{5\rho k u_* \left(e_0 - e_z\right)}{8\rho} \Gamma_E. \tag{8.73}$$

Коэффициент испарения может также выражаться через коэффициент поверхностного трения.

Для того чтобы учесть действие волн, Монтгомери рассматривает три слоя: 1) ламинарный слой с линейным профилем скорости; 2) промежуточный слой с логарифмическим профилем для гладкой поверхности; 3) турбулентный слой с логарифмическим профилем для шероховатой поверхности. Толщина промежуточного слоя равна высоте волны. При выводе принимается непрерывность скорости между слоями, но не касательного напряжения. Конечный результат имеет вид. аналогичный (8.73).

Из анализа Монтгомери следует, что коэффициент испарения для шероховатой поверхности равен половине коэффициента для гладкой поверхности, но поскольку динамическая скорость возрастает при переходе от гладкой к шероховатой поверхности, то делается вывод, что испарение с гладкого моря, почти такое же, как и испарение с шероховатого моря, если не учитывать вклады брызг в испарение. Это не согласуется с работой Норриса, который допускает, что отношение потока пара в промежуточных и турбулентных слоях пропорционально отношению касательного напряжения в этих слоях, а поэтому и квадрату отношения динамических скоростей, характерных для этих двух слоев. На этой основе Норрис заключает, что скорость испарения с полностью шероховатой поверхности в четыре раза больше скорости для гладкой поверхности. До некоторой степени аналогичные выражения были даны Свердрупом.

В целом большинство наблюдений подтверждает правильность теорий Норриса и Свердрупа, но противоречит теории Монтгомери. Для ветров (на высоте 6 м) меньше чем 800 см сек.⁻¹ все три теории приводят почти к одинаковому результату и удовлетворительно согласуются с наблюдениями. Для ветров, превышающих 800 см сек.⁻¹, формула Монтгомери дает скорости испарения много ниже скоростей наблюденных, которые согласуются с теорией Свердрупа и Норриса.

Балансовый метод. Метод баланса основан на законе сохранения энергии. Для поверхности воды или слоя почвы

$$F_1 = F_R + F_B + F_H - F_S + F_E$$
, (8.74)

где F_1 — суммарная радиация (прямая и рассеянная); F_R — отраженная солнечная радиация; F_B — поток (длинноволновой) радиации, направленный вверх; F_H — поток тепла вверх, обусловленный теплопроводностью; F_S — поток тепла вниз, который повышает теплосодержание; F_F — потеря тепла на испарение.

Все величины выражены в г'кал. см⁻² мин.⁻¹. Предполагается, что адвекция тепла отсутствует и что поглощение радиации растительностью пренебрежимо мало. Задача состоит в определении F_E . Величины F_1 , F_R , F_B были рассмотрены в гл. 5, а значение F_S для почвы дано в гл. 6. Наибольщая трудность заключается в точном определении F_H — скорости передачи тепла молекулярной и турбулентной теплопроводностью. Переписывая уравнение (8.74) в форме

$$F_{H} + F_{E} = F_{1} - F_{R} - F_{B} + F_{S}$$
(8.75)

и введя так называемое уравнение Боуэна $R = \frac{F_H}{F_E}$ (отношение конвективного потока тепла к потере тепла благодаря испарению), получаем

$$F_{E} = \frac{F_{1} - F_{R} - F_{B} + F_{S}}{1 + R} .$$
 (8.76)

Таким образом, если L — скрытая теплота парообразования, то скорость испарения с единицы площади

$$E = \frac{F_1 - F_R - F_B + F_S}{L(1+R)} \,. \tag{8.77}$$

Теперь задача сводится к определению R, так как все другие величины или известны, или легко измеряются.

В ранней работе Шмидта значения R находятся в пределах от 2 до 0,3. Позднее Онгстрем пришел к выводу, что эти величины слишком велики, и считает, что R имеет порядок 0,1. Впоследствии Боуэн пытался выразить R через легко измеряемые величины, так чтобы уравнение (8.77) можно было применять без больших трудностей. Он рассмотрел следующие два крайних случая.

Случай I. В тонком слое, примыкающем к поверхности, скорость ветра постоянна, выше этого слоя движение либо отсутствует, либо очень медленное. Весь объем воздуха внутри рассматриваемого слоя все время заменяется новым. Однако температура воздуха, непосредственно примыкающего к испаряющей поверхности, неизменна. Диффузия через верхнюю границу слоя не принимается во внимание.

Случай II. Предполагается наличие неподвижного слоя у самой поверхности, выше этого слоя скорость ветра значительна. Тепло и водяной пар, диффундирующие через этот слой, немедленно уносятся проходящим над ним потоком. Здесь диффузия является доминирующим фактором.

Для этих двух экстремальных случаев Боуэн нашел: случай I

$$R = 6.6 \cdot 10^{-4} p\left(\frac{T_{s} - T_{A}}{e_{s} - e_{A}}\right), \qquad (8.78)$$

$$R = 5.8 \cdot 10^{-4} p \left(\frac{T_S - T_A}{e_S - e_A} \right), \qquad (8.79)$$

где T_S , T_A , e_S , e_A — температура (в °С) и упругость водяного пара у поверхности и в воздухе соответственно, а p — атмосферное давление. Для практического применения Боуэн выбрал значение среднее между случаями I и II

$$R = 6, 1 \cdot 10^{-4} p \left(\frac{T_s - T_A}{e_s - e_A} \right).$$
 (8.80)

Эти уравнения предполагают молекулярную диффузию и теплопроводность, а поэтому применимы только для ламинарного движения. Боуэн предположил, что это отношение будет почти таким же и при турбулентном движении. Это предположение было проверено Куммингсом и Ричардсоном, которые на основании сравнения результатов испарения с небольшой чаши и большого резервуара пришли к выводу о его правильности. Куммингс построил номограмму, которая позволяет определить отношение Боуэна быстро и точно.

8. 7. Наблюдения испарения

Выше упоминался принятый порядок наблюдений над скоростью испарения по непосредственному измерению уменьшения веса воды в небольших открытых чашах или резервуарах (эвапориметрах). Кроме чисто технических трудностей, связанных с получением надежных данных, неясно, насколько такие наблюдения применимы в метеорологии. Трудно привести сколько-нибудь достаточные основания для существования однозначной связи между испарением с резервуара и потерей воды верхними слоями почвы, по-видимому, здесь речь может идти только о корреляционной связи.

Опыты Пэсквилла, в которых применялись насыщенные испаряющие поверхности, расположенные на почве, показали хорошее согласование с решением Сеттона (8.57), при малых температурных градиентах это решение, строго говоря, пригодно только для потока над гладкой поверхностью при безразличном равновесии.

Последующие эксперименты, проводившиеся по той же методике, но при больших температурных градиентах, не дали значительного расхождения со скоростью испарения, измеренной при безразличном равновесии. Если согласиться с этим результатом, то следует заключить, что испарение не зависит от устойчивости, если только не сомневаться в пригодности эвопариметра как метеорологического прибора.

Сеттон предположил, что такие результаты указывают на зависимость диффузии водяного пара с небольшой поверхности, расположенной на почве, главным образом от пограничного слоя, обусловленного этой поверхностью, но отнюдь не от пограничного слоя



Рис. 35. Осредненные за час значения скорости ветра на уровне 50 см, разности упругости водяного нара между уровнями 25 и 50 см в милли-метрах ртутного столба и вычисленная скорость испарения в г/см² сек.

атмосферы, поэтому экстраполяция на большие поверхности не обоснована. С другой стороны, известно, что условия вблизи земной поверхности даже при хорошо выраженном температурном градиенте в верхних слоях не отклоняются сильно от безразличного равнове-Эксперименты Пэсквилла показывают, что выражение (8.57). сия. позволяет вычислить скорость испарения с небольших насыщенных поверхностей по измерениям температуры, ветра и влажности с такой же точностью, как и по непосредственным измерениям, таким образом, для применения эвапариметров существует мало оснований. Вопрос об испарителе, как заслуживающем внимание метеорологическом инструменте, является более чем сомнительным. Пэсквилл определял сумму и суточный ход испарения с луга на глинистой почве в хорошую весеннюю погоду в Англии, используя только метеорологические наблюдения; опубликованные им данные представлены на рис. 35. Эти величины основаны на формуле Торнтвейта-Хольцмана, поскольку отклонение от безразличного равновесия мало влияет на результат, если измерения метеорологических элементов, необходимых для расчетов, сделаны в непосредственной близости к поверхности (z > 50 см). Действие устойчивости определяется, очевидно, только числом Ричардсона, которое уменьшается по мере приближения к поверхности. Пенман рассчитал средние значения годового испарения с Британских островов, в основу вычислений положены многолетние средние температуры воздуха, продолжительности солнечного сияния, давления пара и скорости ветра. Расчетная формула получена на основании уравнения теплового баланса и эмпирического соотношения для учета скорости ветра и давления пара. полученного из измерений испарения при помощи испарителей. Испарение с поверхности снега было исследовано Кёлером, который приводит большую серию значений, полученных взвешиванием. Эта работа содержит также интересное обсуждение математической стороны проблем.

8.8. Сравнение коэффициента перемешивания для количества движения, тепла и массы

Опыты по испарению дают отличный способ проверки тождественности коэффициентов перемешивания для количества движения, тепла и массы. Трудность согласования изменений с высотой вихревой вязкости и коэффициента турбулентности уже рассматривалась в гл. 6. Предполагалось, что очень быстрое увеличение K_H с высотой, полученное из наблюдений над суточной температурной волной летом, в значительной степени связано со свободной конвекцией. Пэсквилл сравнил коэффициенты обмена, используя отношения для количества движения

$$K_{M} = k^{2} z^{2} \frac{\partial u}{\partial z} , \qquad (8.81)$$

$$K_z = -\frac{E}{\frac{\partial \chi}{\partial z}}$$

и образуя из второго соотношения безразличную величину

$$\frac{K_z}{z^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)} = \frac{-E}{z^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)} . \tag{8.83}$$

Если К_м и К, идентичны, то из (8.81) и (8.83) следует, что

	F	1	
[$-1^2 = k$.	(8.84)
z^2	$\left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)$) [
Ľ	$\langle \partial z \rangle \langle \partial z$	1]	

Эта формула может быть проверена на основании наблюдений.

Пэсквилл показал, что для —0,004 \ll Ri \ll 0,004 значение k, рассчитанное по левой части уравнения (8.84), очень близко к 0,4 для большого интервала скоростей ветра. Поэтому он считает, что в условиях безразличного равновесия или при небольших отклонениях от него вихревой коэффициент диффузии для водяного пара идентичен с вихревым коэффициентом диффузии для количества движения и что постоянная Кармана для атмосферы имеет то же значение, что и по опытам в аэродинамических трубах. Те же заключения следуют из наблюдений над рассеиванием искусственного дымового облака (см. стр. 311). Пэсквилл показал, что между K_M

 $\frac{K_M}{\left(z^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)}$ и $\frac{K_z}{z^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)}$ при неустойчивом состоянии имеется хорошее

согласование, почти такое же, как и при безразличном равновесии. При устойчивом состоянии имеет место значительное расхождение, которое Пэсквилл объясняет той же причиной, по которой "профиль" Дикона [уравнение (7.6)] расходится с опытными данными при инверсии, если принять шероховатость, не зависящей от устойчивости.

Из уравнения для потока тепла

$$q = -\rho c_{p} K_{H} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \Gamma \right).$$

Пэсквилл получает значения K_H и находит, что они того же порядка, что и K_z при z = 75 см над поверхностью травы. Более тщательное сравнение получается, когда безразмерные величины

$$\frac{K_H}{z^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}} \text{ M } \frac{K_z}{z^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}}$$

нанесены как функции числа Ричардсона. При этом обнаруживается 350

(8.82)

тождественность K_H и K_z при устойчивой стратификации и расхождение при больших вертикальных градиентах, причем $K_H > K_z$. Вывод поэтому таков, что $K_H > K_M = K_z$ при неустойчивой стратификации и $K_H = K_z > K_M$ при устойчивом состоянии. Эти выводы совпадают с результатами, показанными в гл. 6, на основании анализа распространения суточной температурной волны от поверхности земли.

8.9. Исследование турбулентной диффузии методами теории подобия

В 1926 г. Л. Ф. Ричардсон опубликовал весьма оригинальные соображения по теории диффузии, которые в известной мере предвосхитили многие из идей, недавно предложенных Колмогоровым, Вейсзеккером, Гейзенбергом и др. (см. гл. 3). В любом типе диффузии расстояние между парой частиц будет иметь тенденцию увеличиваться с течением времени. Характерной особенностью фикковской диффузии является то, что скорость разделения двух таких частиц в среднем не зависит от расстояния между ними. В своей работе Ричардсон исследовал весьма общий тип диффузии, который близок к диффузии в турбулентном потоке.

Пусть l — проекция расстояния между любой парой меченых частиц на некоторое направление Ox и пусть q — "число соседей" на единицу l определяется через

$$q(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) \chi(x+l) dx,$$

где $\chi(x)$ — концентрация частиц в точке x. Если частицы расположены симметрично в том смысле, что $\chi(-x) = \chi(x)$, то можно показать, что обращение интеграла однозначно определяет $\chi(x)$ через q(l). Ричардсон показал, что q удовлетворяет параболическому дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \left\{ F(l) \frac{\partial q}{\partial l} \right\},\,$$

где F(l) имеет смысл некоторого коэффициента диффузии. Свойства F(l) могут быть выяснены на основании наблюдений над парами частиц. Пусть l_0 будет первоначальным значением l, а l_T — его значение на T сек. позднее; T выбирается таким образом, что $l_T - l_0$ измеримо, но мало по сравнению с l. Осредняя многие такие пары, можно показать, что

$$F(l_0) = \frac{\text{среднему от } (l_T - l_0)^2 \text{ для всех пар}}{2T}$$

Для атмосферы Ричардсон, используя довольно грубые экспери-

ментальные данные, нашел, что

$$F(l) = 0,6 l^{\frac{1}{3}} \text{ см}^2 \text{ сек.}^{-1}$$

для $10^2 \ll l \ll 10^6$ см. Если бы атмосферная диффузия была фикковской, то F(l) не зависело бы от l. Отсюда следует, что в атмосфере скорость разделения двух частиц возрастает с увеличением расстояния между ними. Этот результат указывает на широкий интервал характерных масштабов длины, с которыми связаны флюктуации скорости. В более позднем исследовании Ричардсон и Стоммель, наблюдая пары плавающих предметов в Лош Лонге (Шотландия) нашли, что

$$F(l) = 0.07 l^{1.4}$$

как для больших, так и для малых lo. Что касается показателя степени. то последнее исследование согласуется с результатом для атмосферы. Первоначальная теория Ричардсона не предсказывает точной функциональной формы F(l), и достоинством новых аналогичных теорий является то, что они дают возможность вывести теоретически такие соотношения. Ричардсон и Стоммель утверждают, что эмпирические законы, приведенные выше, подтверждаются теориями Вейсзеккера и Гейзенберга, которые вывели теоретически "закон четырех третьих". Дальше эти вопросы рассматривались Г. К. Бэтчелором в связи с гипотезой подобия, сформулированной Колмогоровым. Бэтчелор делит процессы на (1) диффузию от фиксированного источника и (2) диффузию облака, движущегося вместе с ветром. В первом процессе распределение концентрации вокруг источника известно теоретически из статистического поведения одной частицы, первоначально возникшей в источнике, например отношением между средним квадратным смещением $\overline{X^2}$ частицы с удалением от источника и продолжительностью диффузии t. Из теоремы Тейлора [ур. (3.60)] $\overline{X^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\overline{X^2}}{dt} = \overline{2X(t) u(t)} = 2 \int_0^t \overline{u(t') u(t) dt'},$$

где X и u проекции смещения и компоненты скорости на Ox. Величина $\overline{u(t')u(t)}$ зависит главным образом от $\xi = t - t'$, обозначив $S(\xi) = \overline{u(t')u(t)}$, получим

$$\frac{d\overline{X^2}}{dt} = 2 \int_0^t S(\xi) d\xi.$$

Для правильного применения теории Колмогорова необходимо установить пределы размеров вихрей, которые, вероятно, оказывают влияние на эти процессы (см. гл. 3). Для $\xi = 0$, $S(\xi) = \overline{u^2}$; $S(\xi)$

является полной вихревой энергией системы и потому не очень зависит от малых вихрей. Когда ξ возрастает, $S(\xi)$ начинает все больше и больше зависеть от больших вихрей, к которым теория не применима. Вывод таков, что теория Колмогорова, строго говоря, не может применяться к определению $\frac{d\overline{X^2}}{dt}$.

Проблема диффузии от центра, движущегося по ветру, аналогияным образом сводится к статистическому рассмотрению относительного движения двух меченых частиц. Если $\xi(t)$ — проекция расстояния l на фиксированные оси и если $\delta u(t)$ есть x-компонент относительной скорости частиц через t сек. после разъединения, то в среднем для многих пар имеем

$$\frac{d\xi^2(t)}{dt} = 2\xi(t)\,\delta u(t) = 2\int_0^t \overline{\delta u(t)\,\delta u(t')}\,dt'.$$

Для малого $t \, \delta u \, (t')$ приблизительно равно $\delta u \, (0)$, а отсюда

$$\frac{d\xi^2(t)}{dt} \approx 2t\delta u^2(0) = 2t \ \overline{[u(x+l_0)-u(x)]^2}.$$

Правая часть этого уравнения рассматривалась в гл. 3, где показано, что она определяется главным образом небольшими вихрями, когда l_0 достаточно мало. По мере увеличения t частицы оказываются далеко друг от друга и их поведение определяется большими вихрями, т. е.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d\overline{\xi^2(t)}}{dt} = 2 \frac{d\overline{X^2(t)}}{dt} ,$$

система, таким образом, попадает за пределы применимости гипотезы подобия. Это показывает, что теория Колмогорова может применяться для определения $\frac{d\bar{\xi}^2}{dt}$ только при ограниченных значениях l_0 и t. Из соображений размерности следует, что

$$\frac{d\overline{z}^{2}}{dt} = \gamma f\left(\frac{t^{0}e^{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{\sqrt{4}}}, -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}}\right),$$

где ε — средняя скорость диссипации энергии на единицу массы жидкости, а f — универсальная функция. Бэтчелор рассматривает различные случаи (малые t, средние и большие, l — малые и средние) и получает на основании гипотезы подобия различные выражения. Наиболее важными предсказаниями являются:

$$t_{\text{малые}} \left(\ll l_0^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \right) \ \frac{d\overline{\xi^2}}{dt} = 2c_1 t \left(\varepsilon l_0 \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\xi_0^2}{l_0^2} \right), \qquad (8.85)$$

23 О. Г. Сеттон

где c_1 и c_2 — постоянные при условии, что $\sqrt{\overline{\xi^2}}$ много меньше верхнего предела для размера вихрей, к которому применимы гипотезы Колмогорова.

 $t_{60,3\text{humble}} \left(\gg l_0^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{3}} \right) \quad \frac{d\overline{5}^2}{dt} = c_2 e t^2 ,$

Эти предсказания были сравнены с экспериментальными результатами Ричардсона — Стоммеля. Изменения lo не согласуются 1 с наблюдениями, но значения, полученные для є, — величины того же порядка, что и в наблюдениях. С другой стороны, Вайсзеккер говорит, что процесс вычисления рассеяния относительно среднего положения. примененный Ричардсоном в его ранней работе по атмосферной диффузии, уничтожает влияние больших вихдей, так что удавнение (8.86) соответствует его результатам.

Это уравнение эквивалентно предположению, что

$$K = \operatorname{const} \epsilon l_0^{\frac{4}{3}}.$$

Таким образом, имеются основания для утверждения, что эмпирическое отношение Ричардсона для коэффициента диффузии совместимо с гипотезой подобия. Согласование имеет место вплоть до

постоянного множителя при $l_0^{\overline{3}}$ (Бэтчелор).

Пока нет неопровержимых доказательств, подтверждающих (8.85) или (8.86), и такие доказательства трудно получить. Измерения рассеяния серии шаров-пилотов дают достоверные сведения только в том случае, если они проведены над достаточно большим числом выпусков шаров-пилотов, так что систематические погрешности исключены. Более перспективным является фотографирование клубов дыма, но эти результаты требуют весьма внимательной обработки. Несомненно, что гипотезы подобия указывают новые направления развития в такой трудной и во многих отношениях еще не понятной области.

ЛИТЕРАТУРА

 Sutton O. G. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 73, 257, 1947.
 Roberts O. F. T. Proc. Roy. Soc., London, A 104, 640, 1923.
 Calder K. L. Quart. J. Mech. Applied Match., 2, 153, 1949.
 Sutton O. G. Proc. Roy. Soc., London, A 146, 1934.
 Deacon E. L. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 75, 89, 1949.
 Sutton O. G. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 75, 335, 1949.
 Sutton O. G. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 73, 426, 1947.
 Bosanquet C. H. and Pearson J. I., Trans. Faraday Soc., 32, 124, 1026 · 1936.

¹ Бэтчелор оспаривает заключение Ричардсона и Стоммеля о том, что их эмпирический закон для F (1) согласуется с гипотезой подобия, развитой Вайсзеккером.

- 9. Bosanquet C. H., Carey W. F. and Halton E. M. Proc. Inst. Mech-Eng., 162, 355, 1950. 10. Hill G. R., Thomas M. D. and Abersold J. N. Ind. Hyg. Foundabion
- Am., Proceedings of 9 th ammal meeting, 1944.
- 11. Schmidt. W. Z. angew. Math., Mech., 21, 265, 351, 1941.
- 12. Sutton O. G. J. Meteorol., 7, 307, 1950.
- 13. Jeffreys H. Phil, Mag., 35, 270, 1918.
- 14. Giblett M. H. Proc. Roy. Soc. London, A 99, 472, 1921.
- 15. Sutton W. G. L. Proc. Roy. Soc., London, A 182, 48, 1943.
- 16. Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Paris, 1915.
- 17. Jaeger J. G. Quart. Applied Math., 3, 210, 1945.
- 18. Köhler H. Arkiv Geophys., 1, 8, 1950.
- 19. Himus G. Inst. Chem. Engrs. London, Conference on vapor absorption and adsorption, 1929.
- 20. Powell R. W. and Griffiths E. Trans. Inst. Chem. Engrs. London. 13, 175, 1935.
- 21. Thiesenhausen R. Gesundh. Ing., 53, 113, 1930.
- 22. Hine T. B. Phys. Rev. 24, 79, 1924.
- 23. Dörffel F. Veröffentl. Geophys. Inst. Leipzig, 6, 4, 1935.
- 24. Mrose H. Jahrb. Sachs. Amtes. Gewasserk, 1936.
- 25. Lettan H. and Dörffel F. Ann. Hydr. u. marit. Met.orol., 64. 342, 504, 1936.
- 26. Pasquill F. Proc. Roy. Soc., London, A 182, 75, 1943.

- Davies D. R. Proc. Roy. Soc., London, A 190, 232, 1947.
 Tranter C. J. Quart. J. Mech. Applied Math., 4, 461, 1952.
 Sheppard P. A. Meteorological Factors in Radio Wave Propagation, Phys. Soc., London, 1947.
- 30. Sverdrup H. U. Geophys. Pub., 11, 7, 1936.
- 31. Firesah A. M. London University, Ph. D. thesis.
- 32. Thornthwaite C. W. and Holzman B. Monthly Weather Rev., 67, 4, 1939.
- 33. Holzman B. Ann. N. Y. Acad. Sci., 44, 13, 1943.
- 34. Pasquill F. Quart. Roy. Meteorol. Soc., 75, 249, 1949.
- 35. Montgemery R. B. Papers Phys, Oceanog. Meteorol. Mass. Inst. Technol. and Woods Hole Oceang. Inst., 7, 4, 1940.
- 36. Norris R. Quart. Roy. Meteorol. Soc., 74, 1, 1948.
- 37. Sverdrup H. U. J. Meteorol., 3, 1, 1946.
- 38. Schmidt W. Ann. Hydr. u. marit. Meteorol., 43, III, 1920.
- 39. Ån gstrom A. Geog. Ann., 11, 237, 1920.
- 40. Rowen 1. S. Phys. Rev., 27, 779, 1926.
- 41. Cummings N. W. and Richardson B. Phys. Rev., 30, 527, 1927.
- 42. Penman H. L. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 76, 372, 1950.
- 43. Köhler H. Arkiv Geophys., 1, 159. 1950.
- 44. Pasquill F. Proc. Roy. Soc. London, A 198, 116, 1946.
- 45. Richardson L. F. Proc. Roy. Soc., London 110, 709, 1926. 46. Richardson L. F. and Stommel H J. Meteorol., 5. 238, 1948. 47. Batcheler G. K. Quart, J. Roy. Meteorol. Soc., 76, 133, 1950.
- 48. Берлянд М. Е. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1, 1944...
- 49. Лайхтман Д. Л. Метеорология и гидрология, № 1, 1947.
- 50. Ляпин Е. С. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 34, 1946.

- 51. Монин А. С. ДАН СССР, т. 105, № 2, 1955. 52. Монин А. С. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1955. 53. Монин А. С. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1956.



О. Г. Сеттон

микрометеорология

Редакторы: Ю. В. Власова и В. С. Протопопов Техн. редакторы: М. И. Брайнина и М. Я. Флаум Корректоры: З. А. Белкина и Б. А. Минц

Сдано в набор 22/VII 1957 г. Подписано к печати 5/XI 1957 г. Бумага 60 × 92¹/₁₆. Бум. л. 11,13. Печ. л. 22,25. Уч.-изд. л. 24,88. Тираж 2500 экз. М-37557. Индекс МЛ-136. Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, В-53, 2-я линия, д. № 23. Заказ № 733. Цена 13 руб. 95 коп.

Типография № 8 Управления полиграфической промышленности Ленсовнархоза, Ленинград, Прачечный пер., д. 6.