

Н. А. КАРТВЕЛИШВИЛИ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГИДРОЛОГИЯ

ЛЕНИНГРАДСКИЙ
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 125126 Малоохтинский пр., 98



ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ
ЛЕНИНГРАД • 1975

Естественный речной сток рассматривается с позиций теории вероятностных процессов: единым вероятностным описанием охватываются не только характерные расходы (среднегодовые, максимальные и т. п.), а весь процесс стока в целом. Центральный вопрос книги — построение функций распределения вероятностей, управляющих процессом стока, главным образом многомерных. Выводятся также уравнения в конечных разностях этого процесса. Излагаются основные принципы вероятностного прогнозирования стока. Рассматриваются связи стохастических и генетических концепций в гидрологии. Значительное внимание уделено аспектам использования выводов и результатов стохастической гидрологии в регулировании речного стока водохранилищами.

Рассчитана на гидрологов, проектировщиков, гидротехников.

Natural runoff is considered according to the theory of probability processes. The single probability description embraces not only typical water discharges (annual, maximal and other), but the runoff process as a whole. The main question is the construction of probability distribution functions regulating the runoff process, mainly multidimensional functions. The equations in final differences of this process are deduced too. The general principles of runoff probability forecasting and the relations between stochastic and genetic hydrological conceptions are stated. The great attention is paid to the use of conclusions and results of stochastic hydrology in regulation of runoff with reservoirs.

This book is intended for hydrologists, designers and hydraulic engineers.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Под стохастической гидрологией понимается часть гидрологии, занимающаяся выявлением вероятностных закономерностей в процессе речного стока и описанием этого процесса как единого целого с позиций теории вероятностных процессов. Но, поскольку речной сток объективно есть именно вероятностный процесс, то концепции теории вероятностных процессов так или иначе стихийно возникали в гидрологии не только до того, как эта ее сторона была названа своим именем, но и до возникновения теории вероятностных процессов как самостоятельной математической дисциплины. Однако эти стихийно возникшие концепции сводились к вероятностным представлениям о последовательностях характерных гидрологических величин (в подавляющем большинстве случаев — о последовательностях годовых объемов стока), а в расчетах регулирования стока они вылились в так называемый календарный метод (с явным тяготением к детерминистическим представлениям), который с современной точки зрения есть примитивный вариант методов Монте-Карло.

К середине пятидесятых годов водохозяйственная практика пришла к необходимости охватить единым математическим описанием не только последовательности характерных величин, но и весь процесс стока в целом, в первую очередь в связи с задачами оптимального регулирования стока водохранилищами. Кроме того, к этому времени получили достаточное распространение электронные вычислительные машины, уже возникли методы Монте-Карло и современные методы оптимизации — динамическое программирование Р. Беллмана и принцип максимума Л. С. Портягина. Вне этих возможностей практическая реализация исследований в области стохастической гидрологии в указанном ее понимании была бы исключена.

Исследования стока с позиций теории вероятностных процессов сейчас ведутся в МГУ Н. С. Коргановой и Н. Ф. Мяковой под общим руководством автора и в Энергосетьпроекте А. Ш. Резниковским. В той или иной мере примыкают к этому направлению исследования Г. А. Алексеева (ГГИ), Г. Г. Сванидзе (Тбилисский университет), Д. М. Маматканова (отдел

энергетики АН Киргизии) и Е. В. Цветкова (ВНИИ электро-энергетики). Гидрологические исследования этого направления и их использование в водохозяйственной практике за рубежом приняли широкий размах, особенно в США (Вен Те Чао, Холл, Кайсл, Маталас, Евджевич и другие) [94, 95] и Польше (З. Качмарек и другие). Но из всего этого не следует делать вывод, что рассматриваемые концепции получили повсеместную известность. Например, в обзоре [34] они не упоминаются, хотя термин «стохастический процесс» в этой работе фигурирует.

В данной книге достаточно подробно рассматривается естественный речной сток как вероятностный процесс, т. е. как изменчивость во времени расходов в одном или в нескольких створах одной и той же реки или различных рек. Явления, стохастически изменчивые не только по времени, но и по географическим или пространственным координатам (например, распределение осадков по территории, турбулентные течения в водоемах), требующие перехода от теории стохастических процессов к теории случайных полей, здесь не рассматриваются. Регулирование стока (конец § 14 и глава 5) освещено недостаточно подробно, поскольку преследуется цель показать только принципы и аспекты использования результатов стохастической гидрологии в важнейшей области их инженерного приложения, без претензий на то, чтобы рассматривать регулирование стока как самостоятельную проблему.

Излагаемые в книге результаты можно развивать и уточнять чисто математически, например, в виде исследования смещения, эффективности и достаточности оценок параметров распределений вероятностей гидрологических характеристик через различные статистики, которые могут быть использованы в обобщенном методе моментов (§ 6) или в виде улучшения оценок правдоподобия для параметров гармонических составляющих в процессе стока (§ 10) и т. д. Однако мало вероятно, что такое развитие приведет к каким-либо новым принципиальным результатам, хотя некоторое (не очень существенное) уточнение сформулированных выводов оно, конечно, даст. Принципиально новые возможности в гидрологии вообще и в стохастической гидрологии в частности связаны с построением количественной генетической теории формирования гидрологических процессов на физической, геофизической и механической основе, которую следует рассматривать как одну из важнейших задач ближайшего будущего. При этом само существо стохастических проблем неизбежно приводит к выводу, что к наиболее существенным заключениям должны привести исследования на границе стохастической и генетической гидрологии.

Исходные данные для приводимых в книге расчетов взяты из официальных изданий Гидрометслужбы СССР, материалов Гидропроекта, Гидрологических характеристик основных рек мира (изд. ЮНЕСКО) и публикаций некоторых университетов США.

В книге широко использованы результаты исследований (цикличности стока [77], одномерных [33] и многомерных функций распределения вероятностей гидрологических характеристик, стохастических конечно-разностных уравнений процесса стока [24] и регулирования стока на регламентированную отдачу [25]) Н. С. Коргановой, полученные ею как совместно с автором, так и независимо. Ряд излагаемых результатов был получен автором совместно с Н. Ф. Мягковой (многопараметрические одномерные неодномодальные распределения вероятностей расходов, в частности, трансформация распределения Грама—Шарлье и оценка ее параметров, определение порядка марковского процесса стока). Эти вопросы разрабатывал также Л. Готшалк (Швеция), проверивший (в процессе стажировки в МГУ в 1972—1973 гг.) большинство математических выкладок и опробовавший многие результаты на конкретных гидрологических рядах. В расчетах участвовали Е. И. Игнатьева и С. М. Кудрявцева.

Автор выражает признательность всем перечисленным коллегам за их помощь и рецензентам Г. А. Алексею и А. В. Рождественскому за их ценные замечания, учтенные при подготовке рукописи к печати.

ГЛАВА I

РЕЧНОЙ СТОК КАК ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОЦЕСС

1. ОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СВОЙСТВА РЕЧНОГО СТОКА

В данной книге, всюду где не оговорено противное, имеется в виду естественный речной сток, не искаженный регулирующим действием водохранилищ.

Вероятностная природа речного стока, включая его внутри-годовое распределение, в настоящее время вряд ли может вызывать сомнения. Неслучайная величина есть очень частный вид величины случайной; точно так же детерминированный процесс есть частный вид процесса вероятностного, называемого также случайным или стохастическим. Если учесть последнее обстоятельство и принять во внимание, что не существует ни одного факта (включая прогнозирование стока), который мог бы быть объяснен исходя из представления о стоке как о процессе детерминированном и не существует ни одного факта, который противоречил бы представлению о стоке как о процессе вероятностном, то беспочвенность предположения, что сток может оказаться детерминированным, т. е. сугубо частным видом гораздо более общего — вероятностного — процесса, выступает особенно рельефно.

Обратимся к последовательности годовых объемов стока. Эта последовательность есть вероятностный процесс (с дискретным временем, так как время принимает только целочисленные значения — номера лет), даже если отсутствует стохастическая связь между стоком различных лет (в последнем случае процесс называется процессом с независимыми значениями).

Известные работы С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля и их сотрудников по распределениям вероятностей годовых объемов стока и его многолетнему регулированию, как и работы других исследователей в этом направлении, и даже работы Хазена, опубликованные до первой мировой войны, фактически примыкали к работам, в которых сток представлен как вероятностный процесс, хотя и не методически, но принципиально. Все эти работы, и особенно работы С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля по многолетнему регулированию с учетом корреляции между стоками смежных лет и с делением года на фазы межени и поло-

водья, привели в конце концов к выработке рельефного представления о необходимости охватить с единой теоретико-вероятностной точки зрения не отдельные характеристики стока (его годовые объемы, объемы стока весеннего половодья и т. п.), а весь процесс стока в целом.

Другими путями к этой же необходимости пришла и водохозяйственная практика, в первую очередь в связи с задачами оптимального регулирования стока. Говоря о стоке как о вероятностном процессе, следует иметь в виду процесс изменения мгновенного расхода реки. Такой подход к стоку и систематическое использование в гидрологии теории вероятностных процессов берут начало, по-видимому, от работы [20], положения которой затем были развиты в монографии [21]. Нужно заметить, что попытки охватить единым математическим описанием процесс изменения мгновенных (или скользящих среднесуточных, среднедекадных и т. п.) расходов предпринимались и раньше, например в работе [10], но эти попытки не опирались на теорию вероятностных процессов. Математическая модель стока, имеющая в виду изменения мгновенного расхода, наилучшим образом отражает физическую природу стока. Но для многих водохозяйственных задач такая модель методически неудобна и, кроме того, она дает такую подробную информацию о процессе, которая для решения этих задач может оказаться излишней. Поэтому такая модель должна служить главным образом эталоном. В ряде случаев целесообразно ее огрубление, которое, как будет ясно из дальнейшего, вытекает обычно из существа рассматриваемых водохозяйственных задач.

Мгновенный расход $Q = Q(t)$ в каком-либо створе реки, рассматриваемый как функция времени t , есть непрерывный случайный процесс. Аргумент t такого процесса пробегает все значения от $-\infty$ до ∞ , а ордината процесса Q может принимать любые положительные значения, ограниченные некоторой величиной $\sup Q$ (причем обычно принимается $\sup Q = \infty$, т. е. допускают сколь угодно большие значения Q). Непрерывность процесса есть свойство, состоящее в том, что при любом положительном ε , каким бы малым ни было это число, имеет место равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\{|Q(t+\Delta t) - Q(t)| < \varepsilon\} = 1. \quad (1.1)$$

Здесь через P обозначена, как обычно, вероятность указанного в скобках события. Это значит, что малым приращением времени Δt отвечают малые изменения расхода Q .

Пусть $t_1, \dots, t_n$ суть n произвольных моментов времени, а $x_1, \dots, x_n$ — n произвольных чисел. Вероятность события, состоящего в том, что

$$Q(t_1) < x_1, \dots, Q(t_n) < x_n,$$

обозначаемая как

$$P\{Q(t_1) < x_1, \dots, Q(t_n) < x_n\} = F_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) \quad (1.2)$$

есть функция моментов времени $t_1, \dots, t_n$ и чисел $x_1, \dots, x_n$. Эта вероятность называется n -й функцией распределения вероятностей процесса $Q(t)$. Если задана первая функция распределения

$$F_1(t, x) = P\{Q(t) < x\}$$

и закон перехода от F_n к F_{n+1} , то процесс $Q(t)$ задан полностью, т. е. о нем известно все, что можно знать. Иначе говоря, этим определяется все множество возможных вариантов протекания процесса, т. е. множество возможных функций $Q(t)$, каждая из которых называется реализацией случайного процесса.

Заметим, что среди книг по гидрологии и регулированию речного стока имеется много работ, в которых процесс стока рассматривается с позиций, в той или иной степени отличающихся от систем функций F_n (см. работы [11, 16, 48, 53]). Отход от системы функций F_n дает менее общие решения, но в определенных случаях удобен. Можно показать, что множества реализаций процесса $Q(t)$, получающихся при таком отходе, суть подмножества множества реализаций, определяемого системой функций F_n . Анализ этих подмножеств сильно увел бы нас в сторону от основной идеи данной книги, связанной с системой функций F_n .

Следует заметить, что наряду с системой функций F_n в теории вероятностных процессов известно задание процесса его так называемым каноническим разложением [45]

$$Q(t) = \varphi_0(t) + V_1 \varphi_1(t) + V_2 \varphi_2(t) + \dots \quad (1.3)$$

Здесь $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ — детерминированные (так называемые координатные) функции; $V_1, V_2, \dots$ — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями. Разложение (1.3) не единственно, существует несчетное множество канонических разложений. И только если $V_1, V_2, \dots$ будут не только некоррелированными, но и независимыми величинами, разложение (1.3) будет (при широких условиях) единственным. Канонические разложения в гидрологии до последнего времени не применялись, по-видимому, потому, что, как отмечалось в работе [21], они неудобны для аналитических расчетов регулирования стока (из-за водохранилищных ограничений). Однако в работе [7] метод канонических разложений рассматривается как возможное средство генерации искусственных реализаций процесса стока. Какие-либо исследования в этом направлении, кроме работы [7], автору неизвестны.

Наряду с процессом $Q(t)$ может рассматриваться процесс изменения скользящих средних значений расхода

$$Q^*(t) = \frac{1}{2\theta} \int_{t-\theta}^{t+\theta} Q(\eta) d\eta, \quad (1.4)$$

где 2θ — интервал усреднения. Необходимо иметь в виду, что понятие интеграла в обычном смысле не применимо к случайным функциям. Под интегралом

$$\int_a^b Q(t) dt \quad (1.5)$$

понимается число I , удовлетворяющее при всех $\varepsilon > 0$ условию

$$\lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} P \left\{ \left| \sum_{k=1}^n Q(t_k) \Delta t_k - I \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (1.6)$$

Здесь Δt_k — подынтервалы, на которые разбивается интервал (a, b) ; t_k — какое-либо значение t внутри подынтервала Δt_k ; n — число подынтервалов, причем очевидно, что $n \rightarrow \infty$ при $\max \Delta t_k \rightarrow 0$. Процесс $Q^*(t)$, так же как и $Q(t)$, есть непрерывный процесс. Если же рассматривать только значения $t = k\theta$, где k — целое число, то мы получим процесс изменения фиксированных средних, которые обозначаются через $Q^*(k\theta) = Q_k$. Роль аргумента t здесь играет индекс k . Такой процесс называется процессом с дискретным временем и континуумом состояний.

Для процесса изменения средних, как скользящих, так и фиксированных, интервал усреднения 2θ обычно принимается равным (в зависимости от характера решаемой задачи и других условий) суткам [84, 97], декаде, месяцу или году (однако имеющиеся гидрологические данные почти никогда не бывают столь репрезентативны, чтобы по ним можно было строить распределение вероятностей среднесуточных расходов).

Если климатические и ландшафтные условия речного бассейна не меняются с течением времени, то первая функция распределения вероятностей $F_1(t, x)$ процесса $Q(t)$ или $Q^*(t)$ в результате сезонной изменчивости стока будет периодической функцией t с периодом в один тропический год T , т. е.

$$F_1(t, x) = F_1(t + T, x). \quad (1.7)$$

По поводу этого соотношения необходимо сделать два замечания.

1. В изменениях расходов рек суточный цикл практически отсутствует. Исключение составляют только горные ручьи с ледниковым питанием, расход которых летом сильно возрастает

в дневные часы (в результате интенсивного таяния снега и льда) и столь же резко снижается ночью. Такие ручьи не имеют хозяйственного значения и здесь не рассматриваются.

2. В качестве T на практике берется, конечно, не тропический, а гражданский год. При этом разница между обычным и високосными годами во внимание не принимается, так как создаваемый ею эффект заведомо лежит в пределах точности гидрологических и водохозяйственных расчетов. Точно так же при усреднении по фиксированным месячным интервалам не учитывается разница в длительности месяцев, т. е., хотя усреднение ведется по календарным месяцам, но каждый из них считают за $1/12$ года.

Зависимость (1.7) обобщается на функцию F_n при произвольном n . Положим $t_1=t$, $t_2=t+\tau_1$, ..., $t_n=t+\tau_{n-1}$, тогда

$$\begin{aligned} F_n(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) &= \\ &= F_n(t, x_1; t+\tau_1, x_2; \dots; t+\tau_{n-1}, x_n) = \\ &= F_n(t+T, x_1; t+T+\tau_1, x_2; \dots; t+T+\tau_{n-1}, x_n). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, при неизменных климатических и ландшафтных условиях речного бассейна функции распределения вероятностей процесса стока суть периодические функции t с периодом T . Процессы, обладающие такими свойствами, называются гармонизируемыми процессами. Если соотношение (1.8) при всех значениях n выполняется не только для определенных, но и для любых значений T , то это значит, что функции F_n не зависят от времени t , а зависят только от интервалов $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ между моментами, к которым относятся значения $x_1, \dots, x_n$. Этот частный вид гармонизируемых процессов носит название стационарных процессов.

Гармонизируемые (и в том числе стационарные) процессы есть единственный вид случайных процессов, которые могут обладать весьма важным для приложений свойством эргодичности. Это свойство состоит в том, что среднее по реализациям процесса совпадает со средним по времени для одной реализации. Более подробно и строго свойство эргодичности формулируется так. Пусть имеется некоторый непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ и пусть $\xi^{(i)}(t)$ есть его i -тая реализация. Рассмотрим какую-либо однозначную функцию ψ от m значений случайной переменной $\xi(t)$, относящихся к m различным моментам времени, $\psi = \psi\{\xi(t_1), \dots, \xi(t_m)\}$. Среднее значение ψ_* функции ψ по реализациям процесса есть

$$\psi_* = \psi_*(t_1, \dots, t_m) = \text{l.i.m.}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \psi\{\xi^{(i)}(t_1), \dots, \xi^{(i)}(t_m)\}. \quad (1.9)$$

Если $\xi(t)$ — гармонизируемый процесс периода T , то среднее значение $\psi_{**}^{(j)}$ функции ψ по j -той реализации есть функция

$$\begin{aligned} \psi_{**}^{(j)} &= \psi_{**}^{(j)}(t_1, \dots, t_m) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \sum_{k=-s}^s \psi \{ \xi^{(j)}(t_1 + kT), \dots, \xi^{(j)}(t_m + kT) \}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Процесс называется эргодическим, если при любой функции ψ и при любом j будет $\psi_{**}^{(j)} = \psi_*$.

Свойство эргодичности очень важно для гидрологии и других наук, имеющих дело с повторно невозпроизводимыми процессами, такими, как речной сток, когда мы располагаем только одной реализацией.

В связи со свойством эргодичности полезно сделать два следующих замечания.

1. Гармонизируемость процесса есть необходимое, но не достаточное условие его эргодичности. Процесс $\xi(t) + \eta$, где $\xi(t)$ — гармонизируемый эргодический процесс, а η — случайная постоянная, есть процесс гармонизируемый, но не эргодический.

2. В случае стационарного процесса в формуле (1.10) в качестве T можно взять произвольную величину, но удобнее определять среднее по времени не формулой (1.10) с произвольным T , а формулой

$$\psi_{**}^{(j)} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \psi \{ \xi^{(j)}(t), \xi^{(j)}(t + \tau_1), \dots, \xi^{(j)}(t + \tau_{m-1}) \} dt, \quad (1.11)$$

которая получается из (1.10) при $T \rightarrow 0$.

Как распределение вероятностей случайной величины может быть задано ее моментами, а не непосредственно функцией распределения, так и распределение вероятностей стохастического процесса можно задать моментными функциями. Моментной функцией n -го порядка процесса $\xi(t)$, обозначаемой через v_n , называется математическое ожидание произведения ординат процесса в n произвольных моментов времени $t_1, \dots, t_n$, т. е.

$$v_n(t_1, \dots, t_n) = M \xi(t_1) \dots \xi(t_n). \quad (1.12)$$

Моментные функции процесса $\xi(t) - M\xi(t)$, т. е.

$$v_n(t_1, \dots, t_n) = M \{ \xi(t_1) - M\xi(t_1) \} \dots \{ \xi(t_n) - M\xi(t_n) \}, \quad (1.13)$$

называются центрированными моментными функциями процесса $\xi(t)$. Если положить $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau_1$, ..., $t_n = t + \tau_{n-1}$, то моментные функции, рассматриваемые как функции $t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, в случае гармонизируемого процесса будут периодическими

функциями t . В теории вероятностных процессов большую роль играет вторая моментная функция

$$\begin{aligned} \mu_2(t, \tau) &= \mu_2(t+T, \tau) = M\{\xi(t) - M\xi(t)\} \{\xi(t+\tau) - M\xi(t+\tau)\} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \sum_{k=-s}^s \{\xi(t+kT) - M\xi(t+kT)\} \times \\ &\quad \times \{\xi(t+\tau+kT) - M\xi(t+\tau+kT)\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Необходимо подчеркнуть, что гармонизируемость процесса и наличие в процессе периодических слагаемых — совсем не одно и то же. Если $\zeta(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, а $f(t)$ — периодическая функция t периода T , то процесс $\xi(t) = \zeta(t) + f(t)$ будет гармонизируемым процессом периода T . Но обратное заключение не верно: если $\xi(t)$ — гармонизируемый процесс периода T , то его математическое ожидание $M\xi(t) = v_1(t)$ есть периодическая функция периода T , но процесс $\zeta(t) = \xi(t) - v_1(t)$ будет в общем случае гармонизируемым процессом периода T , хотя никаких периодических составляющих он не содержит.

Таким образом, гармонизируемость процесса есть свойство гораздо более общее, чем наличие в нем периодических слагаемых. Оно связано с периодической зависимостью от времени не только математического ожидания, но и других параметров распределения вероятностей процесса. Исследованию этой зависимости посвящена работа [93].

Перейдем теперь к другому важному свойству процесса стока — его марковости (этот термин, связанный с фамилией крупнейшего математика конца XIX — начала XX вв. А. А. Маркова, ставший нарицательным, пишется со строчной буквы). Если для некоторого n задана функция распределения вероятностей F_{n+1} , то тем самым заданы и все функции распределения с низшими индексами, ибо

$$\begin{aligned} F_n(t_1, x_1; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) &= \\ = F_{n+1}(t_1, x_1; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n; t_{n+1}, \infty). \end{aligned}$$

Для плотностей же распределения

$$p_{n+1} = \frac{\partial^{n+1} F_{n+1}}{\partial x_1 \dots \partial x_{n+1}}$$

имеет место соотношение

$$\begin{aligned} p_n(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} p_{n+1}(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n; t_{n+1}, x_{n+1}) dx_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В общем случае функция F_{n+1} не определяет функции распределения вероятностей с высшими индексами, т. е. F_{n+2} , F_{n+3} ... Иначе говоря, в общем случае, она не содержит всей информации о процессе. В тех же частных случаях, когда функция F_{n+1} содержит всю информацию о процессе, т. е. определяет не только все низшие, но и все высшие функции распределения, процесс называется марковским, простым, если $n=1$, и сложным, если $n>1$. Чтобы установить связь между функцией F_{n+1} , управляющей марковским процессом, и высшими функциями распределения вероятностей, обратимся к известной формуле для вероятности $P(AB)$ совмещения случайных событий A и B

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

Пусть событие A состоит в том, что

$$Q(t_1) < x_1, \dots, Q(t_{n+1}) < x_{n+1} \quad (t_1 < \dots < t_{n+1}),$$

а событие B — в том, что $Q(t_{n+2}) < x_{n+2}$. Тогда

$$P(A) = F_{n+1}(t_1, x_1; \dots; t_{n+1}, x_{n+1}),$$

$$P(AB) = F_{n+2}(t_1, x_1; \dots; t_{n+1}, x_{n+1}; t_{n+2}, x_{n+2}).$$

Вероятность же $P(B|A)$ события B при условии, что осуществилось событие A , будет

$$P(B|A) = P\{Q(t_{n+2}) < x_{n+2} | Q(t_1) < x_1, \dots, Q(t_n) < x_n, Q(t_{n+1}) < x_{n+1}\}.$$

Но, так как в силу марковости процесса происходящее в момент t_{n+2} зависит от того, что произошло только в n , а не в $n+1$ предыдущих моментов, то предыдущую формулу надо переписать так:

$$P(B|A) = P\{Q(t_{n+2}) < x_{n+2} | Q(t_2) < x_2, \dots, Q(t_{n+1}) < x_{n+1}\} = \\ = \frac{F_{n+1}(t_2, x_2; \dots; t_{n+2}, x_{n+2})}{F_n(t_2, x_2; \dots; t_{n+1}, x_{n+1})}.$$

Следовательно,

$$F_{n+2}(t_1, x_1; \dots; t_{n+2}, x_{n+2}) = F_{n+1}(t_1, x_1; \dots; t_{n+1}, x_{n+1}) \times \\ \times \frac{F_{n+1}(t_2, x_2; \dots; t_{n+2}, x_{n+2})}{F_n(t_2, x_2; \dots; t_{n+1}, x_{n+1})}.$$

Отсюда по индукции сразу получается для любого $m > n+1$

$$F_m(t_1, x_1; \dots; t_m, x_m) = F_{n+1}(t_1, x_1; \dots; t_{n+1}, x_{n+1}) \times \\ \times \prod_{k=n+2}^m \frac{F_{n+1}(t_{k-n}, x_{k-n}; \dots; t_k, x_k)}{F_n(t_{k-n}, x_{k-n}; \dots; t_{k-1}, x_{k-1})}. \quad (1.16)$$

Аналогичная формула легко может быть выведена для плотности распределения вероятностей

$$p_m(t_1, x_1; \dots; t_m, x_m) = p_{n+1}(t_1, x_1; \dots; t_{n+1}, x_{n+1}) \times \\ \times \prod_{k=n+2}^m \frac{p_{n+1}(t_{k-n}, x_{k-n}; \dots; t_k, x_k)}{p_n(t_{k-n}, x_{k-n}; \dots; t_{k-1}, x_{k-1})}. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.16) или уравнение (1.17) есть ограничение, которому должно удовлетворять распределение вероятностей случайного процесса для того, чтобы этот процесс был марковским. В случае простого марковского процесса ($n=1$) это ограничение записывается в виде обобщенного уравнения Маркова

$$F(t_2, x_2 | t_1, x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_2, x_2 | t_*, x_*) p(t_*, x_* | t_1, x_1) dx_*,$$

в котором

$$F(t_2, x_2 | t_1, x_1) = P\{Q(t_2) < x_2 | Q(t_1) = x_1\}$$

есть условная функция распределения, называемая функцией перехода, а p — условная плотность распределения.

Речной сток рассматривается как марковский процесс. При этом необходимо иметь в виду, что это — лишь предположение и что нет никаких теоретических оснований считать речной сток чисто марковским процессом. Когда все же принимается такое предположение, то это не значит, как может показаться, что во внимание не принимаются стохастические связи между ординатами процесса более чем в $n+1$ моментов времени. Это значит лишь то, что не принимается во внимание отступление действительных стохастических связей между более чем $n+1$ ординатами процесса от ограничений, вытекающих из формулы (1.16).

Гипотеза о марковости процесса стока при удачном выборе числа n и функции F_{n+1} может быть достаточно точной. Переход к каким-либо более сложным моделям процесса стока, чем марковские, не целесообразен, ибо имеющаяся гидрологическая информация всегда недостаточна для их обоснования. Такой переход, усложняя описание процесса стока, не повышает достоверности этого описания, а лишь усложняет соответствующие гидрологические и водохозяйственные расчеты.

Речной сток есть процесс не только непрерывный, но и дифференцируемый, ибо процесс изменения производной dQ/dt , т. е. скорости изменения расхода, есть непрерывный процесс. Поэтому речной сток не может быть простым марковским процессом, ибо такой процесс не есть процесс дифференцируемый.

Таким образом, если сток рассматривается как непрерывный процесс, то $n \geq 2$ независимо от того, имеются ли в виду мгновенные или скользящие средние значения расходов. Но если

сток рассматривается как процесс с дискретным временем, т. е. если имеются в виду средние значения расходов за фиксированные интервалы, то процесс их изменения может быть хорошо представлен простым марковским процессом ($n=1$). Более того, иногда можно считать даже $n=0$, т. е. рассматривать сток не как марковский процесс, а как процесс с независимыми значениями расходов в разных (фиксированных) интервалах. Порядок марковского процесса, которым можно аппроксимировать истинный процесс стока, существенно зависит от интервалов усреднения. Например, для большинства рек Закарпатья уже при интервалах усреднения (разумеется, не скользящих, а примакающих один к другому вплотную, но не перекрывающихся) в одну неделю сток можно рассматривать как процесс с независимыми значениями. Для равнинных рек Европейской части СССР среднемесячные расходы иногда можно считать марковским процессом третьего и даже второго порядка, а колебания среднегодовых расходов — представлять как процесс первого порядка или даже как процесс с независимыми значениями. Подчеркнем, что при любом делении времени на интервалы процесс стока можно рассматривать, с хорошим приближением, как марковский процесс. Но теоретически из того, что среднемесячные расходы образуют марковский процесс еще не вытекает, что последовательность среднегодовых расходов также должна быть марковским процессом.

Определение порядка марковского процесса (который часто обозначают не через n , а через $n+1$) будет рассмотрено в § 3. Марковские модели процесса стока сведены в табл. 1.

Необходимо заметить, что подход к стоку с изложенных выше позиций встречал и сейчас еще встречает принципиальные и методические возражения. Главное принципиальное возражение сводится к следующему. Чтобы построить функцию $F_1(t, x)$, нужно статистически обработать расходы на определенные календарные даты, например последовательность расходов, наблюдавшихся 1 мая. А так как среднесуточные расходы на 1 мая или среднемесячные майские расходы в разные годы имеют разное генетическое происхождение, то такая обработка теряет, будто бы, физический смысл. Это возражение, кажущееся физически обоснованным, в действительности противоречит именно физической природе речного стока. Его подробный анализ имеется в работе [21]. Здесь мы ограничимся лишь следующим замечанием. С точки зрения этого возражения нужно признать не имеющей смысла также и вероятность событий, состоящего в том, что среднесуточный расход 1 мая или средний майский расход будет больше (или меньше) некоторой данной величины. Между тем эти вероятности объективно существуют. Ошибка рассматриваемого возражения, которое, если его принять, не дает возможности получить полноценное описание процесса стока и заставляет ограничиться лишь его немногими

Таблица 1

Марковские модели процесса естественного речного стока

Ординаты процесса	Основные задачи, для которых предназначена модель	Примечание
Время непрерывное		
Мгновенные расходы (модель А)	Теоретические вопросы, связанные с выбросами процесса стока, расчеты пропускной способности водосбросных устройств плотин при водохранилищах сезонного и многолетнего регулирования	В других задачах модель дает избыточную информацию
Скользящие средние расходы за малые интервалы (декада, месяц) (модель Б)	Вариационные решения задач оптимального регулирования стока	Для других задач регулирования стока и других методов их решения использование модели приводит к существенным математическим трудностям
Время дискретное		
Средние расходы за малые фиксированные интервалы (декада, месяц) (модель В)	Теоретические исследования и расчеты всех видов долгосрочного регулирования стока, как оптимального, так и на регламентированную отдачу	Роль времени играет порядковый номер интервала (месяца или декады)
Средние расходы за половодье и межень, с жесткими границами сезонов (модель Г)	Грубые расчеты многолетнего регулирования без деления емкости водохранилища на многолетнюю и сезонную составляющие	Периоды половодья и межени имеют длительность различную, роль времени играет порядковый номер сезона
Средние годовые расходы или годовые стоки (модель Д)	Расчеты регулирования стока на реках казахстанского типа, расчеты многолетнего регулирования с делением емкости на многолетнюю и сезонную составляющие и дополнительным определением последней, исследования, связанные с использованием вековых запасов воды озер, исследования цикличности естественного стока	Характеристики процесса зависят от даты расщепки времени на годы. Роль времени играет порядковый номер года

Ординаты процесса	Основные задачи, для которых предназначена модель	Примечание
Максимальные расходы (модель E)	Расчеты пропускной способности водосбросных устройств плотин при водохранилищах очень малой емкости	Роль времени играет порядковый номер интервала между максимумами (эти интервалы могут быть различны), или порядковый номер максимума

17.18.2

разрозненными характеристиками, состоит в том, что для статистической обработки календарной последовательности тех или иных расходов требуется не их генетическая однородность, а эргодичность их последовательности. Расходы на 1 мая или на любую другую фиксированную дату или средние для определенного месяца образуют генетически не однородную, но (при отсутствии климатических или ландшафтных изменений) эргодическую последовательность. Генетическая однородность и эргодичность — свойства, не исключают одно другое, но и не вытекающие одно из другого. Эргодичность процесса или последовательности — четкое и точно определяемое свойство. Генетическая однородность — понятие несколько расплывчатое и не поддающееся точному определению, хотя бы уже по одному тому, что нельзя дать точное определение границам между фазами стокового цикла, например, между половодьем и меженью или различными ливневыми паводками, например в Закарпатье.

Главное методическое возражение сводится к тому, что распределения вероятностей среднемесячных расходов, а тем более расходов на определенные календарные даты, т. е. функции $F_1(t, x)$, очень сложны, не передаются аналитическими выражениями, содержащими небольшое (2—3) число параметров и поэтому не могут быть надежно определены по статистическим выборкам, т. е. по гидрологическим рядам, длина которых ограничена. Это возражение будет рассмотрено по существу в § 5 и 6, где исследуются одномерные распределения вероятностей расходов.

2. ГИПОТЕЗЫ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В водохозяйственных задачах приходится рассматривать естественный приток к системе водохранилищ. Случайную переменную $\xi(t)$ в задачах такого рода называют вектором, компоненты которого суть расходы, притекающие к отдельным водохранилищам, не независимые, вообще говоря, один от другого.

В число компонент вектора $\xi(t)$ могут входить также гидрометеорологические величины иной природы, связанные со стоком, например, суммы осадков на определенной территории за тот или иной промежуток времени и т. д. Функция распределения вероятностей F_n в случае векторного процесса есть

$$\begin{aligned} F_n(t_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m)}; \dots; t_n, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}) = \\ = P\{\xi^{(1)}(t_1) < x_1^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}(t_1) < x_1^{(m)}; \dots; \\ \xi^{(1)}(t_n) < x_n^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}(t_n) < x_n^{(m)}\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m — число компонент вектора $\xi(t)$. Заметим, что говорить о многомерной случайной величине или многомерной функции как о случайном векторе не вполне правильно: такой объект, вообще говоря, не есть вектор, а наоборот, случайный вектор является частным случаем подобного объекта. Но мы будем употреблять эту привившуюся терминологию из-за ее краткости.

Если векторный процесс есть процесс марковский, то, как и в скалярном случае, он полностью определяется заданием функции F_{n+1} для некоторого n . Это число мы пока будем считать известным. Рассмотрим вопрос о построении функции F_{n+1} или соответствующей плотности распределения p_{n+1} . Размерность этого распределения есть $m(n+1)$ и может быть очень велика. Вероятностная схема формирования стока, как и гидрометеорологических процессов вообще, нам неизвестна и нет никакой надежды, что она может стать известной в будущем. Поэтому теоретически рассматриваемый вопрос решен не может быть. Гидрологические наблюдения, даже самые продолжительные, какие имеются, например по р. Нилу, заведомо недостаточны для построения даже двумерных функций распределения на чисто эмпирической основе (чтобы построить эмпирическую двумерную функцию распределения вероятностей с той же точностью, с какой одномерная строится по столетнему ряду, нужно иметь, грубо говоря, $100^2 = 10\,000$ лет наблюдений, а такого ряда, естественно, нет ни по одной реке мира). Поэтому говорить об эмпирическом построении $m(n+1)$ -мерных функций распределения вероятностей тоже не приходится. Остается только строить эти функции на гипотетической основе и проверять результаты построения косвенным путем. Рассмотрим гипотезу такого рода о гидрометеорологических процессах, высказанную в работе [20]. Будем предполагать, что все случайные величины $\xi^{(j)}(t_i)$ распределены непрерывно. Будут ли эти величины мгновенными скользящими средними или средними за фиксированные интервалы — не играет роли. Для краткости будем их обозначать через $\xi_i^{(j)}$. Случай не всюду непрерывных функций распределения, например функций распределения вероятностей

расходов пересыхающих рек, имеющих скачок в нуле, пока исключается из рассмотрения. Пусть $F(x) = P\{\xi_i^{(j)} < x\}$ есть непрерывная функция распределения случайной величины $\xi_i^{(j)}$. В дальнейшем играет роль функция $\varphi(x)$, определяемая из уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2} + G\{\varphi(x)\}, \quad (2.2)$$

в котором

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}} du = \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

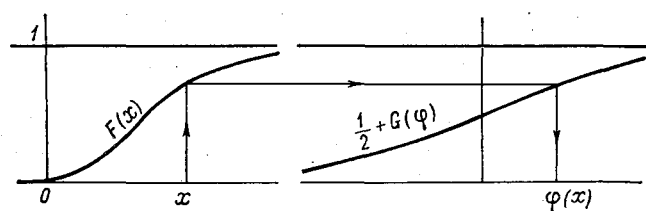


Рис. 1. Построение трансформирующей функции.

есть обычный интеграл вероятности. Обозначив через G^{-1} функцию, обратную интегралу вероятности, можно написать

$$\varphi(x) = G^{-1}\left\{F(x) - \frac{1}{2}\right\}. \quad (2.3)$$

Графически значение $\varphi(x)$, соответствующее данному x , определяется как показано на рис. 1. На рис. 1 видно, что случайная величина $\varphi_i^{(j)} = \varphi(\xi_i^{(j)})$ имеет нормированное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице, — значениями, присущими нормальной функции распределения в правой части (2.2). Гипотеза, которую мы имеем в виду, состоит в том, что совместное распределение случайных величин

$$\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(m)}; \dots; \varphi_{n+1}^{(1)}, \dots, \varphi_{n+1}^{(m)} \quad (2.4)$$

есть распределение нормальное. Математически эта гипотеза ни откуда не вытекает, но она имеет под собой физические основания: если маргинальные распределения случайных величин (2.4) нормальны, то естественно ожидать, что их совместное распределение тоже нормально, ибо иное есть физически скорее аномалия, чем закономерность.

Обозначим через $\rho_{pq}^{(rs)}$ коэффициент корреляции между случайными величинами $\varphi_p^{(r)}$ и $\varphi_q^{(s)}$, введем матрицы

$$\Delta_{k-j, k-l} = \begin{vmatrix} \rho_{k-j, k-l}^{(11)} & \dots & \rho_{k-j, k-l}^{(1m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-j, k-l}^{(m1)} & \dots & \rho_{k-j, k-l}^{(mm)} \end{vmatrix} (m \times m),$$

$$\varphi_k^* = \begin{vmatrix} \varphi_k^{(1)} \\ \dots \\ \varphi_k^{(m)} \end{vmatrix} (m \times 1), \quad \varphi_k^{**} = \|\varphi_k^{(1)} \dots \varphi_k^{(m)}\| (1 \times m),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_{kk} & \dots & \Delta_{k, k-n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{k-n, k} & \dots & \Delta_{k-n, k-n} \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}, \quad \Delta_\varphi = \begin{vmatrix} \Delta_{kk} & \dots & \Delta_{k, k-n} & \varphi_k^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{k-n, k} & \dots & \Delta_{k-n, k-n} & \varphi_{k-n}^* \\ \varphi_k^{**} & \dots & \varphi_{k-n}^{**} & 0 \end{vmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}.$$

Определители матриц Δ и Δ_φ обозначим соответственно через D и D_φ . По принятой гипотезе плотность p_k распределения вероятностей $m(n+1)$ -мерной случайной величины

$$\{\xi_k^{(1)}, \dots, \xi_k^{(m)}; \dots; \xi_{k-n}^{(1)}, \dots, \xi_{k-n}^{(m)}\} \quad (2.5)$$

выражается формулой

$$p_k(x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(m)}; \dots; x_{k-n}^{(1)}, \dots, x_{k-n}^{(m)}) = \frac{1}{V(2\pi)^{m(n+1)}D} \exp\left(-\frac{D_\varphi}{2D}\right) \prod_{l=0}^n \prod_{j=1}^m \frac{d\varphi_{k-l}^{(j)}}{dx_{k-l}^{(j)}}. \quad (2.6)$$

В частном случае скалярного процесса, например, когда рассматриваются расхоны в одном створе, случайная величина (2.5) обращается в $n+1$ -мерную $\{\xi_k, \dots, \xi_{k-n}\}$ (так как рассматривается один створ, все верхние индексы за ненадобностью опускаются). В этом случае формула (2.6) записывается в развернутом виде так:

$$p_k(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}) = \frac{1}{V(2\pi)^{n+1}D} \prod_{i=0}^n \frac{d\varphi_{k-i}(x_{k-i})}{dx_{k-i}} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} 1 & \rho_{k, k-1} & \dots & \rho_{k, k-n} & \varphi_k(x_k) \\ \rho_{k-1, k} & 1 & \dots & \rho_{k-1, k-n} & \varphi_{k-1}(x_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-n, k} & \rho_{k-n, k-1} & \dots & 1 & \varphi_{k-n}(x_{k-n}) \\ \varphi_k(x_k) & \varphi_{k-1}(x_{k-1}) & \dots & \varphi_{k-n}(x_{k-n}) & 0 \end{vmatrix} \right\}. \quad (2.7)$$

Плотность же распределения вероятностей многомерной случайной величины (2.4) определяется той же формулой (2.6), но без множителя

$$\prod_{l=0}^n \prod_{j=1}^m \frac{d\varphi_{k-l}^{(j)}}{dx_{k-l}^{(j)}},$$

который всегда положителен.

Очевидно, что необходимое условие применимости сформулированной гипотезы состоит в том, что квадратичная форма D_Φ должна быть определено положительной.

Насколько известно автору, до сих пор никому не встретился случай, в котором это необходимое условие не было бы выполнено. Это, конечно, не дает гарантии, что такой случай вообще не может встретиться, но тем не менее свидетельствует о том, что область применимости гипотезы очень широка. В остальном рассматриваемая гипотеза носит универсальный характер: она не накладывает никаких ограничений ни на число $n+1$ моментов или интервалов времени, в которые берутся значения вектора ξ , ни на размерность m этого вектора, ни на функции распределения вероятностей отдельных компонент этого вектора в те или иные моменты, или интервалы (кроме требования их непрерывности). Она охватывает, как частный случай, и распределение годовых объемов стока. Следует подчеркнуть, что даваемое ею распределение вероятностей гидрологических или метеорологических характеристик не является нормальным: в силу этой гипотезы нормально распределены не случайные величины (2.5), а функции этих величин (2.4). Распределение самих случайных величин (2.5) будет нормальным в том и только в том случае, когда функции (2.4) линейны.

Построение функций распределения вероятностей на основании этой гипотезы, называемое нормализацией случайных величин, рассматривается также в монографиях [2, 73].

Коэффициенты корреляции $\rho_{pq}^{(rs)}$, входящие в формулу (2.6), могут быть оценены методом моментов или методом максимума правдоподобия. Пусть η и Φ — две любые различные случайные величины из набора (2.5), φ и ψ — нормально распределенные функции этих величин, определяемые формулой (2.3), $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ и $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ — выборочные (календарные) последовательности η и Φ за N лет, а m_i и n_i — ранговые номера η_i и Φ_i , т. е. количества выборочных значений, меньших соответственно, чем η_i и Φ_i . Теорема Маркова закона больших чисел имеет одним из своих следствий то, что при $N \rightarrow \infty$ выборочные частоты непревышения m_i/N и n_i/N стремятся (по вероятности) к функциям распределения вероятностей η и Φ соответственно. Поэтому указанные частоты и принимают за приближенные значения функций распределения. Выборочные частоты

непревышения можно несколько приблизить к вероятностям, определив их более сложными формулами:

$$\frac{m_i - a}{N + b}, \quad \frac{n_i - a}{N + b},$$

где a и b — некоторые поправки, различные у различных авто-
ров, например $a=0$, $b=1$ или $a=0$, $b=1/2$. Наилучшее прибли-
жение частоты непревышения к вероятности дают, по-видимому,
значения

$$a = \frac{1}{2} [N+1 - \sqrt{N(N+1)}] \approx \frac{1}{4}, \quad b = \sqrt{N(N+1)} - N \approx \frac{1}{2},$$

рекомендуемые в работе [1]. При больших N различия между
значениями a или b практически не играют роли. Выборочные
значения φ и ψ по формуле (2.3) будут

$$\varphi_i = G^{-1} \left(\frac{m_i - a}{N + b} - \frac{1}{2} \right), \quad \psi_i = G^{-1} \left(\frac{n_i - a}{N + b} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.8)$$

Теоретическая дисперсия (т. е. при $N \rightarrow \infty$) случайных ве-
личин φ_i и ψ_i равна единице, так как они распределены по
нормированному нормальному закону. Выборочные же дис-
персии

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^2 = \sigma_\psi^2 = \sigma^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left\{ G^{-1} \left(\frac{m_i - a}{N + b} - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left\{ G^{-1} \left(\frac{n_i - a}{N + b} - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 \end{aligned}$$

зависят только от объема выборки N и всегда несколько меньше
единицы. Выборочный коэффициент ковариации r между φ и ψ
есть

$$r = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N G^{-1} \left(\frac{m_i - a}{N + b} - \frac{1}{2} \right) G^{-1} \left(\frac{n_i - a}{N + b} - \frac{1}{2} \right), \quad (2.9)$$

а коэффициент корреляции ρ определяется как обычно: $\rho = r/\sigma^2$.
Свойства этого коэффициента подробно рассматриваются в ра-
боте [2], там же даются таблицы для его моментной оценки по
формуле (2.9).

Простота моментной оценки связана с тем, что эта оценка
 ρ для любой пары случайных величин из набора (2.5) незави-
сима от оценки ρ для любой другой пары. Оценки правдоподо-
бия этим свойством не обладают: функция правдоподобия за-
висит сразу от всех коэффициентов корреляции, входящих
в формулу (2.6). Это приводит к сложной системе нелинейных
алгебраических уравнений для коэффициентов корреляции.

К этому вопросу мы еще вернемся в § 6. Здесь отметим только, что в тех случаях, когда удастся найти парную корреляцию независимо от других пар и когда при этом N велико, оценка правдоподобия ρ совпадает с моментной оценкой. Напишем формулу для двумерной плотности распределения случайных величин η и ϑ

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(x) - 2\rho\varphi(x)\psi(y) + \psi^2(y)}{2(1-\rho^2)} \right\} \frac{d\varphi(x)}{dx} \frac{d\psi(y)}{dy}. \quad (2.10)$$

Будем предполагать, что η_i и ϑ_i относятся к временным интервалам, отстоящим один от другого на промежуток менее полугодия (например, это есть средние расходы марта и июля, но не марта и октября), и что корреляционные связи не распространяются за пределы полугодия. Тогда пары значений η_1 и ϑ_1 , η_2 и ϑ_2 и т. д. будут стохастически независимы одна от другой и функция правдоподобия L , т. е. совместная плотность распределения вероятностей выборочных значений $\eta_1, \vartheta_1, \eta_2, \vartheta_2, \dots, \eta_N, \vartheta_N$ выразится так:

$$L = \prod_{i=1}^N p(\eta_i, \vartheta_i) = \frac{\prod_{i=1}^N \varphi'(\eta_i) \psi'(\vartheta_i)}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^N [\varphi^2(\eta_i) - 2\rho\varphi(\eta_i)\psi(\vartheta_i) + \psi^2(\vartheta_i)]}{2(1-\rho^2)} \right\}.$$

Значение $\rho = \rho_l$, дающее максимум функции правдоподобия, определяется из уравнения $\partial L / \partial \rho_l = 0$, которое приводится к виду

$$\rho_l^3 - \rho_l^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\eta_i) \psi(\vartheta_i) - \\ - \rho_l \left\{ 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\varphi^2(\eta_i) + \psi^2(\vartheta_i)] \right\} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\eta_i) \psi(\vartheta_i) = 0. \quad (2.11)$$

Так как

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\eta_i) \psi(\vartheta_i) = \rho_m, \\ \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\varphi^2(\eta_i) + \psi^2(\vartheta_i)] = 2,$$

где ρ_m — моментная оценка ρ при $N \rightarrow \infty$; l.i.m. — предел по вероятности, то при больших N уравнение (2.11) обращается в уравнение

$$(\rho_l^2 + 1)(\rho_l - \rho_m) = 0,$$

т. е. $\rho_l = \rho_m$. Иначе говоря, при поставленных условиях оценка правдоподобия и моментная оценка неограниченно сближаются с увеличением N .

Все другие гипотезы неоднмерных распределений, известные в литературе, суть гипотезы двумерных распределений, имеющие в виду (кроме гипотезы несимметричного гамма-распределения) годовые объемы стока или среднегодовые расходы, т. е. они относятся к модели Д (табл. 1). Одномерные и многомерные распределения вероятностей годовых объемов стока зависят от субъективного фактора — даты расщепки времени на годы. Это обстоятельство впервые было отмечено в работе [54]. Если каждый год делится на m интервалов и Q_k — средний расход реки в k -том интервале, то, как легко подсчитать, дисперсия среднегодового расхода будет равна

$$\frac{1}{m^2} \left\{ \sum_{j=k}^{k+m-1} DQ_j + \sum_{i=2}^{k+m-2} \sum_{l=i+1}^{k+m-1} \rho_{k+i, k+l} MQ_{k+i} MQ_{k+l} \right\}.$$

Если процесс эргодичен, то первая сумма в скобках, так же как и математическое ожидание среднегодового расхода $\frac{1}{m} \times$

$\times \sum_{i=k}^{k+m-1} MQ_i$, не будет зависеть от k . Но вторая (двойная) сумма, содержащая коэффициенты корреляции в разные интервалы, будет периодической функцией k годового периода m . Коэффициент корреляции между стоком смежных лет и высшие моменты распределения, как собственные, так и смешанные, тоже оказываются периодическими функциями k периода m , и таким образом, как одномерное, так и многомерное распределение в целом периодически зависят от даты расщепки времени на годы. Зависимость коэффициента корреляции между стоком смежных лет от этой даты дается на рис. 2. (Зависимость заимствована из работы [54].) Не вдаваясь в оценку этого обстоятельства с точки зрения использования соответствующих гипотез в водохозяйственной практике, отметим, что оно, во-первых, не позволяет распространять выводы, полученные при традиционной расщепке 1 января на другие расщепки, а, во-вторых, вносит в гидрологический анализ субъективный фактор. Чтобы исключить эту субъективность, необходимо давать характеристику многомерного распределения годового стока не для какой-нибудь одной расщепки, а для многих расщепок (теоретически для всех). Но тогда проще задать распределения

среднемесячных или среднедекадных расходов, которые уже содержат информацию о распределениях среднегодовых расходов. Все это следует иметь в виду, используя распределения ве-

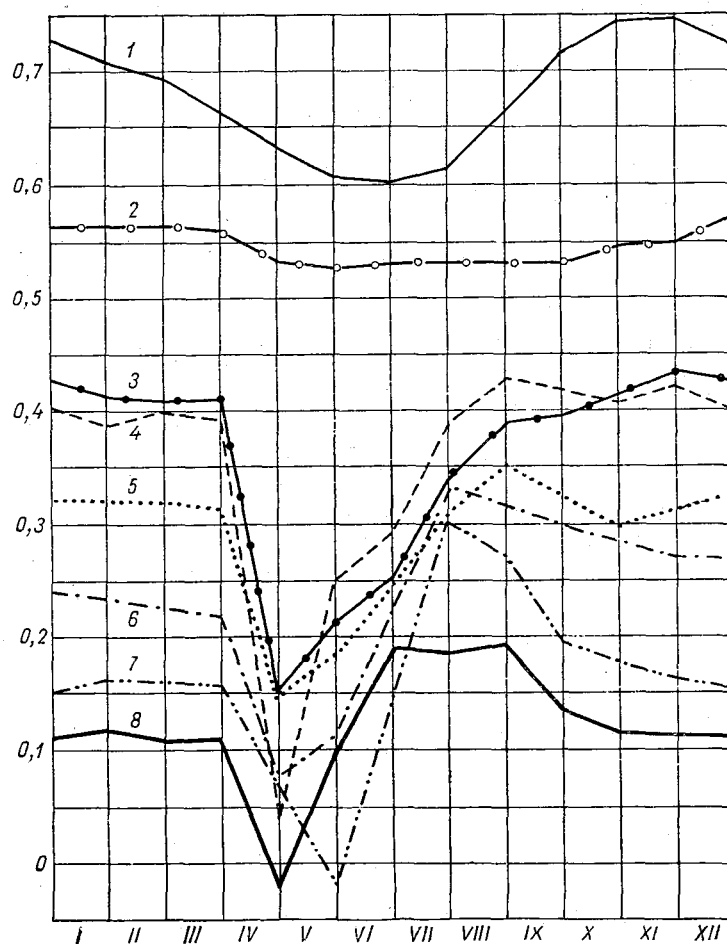


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции между стоками смежных лет от даты расщепления времени на годы.

1 — р. Ангара (г. Пашки), 2 — р. Нева (пос. Новосаратовка), 3 — р. Белая (г. Уфа), 4 — р. Унка (г. Макарьев), 5 — р. Чусовая (пос. Чусовские Горки), 6 — р. Обь (г. Новосибирск), 7 — р. Енисей (пос. Базанха), 8 — р. Томь (г. Новокузнецк), по Г. Г. Сванидзе и А. Н. Киласония.

роятностей годовых объемов стока. Но этим не исключается польза анализа таких распределений во многих задачах, в частности, при исследовании цикличности стока, рассматриваемой в гл. 2.

Известно пять гипотез о распределениях вероятностей годовых объемов стока. Они подробно рассматриваются в работах [46, 47], где имеется в виду традиционная рассечка времени на годы 1 января. Эти гипотезы сводятся к следующему.

I. Годовой сток образует последовательность независимых случайных величин. Для традиционной рассечки эта гипотеза отвергается. Но, поскольку, по многим данным, коэффициент корреляции между стоком смежных лет характеризует не только корреляционную, но и в значительной мере общую стохастическую связь, на рис. 2 можно видеть, что эта гипотеза во многих случаях близка к действительности при определенном, индивидуальном для различных рек делении времени на годы. Но она заведомо не оправдывается для рек с озерным питанием (Ангара, Нева) и несколько сомнительна для некоторых других рек (Белая, Чусовая).

II. Гипотеза, изложенная в начале данного параграфа, если ее применить к годовым объемам стока и считать их последовательность простым марковским процессом.

III. Гипотеза гамма-распределения [51]. Эта гипотеза сводится к тому, что двумерное распределение, управляющее процессом чередования годовых объемов стока как простым марковским процессом, есть обобщение на двумерный случай гамма-распределения (так называют распределение Пирсона III типа с жестким соотношением $C_s = 2C_v$ между коэффициентами вариации $C_v = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$ и асимметрии $C_s = \mu_3/\sqrt{\mu_2^3}$). Плотность гамма-распределения двумерного случайного вектора дается следующей формулой:

$$p_2(x_1, x_2) = p_1^{(1)}(x_1) p_1^{(2)}(x_2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k^{\alpha_1}(\beta_1 x_1) L_k^{\alpha_2}(\beta_2 x_2).$$

Здесь

$$p_1^{(1)}(x_1) = \frac{\beta_1^{\alpha_1+1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} x_1^{\alpha_1} e^{-\beta_1 x_1}, \quad p_1^{(2)}(x_2) = \frac{\beta_2^{\alpha_2+1}}{\Gamma(\alpha_2+1)} x_2^{\alpha_2} e^{-\beta_2 x_2}$$

— одномерные плотности распределения компонент,

$$a_k = \lambda^k \frac{\Gamma(\gamma + k + 1) \sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1)}}{\Gamma(\gamma + 1) \sqrt{\Gamma(\alpha_1 + k + 1) \Gamma(\alpha_2 + k + 1)}}$$

— коэффициент гамма-корреляции между функциями $L_k^{\alpha_1}(\beta_1 x_1)$ и $L_k^{\alpha_2}(\beta_2 x_2)$. Эти функции суть ортогональные полиномы Лягерра, нормированные соответственно с весом $p_1^{(1)}(x_1)$ и $p_1^{(2)}(x_2)$. Параметры распределения есть $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \lambda, \gamma$. Когда речь идет о годовых объемах стока, распределение $p_2(x_1, x_2)$ должно быть симметричным относительно x_1 и x_2 . В этом случае $\beta_1 = \beta_2, \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$ [6]. Несимметричное гамма-распределение в принципе

могло бы применяться к месячному или декадному стоку, если бы одномерные распределения этих стоков описывались гамма-распределением, а их последовательность можно было бы считать простым марковским процессом. Но все дело в том, что гамма-распределение далеко не всегда удовлетворительно передает одномерные распределения не только месячных или декадных, но и годовых стоков. Последнее обстоятельство и послужило причиной того, что в гидрологию было введено трехпараметрическое гамма-распределение, являющееся обобщением гамма-распределения. Об этом будет сказано подробнее в гл. 2.

IV. Условное распределение вероятностей стока данного года, когда сток предыдущего года принял заданное значение, такое же, как и безусловное распределение, но с иными параметрами, зависящими от стока предыдущего года [35]. Конкретно, для условного и безусловного распределений принимается гамма-распределение, зависящее от двух параметров — математического ожидания годового стока $M\xi$ и его среднеквадратического отклонения σ . Для условного математического ожидания и условного среднеквадратического отклонения принимаются те значения, какие отвечают нормальному двумерному распределению:

$$M_y \xi_{k+1} = M_b \xi_{k+1} + \rho (\xi_k - M_b \xi_k),$$

$$\sigma_y = \sigma_b \sqrt{1 - \rho^2},$$

где k — порядковый номер года; ρ — коэффициент корреляции между ξ_k и ξ_{k+1} , индексы y и b означают параметры условных и безусловных распределений. Естественное развитие этой гипотезы получается, если в качестве условного и безусловного распределений принять трехпараметрические гамма-распределения; тогда возникает необходимость еще в одном допущении, например, что отношение коэффициента асимметрии к коэффициенту вариации одинаково для безусловного и условного распределений [46].

V. Двумерное симметричное распределение, получающееся в результате исследования корреляции между функциями распределения гамма-распределенных случайных величин [51, 47]. Эти функции, как и все функции распределения вероятностей, имеют равномерное распределение. Поэтому прием, приводящий к данной гипотезе, родственен приему, лежащему в основе гипотезы II.

Все эти гипотезы, кроме гипотезы II, не обобщаются на сложные или на векторные марковские процессы произвольного порядка и с произвольным числом компонент. Кроме того, гипотезы III и V предполагают, что одномерные распределения есть гамма-распределения, которые, как уже отмечалось, не отвечают эмпирическим распределениям расходов рек.

VI. В заключение необходимо рассмотреть еще гипотезу фрагментов [53], занимающую особое положение. Все предыдущие гипотезы направлены на построение распределения вероятностей процесса стока, математически выражающего ту или иную его модель из табл. 1. Они не связаны с тем, как будет в дальнейшем использовано это математическое выражение; в частности, оно может быть использовано для генерации искусственной реализации процесса стока с целью последующего расчета водохранилищ методом Монте-Карло. Гипотеза же фрагментов, разработанная именно в связи с такими расчетами, есть гипотеза о структуре искусственных реализаций, получаемых непосредственно по гидрологическим наблюдениям, минуя

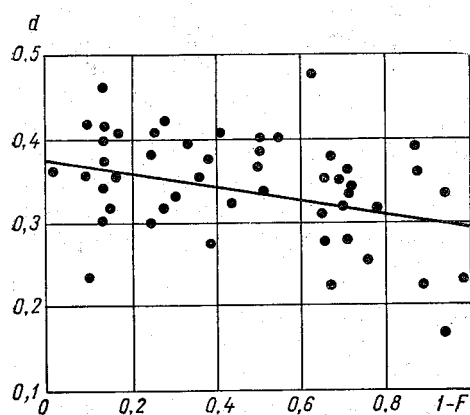


Рис. 3. Зависимость параметра d внутригодового распределения стока от водности года для р. Куры у г. Тбилиси, по Г. Г. Сванидзе.

построение распределения вероятностей среднемесячных или среднедекадных расходов. Разумеется, она в конце концов приводит к какому-то распределению — тому, которое будет иметь построенная реализация, но это распределение есть уже следствие гипотезы, а не ее содержание.

Суть гипотезы фрагментов в следующем. Примем ту или иную гипотезу о распределениях вероятностей, управляющих процессом чередования годовых стоков при какой-то определенной

рассечке времени на годы и, исходя из этого, разыграем искусственную реализацию этого процесса. Какая именно гипотеза о среднегодовых расходах будет принята, не влияет на построение гипотезы фрагментов. Пусть искусственный ряд среднегодовых расходов есть $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_S^*$, $S \gg N$, где N — число лет наблюдений. Ординаты каждого из N наблюдаемых гидрографов поделим на соответствующие среднегодовые расходы этих гидрографов; получившиеся гидрографы $\xi_k = \xi_k(t)$, $k=1, \dots, N$ с относительными ординатами и называются фрагментами. Для каждого из среднегодовых расходов Q_i^* искусственной реализации ($i=1, \dots, S$) выбирается (например, с помощью случайных чисел) фрагмент по урновой схеме с возвращением шара, ординаты фрагмента умножаются на Q_i^* и результат принимается за гидрограф i -того года искусственной реализации. Если между водностью года и внутригодовым

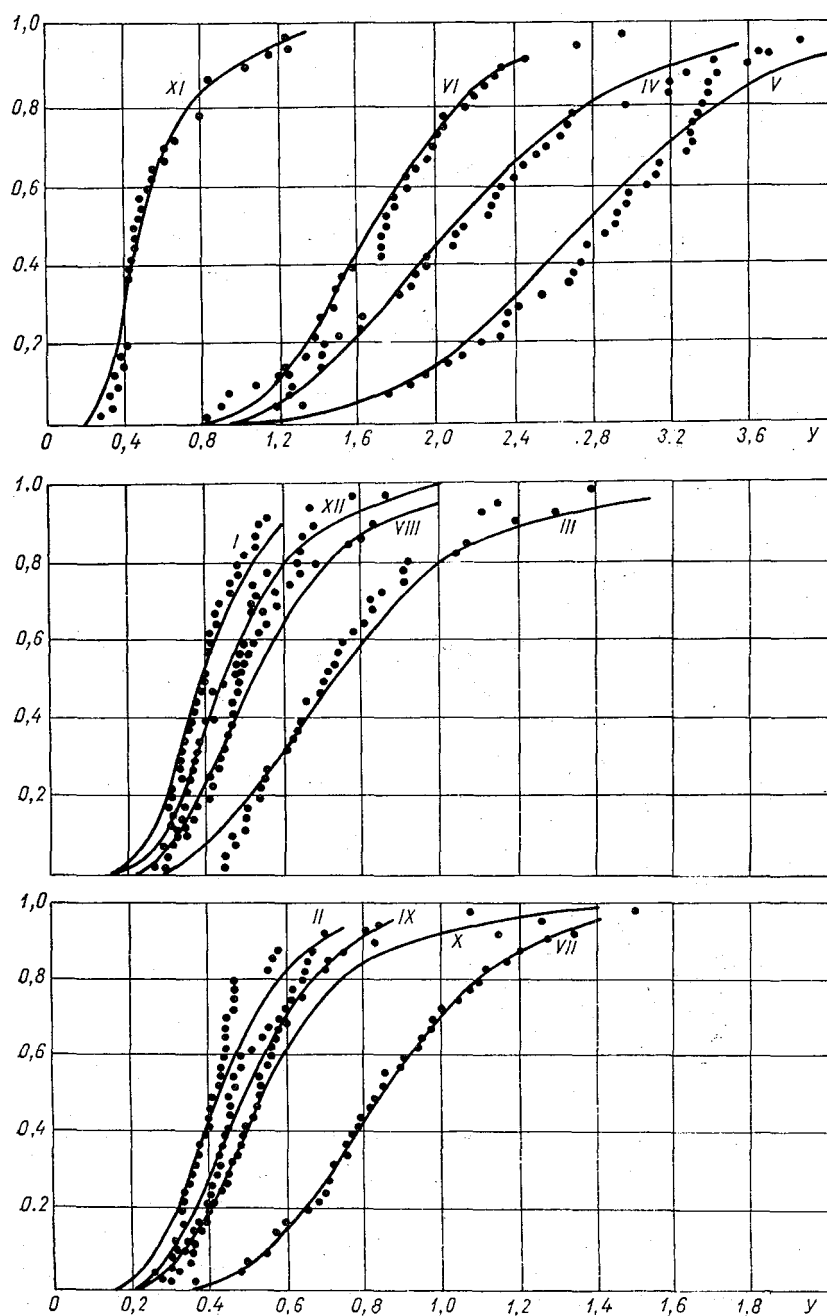


Рис. 4. Распределение вероятностей смоделированных по гипотезе фрагментов (сплошные линии) и наблюдаемых среднемесячных расходов р. Куры у г. Тбилиси, по А. Н. Киласония.

y — отношение среднемесячного расхода к среднемноголетнему.

распределением стока имеется связь, построение несколько усложняется. Водность года [53] предлагается оценивать с помощью коэффициента внутригодовой неравномерности d , который определяется по формуле $d = 1 - \omega/\Omega$, где Ω — годовой объем стока,

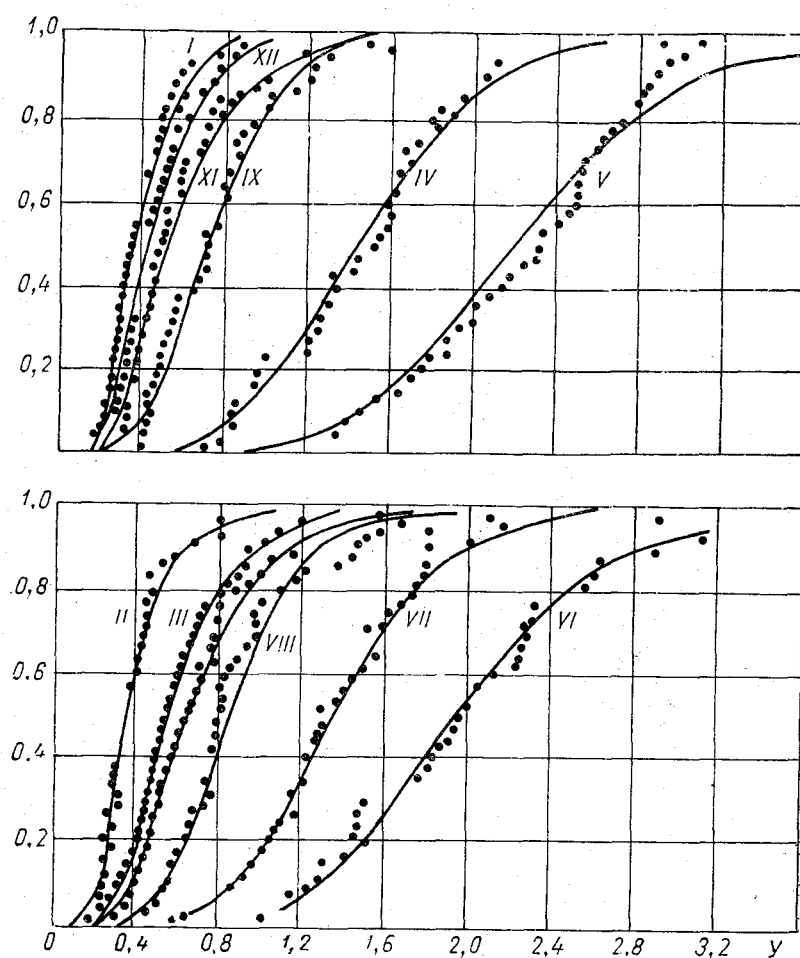


Рис. 5. Распределения вероятностей смоделированных по гипотезе фрагментов (сплошные линии) и наблюдаемых среднемесячных расходов р. Арагви у п. Жинвали, по А. Н. Киласония.

т. е. площадь гидрографа; ω — та часть этой площади, которая отсекается ординатой среднегодового расхода. Далее по оси абсцисс откладываются вероятности непревышения F или, наоборот, обеспеченности, т. е. вероятности превышения $1 - F$ наблюдаемых расходов, а по оси ординат — соответствующие

значения d , что дает некоторое поле точек (рис. 3). Последнее делится на несколько равновероятных интервалов, а фрагменты разбиваются на группы, попадающие в эти интервалы. При розыгрыше фрагментов для каждого Q_i^* фрагмент выбирается из группы, соответствующей тому интервалу вероятностей, в который попадает это значение Q_i^* .

Нетрудно видеть, что гипотеза фрагментов приводит к искусственным реализациям с распределениями, отличающимися теоретически от распределений генеральной совокупности. Рассмотрим средний расход в каком-либо определенном временном интервале, например, в мае, который обозначим через Q . Среднегодовой наблюдаемый расход пусть будет Q^{**} , а искусственно разыгранный Q^* . Гипотеза фрагментов, ставящая в соответствие определенному году, т. е. определенному Q^* , свой случайно выбираемый фрагмент со среднегодовым расходом Q^{**} и расходом Q в мае, дает значение QQ^*/Q^{**} , а не Q . Это обстоятельство само по себе не играет роли, ибо важны не значения случайной величины, а ее распределение вероятностей. Для простоты ограничимся случаем отсутствия связи между стоком различных лет. Тогда функция распределения вероятностей случайного вектора $\{Q, Q^*, Q^{**}\}$ будет

$$F_1(x_1)F_2(x_2, x_3),$$

где

$$F_1(x_1) = P(Q^* < x_1), \quad F_2(x_2, x_3) = P(Q < x_2, Q^{**} < x_3)$$

— функция распределения вероятностей среднегодовых расходов и двумерная функция распределения вероятностей средних майских и среднегодовых расходов. При этом $F_2(\infty, x_3) = F_1(x_3)$, а $F_2(x_2, \infty) = \Phi(x_2)$ есть одномерная функция распределения вероятностей средних майских расходов. Функция распределения $\Psi(x)$ случайной величины QQ^*/Q^{**} выразится через эти функции так:

$$\Psi(x) = P\left(\frac{QQ^*}{Q^{**}} < x\right) = \frac{\int \int \int_{\frac{x_1 x_2}{x_3} < x} p_1(x_1) p_2(x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{\int \int \int p_1(x_1) p_2(x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}.$$

Отсюда видно, что, вообще говоря, $\Psi(x) \neq \Phi(x)$. Однако, как показано в работе [31] на примере рек Куры (Тбилиси) и Арагви (Жинвали), различие между функциями Ψ и Φ несущественно (рис. 4 и 5). Вопрос о том, в какой мере гипотеза фрагментов сохраняет параметры многомерных распределений расходов — коэффициентов корреляции между расходами различных месяцев — подлежит дальнейшему исследованию.

3. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ РЕАЛИЗАЦИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В данном параграфе мы будем иметь в виду модель В (табл. 1), но все сказанное распространяется и на все остальные модели этой таблицы. Будем оперировать не со средними за временные интервалы значениями расходов или других гидрометеорологических переменных $\xi_i^{(j)}$, а с нормально распределенными функциями (2.3) этих переменных $\varphi_i^{(j)} = \varphi(\xi_i^{(j)})$. Рассмотрим сначала скалярный процесс изменения расходов в одном створе реки. Верхний индекс j при этом отпадает за ненадобностью, а нижний индекс i будет обозначать номер временного интервала, к которому относится данный расход. На основании (2.7) напомним

$$\begin{aligned} p_k(\varphi_k, \varphi_{k-1}, \dots, \varphi_{k-n}) &= \frac{1}{V(2\pi)^{n+1} D^{(k)}} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2D^{(k)}} \begin{vmatrix} 1 & \rho_{k,k-1} & \dots & \rho_{k,k-n} & \varphi_k \\ \rho_{k-1,k} & 1 & \dots & \rho_{k-1,k-n} & \varphi_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-n,k} & \rho_{k-n,k-1} & \dots & 1 & \varphi_{k-n} \\ \varphi_k & \varphi_{k-1} & \dots & \varphi_{k-n} & 0 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{V(2\pi)^{n+1} D^{(k)}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2D^{(k)}} \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^n (-1)^{j+l} D_{k-j, k-l} \varphi_{k-j} \varphi_{k-l} \right\}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Здесь $D^{(k)}$ — определитель корреляционной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_{k,k-1} & \dots & \rho_{k,k-n} \\ \rho_{k-1,k} & 1 & \dots & \rho_{k-1,k-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-n,k} & \rho_{k-n,k-1} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

а $D_{k-j, k-l}$ — минор этого определителя, получающийся вычеркиванием строки с индексом $k-j$ и столбца с индексом $k-l$. Квадратичную форму в показателе экспоненты можно представить так:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^n (-1)^{j+l} D_{k-j, k-l} \varphi_{k-j} \varphi_{k-l} &= D_{kk} \varphi_k^2 - 2B\varphi_k + C = \\ &= D_{kk} \left(\varphi_k - \frac{B}{D_{kk}} \right)^2 + C - \frac{B^2}{D_{kk}}, \end{aligned}$$

где $B = D_{k, k-1} \varphi_{k-1} - D_{k, k-2} \varphi_{k-2} + \dots + (-1)^n D_{k, k-n} \varphi_{k-n}$,

$$C = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (-1)^{j+l} D_{k-j, k-l} \varphi_{k-j} \varphi_{k-l}.$$

Далее, n -мерная плотность выражается через $n+1$ -мерную так:

$$\begin{aligned} p_{k-1}(\varphi_{k-1}, \dots, \varphi_{k-n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_k(\varphi_k, \varphi_{k-1}, \dots, \varphi_{k-n}) d\varphi_k = \\ &= \frac{1}{V(2\pi)^n D_{kk}} e^{-\frac{1}{2D^{(k)}} \left(C - \frac{B^2}{D_{kk}^2} \right)} \times \\ &\times \frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{D_{kk}}{2D^{(k)}} \left(\varphi_k - \frac{B}{D_{kk}} \right)^2} d \left(\sqrt{\frac{D_{kk}}{D^{(k)}}} \varphi_k \right) = \\ &= \frac{1}{V(2\pi)^n D_{kk}} e^{-\frac{1}{2D^{(k)}} \left(C - \frac{B^2}{D_{kk}^2} \right)}. \end{aligned}$$

Следовательно, для условной плотности распределения имеем

$$\begin{aligned} p_k(\varphi_k | \varphi_{k-1}, \dots, \varphi_{k-n}) &= \frac{p_k(\varphi_k, \varphi_{k-1}, \dots, \varphi_{k-n})}{p_{k-1}(\varphi_{k-1}, \dots, \varphi_{k-n})} = \\ &= \frac{1}{V2\pi \frac{D^{(k)}}{D_{kk}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_k - B/D_{kk}}{\sqrt{D^{(k)}/D_{kk}}} \right)^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

т. е. получаем формулу одномерного нормального распределения с математическим ожиданием B/D_{kk} и дисперсией $D^{(k)}/D_{kk}$. Из (3.2) следует, что

$$\varepsilon_k = \frac{\varphi_k - B/D_{kk}}{\sqrt{D^{(k)}/D_{kk}}} \quad (3.3)$$

есть нормально распределенная случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Подставляя в (3.3) выражение для величины B , мы приходим к следующему конечно-разностному уравнению процесса стока:

$$\varphi_k = H_{1k} \varphi_{k-1} + H_{2k} \varphi_{k-2} + \dots + H_{nk} \varphi_{k-n} + \Lambda_k \varepsilon_k. \quad (3.4)$$

Здесь

$$H_{ik} = (-1)^{i+1} \frac{D_{k, k-i}}{D_{kk}}, \quad \Lambda_k = \sqrt{\frac{D^{(k)}}{D_{kk}}}. \quad (3.5)$$

Число Λ_k может быть выражено через $H_{1k}, \dots, H_{nk}$. Действительно, из (3.4) имеем

$$\Lambda_k^2 = \left(\varphi_k - \sum_{i=1}^n H_{ik} \varphi_{k-i} \right)^2.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей этого равенства и выполняя необходимые действия, получаем

$$\Lambda_k^2 = 1 + \sum_{i=1}^n H_{ik}^2 - 2 \sum_{i=1}^n H_{ik} \rho_{k, k-i} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ik} H_{jk} \rho_{k-i, k-j}. \quad (3.6)$$

Интересно отметить, что если не считать H_{ik} заданными числами, а определять их из условия, чтобы дисперсия случайной части в (3.4) была минимальной, т. е. из условия $\Lambda_k^2 = \min$, то из (3.6) для H_{ik} и Λ_k получатся опять-таки выражения (3.5).

Уравнение (3.4) удобно для розыгрыша искусственных реализаций процесса стока, используемых в расчетах регулирования стока методом Монте-Карло. Пусть $\varphi_{k-1}, \dots, \varphi_{k-n}$ известны. Вычислив $H_{1k}, \dots, H_{nk}$, $D^{(k)}$ и Λ_k , генерируем с помощью таблицы или (при расчетах на ЦВМ) датчика случайных чисел значение ε_k случайной величины, распределенной по нормированному нормальному закону, и вычисляем φ_k по уравнению (3.4). Имея φ_k , можно таким же путем найти φ_{k+1} , и т. д. Чтобы начать розыгрыш, необходимо знать первые n значений φ_k , т. е. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Ими можно задаться произвольно, а чтобы исключить влияние этого произвола следует отбросить достаточное количество первых членов разыгранной реализации. Переход от реализации процесса φ_k к реализации процесса Q_k очевиден: для каждого k решается уравнение $\varphi_k = \varphi_k(Q_k)$. Возможны и другие варианты начала розыгрыша, но они более сложны, чем описанный.

Попробуем обобщить уравнение (3.4) на векторные марковские процессы, например на процессы речного стока в нескольких различных створах одной и той же реки, или различных рек, рассматриваемые совместно. Компонентами вектор-функции векторного процесса могут быть также величины различной физической природы, например расходы воды в тех или иных створах и уровни грунтовых вод в различных скважинах

$$\begin{array}{cccc} \varphi_k^{(1)} = \psi_1 & \varphi_{k-1}^{(1)} = \psi_{m+1} & \dots & \varphi_{k-n}^{(1)} = \psi_{N-m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k^{(m)} = \psi_m & \varphi_{k-1}^{(m)} = \psi_{2m} & \dots & \varphi_{k-n}^{(m)} = \psi_N, \end{array}$$
$$p(\psi_1, \dots, \psi_N) = \frac{1}{V(2\pi)^{ND}} e^{-\frac{D_\varphi}{2D}}. \quad (3.7)$$
$$D_{\varphi} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} \psi_i \psi_j + 2 \sum_{l=1}^m B_l \psi_l + C.$$
$$B_l = A_{l, m+1} \psi_{m+1} + \dots + A_{lN} \psi_N, \quad C = \sum_{i=m+1}^N \sum_{j=m+1}^N A_{ij} \psi_i \psi_j,$$

Положив $\psi_i = u_i + \alpha_i$, получим

Подберем α_i так, чтобы

Для этого нужно, чтобы $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ были решением системы уравнений:

$$\begin{aligned} A_{11}\alpha_1 + \dots + A_{1m}\alpha_m &= -B_1 \\ &\vdots \\ A_{m1}\alpha_1 + \dots + A_{mm}\alpha_m &= -B_m, \end{aligned}$$

т. е.

$$\alpha_i = H_{i, m+1} \psi_{m+1} + H_{i, m+2} \psi_{m+2} + \dots + H_{iN} \psi_N, \quad (3.9)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{E} [(-1)^i E_{1i} A_{1j} + (-1)^{i+1} E_{2i} A_{2j} + \dots + (-1)^{i+m-1} E_{mi} A_{mj}],$$

$$E = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{vmatrix},$$

причем E_{hi} — минор определителя E , получающийся вычеркиванием k -той строки и i -того столбца.

Таким образом,

$$D_\varphi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} u_i u_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} \alpha_i \alpha_j + 2 \sum_{i=1}^m B_i \alpha_i + C, \quad (3.10)$$

если α_i определяются по формуле (3.9) и для плотности распределения вероятностей случайного вектора $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ имеем следующее выражение:

$$p(\psi_1, \dots, \psi_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N D}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} \alpha_i \alpha_j + 2 \sum_{i=1}^m B_i \alpha_i + C \right) \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} u_i u_j \right\}, \quad (3.11)$$

откуда видно, что квадратичная форма $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} u_i u_j$ определено положительно, ибо в противном случае не может выполняться условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(\psi_1, \dots, \psi_N) d\psi_1 \dots d\psi_N = 1.$$

Плотность распределения вероятностей случайного вектора $\{\psi_{m+1}, \dots, \psi_N\}$ на основании (3.11) будет

$$p(\psi_{m+1}, \dots, \psi_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(\psi_1, \dots, \psi_m,$$

$$\psi_{m+1}, \dots, \psi_N) d\psi_1 \dots d\psi_m = \sqrt{\frac{D^{m-1}}{(2\pi)^{N-m}}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} \alpha_i \alpha_j + 2 \sum_{i=1}^m B_i \alpha_i + C \right) \right\}, \quad (3.12)$$

и для условной плотности распределения из (3.11) и (3.12) получаем

$$p(\psi_1, \dots, \psi_m | \psi_{m+1}, \dots, \psi_N) = \frac{p(\psi_1, \dots, \psi_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_N)}{p(\psi_{m+1}, \dots, \psi_N)} =$$

$$= \frac{1}{V(2\pi)^m D^m} \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} u_i u_j \right\}. \quad (3.13)$$

Определенно положительную квадратичную форму в показателе экспоненты можно привести к сумме квадратов, т. е. представить в виде

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} u_i u_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \mu_{ij} u_j \right)^2 = \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad (3.14)$$

где

$$\xi_i = \sum_{j=1}^m \mu_{ij} u_j = \sum_{j=1}^m \mu_{ij} (\psi_j - \alpha_j) =$$

$$= \mu_{i1} \psi_1 + \dots + \mu_{im} \psi_m - \gamma_{i, m+1} \psi_{m+1} - \dots - \gamma_{iN} \psi_N,$$

$$\gamma_{ij} = \mu_{i1} H_{1j} + \mu_{i2} H_{2j} + \dots + \mu_{im} H_{mj}. \quad (3.15)$$

Числа μ_{ij} в этих формулах зависят от чисел A_{ij} , однако эта зависимость не однозначна: как известно, существует бесконечное множество представлений (3.14). При любом из них формула (3.13) приобретает вид

$$p(\psi_1, \dots, \psi_m | \psi_{m+1}, \dots, \psi_N) = \frac{1}{V(2\pi D)^m} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^2}{D}}. \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\xi_i}{\sqrt{D}} = \varepsilon_i \quad (3.17)$$

суть независимые случайные числа, имеющие нормированное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. В развернутом виде выражение (3.17) записывается так:

$$\mu_{i1} \psi_1 + \dots + \mu_{im} \psi_m = \gamma_{i, m+1} \psi_{m+1} + \dots + \gamma_{iN} \psi_N + \sqrt{D} \varepsilon_i. \quad (3.18)$$

Полагая $i=1, \dots, m$, получаем m таких скалярных выражений; их можно записать в виде одного матричного

$$\varphi_k^* = H_1 \varphi_{k-1}^* + \dots + H_n \varphi_{k-n}^* + \mu^{-1} \sqrt{D} \varepsilon^*, \quad (3.19)$$

в котором

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1} & \dots & \mu_{mm} \end{bmatrix}, \quad H_s = \begin{bmatrix} H_{1, sm+1} & \dots & H_{1, (s+1)m} \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{m, sm+1} & \dots & H_{m, (s+1)m} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}.$$

Это и есть обобщение уравнения (3.4) на векторные процессы. Используя уравнение (3.19), необходимо помнить, что матрицы μ , H_s и вектор ε^* различны для различных k .

Обратимся теперь к матрице μ . Все представления (3.14) равноправны: какое бы из них мы ни выбрали, вероятностные характеристики искусственных реализаций процесса φ_k^* , полученные с помощью (3.19), будут одинаковы. Но для того, чтобы случайный вектор $\mu^{-1} \varepsilon^*$ имел наиболее простую структуру, представление (3.14) целесообразно взять ортогональным, т. е. таким, чтобы было $\mu_{ij} = \lambda_i \beta_{ij}$, где λ_i — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.20)$$

а $\|\beta_{ij}\|$ ($m \times m$) — соответствующая унитарная матрица, т. е. матрица, удовлетворяющая условию

$$\|\beta_{ij}\| \times \|\beta_{ji}\| = I. \quad (3.21)$$

Здесь I — единичная матрица. Иначе

$$\mu = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \times \|\beta_{ij}\|.$$

Так как матрица $\|A_{ik}\|$ симметрична, то все корни уравнения (3.20) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ вещественны и

$$\mu^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m^{-1} \end{bmatrix} \times \|\beta_{ji}\|.$$

Принимая во внимание еще и выражение (3.21), находим

$$\|\beta_{ij}\| \times \|\beta_{ji}\| = \|\beta_{ij}\| \times \|\beta_{ij}\|^{-1} = \|\beta_{ij}\|^2 = I,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^m \beta_{ij} \beta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=k \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (3.22)$$

Для i -того компонента η_i случайного вектора $\mu^{-1}\varepsilon^*$ имеем следующее выражение:

$$\eta_i = \lambda_i^{-1} (\beta_{i1}\varepsilon_1 + \dots + \beta_{im}\varepsilon_m). \quad (3.23)$$

Отсюда видно, что: 1) математическое ожидание $M\eta_i$ равно нулю, так как математические ожидания случайных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ суть нули, 2) случайные величины η_i распределены нормально, так как они есть линейные функции нормально распределенных величин $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Для коэффициента же корреляции между $\lambda_i\eta_i$ и $\lambda_k\eta_k$ находим

$$M[(\lambda_i\eta_i)(\lambda_k\eta_k)] = \begin{cases} 1, & \text{если } i=k \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, случайные числа

$$\beta_{i1}\varepsilon_1 + \dots + \beta_{im}\varepsilon_m \quad (i=1, \dots, m)$$

независимы и имеют нормированное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. Поэтому вместо (3.23) можно написать

$$\eta_i = \lambda_i^{-1} \varepsilon_i$$

или

$$\mu^{-1}\varepsilon^* = \begin{vmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m^{-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_m \end{vmatrix}.$$

Теперь окончательно уравнение (3.19) запишется так:

$$\varphi_k^* = H_1 \varphi_{k-1}^* + \dots + H_n \varphi_{k-n}^* + \Lambda \varepsilon^*, \quad (3.24)$$

где $\Lambda = \lambda^{-1} \sqrt{D}$ — диагональная матрица. Подчеркнем, что матрица Λ и вектор ε^* зависят, конечно, от k , но указывающий на

это индекс опущен для простоты записи. Для j -того компонента $\varphi_k^{(j)}$ вектора φ_k^* имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(j)} = & H_{j, m+1} \varphi_{k-1}^{(1)} + \dots + H_{j, 2m} \varphi_{k-1}^{(m)} + \\ & + \dots + H_{j, mn+1} \varphi_{k-n}^{(1)} + \dots + H_{j, mn+m} \varphi_{k-n}^{(m)} + \Lambda_j \varepsilon_j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Находить числа λ_i решением уравнения (3.20) нет необходимости. Проще находить непосредственно числа Λ_j , для которых из (3.25) легко получить выражение, аналогичное выражению (3.6), тем же приемом, каким последнее получается из (3.4)

$$\begin{aligned} \Lambda_j^2 = & 1 + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m H_{j, sm+\alpha} H_{j, rm+\beta} \times \\ & \times \rho_{k-s, k-r}^{(\alpha\beta)} - 2 \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^m H_{j, sm+\alpha} \rho_{k, k-s}^{(ja)}. \end{aligned}$$

Напомним, что квадратичная форма (3.14) определенно положительна. Отсюда следует, что числа Λ_j положительны, т. е. Λ_j есть положительное значение квадратного корня из правой части полученного выражения.

Уравнения (3.4) и (3.24), как указывалось в начале параграфа, действительны и для моделей А и Б, если все величины, помеченные индексом k , считать относящимися к моменту t , а помеченные индексом $k-i$ — к моменту $t-\tau_i$.

Определим порядок n марковского процесса, имея в виду пока процесс скалярный, выраженный уравнением (3.4). В табл. 2 и 3 дается зависимость Λ_k от n до $n=9$ (указаны только четыре десятичных знака Λ_k , целая часть этого числа всюду равна нулю) для различных k , т. е. для различных месяцев. На рис. 6 эта зависимость для двух случаев изображена графически. Из данных табл. 2 и 3 и рис. 6 видно, что параметр Λ_k уменьшается с увеличением n , иногда существенно, а иногда почти незаметно, и при этом стремится к практически постоянному значению. Однако на р. Волге зависимость Λ_k от n имеет минимум: для Рыбинска в апреле, а для Куйбышева в октябре (при $n=8$). Стабилизация или достижение Λ_k минимума означает, что начиная с некоторого $n=n_*$, индивидуального для разных k , т. е. для разных месяцев, дальнейшее увеличение n либо не сокращает дисперсии случайного члена $\Lambda_k \varepsilon_k$ в (3.4), либо даже увеличивает ее, т. е. не дает дополнительной информации о процессе. Руководствуясь рис. 6, для рек Амура и Волги можно принять значения n_* , указанные в табл. 4. Коэффициенты H_{ik} при детерминированных членах φ_{k-i} уравнения (3.4) при увеличении n не проявляют какой-либо четкой тенденции, как это видно из данных табл. 5.

Таблица 2

Зависимость параметра Λ_k от n для р. Волги

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Рыбинск											
7546	6814	6929	9917	9743	8129	8725	6972	7057	6746	7959	8092
7540	6717	6825	9876	9722	8128	8709	6972	7004	6733	7799	7806
7530	6673	6807	9833	9084	8105	8695	6972	6970	6674	7789	7806
7500	6657	6801	9826	8958	8077	8694	6964	6934	6672	7789	7797
7404	6657	6785	9825	8861	8077	8669	6877	6934	6667	7737	7775
7379	6649	6782	9799	8668	8061	8624	6874	6931	6662	7762	7775
7346	6631	6646	9755	8505	8061	8597	6874	6707	6646	7652	7770
7341	6590	6630	9754	8434	8046	8593	6848	6574	6548	7652	7767
7336	6590	6630	9754	8413	8034	8399	6848	6566	6542	7647	7763
Чебоксары											
7334	4866	6201	9802	9409	7885	7421	6841	6173	5214	7594	7859
6735	4799	6201	9686	9250	7631	7349	6682	6163	5090	7313	7662
6733	4790	5918	9640	8551	7585	7318	6670	6024	5089	7258	7575
6727	4609	5916	9639	8547	7570	7318	6669	5981	5019	7243	7537
6714	4608	5817	9575	8378	7553	7300	6591	5981	4955	7216	7537
6657	4600	5730	9572	8353	7400	7294	6505	5973	4955	7197	7535
6602	4597	5668	9570	8035	7389	7294	6416	5952	4912	7123	7522
6596	4549	5611	9547	8018	7386	7278	6376	5915	4901	7103	7516
6578	4542	5609	9543	8007	7311	6719	6300	5897	4880	6954	7516
Куйбышев											
8000	2665	4044	9925	9984	9109	7425	5841	5276	5763	7674	9301
4912	2323	3882	9895	8984	8350	7416	5838	5275	5718	7525	9014
4702	2321	3775	9893	8668	7818	7361	5699	5186	5716	7183	8990
4693	2285	3774	9842	8657	7792	7357	5657	4961	5704	7151	8953
4545	2280	3772	9842	8485	7667	7316	5528	4960	5622	6859	8892
4287	2269	3748	9762	8419	7657	7219	5478	4639	5581	6817	8863
4252	2241	3689	9762	7836	7234	7212	5471	4515	5485	6733	8850
4216	2218	3676	9755	7835	7087	7201	5363	4432	5462	6732	8850
4212	2208	3630	9727	7830	6896	7193	5558	4336	5430	6476	8791
Волгоград											
8133	6685	3000	9836	9065	9678	7169	6728	4969	5969	7491	7456
7713	4233	2996	9799	8686	8743	7056	6728	4967	5968	7455	7323
7501	4141	2975	9780	8680	7611	7023	6543	4953	5963	7427	7303
7503	4010	2909	9779	8648	7599	6931	6539	4920	5895	7423	6881
7476	4009	2845	9775	8615	7599	6869	6483	4917	5872	7347	6824
7386	3994	2828	9756	8605	7596	6852	6475	4813	5844	7341	6778
7352	3960	2698	9755	8086	7559	6848	6278	4781	5813	7326	6775
7346	3947	2696	9745	8078	7543	6838	6165	4740	5779	7311	6764
7335	3939	2686	9711	8078	7520	6692	6160	4693	5778	7157	6552

Таблица 3

Зависимость параметра Λ_n от n для различных рек

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Кама — Верхнекамск											
7381	3071	3673	9844	9995	9987	9762	9960	8610	7494	9125	9092
7075	2932	3641	9548	8501	7950	9746	9597	8585	7464	9119	8722
5575	2929	3635	9482	8371	7890	9739	9550	8542	7475	9100	8656
4799	2925	3591	9429	8316	7880	9739	9507	8110	7410	9098	8624
4717	2913	3590	9282	8312	7879	9738	9469	8061	7376	9021	8598
4716	2904	3587	9039	8280	7813	9736	9443	8029	7167	8955	8586
4687	2894	3568	8987	7979	7813	9722	9227	7970	7164	8942	8541
4675	2894	3568	8985	7977	7748	9706	9143	7942	7163	8880	8539
4675	2882	3555	8953	7857	7730	9704	9132	7868	7158	8870	8520
Ветлуга — Воскресенск											
9187	4690	3833	9927	9984	8796	8316	8873	9232	7895	9886	9784
9172	4657	3508	9833	9575	8298	8278	8862	9221	7895	9886	9561
9051	4650	3497	9682	8716	8294	8276	8817	9160	7895	9880	9552
8772	4650	3497	9644	8668	8202	8274	8784	9102	7894	9880	9537
8590	4650	3495	9625	8641	7965	8254	8740	9102	7879	9879	9534
8398	4619	3487	9596	8628	7965	8252	8740	9085	7877	9715	9521
7863	4545	3480	9539	8610	7947	8235	8681	9083	7877	9715	9521
7846	4531	3451	9539	8608	7938	8233	8680	9083	7876	9646	9519
7846	4514	3402	9457	8600	7855	8219	8673	9066	7875	9628	9509
Печора — Троицко-Печорское											
6122	3982	4457	9520	9957	9994	9984	8538	9732	9993	9988	6125
6117	3807	4389	9484	8144	9769	9944	8491	9730	9989	9863	6118
6086	3807	4285	9309	8140	9714	9942	8488	9698	9982	9859	6032
5460	3807	4221	9305	8140	9711	9850	8436	9695	9983	9789	5338
4853	3784	4210	9273	8109	9691	9398	8227	9612	9965	9789	5277
4736	3751	4111	9252	7966	9650	8899	8024	8876	9963	9620	5271
4728	3751	4067	9090	7961	9620	8869	7999	8377	9958	9593	5269
4334	3731	4021	9072	7932	9618	8869	7993	8371	9958	9305	5268
4267	3720	4008	9018	7905	9559	8862	7953	8350	9957	9188	5200
Амур — Хабаровск											
9992	3139	3525	9652	9999	9982	7051	7140	6934	3442	7488	9715
8442	3139	3426	9601	9965	9982	7051	5435	6931	3046	7460	9418
7590	3101	3425	9531	9965	9959	7051	5418	6102	3045	7403	9415
7497	3087	3423	9529	9920	9939	7049	5413	6102	3003	7399	8850
7480	3083	3394	9493	9870	9932	7049	5413	6081	2992	7397	8527
7479	3080	3375	9484	9850	8951	7042	5412	6070	2992	7396	8502
7479	3080	3373	9446	9850	7395	6815	5412	6069	2966	7387	8497
7450	3078	3373	9444	9809	5504	6815	5384	6066	2963	7046	8449
7382	3076	3363	9417	9775	5486	6804	5345	6050	2963	6797	8495

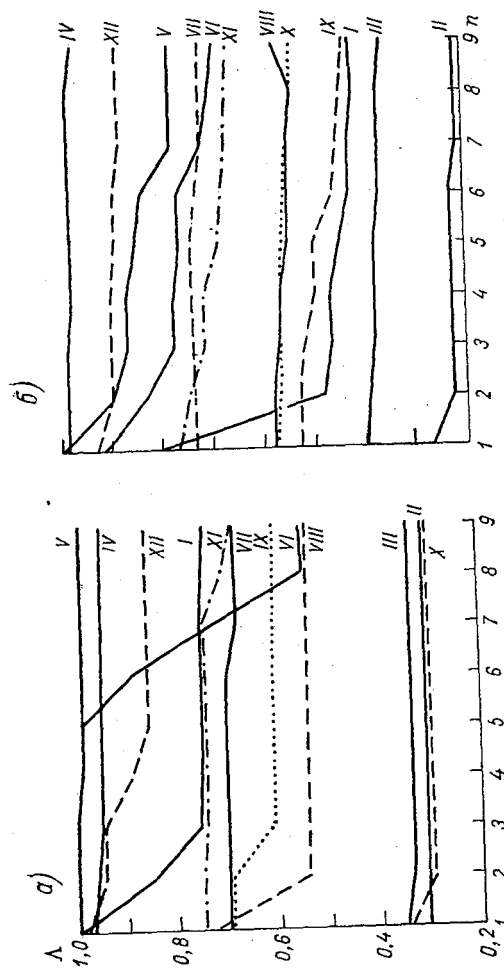


Рис. 6. Зависимость Λ от n для различных месяцев.
 а — р. Амур (г. Хабаровск), б — р. Волга (г. Куйбышев).

Таблица 4

Значения n_* для различных месяцев

Река—пункт	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Амур—Хабаровск	3	2	1	1	1	8	1	2	3	2	9	5
Волга—Куйбышев	6	2	1	1	7	9	1	8	9	8	9	7

Таким образом, по критерию изменчивости Λ_k порядок n марковского процесса получается различным при разных k . Коэффициенты уравнения (3.4) приводятся в табл. 6, при этом коэффициенты для р. Волги, заимствованные из табл. 5, выделены в ней жирным шрифтом. Различие значений n для различных месяцев не должно нас смущать: формально можно считать n всегда одним и тем же ($n=9$), заполнив нулями все пропуски в табл. 6.

Разумное решение вопроса о порядке векторного марковского процесса заключается в выборе такого n , при котором неопределенность, связанная с вероятностным характером процесса, будет минимальной. Иными словами, минимальной должна быть неопределенность, вносимая наличием в уравнении (3.24) многомерной случайной величины $\Lambda\varepsilon^*$. Из теории информации известно, что количественной мерой неопределенности многомерной случайной величины $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, имеющей плотность распределения $p(x_1, \dots, x_m)$, является ее энтропия $\mathcal{E}(\xi)$, которая с точностью до не имеющей значение в данном случае постоянной выражается формулой

$$\mathcal{E}(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_m) \times \\ \times \ln p(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Учитывая, что компоненты $\Lambda\varepsilon^*$ независимы, распределены нормально и дисперсия j -того компонента есть Λ_j^2 , нетрудно подсчитать, что

$$\mathcal{E}(\Lambda\varepsilon^*) = \ln \prod_{j=1}^m \Lambda_j.$$

Следовательно, порядок марковского процесса есть то значение n , при котором произведение $\Lambda_1 \dots \Lambda_m$ имеет минимум, или то, начиная с которого это произведение становится практически постоянным. Результат, полученный выше для скалярного марковского процесса, есть частный случай результата для векторного процесса.

Таблица 5

Зависимость коэффициентов N_{ik} от n при детерминированных членах конечно-разностного уравнения процесса стока (3.4) для р. Волги у г. Куйбышева

n	k											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	0,599	0,964	0,915	0,122	0,056	0,413	0,669	0,812	0,849	0,817	0,641	0,367
2	0,351 0,679	0,866 0,163	1,324 -0,425	0,296 -0,190	0,003 0,439	0,433 -0,364	0,686 -0,038	0,829 -0,026	0,867 -0,021	0,934 -0,137	0,855 -0,261	0,176 0,298
3	0,312 0,571 0,191	0,883 0,160 -0,018	1,133 -0,319 0,130	0,279 -0,088 -0,090	0,021 -0,099 0,586	0,291 -0,396 0,328	0,729 -0,062 0,098	0,837 -0,089 0,139	0,872 -0,113 0,129	0,933 -0,117 -0,024	0,904 -0,666 0,428	0,193 0,191 0,118
4	0,309 0,579 0,143 0,053	0,858 0,157 -0,034 0,057	1,134 -0,332 0,132 0,013	0,341 0,047 -0,184 -0,148	0,020 -0,130 0,781 0,173	0,310 -0,402 0,471 -0,165	0,741 -0,053 0,106 -0,032	0,849 -0,130 0,157 -0,076	0,815 -0,055 0,051 0,170	0,920 -0,104 -0,060 0,050	0,901 -0,666 0,524 -0,116	0,160 0,238 -0,042 0,161
5	0,298 0,533 0,214 -0,180 0,235	0,856 0,156 -0,029 0,035 0,025	1,125 -0,331 0,133 0,009 0,017	0,342 0,046 -0,177 -0,149 -0,007	0,038 -0,242 0,550 -0,009 0,254	0,318 -0,399 0,572 -0,784 0,543	0,749 -0,079 0,116 -0,207 0,199	0,855 -0,188 0,119 -0,110 0,144	0,813 -0,051 0,044 0,173 -0,012	0,977 -0,115 -0,092 0,095 0,114	0,878 -0,716 0,595 -0,313 0,278	0,174 0,230 -0,033 0,006 0,180
6	0,278 0,556 0,207	-0,843 0,158 -0,031	1,114 -0,327 0,133	0,352 0,130 -0,180	-0,037 -0,236 0,523	0,309 -0,394 0,544	0,721 -0,063 0,107	0,844 -0,173 0,093	0,745 0,015 -0,052	0,980 -0,103 -0,115	0,901 -0,782 0,606	0,144 0,248 -0,071

n	k											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
6	-0.167	0.051	0.023	-0.157	0.182	-0.832	-0.107	-0.099	0.126	0.137	-0.286	0.047
	0.013	-0.020	-0.049	0.043	0.223	0.580	-0.344	-0.026	-0.069	-0.135	0.241	0.104
	0.261	0.047	0.076	-0.178	-0.186	0.060	0.472	0.193	0.215	0.075	0.091	0.102
	0.273	0.871	1.085	0.352	0.077	0.272	0.724	0.850	0.771	0.902	0.924	0.137
	0.534	0.155	-0.339	0.130	-0.276	-0.394	-0.056	-0.171	0.008	-0.081	-0.810	0.269
7	0.222	-0.051	0.142	-0.180	0.312	0.549	0.104	0.090	-0.070	-0.078	0.590	-0.118
	-0.196	0.046	0.016	-0.157	0.197	-0.876	-0.085	-0.099	0.160	0.080	-0.247	0.059
	0.045	-0.019	-0.001	0.043	0.248	1.034	-0.303	-0.049	-0.081	-0.150	0.172	0.118
	0.203	0.097	-0.059	-0.178	-0.309	-0.005	0.440	0.321	0.458	0.039	0.126	0.081
	0.079	-0.066	0.138	-0.001	0.443	-0.444	-0.050	-0.113	-0.280	0.135	-0.120	0.057
8	0.269	0.862	1.062	0.370	0.077	0.339	0.742	0.857	0.779	0.876	0.921	0.139
	0.525	0.154	-0.296	-0.127	-0.280	-0.417	-0.056	-0.183	-0.018	-0.049	-0.814	0.265
	0.248	-0.059	0.143	-0.168	0.312	0.585	0.111	0.068	-0.074	-0.081	0.592	-0.114
	-0.251	0.057	-0.003	0.164	0.197	-0.804	-0.096	-0.090	0.170	0.070	-0.244	0.059
	0.059	-0.037	-0.004	0.046	0.249	1.014	-0.281	-0.119	-0.084	-0.131	0.166	0.115
9	0.221	0.115	-0.058	-0.204	-0.304	-0.033	0.354	0.188	0.528	0.031	0.124	0.087
	0.055	-0.097	0.183	0.075	0.419	-0.369	-0.040	-0.011	-0.677	0.257	-0.123	0.054
	0.067	0.046	-0.059	-0.079	0.027	0.224	0.074	0.164	0.348	-0.135	0.114	0.012
	0.269	0.868	1.026	0.387	0.078	0.344	0.751	0.860	0.813	0.827	0.951	0.137
	0.529	0.154	-0.281	-0.161	-0.293	-0.417	-0.074	-0.201	-0.053	0.000	-0.748	0.233
9	0.240	-0.059	0.148	-0.264	0.315	0.635	0.120	0.067	-0.058	-0.116	0.478	-0.161
	-0.244	0.045	-0.018	-0.168	0.188	-0.815	-0.109	-0.097	0.186	0.061	-0.230	0.079
	0.059	-0.014	0.017	0.090	0.254	1.013	-0.289	-0.110	-0.088	-0.110	0.200	0.148
	0.215	0.109	-0.093	-0.198	-0.306	-0.041	0.349	0.169	0.590	0.023	0.057	0.035
	0.065	-0.105	0.073	0.073	0.439	-0.425	-0.034	0.066	-0.574	0.375	-0.096	0.033
9	0.060	0.055	-0.118	-0.187	-0.028	0.029	0.061	0.155	0.263	-0.688	-0.441	-0.022
	0.020	-0.026	0.084	0.137	0.057	-0.293	0.052	-0.057	-0.142	0.472	0.496	0.136

Таблица 6

Коэффициенты H_{ik} конечно-разностного уравнения (3.4) процесса стока

Месяц	H_{ik}										Δ
	Амур — Хабаровск										
I	0,040	0,864	-0,509							0,759	
II	0,941	-0,010								0,314	
III	0,936									0,352	
IV	0,261									0,966	
V	0,015									1,000	
VI	0,041	0,017	0,059	0,002	-0,023	0,190	-0,020	0,769		0,682	
VII	0,709									0,705	
VIII	0,234	0,657								0,544	
IX	0,308	-0,130	0,612							0,610	
X	0,772	0,231								0,305	
XI	0,907	-0,143	-0,175	0,036	-0,012	-0,017	-0,002	-0,269	0,532	0,680	
XII	0,070	-0,249	0,128	0,296	0,333					0,853	
	Волга — Куйбышев										
I	0,278	0,556	0,207	-0,167	0,013	0,261				0,429	
II	0,866	0,163								0,232	
III	0,915									0,404	
IV	0,122									0,993	
V	0,077	-0,276	0,312	0,197	0,248	0,309	0,443	0,029	-0,293	0,784	
VI	0,344	-0,417	0,635	-0,815	1,013	-0,041	-0,425			0,690	
VII	0,669									0,742	
VIII	0,857	-0,183	0,068	-0,090	-0,119	0,188	-0,011	0,164		0,536	
IX	0,813	-0,053	-0,058	0,186	-0,088	0,590	-0,574	0,263	-0,142	0,434	
X	0,876	-0,049	-0,081	0,070	-0,131	0,031	0,257	-0,135		0,578	
XI	0,951	-0,748	0,478	-0,230	0,200	0,057	-0,096	-0,441	0,496	0,716	
XII	0,137	0,269	-0,118	0,059	0,118	0,081	0,057			0,678	

Вероятностный анализ среднеинтервальных расходов за малые (до месяца) промежутки времени и подход к процессу стока как к марковскому процессу обычны для американской научной литературы и американской водохозяйственной практики [17, 64—70, 76, 79, 80, 81, 84—86, 92, 96]. В связи с этим в американских источниках широко распространены уравнения, близкие к уравнениям (3.4) и (3.24). Но там они выводятся иным путем, чем это было сделано выше (исходя из общего определения марковского процесса), и представляют в противоположность формулам (3.4) и (3.24) линейную модель (заметьте, что модель процесса стока не следует отождествлять с моделью речного бассейна).

Если Q_k^* — случайный вектор для k -го интервала, например вектор расходов в различных створах и процесс его изменения — марковский процесс n -ого порядка, т. е. такой, что вектор Q_k^* зависит от $Q_{k-1}^*, \dots, Q_{k-n}^*$ и не зависит ни от каких Q_{k-i}^* при $i > n$, то конечно-разностное уравнение марковского процесса в самом общем случае будет

$$\Phi(Q_k^*, Q_{k-1}^*, \dots, Q_{k-n}^*, \varepsilon_k^*) = 0, \quad (3.26)$$

где ε_k^* — независимые при различных k случайные векторы; Φ — некоторая вполне детерминированная векторная функция. Если теперь принять простейшее предположение, что функция Φ линейна, то (3.26) обратится в уравнение с матричными коэффициентами

$$Q_k^* = L_{k1}Q_{k-1}^* + \dots + L_{kn}Q_{k-n}^* + \Gamma_k \varepsilon_k^*. \quad (3.27)$$

Какие-либо предположения о распределении вероятностей вектора ε_k^* не являются принципиально необходимыми, но тем не менее предполагается, что компоненты этого вектора независимы и нормально распределены. Как видно из вывода уравнения (3.24), не нарушая общности, матрицу Γ_k можно считать диагональной.

Таким образом, (3.27) есть линейная гауссовская модель. Уравнение (3.24) дает модель нелинейную и не гауссовскую

$$Q_k^* = \varphi_k^{*-1} \{H_1 \varphi_{k-1}^*(Q_{k-1}^*) + \dots + H_{k-n} \varphi_{k-n}^*(Q_{k-n}^*) + \Lambda \varepsilon_k^*\}, \quad (3.28)$$

где φ_k^{*-1} — символ функции обратной φ_k^* . Линейной и гауссовской является только промежуточная модель — связь между векторами φ_{k-i}^* ($i=0, 1, \dots, n$).

Линейные модели процесса стока применяются и в иных аспектах, чем это было в упомянутых работах (укажем дополни-

тельно еще работы [82 и 91]), а исследования, связанные с гауссовскими распределениями, начиная от суммирования независимых случайных величин [71] и кончая представлением гидрологического процесса как гауссовского шума [78], продолжают привлекать внимание гидрологов. Представляют интерес также попытки связать статистические параметры линейной модели процесса стока, например коэффициент корреляции между расходами реки в соседние интервалы времени с физическими процессами в речном бассейне (инфильтрация осадков, изменение запасов грунтовых вод). Наиболее рельефная попытка такого рода предпринята в работе [66], где коэффициент корреляции трактуется как мера инерционности гидрологических процессов в речном бассейне. Эта попытка (как и все попытки такого рода), естественно, достаточно груба, но тем не менее она свидетельствует о возможности дать генетическое толкование таким статистическим параметрам, физический смысл которых очень сильно завуалирован.

4. ГИДРОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Прогнозом называется предсказание будущего по информации о настоящем и прошлом. Предсказываемые явления, процессы или величины носят название предиктантов, а информация, на основании которой делается прогноз, объединяется под общим термином предикторов прогноза.

В гидрологии предиктанты и предикторы, как правило, есть некоторые числа. Например, предиктантами могут быть объем стока половодья, максимальный расход, дата начала ледостава, толщина ледяного покрова; примерами предикторов могут служить снеготаяние бассейна к началу снеготаяния, суммы среднесуточных температур воздуха за то или иное время, уровни воды в створах реки, расположенных выше створа, к которому относится прогноз. Значительно реже встречается ситуация, когда предиктанты и предикторы суть процессы, например, предиктантом может быть гидрограф паводка в каком-то створе реки, а предикторами — гидрографы паводка или графики изменения уровней воды в вышележащих створах реки и ее притоков. Второй случай, за немногими исключениями, сводится к первому, т. е. к предсказанию одних величин по другим величинам, так как при реально достижимой точности измерений (предикторов) и предсказаний (предиктантов) достаточно задавать конечное число ординат процесса, в приведенном примере — расходов или уровней в конечном числе моментов времени. Теоретически это почти всегда (а при вероятностном подходе к прогнозу всегда) проще, чем оперировать с непрерывными процессами.

Мы будем иметь в виду первый случай — предиктанты $\eta_1, \dots, \eta_m$ и предикторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, есть числа, при этом $m \geq n$.

Между предиктандами и предикторами существуют соотношения вида

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) + \delta_1, \dots, \eta_m = f_m(\xi_1, \dots, \xi_n) + \delta_m. \quad (4.1)$$

Здесь $f_1, \dots, f_m$ — некоторые детерминированные функции, $\delta_1, \dots, \delta_m$ — случайные числа с нулевыми математическими ожиданиями.

С точки зрения методов прогнозирования необходимо различать три возможности:

1. Дисперсии случайных чисел $\delta_1, \dots, \delta_m$ ничтожно малы и этими числами можно пренебречь. Тогда

$$\eta_i = f_i(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

т. е. предиктанды полностью определяются предикторами и прогноз носит детерминированный характер. Эта возможность реализуется сравнительно редко. Примером может здесь служить построение гидрографа паводка и графика уровней по гидрографам в вышележащих створах, когда гидравлические и морфометрические характеристики речного русла известны достаточно определенно. Тогда прогноз сводится просто к расчету движения волны паводка по уравнениям Сен-Венана. Детерминированные прогнозы здесь рассматриваться не будут.

2. Случайными величинами $\delta_1, \dots, \delta_m$ пренебрегать нельзя, ибо их среднеквадратические значения ощутимы по сравнению с $f_1, \dots, f_m$. Если есть необходимая информация для того, чтобы построить функции распределения вероятностей этих величин, а значит, и предиктандов $\eta_1, \dots, \eta_m$, то имеет место вероятностный прогноз с полной информацией, или просто вероятностный прогноз. Функция распределения вероятностей предиктанда η_i в данном случае есть условная функция распределения при условии, что предикторы приняли определенные значения $x_1, \dots, x_n$

$$F_*(y_i) = P(\eta_i < y_i | \xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n). \quad (4.3)$$

Смысл прогноза в том, что эта условная функция распределения, представленная кривой AB на рис. 7, значительно ближе к ломаной $OCDE$, отвечающей однозначному детерминированному предсказанию $y_i = OC$, чем безусловная функция распределения вероятностей η_i , изображенная кривой HK .

3. Отсутствует часть информации, необходимой для вычисления предиктандов по предикторам, когда прогноз детерминированный, или для построения условных распределений (4.3), когда он вероятностный. В первом случае это может быть, если почему-либо нельзя измерить какой-либо из предикторов или если не известен тот или иной параметр функции f_i в (4.2). Тогда можно говорить не о точном предсказании η_i , а только о том, чтобы указать некоторые пределы a и b этой величины $a < \eta_i < b$.

Во втором случае неполнота информации может выражаться в том же или в неполноте информации о функции распределения вероятностей δ_i , например известна не функция распределения вероятностей δ_i и не тип этой функции, а только дисперсия δ_i . В этих условиях можно построить не кривую AB условной функции распределения вероятностей (4.3), а только некоторую полосу, в которой должна заключаться эта кривая (пунктир на рис. 7). Прогноз в условиях неполноты исходной информации выходит за рамки теории вероятностей и относится к теории игр. Игровые прогнозы в гидрологии, насколько известно автору, в литературе не рассматривались. Они не будут рассматриваться и здесь.

Следует иметь в виду, что практически мы всегда имеем дело с игровой ситуацией, но сводим ее к вероятностной за счет тех

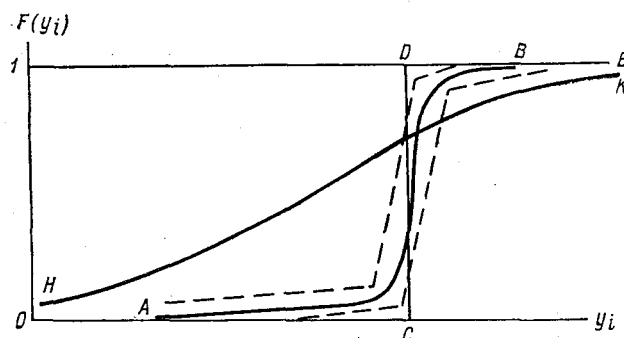


Рис. 7. Безусловная (HK) и условная (AB) функции распределения вероятностей предиктанда.

или иных априорных предположений, большей частью за счет предположений об аналитических выражениях функций распределения вероятностей, входящих в задачу прогнозирования.

Нужно заметить, что использование прогноза, выданного в виде условной функции распределения вероятностей AB (рис. 8), встречает затруднения у практических работников. Поэтому целесообразны «точечная» и «интервальная» формы выдачи прогноза. Точечная форма состоит в том, что указывается лишь условное математическое ожидание OC прогнозируемой величины. Интервальная же форма состоит в том, что $OC_1 < y_i < OC_2$ с вероятностью ML .

Деление прогнозов по признаку их заблаговременности носит несколько условный характер. С вероятностной точки зрения существенно то, что с увеличением заблаговременности прогноза кривая AB условной функции распределения предиктанда (рис. 7) все более отходит от ломаной однозначного предсказания $OCDE$ и приближается к кривой HK безусловной функции распределения, т. е. прогноз теряет смысл.

Определить функции $f_1, \dots, f_m$ в выражении (4.1) и распределения вероятностей чисел $\delta_1, \dots, \delta_m$ обычно очень трудно. Исключение составляет лишь случай, когда возможен чисто детерминированный прогноз, в котором всегда можно указать алгоритм построения функций $f_1, \dots, f_m$. В вероятностном случае много проще и не менее надежно строить условные функции или плотности распределения предиктандов при условии, что пре-

Наиболее важен случай, когда имеется один скалярный предиктанд η и n предикторов $\xi_1, \dots, \xi_n$. Обозначим значения, принимаемые предиктандом и предикторами

соответственно через

Рис. 8. К «точечной» и интервальной формам выдачи прогноза.

Тогда условная плотность распределения веро-

$$F(x_k | x_{k-1}, \dots, x_{k-n}) = \frac{1}{2} + G \left\{ \frac{\varphi_k(x_k) - B/D_{kk}}{\sqrt{D^{(k)} | D_{kk}}} \right\}. \quad (4.4)$$

Может показаться, что, чем больше предикторов, тем точнее прогноз, т. е. тем ближе условная функция распределения к однозначному предсказанию *OCDE* на рис. 7. Это неверно. Ввод каждого нового предиктора оправдывается лишь тогда, когда это приводит к уменьшению условной дисперсии $D^{(k)}/D_{kk}$. В противном случае новый предиктор не улучшает, а ухудшает прогноз. Рассмотрим, например, прогноз η : 1) по одному предиктору ξ_1 и 2) по двум предикторам ξ_1 и ξ_2 . Пусть ρ , ρ_1 и ρ_2 — соответственно коэффициенты корреляции между $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$, между $\varphi(\eta)$ и $\varphi_1(\xi_1)$, между $\varphi(\eta)$ и $\varphi_2(\xi_2)$. Тогда в первом случае

$$\frac{D^{(k)}}{D_{kk}} = 1 - \rho_1^2$$

и во втором

$$\frac{D(k)}{D_{kk}} = \frac{1 + 2\rho\rho_1\rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2}{1 - \rho^2}.$$

Второй вариант лучше первого, если

$$\frac{1 + 2\rho\rho_1\rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2}{1 - \rho^2} < 1 - \rho_1^2,$$

т. е. если

$$2\rho\rho_1 - \rho_2 < -\rho^2 \frac{1 - \rho_1^2}{\rho_2}.$$

Если $\rho_2 < 2\rho\rho_1$, то это неравенство заведомо не выполняется. В частности, при $\rho = 0,5$ и $\rho_1 = 0,9$ второй вариант (два предиктора) уступает первому (один предиктор) даже при высоком коэффициенте корреляции $\rho_2 = 0,9$.

В работе [72] выбор предикторов из множества возможных рассматривается более подробно с точки зрения теории информации. Формирование же множества возможных предикторов есть вопрос не стохастической, а генетической гидрологии, решаемый для разных рек индивидуально. Когда условная дисперсия мала, $\varphi_k(x_k)$ можно приравнять условному математическому ожиданию, тогда в (3.4) нужно отбросить член $\Lambda_k \varepsilon_k$.

Если предиктанд прогноза есть средний расход реки в интервале $k+m$, а предикторы — расходы в интервалах $k-1, \dots, k-n$, то уравнение (3.27) для частного случая скалярного процесса после отбрасывания случайной составляющей будет иметь вид

$$Q_{k+m} = L_{k1}Q_{k-1} + \dots + L_{kn}Q_{k-n}, \quad (4.5)$$

где L_{ki} — уже не матричные, а скалярные коэффициенты. Эти коэффициенты, периодически зависят от k с периодом, равным числу интервалов, на которые разделен год. Если же за период усреднения взят один год, т. е. рассматриваемая последовательность среднеинтервальных расходов стационарна, то коэффициенты L_{ki} не будут зависеть от k и (4.5) приобретает вид

$$Q_{k+m} = L_1Q_{k-1} + \dots + L_nQ_{k-n}. \quad (4.6)$$

В работе [3] это уравнение широко используется, в частности, для прогнозов среднегодовых расходов р. Волги. В работе [4] результаты работы [3] применяются к прогнозу среднегодовых расходов р. Влтавы. Но теоретическая основа уравнения (4.6) в монографии [3], заимствованная из [32], отличается от изложенного выше. Уравнение (3.4) основывается на гипотезе многомерных распределений, сформулированной в § 2, а уравнение (4.6) в [32] — на идее аппроксимации зависимости предик-

танда от предикторов линейной функцией с минимальной дисперсией ошибки прогноза.

Не составляет труда обобщить изложенное на случай векторного предиктанда точно так же, как был осуществлен переход от скалярного уравнения (3.4) к матричному (3.24). Однако целесообразность такого обобщения не очевидна. Во-первых, она означает переход от раздельного прогнозирования компонент предиктанда к их совместному прогнозу, а это, вводя в прогнозистические зависимости коэффициенты корреляции между нормализующими функциями компонент, не обязательно приведет к улучшению прогноза. Во-вторых, в результате мы получим плотность совместного условного распределения компонент предиктанда, оперировать которой при использовании прогноза менее удобно, чем соответствующими плотностями отдельных компонент.

В заключение необходимо рассмотреть еще один вопрос. Предположим, что возможен хороший (т. е. с малой условной дисперсией) прогноз суммарного стока за тот или иной период времени, например прогноз стока половодья. Как использовать этот прогноз не для суммарного стока, а для средних расходов за отдельные интервалы времени, входящие в этот период? Пусть $\Delta t_1, \dots, \Delta t_n$ есть интервалы времени (не обязательно равные), на которые делится рассматриваемый период, а $Q_1, \dots, Q_n$ — средние расходы реки в этих интервалах. Прогнозируется величина

$$W = \Delta t_1 Q_1 + \dots + \Delta t_n Q_n \quad (4.7)$$

или величина

$$X = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \quad (4.8)$$

где x_k — модульный коэффициент среднего расхода в k -том интервале; X — модульный коэффициент суммарного стока за весь рассматриваемый период; $a_k = \Delta t_k M Q_k / MW$. В общем случае прогнозироваться может произвольная функция $x_1, \dots, x_n$, значение которой мы также обозначим через X ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = X. \quad (4.9)$$

Пусть $p(x_1, \dots, x_n)$ есть безусловная плотность распределения вероятностей вектора $\{x_1, \dots, x_n\}$. Подставим в эту плотность значение x_k из (4.9)

$$x_k = \phi(x_1, \dots, x_{k-1}, X, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (4.10)$$

Это даст

$$p\{x_1, \dots, x_{k-1}, \phi(x_1, \dots, x_{k-1}, X, x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n\}. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) есть условная плотность распределения $\{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ при условии, что функция f приняла значение X . Проинтегрируем (4.11) в пределах от 0 до ∞ по всем аргументам, кроме X и x_i , где i — какое-нибудь из чисел $1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$. В результате получим $p_i(x_i|X)$, т. е. плотность распределения вероятностей x_i при условии, что X имеет заданное значение. Обозначим предикторы X через Y , тогда

$$p_i(x_i|Y) = \int p_i(x_i|X) d\Phi(X|Y), \quad (4.12)$$

где $\Phi(X|Y)$ — условная функция распределения вероятностей X . Имея условную плотность (4.12), можно построить условную функцию распределения $F_i(x_i|Y)$, которая и является целью прогноза. По выражению (4.11) эту операцию можно проделать для любых i и k ($i \neq k$), т. е. получить условные функции распределения для всех $x_1, \dots, x_n$.

ГЛАВА 2

ОДНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В данной главе будут иметься в виду одномерные распределения вероятностей среднемесячных, среднедекадных, среднегодовых, средних за половодье и межень (с жесткими границами сезонов) расходов.

Общие соображения, которые необходимо принимать во внимание при построении аналитических выражений одномерных функций распределения вероятностей этих расходов, сводятся к следующему.

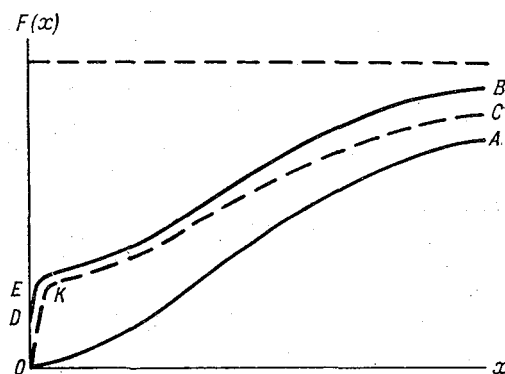
1. Какой бы большой расход ни наблюдался, не может быть уверенности, что в будущем не будет наблюдаться расход еще больший. Поэтому принимается, что расходы не ограничены сверху.

2. Какой бы малый расход ни наблюдался, не может быть уверенности, что в будущем не будет наблюдаться расход еще меньший. А так как отрицательные расходы (т. е. течение реки в обратном направлении) невозможны, то нижней границей расходов следует считать нуль. При этом, нулевому расходу следует, очевидно, приписать не только нулевую вероятность превышения, но и нулевую плотность распределения вероятностей, т. е. кривая функции распределения $0A$ на рис. 9 должна в нуле касаться оси абсцисс. Но если в рассматриваемый интервал времени возможно полное пересыхание или промерзание реки, то нулевому расходу будет соответствовать отличная от нуля вероятность, т. е. функция распределения вероятностей имеет скачок в нуле. Для рек, близких к полностью пересыхающим или промерзающим, расходы которых в рассматриваемом интервале в некоторые годы хотя и не падают до нуля, но очень резко уменьшаются, функция распределения вероятностей будет иметь некоторую промежуточную форму между функциями распределения вероятностей рек этих двух типов (рис. 9). На рис. 9 видно, что распределения вероятностей расходов далеко не всегда одномодальны: например, функция OKC имеет плотность $p = dF/dx$ с двумя максимумами, один из которых (с меньшим значением x) при схематизации и замене кривой OKC на кривую

ЕКС дает дельта-функция в нуле. Многомодальное распределение вероятностей не обязательно связано с промерзанием или пересыханием реки. Многомодальные распределения возможны и для рек, не обладающих этим генетическим свойством, которое, таким образом, в вероятностном аспекте не дает оснований выделять в отдельный класс реки, которым оно присуще. Необходимо особо подчеркнуть, что гипотеза о многомерных распределениях, высказанная в § 2, охватывает и распределения со скачком в нуле (*ОЕС* или *ОДВ* на рис. 9). При этом, если из общего числа N лет наблюдений в s случаях имел место нулевой расход, то этим s случаям надо приписать эмпирические вероятности $1/N, 2/N, \dots, s/N$.

Рис. 9. Типы функций распределения вероятностей расходов.

ОА — не пересыхающие и не промерзающие до дна реки, *ОДВ* — пересыхающие или промерзающие до дна реки, *ОКС* — реки, близкие к пересыхающим, *ЕКС* — схематизация функции *ОКС*.



3. В диапазоне вероятностей от $P\{Q \leq 0\} = 0$ до $P(Q < \infty) = 1$ функция распределения вероятностей непрерывна и монотонна (без интервалов постоянства).

В гидрологии предпринимались и предпринимаются попытки обосновать аналитические выражения функций распределения вероятностей расходов генетическими соображениями. Последняя попытка такого рода излагается в работе [58]. Эти попытки являются лишним свидетельством необходимости синтеза статистического и генетического направлений в гидрологии. Но, к сожалению, колоссальные трудности построения генетической теории стока не позволяют еще выйти за пределы предварительного поиска. Поэтому процесс построения одномерных функций распределения вероятностей сейчас по-прежнему сводится к следующему: 1) подбирается аналитическое выражение такой функции, удовлетворяющее трем перечисленным общим условиям, согласующееся с эмпирической функцией распределения и содержащее (обычно но не обязательно) не более 3—4 неизвестных постоянных, 2) эти постоянные определяются по имеющемуся гидрологическому ряду.

Подобранное аналитическое выражение функции распределения вероятностей (или плотности распределения) иногда называют теоретическим. В данном случае этот термин не верен. Аналитические выражения, о которых идет речь, действительно сплошь и рядом получаются из теоретического анализа тех или иных статистических закономерностей, управляющих простейшими явлениями (появлением черных или белых шаров при их извлечении из урны с определенными правилами возврата и т. п.). Но никакого отношения к гидрологическим явлениям этот анализ не имеет, и применяя даваемые им аналитические выражения функцией распределения вероятностей к стоку, осадкам и т. д., следует смотреть на эти выражения только как на эмпирические формулы. Как любые эмпирические формулы вообще, эти выражения безусловно полезны, но их значение, универсальность и значимость проблемы их подбора ограничены и не должны переоцениваться (нужно, однако, заметить, что на этот счет существуют и другие мнения, например см. работу [11]). Более того, в расчетах регулирования стока можно вообще обойтись без аналитических выражений одномерных распределений вероятностей расходов за фиксированные интервалы времени, сглаживая выборочные распределения визуальным (по лекалу), внутри доверительной полосы, и задавая сглаживающую функцию распределения таблицей или графиком (так сплошь и рядом поступают в западной практике). Это связано с тем, что гипотеза многомерных распределений, развитая в главе 1, совершенно индифферентна к виду одномерных распределений и способу их задания. Никаких принципиальных преимуществ сглаживание с помощью аналитического выражения перед визуальным сглаживанием не имеет. Существует мнение, что аналитические выражения повышают достоверность экстраполяции функции распределения в область, не охватываемую эмпирической функцией распределения, т. е. в область очень больших и очень малых вероятностей превышения. Это мнение сильно переоценивает значение аналитических выражений. Для иллюстрации того, что при совпадении (даже совершенно точном) двух функций в определенном интервале изменения аргумента они могут не иметь между собой ничего общего за пределами этого интервала, можно привести следующий пример, уже давно ставший в математике тривиальным: функции 1) $y=x$, 2) $y=$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$$

точно совпадают при $-\pi < x < \pi$ и совершенно различны при $x < -\pi$ и при $x > \pi$. Отсюда ясно, что самое хорошее совпадение аналитического выражения с эмпирической функцией распределения не дает никакой гарантии, что это выражение будет совпадать с действительной функцией распределения в области, где нет эмпирических точек. Экстраполяция функций распределения имеет существенное значение

только для расчетов, связанных с заданием максимальных расчетных расходов гидротехнических сооружений. Что касается расчетов регулирования стока, то поведение функций распределения в области очень больших и очень малых вероятностей превышения мало сказывается на их результатах и поэтому большой роли не играет.

Но тем не менее, аналитические выражения одномерных распределений вероятностей расходов нужны по многим причинам. Во-первых, они дают некоторые удобства при расчете на ЦВМ. Во-вторых, они необходимы (хотя и недостаточны) для построения характеристик стока рек с недостаточными наблюдениями или без наблюдений: интерполировать по карте можно только параметры функций распределения (если эти функции аналитически выражаются одинаково для достаточно большой территории), а не сами функции. В-третьих, подбор аналитических выражений распределений среднемесячных и среднедекадных расходов существенно облегчит и уточнит типизацию рек по внутригодовому распределению стока.

Подобрать аналитическое выражение к данному эмпирическому распределению — задача во многих случаях очень кропотливая, но всегда разрешимая. Значительно сложнее отобрать и типизировать аналитические выражения, т. е. отыскать такие, которые были бы пригодны для достаточно широких классов рек и для всех месяцев (или декад) года или по крайней мере для каких-то определенных месяцев. Здесь нужно заметить, что если не удастся найти единое для всех месяцев аналитическое выражение, то невозможно использовать модель Б (табл. 1), оперирующую со скользящими средними расходами. Дело в том, что если, для разных положений в календаре скользящего интервала, аналитические выражения функций распределения будут разными, то в моменты t_* , отвечающие смене аналитических выражений, функция распределения будет делать скачок, ибо значения $F_1(t_* - 0, x)$ и $F_1(t_* + 0, x)$ будут равны лишь при отдельных значениях x . Но при использовании модели В (с фиксированными интервалами) различие аналитических выражений функций распределения вероятностей расходов в соседних интервалах не имеет значения.

Трудности задачи типизации распределения четко проявились в истории трехпараметрического гамма-распределения — единственного предписываемого к применению Указаниями [59], которое будет рассматриваться ниже. Работа над этим распределением, выполнявшаяся многими лицами, руководимыми столь выдающимися специалистами, как С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель, начатая в довоенное время, закончилась только с выходом этих Указаний. Она включала выбор частного случая распределения Пирсона III типа — двухпараметрического гамма-распределения, переход от него к трехпараметрическому распределению подбором соответствующей трансформации случайной

величины, разработку таблиц, номограмм и графиков для этого распределения и выяснение области его применимости. Все это привело к формуле, хорошо передающей распределения вероятностей среднегодовых расходов, максимальных расходов половодий, сезонных (например, половодных) стоков рек лесостепной зоны РСФСР, средней и северной Европы. Она пригодна и для среднемесячных расходов некоторых (но не всех) месяцев этих рек.

Перед тем, как перейти к аналитическим выражениям функций распределения, необходимо остановиться на четко выраженной в гидрологии тенденции подбирать такие выражения, которые включали бы не более трех параметров, подлежащих выборочной оценке. Эта тенденция связана с тем, что долгое время основным методом выборочной оценки параметров распределения был классический метод моментов, оперирующий степенными моментами натуральных порядков. В связи с тем что гидрологические ряды никогда не бывают столь длинными, чтобы с их помощью можно было дать сколько-нибудь надежную выборочную оценку моментов выше третьего порядка, то можно считать, что практическую ценность могут иметь только формулы, содержащие не более трех параметров. Оперирование степенными моментами натуральных порядков есть своего рода дань механике, из которой понятие момента проникло в статистику: в механике имеют физический смысл только такие моменты. Но ничто не мешает оперировать степенными моментами произвольных, а не только натуральных порядков, или моментами не степенной, а совсем иной природы. Тогда указанное ограничение перестает играть роль, ибо всегда можно найти более трех таких статистик, которые могут быть надежно оценены по выборке обычного для гидрологии объема. К статистикам, сплошь и рядом не совпадающим с классическими моментами, приводит и метод максимума правдоподобия. Но из того, что обобщенный метод моментов и метод максимума правдоподобия, рассматриваемые в § 6, позволяют оценивать по выборке достаточное количество параметров априорно принятого аналитического выражения функции распределения вероятностей, нельзя делать вывод, что эта возможность приближает нас к действительному распределению, т. е. к распределению генеральной совокупности. Она приближает только к выборочному распределению, т. е. к эмпирической функции распределения, и никакого другого смысла в эту возможность вкладывать нельзя.

В силу всего сказанного приводимые ниже аналитические выражения распределений вероятностей расходов ни в коем случае не могут рассматриваться как окончательные рекомендации. Это — только примеры, хотя и подходящие в очень многих случаях к эмпирическому распределению, но отнюдь не носящие универсального характера. Однако эти примеры могут быть полезны для поисков универсальных аналитических выражений.

В основу построения аналитических выражений функций F или плотностей p распределения вероятностей расходов воды можно положить классические распределения математической статистики, которые в своем первоначальном виде для гидрологических распределений, за редкими исключениями, не пригодны, но могут быть преобразованы с помощью соответствующим образом подобранной монотонно возрастающей функции $\varphi(x)$ так, чтобы удовлетворительно соответствовать эмпирическим функциям распределения гидрологических величин. Эти преобразования подробно рассматриваются в работе [33]. Они могут быть двоякими.

1. Преобразующая функция $\varphi(x)$ подставляется вместо x в исходную функцию распределения $\Phi(x)$, что приводит к новой функции распределения вероятностей

$$F(x) = \Phi\{\varphi(x)\} = \int_{-\infty}^{\varphi(x)} q(u) du, \quad (5.1)$$

имеющей плотность

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = q\{\varphi(x)\} \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (5.2)$$

Здесь $q(x)$ — плотность исходного распределения. Это преобразование будем называть преобразованием I рода.

2. Преобразующая функция $\varphi(x)$ подставляется вместо x в исходную плотность распределения, тогда преобразованная плотность распределения будет

$$p(x) = Cq\{\varphi(x)\}, \quad (5.3)$$

где постоянная C находится из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} q\{\varphi(x)\} dx = 1. \quad (5.4)$$

Это преобразование будем называть преобразованием II рода.

В обоих случаях должно выполняться следующее условие, накладываемое на функцию $\varphi(x)$: если исходная плотность отлична от нуля только при $x_1 < x < x_2$, а исследуемая случайная величина ξ принимает значения в интервале $\xi_1 < \xi < \xi_2$, то должно быть $\varphi(\xi_1) = x_1$, $\varphi(\xi_2) = x_2$. Во всех применявшихся до настоящего времени в гидрологии исходных распределениях $x_2 = \infty$, $x_1 = 0$ или $x_2 = \infty$, $x_1 = -\infty$. Следует заметить, что в качестве $\varphi(x)$ можно взять и не монотонно возрастающую функцию, но тогда преобразование сильно усложняется и становится практически неудобным, а приведенные выше формулы заменяются более сложными.

Здесь мы ограничимся преобразованием I рода и приведем некоторые функции распределения случайной величины $\xi = Q/MQ$, получающиеся с его помощью (Q — расход, MQ — его математическое ожидание), которые (по мнению автора) наиболее гибки и, следовательно, наиболее перспективны. Обратимся к нормальному закону

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.5)$$

1. Логарифмически-нормальное распределение осуществляется преобразующей функцией

$$\varphi(x) = \frac{\ln x - a}{\sigma}. \quad (5.6)$$

Его плотность и функция распределения выражаются формулами:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - a}{\sigma} \right)^2}, \quad F(x) = \frac{1}{2} + G\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right). \quad (5.7)$$

Здесь a и σ^2 суть соответственно математическое ожидание и дисперсия $\ln \xi$. Распределение имеет два параметра, a и σ , ибо $\ln \xi = \ln Q - \ln MQ$ и, следовательно, параметры MQ и a могут быть объединены в один параметр. Это распределение в гидрологии используется сравнительно редко.

2. Более гибкое распределение получается с помощью трансформирующей функции

$$\varphi(x) = \frac{x - \frac{1}{x} - a}{\sigma}, \quad (5.8)$$

которая приводит к формулам:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \frac{1}{x} - a}{\sigma} \right)^2} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right),$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + G\left(\frac{x - \frac{1}{x} - a}{\sigma}\right). \quad (5.9)$$

Здесь a и σ^2 — математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\xi - 1/\xi$. Это распределение — трехпараметрическое, его параметры суть MQ , a , σ . Как нетрудно проверить

$$a = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) p(x) dx = 1 - \nu_{-1}, \quad (5.10)$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{x} - a\right)^2 p(x) dx = \nu_2 + \nu_{-2} - (1 - \nu_{-1})^2 - 2, \quad (5.11)$$

где

$$\nu_k = \int_0^{\infty} x^k p(x) dx \quad (5.12)$$

— начальный момент порядка k случайной величины ξ .

3. Еще более гибкое распределение получается с помощью преобразующей функции [21]

$$\varphi(x) = \alpha \ln \ln(1+x) + \beta \ln x + \gamma \sqrt{x}, \quad (5.13)$$

которая дает плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\alpha \ln \ln(1+x) + \beta \ln x + \gamma \sqrt{x}]^2 \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\alpha}{(1+x) \ln(1+x)} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{2\sqrt{x}} \right\} \quad (5.14)$$

и функцию распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + G \{ \alpha \ln \ln(1+x) + \beta \ln x + \gamma \sqrt{x} \}. \quad (5.15)$$

Параметров распределения здесь четыре: MQ , α , β , γ .

Уже упоминавшееся трехпараметрическое гамма-распределение есть преобразование первого рода гамма-распределения, т. е. распределения Пирсона III типа для случая $q(x) = 0$ при $x \leq 0$ и

$$q(x) = \frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-\gamma x} x^{\gamma-1} \quad (5.16)$$

при $x \geq 0$. Здесь Γ — символ гамма-функции. Если в качестве преобразующей функции взять $\varphi(x) = Ax^{1/b}$ и подобрать A так, чтобы эта постоянная выражалась через γ и b , то

$$p(x) = \left\{ \frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)} \right\}^{\frac{\gamma}{b}} \frac{x^{\frac{\gamma}{b}-1}}{|\gamma| \Gamma(\gamma)} \exp \left\{ - \left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)} x \right]^{\frac{1}{b}} \right\}. \quad (5.17)$$

Параметры распределения в данном случае будут MQ, γ, b . Эти параметры связаны с начальными моментами формулой

$$\nu_k = \frac{[\Gamma(\gamma)]^{k-1} \Gamma(\gamma + kb)}{[\Gamma(\gamma + b)]^k}. \quad (5.18)$$

Функция распределения, отвечающая плотности (5.17), не сводится к другим табулированным функциям и дается специальными таблицами [48], в которых значения функции обеспеченности $1 - F(x)$ даются в зависимости от коэффициентов вариации C_v и асимметрии C_s , а не от γ и b или моментов ν_k (что объясняется только сложившейся традицией, а не принципиальными соображениями). Коэффициенты вариации и асимметрии равны соответственно

$$C_v = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\nu_1} = \sqrt{\mu_2}, \quad C_s = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} \quad (5.19)$$

(поскольку $\nu_1 = 1$), здесь μ_2 и μ_3 — центральные моменты ξ :

$$\mu_2 = \nu_2 - 1, \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2 + 2. \quad (5.20)$$

Отсюда и из (5.18) можно получить формулы, непосредственно выражающие C_v и C_s через γ и b .

Все перечисленные распределения одномодальны, т. е. $p(x)$ имеет один максимум. Она равна нулю при $x \leq 0$, отлична от нуля при $x > 0$, непрерывна при $-\infty < x < \infty$, следовательно непрерывна и $F(x)$.

Неодномодальными распределениями называются распределения, которые в зависимости от соотношений между параметрами могут иметь (но не обязательно имеют) более одной моды. Необходимость обращаться к такого рода распределениям связана с тем, что среднемесячные расходы, особенно в месяцы, когда происходит переход от одного гидрологического сезона к другому, часто имеют более одной моды. Не менее двух мод имеют и расходы пересыхающих и промерзающих до дна рек.

В работах [61, 62] предлагается обобщение двухпараметрического гамма-распределения (5.16) на двухмодальный случай.

$$p(x) = \frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \left\{ S e^{-\gamma x} x^{\gamma-1} + (1-S) e^{-\gamma \frac{x-a+|x-a|}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{x-a+|x-a|}{2} \right)^{\gamma-1} \right\}. \quad (5.21)$$

Здесь $x = Q/m_1$. Это — четырехпараметрическое распределение с параметрами γ, S, m_1, a . Заметим, что m_1 не есть математическое ожидание Q . Но при $S=1$, когда распределение (5.21) обращается в распределение Пирсона, m_1 обращается в математическое ожидание расхода. Чтобы получить трехпараметрическое распределение, авторы исключают параметр S , выражая

его через другие параметры, по условию минимума потери информации при переходе к трехпараметрическому распределению. В результате для S получаются различные формулы для различных соотношений между коэффициентом асимметрии и параметром $MQ/\sigma = \frac{1}{C_v}$, где σ^2 — дисперсия расхода. Это различие,

также как и то, что плотность распределения $p(x)$ по (5.21) фактически дается различными аналитическими выражениями для $x < a$ и $x > a$ (хотя они и записаны в компактной форме единой формулы) создает некоторые неудобства при использовании рассматриваемого распределения. Однако эти неудобства компенсируются таблицей функции распределения, заданной своей плотностью [62].

Рассмотрим несколько распределений с произвольным числом параметров, которые, по-видимому, могут претендовать на некоторую универсальность. Первое из них определяется как $F(x) = 0$ при $x < 0$ и

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \quad (5.22)$$

при $x \geq 0$. При $a_0 \neq 1$ функция распределения $F(x)$ делает в нуле скачок на $1 - a_0$, стало быть, эта функция может передавать распределения вероятностей расходов пересыхающих и промерзающих до дна рек. Плотность распределения, соответствующая функции (5.22) есть

$$p(x) = (1 - a_0) \delta(x) + e^{-\alpha x} [\alpha a_0 - a_1 + (\alpha a_1 - 2a_2)x + \dots + (\alpha a_{n-1} - n a_n) x^{n-1} + \alpha a_n x^n]. \quad (5.23)$$

Здесь $\delta(x - A)$ — дельта-функция Дирака, определяемая так: $\delta(x - A) = 0$ при всех $x \neq A$, $\delta(x - A) = \infty$ при $x = A$ и при этом $\int_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon} \delta(x - A) dx = 1$ при любом $\varepsilon > 0$. Если река не пересы-

хает и не промерзает до дна, то к распределению предъявляется обычное для гидрологии традиционное требование $F(0) = p(0) = 0$, из которого $a_0 = 1$, $a_1 = \alpha$, и тогда

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} (1 + \alpha x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n), \quad (5.24)$$

$$p(x) = e^{-\alpha x} [(\alpha^2 - 2a_2)x + (\alpha a_2 - 3a_3)x^2 + \dots + (\alpha a_{n-1} - n a_n) x^{n-1} + \alpha a_n x^n]. \quad (5.25)$$

Это распределение может иметь несколько мод — от одной до числа, равного целой части $(n+1)/2$ в зависимости от соотношений между параметрами.

Второе распределение, близкое по своим свойствам к предыдущему, определяется как $F(x) = 0$ при $x < 0$ и

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^2} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \quad (5.26)$$

при $x \geq 0$. Оно тоже имеет скачок в нуле на $1 - a_0$ и может иметь несколько мод — от одной до числа, равного целой части $(n+2)/2$. Его плотность определяется формулой

$$p(x) = (1 - a_0) \delta(x) + e^{-ax^2} [-a_1 + (2a_0 - 2a_2)x^2 + \dots + (2a_{n-2} - na_n)x^{n-1} + 2a_{n-1}x^n + 2a_nx^{n+1}]. \quad (5.27)$$

В случае же не пересыхающей и не промерзающей до дна реки, когда $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, эти формулы имеют вид:

$$F(x) = 1 - e^{-ax^2} (1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n),$$

$$p(x) = e^{-ax^2} [(2a - 2a_2)x - 3a_3x^2 + \dots + (2a_{n-2} - na_n)x^{n-1} + 2a_{n-1}x^n + 2a_nx^{n+1}].$$

Эти распределения при достаточно большом n дают кривые, близкие к эмпирическим функциям распределения. Но если определять параметры этих распределений по выборкам (см. § 6), не накладывая заранее никаких ограничений, вытекающих из природы $F(x)$, таких как неотрицательность, монотонность возрастания, или из природы $p(x)$, то в отдельных случаях получается, что эти требования нарушаются, т. е. $F(x)$ имеет интервалы, на которых она не монотонна (вблизи нуля и при достаточно больших x). Избежать этих противоречий можно либо заранее накладывая указанные ограничения на параметры $p(x)$, что сильно усложняет их выборочное определение, либо (но не всегда) увеличением n .

Последнее распределение, которое мы рассмотрим, есть распределение Грама—Шарлье. Пусть $g(\varphi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2}\right)$ есть плотность нормального распределения, а $g^{(1)}(\varphi)$, $g^{(2)}(\varphi)$, и т. д. — производные функции g по φ ; плотность распределения Грама—Шарлье дается рядом

$$q(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{(k)}(\varphi), \quad (5.28)$$

в котором $g^{(0)} = g$ и

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{h=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{k! r_{k-2h}}{(k-2h)! 2^h h!}. \quad (5.29)$$

Здесь $E\left(\frac{k}{2}\right)$ обозначает целую часть числа $k/2$, а r_{k-2h} — моменты φ порядка $k-2h$. Так как $r_0=r_2=1$, $r_1=0$, то $a_0=1$, $a_1=a_2=0$ и

$$a_3 = -\frac{r_3}{3!}, \quad a_4 = \frac{r_4-3}{4!}, \quad a_5 = -\frac{r_5-10r_3}{5!},$$

$$a_6 = \frac{r_6-15r_4+30}{6!},$$

а так как $g^{(k)}(\infty)=g^{(k)}(-\infty)=0$ при любом k , то

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\varphi) d\varphi = 1,$$

даже если ограничиться в выражении (5.28) конечным числом членов.

Распределение (5.29) имеет отличную от нуля плотность при $\varphi < 0$, и расходы не могут удовлетворять этому распределению непосредственно. Но если взять трансформирующую функцию (5.6), в которой по-прежнему a и σ — соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение натурального логарифма модульного коэффициента, то мы получим ограниченное снизу нулем распределение

$$q\{\varphi(x)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{(k)}\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right) \quad (5.30)$$

или

$$p(x) = \frac{1}{\sigma x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{(k)}\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right), \quad (5.31)$$

и соответственно (учитывая, что $a_1=a_2=0$)

$$F(x) = \frac{1}{2} + G\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right) + \sum_{k=3}^{\infty} a_k g^{k-1}\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right). \quad (5.32)$$

Логарифмически-нормальное распределение (5.7) есть весьма частный случай распределения (5.32).

6. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ОДНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО ГИДРОЛОГИЧЕСКИМ РЯДАМ

Оценка параметров распределений вероятностей гидрологических величин была уже рассмотрена в § 2. Здесь мы остановимся на этом подробнее. Идея всех без исключения методов выборочных оценок состоит в том, чтобы выразить искомые

параметры через некоторые функции выборочных значений (называемые статистиками), имеющие по возможности малую дисперсию. Различие между методами состоит в статистиках, которыми они пользуются, и в путях получения этих статистик. В последнее время в гидрологии все большее распространение получает метод максимума правдоподобия. Это вызвано следующим.

1. Метод максимума правдоподобия извлекает из имеющейся выборки максимум информации (по сравнению с другими методами). В частности, хотя при данном объеме выборки точность оценок параметров методом максимума правдоподобия падает с увеличением числа параметров функции распределения, но это падение значительно меньше, чем, например при использовании классического метода моментов: точность статистической оценки моментов выше второго порядка всегда очень невелика, в то время как метод максимума правдоподобия приводит к статистикам, имеющим значительно меньшую дисперсию, чем выборочные моменты больших натуральных порядков.

2. Максимум функции правдоподобия как функции параметров распределения может отыскиваться непосредственно методами численного решения экстремальных задач, что во многих случаях предпочтительнее решения систем трансцендентных уравнений, к которым приводит метод моментов в сложных случаях.

3. Метод максимума правдоподобия часто приводит к явным выражениям выборочных значений параметров через статистики там, где метод моментов таких выражений не дает. В самых же простых случаях (например, для нормального закона) оценки правдоподобия обычно совпадают с моментными оценками.

Суть метода максимума правдоподобия заключается в следующем. Если $x_1, \dots, x_N$ — выборочные значения случайной величины ξ , независимые одно от другого, а плотность распределения ξ зависит от n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, т. е. она есть $p(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то плотность многомерной величины $(x_1, \dots, x_N)$ есть

$$L = \prod_{i=1}^N p(x_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (6.1)$$

Эта плотность называется функцией правдоподобия. Постулируется, что параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ должны быть подобраны так, чтобы функция L имела максимум.

Если $x_1, \dots, x_N$ — средние расходы какого-то месяца или какой-то декады года за N лет, то предположение об их независимости оправдывается, по-видимому, с высокой точностью. Но формула (6.1) применяется и в том случае, когда $x_1, \dots, x_N$ — среднегодовые расходы, связь между которыми не всегда пренебрежимо мала. Если эту связь учитывать, то плотность N -мерного вектора $\{x_1, \dots, x_N\}$ будет выражаться не формулой (6.1),

а более сложной формулой, включающей не только параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, но и параметры связи. В этом случае использование метода очень усложняется. Но функцию (6.1) применяют и в этом сложном случае, что, вообще говоря, может иметь двойное обоснование:

1) либо мы считаем возможным пренебрегать связанностью величин $x_1, \dots, x_N$;

2) либо мы принимаем за функцию правдоподобия, по определению, не плотность распределения многомерного вектора $\{x_1, \dots, x_N\}$ со стохастически зависимыми компонентами, а функцию (6.1), которая совпадает с плотностью указанного вектора только в том частном случае, когда его компоненты независимы.

Второе обоснование представляется более естественным, пока речь идет об использовании выборочных значений расходов в одном створе: принцип максимума правдоподобия как принцип, оперирующий именно с многомерной плотностью распределения, для этих условий не может считаться четко обоснованным, и с точки зрения этого принципа нельзя отдать предпочтения многомерной плотности перед функцией (6.1).

Отыскание параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ численными методами определения экстремумов функций многих переменных не требует комментариев: алгоритмы таких задач подробно описываются в литературе по вычислительной математике, а стандартные программы их решения имеются для всех ЦВМ. Например, для распределения (5.14) логарифм функции правдоподобия (6.1) с точностью до не имеющего значения постоянного слагаемого, есть

$$\ln L = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} [\alpha \ln \ln(1+x_i) + \beta \ln x_i + \gamma \sqrt{x_i}]^2 + \ln \left[\frac{\alpha}{(1+x_i) \ln(1+x_i)} + \frac{\beta}{x_i} + \frac{\gamma}{2\sqrt{x_i}} \right] \right\}. \quad (6.2)$$

Определить $MQ, \alpha, \beta, \gamma$, дающие максимум L , в данном случае значительно проще непосредственно, чем решением трансцендентных уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial MQ} = \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = 0, \quad (6.3)$$

вытекающих из условий экстремума. Расчеты показывают, что для MQ можно принять моментную оценку — среднее арифметическое наблюдаемых Q — и после этого искать только α, β и γ прямым определением максимума L . Как видно из данных табл. 7, в которой даются значения α, β, γ для некоторых створов рек Камы и Волги [21], эти параметры имеют порядок единиц. Поэтому за исходное приближение для поиска максимума L можно принимать $\alpha=\beta=\gamma=1$. Однако, как следует из работы [21], процесс поиска сходится довольно быстро даже тогда,

Таблица 7

Параметры распределения (5.15) для рек Волги и Камы

Месяц	Кама—Пермь			Волга—Горький		
	α	β	γ	α	β	γ
I	1,310	1,206	0,671	1,187	1,043	0,593
II	1,577	1,527	0,738	1,326	1,238	0,694
III	1,934	1,960	0,846	1,567	1,506	0,737
IV	1,297	1,114	0,411	0,987	1,529	0,565
V	1,728	1,720	0,773	0,879	0,916	0,589
VI	1,061	0,916	0,638	1,215	1,103	0,658
VII	1,022	1,624	0,575	1,178	1,056	0,664
VIII	1,076	0,929	0,636	1,027	0,877	0,637
IX	1,087	0,944	0,633	0,934	0,773	0,631
X	0,943	0,780	0,636	0,744	0,543	0,623
XI	1,112	0,930	0,648	0,933	0,771	0,619
XII	1,305	1,211	0,691	0,944	0,786	0,614

Месяц	Волга—Куйбышев			Волга—Волгоград		
	α	β	γ	α	β	γ
I	2,032	1,496	0,905	2,037	1,501	0,907
II	2,072	1,541	0,914	1,830	1,237	0,849
III	2,212	1,698	0,939	1,751	1,140	0,836
IV	1,459	0,823	0,767	1,595	0,978	0,797
V	2,204	1,708	0,939	2,867	2,698	1,140
VI	1,432	0,782	0,765	1,676	1,079	0,813
VII	1,949	1,395	0,884	1,698	1,087	0,809
VIII	1,800	1,214	0,846	1,928	1,365	0,861
IX	1,741	1,143	0,817	1,795	1,216	0,844
X	1,549	0,910	0,778	1,627	1,009	0,798
XI	1,275	0,597	0,727	1,357	0,698	0,741
XII	1,606	0,937	0,799	1,702	0,320	0,880

когда за исходные принимаются значения, очень сильно отличающиеся от истинных.

Сложность использования уравнений (6.3) связана с тем, что они приводят к статистикам, которые сами зависят от оцениваемых параметров. Такие же статистики получаются и для трехпараметрического гамма-распределения (5.17). В связи с этим в работе [5] наряду с оценками правдоподобия предлагается оценка параметров этого распределения по другим статистикам, близким к статистикам правдоподобия, но не совпадающим с ними. Для математического ожидания MQ принимается, как и в предыдущем случае, моментная оценка — среднее арифметическое выборочных значений. Для определения двух других

параметров — γ и b — в работе [5] применяется следующий прием. Имеем:

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} z^{\gamma-1} e^{-z} dz, \quad \Gamma'(\gamma) = \frac{d\Gamma(\gamma)}{d\gamma} = \int_0^{\infty} z^{\gamma-1} \ln z e^{-z} dz. \quad (6.4)$$

С помощью подстановки

$$z = x^{\frac{1}{b}} \left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{1}{b}} \quad (6.5)$$

из этих выражений нетрудно получить

$$\frac{\Gamma'(\gamma)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{d \ln \Gamma(\gamma)}{d\gamma} = \Psi(\gamma) = \frac{1}{b} \left\{ \int_0^{\infty} \ln x p(x) dx + \ln \frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)} \right\},$$

где $p(x)$ определяется по формуле (5.17). Отсюда

$$\int_0^{\infty} \ln x p(x) dx = b\Psi(\gamma) - \ln \frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}. \quad (6.6)$$

Левая часть этого выражения есть математическое ожидание логарифма модульного коэффициента. Его выборочная оценка, которую мы будем называть статистикой λ_2 , есть

$$\lambda_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i. \quad (6.7)$$

Таким образом, выражение (6.7) записывается так:

$$\lambda_2 = b\Psi(\gamma) - \ln \frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}. \quad (6.8)$$

На основании выражений (6.5) можно написать

$$\Gamma(\gamma+b) = \int_0^{\infty} z^{b+\gamma-1} e^{-z} dz, \quad \Gamma'(\gamma+b) = \int_0^{\infty} z^{b+\gamma-1} \ln z e^{-z} dz. \quad (6.9)$$

Отсюда, точно такой же подстановкой, как и в предыдущем случае, получается

$$\lambda_3 = b\Psi(\gamma+b) - \ln \frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}, \quad (6.10)$$

где

$$\lambda_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \ln x_i. \quad (6.11)$$

Вычисление параметров b и γ из уравнений (6.8) и (6.10) значительно проще, чем методом максимума правдоподобия,

так как входящие в эти уравнения статистики λ_2 и λ_3 не зависят от оцениваемых параметров. Но все же вычисление последних возможно лишь подбором. Поэтому в работах [5, 48] приводятся номограммы, позволяющие обходиться без процедуры подбора при приближенных расчетах.

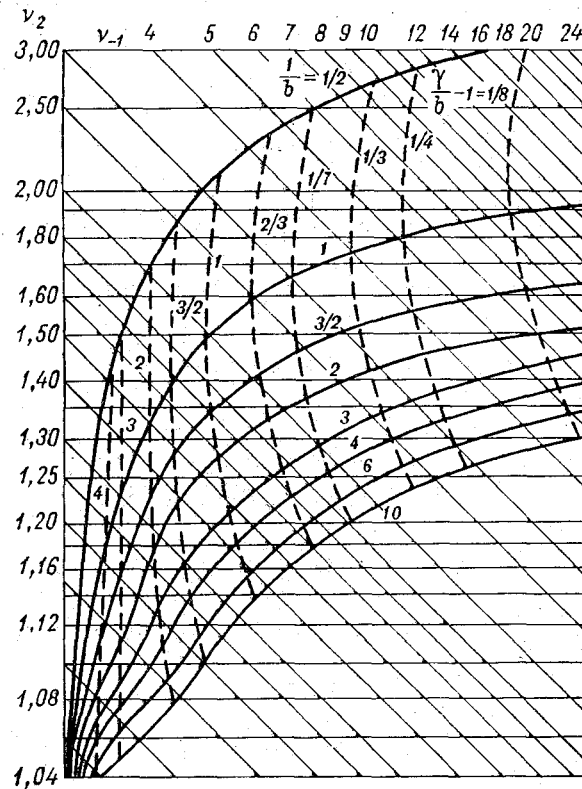


Рис. 10. Номограмма для определения параметров трехпараметрического гамма-распределения.

Изложенный прием вычисления γ и b построен на индивидуальных свойствах трехпараметрического гамма-распределения. Он не может быть отнесен ни к методу максимума правдоподобия, ни к какому-либо другому регулярному методу, и не может быть распространен на другие распределения.

В монографии [11] параметры (5.17) предлагается определять через v_2 и v_{-1} , т. е. по статистикам

$$v_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad v_{-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i} \quad (6.12)$$

с помощью уравнений, получающихся из (5.18)

$$v_2 = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma + 2b)}{[\Gamma(\gamma + b)]^2}, \quad v_{-1} = \frac{\Gamma(\gamma + b) \Gamma(\gamma - b)}{[\Gamma(\gamma)]^2}. \quad (6.13)$$

Соответствующая номограмма приводится на рис. 10. Если распределение трехпараметрическое, то задание трех любых моментов (в частности v_{-1} , $v_1=1$, v_2) вполне определяет и все остальные. В связи с этим C_s можно выразить через C_v и v_{-1} . График этой зависимости, заимствованный из работы [11], приводится на рис. 11. Необходимо иметь в виду, что этот график

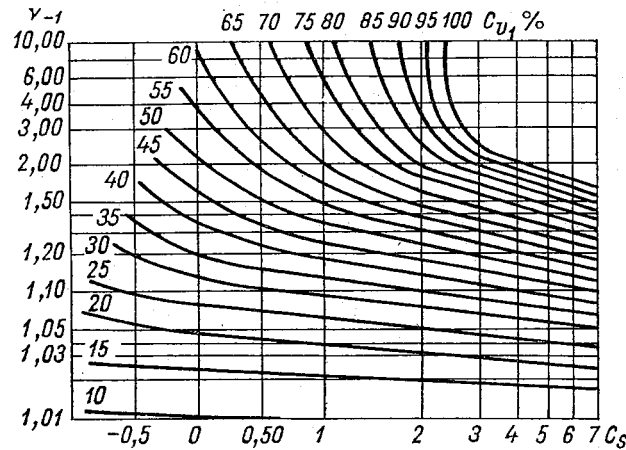


Рис. 11. Связь между C_s , C_v и v_{-1} для трехпараметрического гамма-распределения.

действителен только для трехпараметрического гамма-распределения.

Метод максимума правдоподобия появился сравнительно недавно. До этого основным методом оценки параметров распределения был классический метод моментов, который очень широко используется и сейчас. Мы изложим метод моментов сразу в обобщенном виде. Пусть $\psi(\xi, \lambda)$ есть функция случайной величины $\xi = Q/MQ$ и некоторого параметра λ , не представимая в виде $\psi(\xi, \lambda) = \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda)\psi_3(\xi)$, и имеющая математическое ожидание при всех λ . Если $x_1, \dots, x_N$ — выборочные значения ξ , то выборочная оценка математического ожидания $\psi(\xi, \lambda)$ есть

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(x_k, \lambda). \quad (6.14)$$

Пусть $F(x)$ — функция распределения вероятностей ξ . Точное выражение математического ожидания $\psi(\xi, \lambda)$ будет следующим:

$$\Psi_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \lambda) dF(x) \quad (6.15)$$

(нижний предел интеграла Стильеса здесь фактически 0, а не $-\infty$, ибо функция распределения расходов равна нулю при $x < 0$). Приравняв выражения (6.14) и (6.15), мы получим уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \lambda) dF(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(x_k, \lambda). \quad (6.16)$$

Точное решение этого уравнения есть эмпирическая функция распределения. Действительно, эта функция постоянна при любом x , не совпадающем с каким-либо выборочным значением x_k , и делает скачок на $1/N$ при $x = x_k$. Следовательно, интеграл Стильеса в левой части (6.16), если подставить туда в качестве $F(x)$ эмпирическую функцию распределения, будет состоять только из функции скачков, а эта последняя точно совпадает с правой частью (6.16).

Если же принять априорно то или иное аналитическое выражение для функции F , зависящее от m параметров, $F = F(x, a_1, \dots, a_m)$, то уравнение (6.16) уже не может иметь места, и здесь можно говорить только о близости функций Ψ_1 и

$$\Psi_2^*(\lambda, a_1, \dots, a_m) = \int_0^{\infty} \psi(x, \lambda) dF(x, a_1, \dots, a_m) \quad (6.17)$$

в том или ином смысле в некотором диапазоне изменения λ , т. е. в диапазоне $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Можно, например, так подобрать параметры $a_1, \dots, a_m$, чтобы разность $\Psi_2^* - \Psi_1$ наименее уклонялась от нуля в смысле способа наименьших квадратов, т. е. чтобы было

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [\Psi_2^*(\lambda, a_1, \dots, a_m) - \Psi_1(\lambda)]^2 d\lambda = \min,$$

или в смысле приближения Чебышева, чтобы

$$\max_{\lambda_1 < \lambda < \lambda_2} |\Psi_2^*(\lambda, a_1, \dots, a_m) - \Psi_1(\lambda)| = \min,$$

или еще в каком-то смысле. В частности, можно требовать, чтобы разность $\Psi_2^* - \Psi_1$ точно равнялась нулю при m значениях параметра λ , что и даст m уравнений для определения m неизвестных параметров $a_1, \dots, a_m$. Если при этом принять $\psi(x, \lambda) =$

$=x^\lambda$ и придать λ натуральные значения $\lambda=1, 2, \dots, m$, то мы придем к классическому методу моментов. Однако можно рассматривать также моменты дробных и отрицательных порядков, на что указывалось, в частности, в работе [11]. Например, если имеющиеся данные недостаточны для вычисления моментов выше второго порядка, а необходимо вычислить четыре параметра, то тогда примем $\lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Можно оперировать и другими статистиками, взяв иную функцию $\psi(x, \lambda)$, например $\psi(x, \lambda) = e^{\lambda x}$. Можно считать также, что функция ψ зависит не от одного параметра λ , а от двух или нескольких, например, взять ее в виде $x^\lambda e^{-\mu x}$. Состоятельность оценок при этом вытекает из состоятельности выборочной оценки математического ожидания ψ по (6.14).

Рассмотрим определение параметров распределения (5.32). Параметры a и σ вычисляются непосредственно по выборке

$$a = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln x_k, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\ln x_k - a)^2}.$$

Параметры $a_3, a_4, \dots$ могут быть вычислены по формуле (5.29) через моменты высших порядков функции φ , выборочные значения которой суть

$$\varphi_k = \frac{\ln x_k - a}{\sigma}. \quad (6.18)$$

Но точнее это можно сделать, используя иные статистики, например, взяв функцию ψ в виде

$$\psi(\varphi, m, \alpha, \beta) = \varphi^m e^{-\alpha \varphi^2 + 2\beta \varphi}. \quad (6.19)$$

Здесь m — натуральное, а α и β — положительные числа. Редкие очень большие положительные выборочные значения x_k уже в значительной степени подавлены тем, что рассматриваются не сами эти значения, а их логарифмы. Но именно переход к логарифмам приводит к тому, что малым значениям x_k соответствуют очень большие (в абсолютном смысле) отрицательные φ_k . Поэтому статистика (6.19) выбрана так, что экспоненциальный множитель сильно подавляет влияние малых x_k , не имеющих существенного значения для общего течения функции распределения, и гораздо слабее подавляет влияние редких больших x_k .

Производная $g^{(s)}(\varphi)$ выражается так:

$$g^{(s)}(\varphi) = (-1)^s H_s(\varphi) g(\varphi). \quad (6.20)$$

Здесь $H_s(\varphi)$ — полином Чебышева—Эрмита

$$H_s(\varphi) = \varphi^s - \frac{s!}{(s-2)!2! \cdot 1!} \varphi^{s-2} + \frac{s!}{(s-4)!2^2 \cdot 2!} \varphi^{s-4} - \frac{s!}{(s-6)!2^3 \cdot 3!} \varphi^{s-6} + \dots \quad (6.21)$$

Этот ряд обрывается на члене с нулевой (при s четном) или первой (при s нечетном) степенью φ . Первые семь полиномов:

$$H_0(\varphi) = 1, \quad H_1(\varphi) = \varphi, \quad H_2(\varphi) = \varphi^2 - 1, \quad H_3(\varphi) = \varphi^3 - 3\varphi,$$

$$H_4(\varphi) = \varphi^4 - 6\varphi^2 + 3, \quad H_5(\varphi) = \varphi^5 - 10\varphi^3 + 15\varphi,$$

$$H_6(\varphi) = \varphi^6 - 15\varphi^4 + 45\varphi^2 - 15.$$

Функция Ψ_2^* в данном случае будет линейной комбинацией членов вида

$$\begin{aligned} \vartheta(l+m) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} \varphi^l \psi(\varphi, m, \alpha, \beta) d\varphi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{l+m} e^{-\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\varphi^2 + 2\beta\varphi} d\varphi = \Theta(l+m) \sqrt{\frac{2\pi}{1+2\alpha}} \exp\left(\frac{2\beta^2}{1+2\alpha}\right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Здесь

$$\Theta(l+m) = \left(-\frac{2\beta}{1+2\alpha}\right)^{l+m} \sum_{h=0}^{E\left(\frac{l+m}{2}\right)} \frac{(l+m)!}{(l+m-h)!h!} \left(\frac{1+2\alpha}{8\beta^2}\right)^h. \quad (6.23)$$

Значения $\Theta(l+m)$ в развернутом виде даются в табл. 8, где

$$A = \frac{2\beta}{1+2\alpha}, \quad B = \frac{1+2\alpha}{8\beta^2}. \quad (6.24)$$

Таблица 8

Значения функции $\Theta(l+m)$ для распределения Грама—Шарлье

$l+m$	Общее выражение	$\alpha = \frac{1}{2}; \beta = 1$
1	A	1
2	$A^2 (1 + 2B)$	$1^{1/2}$
3	$A^3 (1 + 3B)$	$1^{3/4}$
4	$A^4 (1 + 4B + 6B^2)$	$2^{2/8}$
5	$A^5 (1 + 5B + 10B^2)$	$2^{7/8}$
6	$A^6 (1 + 6B + 15B^2 + 20B^3)$	$3^{3/4}$
7	$A^7 (1 + 7B + 21B^2 + 35B^3)$	$4^{39/64}$
8	$A^8 (1 + 8B + 28B^2 + 54B^3 + 70B^4)$	$5^{67/128}$
9	$A^9 (1 + 9B + 36B^2 + 84B^3 + 126B^4)$	$7^{39/128}$
10	$A^{10} (1 + 10B + 45B^2 + 120B^3 + 210B^4 + 252B^5)$	$9^{65/256}$

Если ограничиться в формуле (5.32) первыми шестью производными, то

$$\begin{aligned} \Psi_2^*(m, \alpha, \beta) = & \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha}} \exp\left(\frac{2\beta^2}{1+2\alpha}\right) \{ \Theta(m) - a_3 [\Theta(3+m) - \\ & - 3\Theta(1+m)] + a_4 [\Theta(4+m) - 6\Theta(2+m) + 3\Theta(m)] - \\ & - a_5 [\Theta(5+m) - 10\Theta(3+m) + 15\Theta(1+m)] + a_6 [\Theta(6+m) - \\ & - 15\Theta(4+m) + 45\Theta(2+m) - 15\Theta(m)] \}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Обозначив

$$\Lambda(m, \alpha, \beta) = \Theta(m) - \Psi_2^*(m, \alpha, \beta) \sqrt{1+2\alpha} \exp\left(-\frac{2\beta^2}{1+2\alpha}\right), \quad (6.26)$$

запишем предыдущий результат так:

$$\begin{aligned} [\Theta(3+m) - 3\Theta(1+m)] a_3 - [\Theta(4+m) - 6\Theta(2+m) + 3\Theta(m)] a_4 + \\ + [\Theta(5+m) - 10\Theta(3+m) + 15\Theta(1+m)] a_5 - [\Theta(6+m) - \\ - 15\Theta(4+m) + 45\Theta(2+m) - 15\Theta(m)] a_6 = \Lambda(m, \alpha, \beta). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Подставляя сюда вместо Ψ_2^* статистику

$$\Psi_1(m, \alpha, \beta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k^m e^{-\alpha \varphi_k^2 + 2\beta \varphi_k} \quad (6.28)$$

и полагая $m=1, 2, 3, 4$, получаем четыре линейных уравнения для определения четырех неизвестных коэффициентов a_3, a_4, a_5, a_6 .

Рассмотрим еще параметры $\alpha, a_0, \dots, a_n$ распределения (5.22). Полагая $\psi(x, \lambda) = x^\lambda$, по формуле (6.17) найдем

$$\begin{aligned} \Psi_2^*(\lambda, \alpha, a_0, \dots, a_n) &= \int_0^\infty x^\lambda dF(x) = \int_0^\infty x^\lambda p(x) dx = \\ &= (1-a_0) \int_{-\varepsilon}^\varepsilon x^\lambda \delta(x) dx + \frac{\lambda \Gamma(\lambda)}{\alpha^\lambda} a_0 + \frac{\lambda \Gamma(\lambda+1)}{\alpha^{\lambda+1}} a_1 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\lambda \Gamma(\lambda+n)}{\alpha^{\lambda+n}} a_n, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где ε — любое положительное число. При $\lambda=0$ правая часть этой формулы обращается, как и следовало ожидать, в единицу: момент нулевого порядка любой случайной величины равен единице. Для пересыхающих и промерзающих до дна рек, когда $a_0 \neq 1$, моментов отрицательных порядков не существует: при $\lambda < 0$ первый член формулы (6.29) становится неопределенным. Для таких рек следует рассматривать только положительные

значения λ , при которых первый член формулы (6.29) обращается в нуль и тогда она имеет вид

$$\Psi_2^*(\lambda, \alpha, a_0, \dots, a_n) = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \left\{ \Gamma(\lambda) a_0 + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\alpha} a_1 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\alpha^n} a_n \right\}. \quad (6.30)$$

Для не пересыхающих и не промерзающих до дна рек ($a_0=1$, $a_1=\alpha$) первый член формулы (6.29) обращается в нуль независимо от значения λ . Моменты отрицательных порядков тогда существуют. Формула (6.29), имеющая в этом случае вид

$$\Psi_2^*(\lambda, \alpha, a_0, \dots, a_n) = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \left\{ \Gamma(\lambda) + \Gamma(\lambda+1) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\alpha^2} a_2 + \dots + \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\alpha^n} a_n \right\}, \quad (6.31)$$

действительна для всех $\lambda > -1$. Так как рассматривается случайная величина $\xi = Q/MQ$, то ее математическое ожидание должно быть равно единице, т. е. при $\lambda=1$ должны обращаться в единицу правые части формул (6.30) и (6.31) и должно быть: для пересыхающих и промерзающих до дна рек

$$\frac{1}{\alpha} \left(a_0 + \frac{1!}{\alpha} a_1 + \frac{2!}{\alpha^2} a_2 + \dots + \frac{n!}{\alpha^n} a_n \right) = 1 \quad (6.32)$$

и в остальных случаях

$$\frac{1}{\alpha} \left(2 + \frac{2!}{\alpha^2} a_2 + \dots + \frac{n!}{\alpha^n} a_n \right) = 1. \quad (6.33)$$

В первом из этих случаев число подлежащих определению параметров равно $n+2$. Зададимся $n+1$ значениями λ в интервале $0 < \lambda < 2$ или $0 < \lambda < 3$ (в зависимости от объема выборки), исключив при этом значение $\lambda=1$. Приравнявая Ψ_2^* и Ψ_1 для всех заданных $\lambda = \lambda_i$ ($i=1, \dots, n+1$), напомним, на основании выражения (6.30)

$$\Gamma(\lambda_i) a_0 + \frac{\Gamma(\lambda_i+1)}{\alpha} a_1 + \dots + \frac{\Gamma(\lambda_i+n)}{\alpha^n} a_n = \frac{\alpha^{\lambda_i}}{\lambda_i} \Psi_1(\lambda_i) \quad (6.34)$$

и решим эту систему относительно параметров $a_0, \dots, a_m$. В результате получим

$$a_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \alpha^k. \quad (6.35)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Gamma(\lambda_1) & \Gamma(\lambda_1+1) & \dots & \Gamma(\lambda_1+n) \\ \Gamma(\lambda_2) & \Gamma(\lambda_2+1) & \dots & \Gamma(\lambda_2+n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma(\lambda_{n+1}) & \Gamma(\lambda_{n+1}+1) & \dots & \Gamma(\lambda_{n+1}+n) \end{vmatrix}, \quad (6.36)$$

а Δ_k — определитель, получающийся из этого определителя заменой столбца

$$\begin{array}{cc} \Gamma(\lambda_1+k) & \Psi_1(\lambda_1) \alpha^{\lambda_1/\lambda_1} \\ \Gamma(\lambda_2+k) & \text{столбцом} \quad \Psi_1(\lambda_2) \alpha^{\lambda_2/\lambda_2} \\ \dots & \dots \\ \Gamma(\lambda_{n+1}+k) & \Psi_1(\lambda_{n+1}) \alpha^{\lambda_{n+1}/\lambda_{n+1}} \end{array}$$

Подставив a_k из (6.35) в (6.32), получим уравнение, содержащее одну неизвестную α . Решив его, можно затем найти все a_k по формуле (6.35).

7. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСХОДОВ ПРИ НЕДОСТАТКЕ ИЛИ ОТСУТСТВИИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Функция распределения вероятностей любой случайной величины ξ полностью определяется бесконечной последовательностью статистических начальных моментов натуральных порядков этой величины $v_1, v_2, \dots$. В частности, если величина ξ ограничена сверху, т. е. если существует конечный $\max \xi$, то он определяется как

$$\max \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{v_k}. \quad (7.1)$$

Но гидрологические наблюдения позволяют надежно вычислить в лучшем случае моменты до третьего порядка. В связи с этим возникает стремление попытаться расширить выборку путем объединения наблюдений по различным рекам, чтобы вычислить моменты высших порядков (разумеется не все, а лишь несколько первых) и тем самым получить возможность расширить и уточнить выбор аналитических выражений функций распределения, включив в их ассортимент выражения, содержащие большее число неизвестных параметров. Однако, как видно из § 6, дело не в высших моментах, а в объеме выборки: уравнение (6.16) есть уравнение эмпирической функции распределения, которая при расширении выборки стремится к действительной функции распределения вероятностей, т. е. для построения последней нужно знать точно функцию $\Psi_1(\lambda)$ только в каком-либо конечном диапазоне значений λ . Для этого и необходимо

геометрическое. Геометрически же подобных бассейнов в природе не существует, даже если понимать подобие в обобщенном смысле, например в смысле афинности.

В гидрологии принимается, что можно объединять наблюдения по рекам, находящимся в сходных физико-географических условиях. Сходство физико-географических условий есть требование качественное и не очень определенное. Его выполнение гарантирует, конечно, что из объединения будут исключены реки, выборки по которым заведомо относятся к существенно различным генеральным совокупностям. Но оно не дает и не может дать (ибо это вообще невозможно) гарантии принадлежности объединяемых выборок к единой генеральной совокупности. В лучшем случае оно гарантирует принадлежность объединяемых выборок к различным, но близким по своим свойствам, генеральным совокупностям. Поэтому объединение выборок принципиально не может дать точного результата. По-видимому, с одной стороны, оно может несколько расширить информацию, содержащуюся в отдельных выборках, но, с другой стороны, оно же искажает эту информацию. Поэтому объединение выборок влечет за собой постановку очень сложного вопроса о степени уточнения, достигаемого объединением. Решение этого вопроса упирается в генезис стока.

К вопросу о подобии вероятностных характеристик стока сводится задача о подборе рек-аналогов для восстановления стока неизученных рек, которая в принципе ничем не отличается от задачи объединения выборок: в данном случае речь идет об отыскании выборки большого объема, принадлежащей к той же генеральной совокупности, что и имеющаяся в нашем распоряжении выборка малого объема.

Необходимость так или иначе восполнить недостаточность или даже отсутствие гидрологических наблюдений приводит также к неизбежности географической интерполяции параметров распределений вероятностей расходов. Такая интерполяция предпринималась в отношении модулей стока и коэффициентов вариации. Интерполяция, как и объединение выборок, также встречается с существенными трудностями, хотя и по иным причинам.

Рассмотрим понятие модуля стока. На противоречивость этого понятия впервые обратил внимание болгарский гидролог Гергов [8]. Модулю стока можно приписать три разных смысла: 1) смысл истинного модуля стока q_1 — части среднегодового стока в данном створе с единицы площади в данной точке бассейна; 2) смысл среднего модуля стока $q_2 = Q/F$, где Q — среднее многолетний расход реки в данном створе, F — площадь водосбора для этого створа; 3) смысл дифференциального модуля стока $q_3 = dQ/dF$. Истинный модуль стока q_1 по своей физической сути зависит как от той точки бассейна, так и от того створа реки, для которых он вычисляется. Наиболее рельефно эта

зависимость проявляется для пересыхающих рек, среднемного-летний расход которых уменьшается к устью, начиная от некоторого створа: сток, добегающий до этого створа с некоторой части бассейна в верховьях будет ощутимо больше стока с той же части, добегающего до устья. Будучи функцией двух точек местности, а не одной ее точки, модуль стока q_1 образует четырехмерное, а не двухмерное поле и, строго говоря (не затрагивая даже практическую невозможность его измерения или вычисления) есть характеристика, не представимая картами изолиний. Средний модуль стока q_2 относят либо к центру тяжести фигуры водосбора, либо к створу, по которому он вычисляется. Первое не логично, ибо заимствованное из механики понятие центра тяжести не имеет никакого гидрологического смысла. Мыслимы даже случаи, когда центр тяжести находится вне бассейна, например, если последний имеет серповидную форму. Если же q_2 относить к створу, то каждой точке слияния рек будут отвечать три значения модуля стока вместо одного: для главной реки до впадения притока, для притока и для реки после впадения притока.

Не лучше обстоит дело и с дифференциальным модулем стока q_3 : точке слияния рек также отвечают не одно, а три значения этой величины в зависимости от того, с какой стороны приближаться к этой точке, но кроме того, в самой точке впадения производная $dQ/dF = q_3$ становится неопределенной: если проходить точку слияния, двигаясь по основной реке, то q_3 окажется равным q_2 для притока, а если ее проходить, двигаясь по притоку, то q_3 в точке слияния будет равен среднему модулю стока q_2 основной реки в створе перед этой точкой.

Таким образом, точке слияния следует приписать целых пять различных значений q_3 . Попытка поставить модуль стока q_2 в зависимость от площади водосбора с помощью формул типа $q_2 = q_0 f(F)$ (где q_0 — плавно меняющаяся по территории величина, а $f(F)$ — некоторая функция) не исправляет дело, а только приводит к новому затруднению. Действительно, обозначая индексами I, II и III соответственно створы основной реки перед впадением притока, притока перед точкой слияния и основной реки сразу за точкой слияния, напомним

$$q_{2I} = q_0 f(F_I), \quad q_{2II} = q_0 f(F_{II}), \quad q_{2III} = q_0 f(F_{III}) = q_0 f(F_I + F_{II}),$$

и, следовательно,

$$F_I f(F_I) + F_{II} f(F_{II}) = (F_I + F_{II}) f(F_I + F_{II}), \quad (7.2)$$

что возможно в случае, если $Ff(F)$ линейная функция F , т. е.

$$f(F) = \frac{a}{F} + b, \quad (7.3)$$

где a и b — одинаковые для всех бассейнов постоянные. Но тогда $\lim_{F \rightarrow 0} q_2 = \infty$, $\lim_{F \rightarrow 0} Q = q_0 a$, что невозможно физически.

К аналогичным противоречиям приводит интерполяция других гидрологических характеристик, например, коэффициента вариации C_v среднегодовых расходов Q . Точке слияния реки и притока соответствуют три значения C_v , связанные между собой соотношением

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) C_{vIII} = \alpha C_{vI} + 2\rho \sqrt{C_{vI} C_{vII}} + \frac{C_{vII}}{\alpha}, \quad (7.4)$$

в котором $\alpha = \sqrt{MQ_I/MQ_{II}}$, а ρ — коэффициент корреляции между Q_I и Q_{II} . Для того чтобы построение карты изолиний C_v было возможно, каждой точке территории должно соответствовать одно и только одно значение C_v , т. е. должно быть $C_{vI} = C_{vII} = C_{vIII}$. А для точки слияния это, как легко проверить по формуле (7.4), может быть (но отнюдь не обязательно будет) только, если $\rho = 0$. Отсутствие же корреляции между расходами реки и ее притока хотя и возможно, но, по-видимому, встречается редко.

Как видим, косвенные методы определения вероятностных характеристик стока не свободны от противоречий, а последние приводят к тому, что как сами эти методы, так и их результаты, как, например, карты модулей стока, приходится снабжать очень серьезными оговорками [57], которые сильно ограничивают их использование. Устранить эти противоречия в данный момент невозможно и с ними приходится мириться как с неизбежным злом. Привести к логически строгим и практически надежным методам восстановления стока неизученных или слабо изученных рек может только генетическая теория речного стока, построенная на физической основе. Разумеется, эта задача есть не единственная и даже не главная задача генетической теории стока, но без генетической теории эта задача радикально не может быть решена.

Говоря о генезисе стока, нужно иметь в виду, что физическая сторона многих отдельных элементов гидрологических процессов, например испарения с поверхностей водоемов или таяния льда или снега, достаточно ясна. Огромные трудности построения количественной теории формирования речного стока связаны не с физической стороной различных составляющих этого процесса, взятых самих по себе, а с их чрезвычайным многообразием, частым и сложным чередованием и обратным влиянием одних составляющих на другие. Например, весеннее таяние снега в теплое время суток зависит, среди прочих факторов, от солнечной радиации, а значит от облачности, нижележащие слои снега пропитываются талой водой из вышележащих слоев, ночью эта вода может смерзаться с растаявшим снегом, что сопровождается изменением структуры твердой фазы, влияющим на ее последующее таяние, и т. д. Любая попытка индивидуально учесть все эти составляющие и их сложную изменчивость так

же безнадежна, как попытка рассматривать напряженное состояние упругого тела, анализируя равновесие его отдельных молекул и силы взаимодействия между ними. К сожалению, параллель между гидрологией и теорией упругости здесь кончается: теория упругости преодолевает эти трудности скачком, обращаясь к представлению об упругом теле как о континууме, т. е. выработав иную идеализацию изучаемого явления. В гидрологии же ничего похожего на континуальную или какую-либо иную идеализацию, принципиально позволяющую отойти от элементного анализа, пока не предложено и даже не видно предпосылок, на которых такая идеализация могла бы быть построена. Многочисленные эмпирические формулы для интегральной оценки гидрологических процессов в данном случае ничего не объясняют и не изменяют, хотя отрицать их практическую полезность было бы по меньшей мере нелепо. В сущности говоря, в гидрологии, как и в механике сплошных сред, речь идет о построении идеализации, исключающей неизбежность апелляции к огромной излишней (для определенного круга задач) информации. Найти такую идеализацию — значит создать предпосылки для того, чтобы построение генетической теории стока стало техническим, а не принципиальным вопросом. Разумеется, генетическая теория речного стока, которой предстоит установить связи между стоком и стокообразующими факторами, не исключит обращения к наблюдательному материалу, а наоборот, будет предполагать такое обращение по многим причинам, в частности, для проверки качества идеализации, для определения тех или иных констант (аналогичных физическим постоянным в теории упругости), для решения главной прикладной задачи генетической теории — восстановления стока по стокообразующим факторам. Необходимо, однако, иметь в виду, что отыскание требуемой идеализации, которая могла бы быть положена в основу создания генетической теории стока, в подлинном смысле слова «теория», есть, по-видимому, задача значительно более сложная, чем, например, создание теории относительности или квантовой механики.

Пессимистичность такого вывода, конечно, не может служить основанием для отказа от попыток построения генетической теории. Сказанное лишь указывает на то, что нужно отдавать себе ясный ответ в связанных с этим трудностях, без преодоления которых не только нельзя надежно решить ту задачу, в связи с которой пришлось апеллировать к генезису стока, но и вообще стохастическое направление в гидрологии не может выйти за рамки хотя и количественного, но тем не менее чисто описательного средства.

ГЛАВА 3

ЦИКЛИЧНОСТЬ РЕЧНОГО СТОКА

8. ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЧИНЫ ПОЯВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ В ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДАХ

Во всех обработках гидрологических наблюдений, имеющих целью получить те или иные характеристики процесса стока для их последующего использования в различных водохозяйственных расчетах, речной сток явно или неявно рассматривается как эргодический гармонизуемый процесс с годовым периодом. Такая гипотеза удобна и необходима, ибо по каждому речному створу мы располагаем одной единственной реализацией процесса стока—той, которая зафиксирована гидрологическими наблюдениями. Если же сток не эргодичен, то возможность использовать гидрологические наблюдения для построения его вероятностных характеристик сильно ограничивается. Точно проверить, в какой мере тот или иной гидрологический ряд представляет собою реализацию эргодического процесса с годовым периодом или хотя бы с другим периодом, но значительно меньшим, чем длина этого ряда, сейчас невозможно. Однако необходимо хотя бы оценить все за и против гипотезы эргодичности или, точнее, все за и против возможности использовать ее в обработках гидрологических рядов.

Тривиальность утверждения, что эта гипотеза не верна, если измерять время геологическими масштабами, очевидна. Но важно, насколько она правильна в пределах исторических промежутков времени, а большей частью в пределах значительно более коротких промежутков, охватывающих период гидрологических наблюдений в прошлом и период перспективного планирования использования водных ресурсов в будущем. В пределах таких промежутков нарушения эргодичности процесса стока могут вызываться не только глобальными причинами, но и хозяйственной деятельностью человека, изменяющей ландшафтные условия в бассейне реки. В хозяйственной деятельности следует различать: а) строительство водохранилищ и б) действия, приводящие к непосредственному изменению ландшафта, в первую очередь к изменению растительного и почвенного покрова. Рассуждая принципиально, при наличии гидрометрической

службы, фиксирующей все статьи водного баланса, можно привести сток, трансформированный регулирующим действием водохранилищ к естественному состоянию реки (однако создать такую гидрометрию обычно не удастся). Такой редуцированный сток будет эргодическим процессом, если отсутствуют другие нарушения эргодичности и, в частности, обратное влияние водохранилищ на сток. Это обратное влияние, проявляющееся в результате изменения водохранилищами влагооборота в атмосфере и в грунте, требует, как и действия, прямо влияющие на ландшафт, приведения прошлых гидрологических наблюдений к тому уровню развития хозяйства в бассейне реки, какое будет иметь место в период службы намечаемых к осуществлению водохозяйственных объектов. После такого приведения получится реализация (единственная!) эргодического процесса, по которой уже можно строить вероятностные характеристики процесса стока.

Здесь мы опять сталкиваемся с необходимостью в развитой генетической теории стока для приведения прошлых гидрологических наблюдений к новым ландшафтным условиям. Однако, к счастью, ориентировочные подсчеты [63] показывают, что имеющееся мнение о существенном влиянии на сток хозяйственной деятельности [40, 41, 42], по-видимому, сильно преувеличено, особенно тогда, когда эта деятельность протекает вне районов интенсивного формирования стока, как обычно и бывает.

Таким образом, вынужденное предположение о возможности пренебрегать влиянием хозяйственной деятельности человека на речной сток, по-видимому, более или менее обосновано. Но в конце концов эта деятельность приобретает такие масштабы, когда пренебрегать ее влиянием на сток уже нельзя будет. Следует надеяться, что к этому времени генетическая теория стока будет создана.

Перейдем к глобальным причинам нарушения эргодичности. Этот вопрос, трактуемый в несколько ином аспекте, получил в литературе название цикличности. Под цикличностью стока понимаются календарные группировки многоводных и маловодных лет.

Можно высказать ряд общих генетических соображений [38, 90] в пользу того, что существует целый ряд чисто земных причин, способствующих образованию циклов. В частности, плоскоравнинный рельеф сам по себе должен уменьшать количество воды, стекающей в реки в маловодные годы, и увеличивать — в многоводные. Но постоянно действующие земные причины, способствуя группированию маловодных и многоводных периодов, не могут быть, тем не менее, фактором, нарушающим эргодичность, именно в силу своего постоянного характера. Другое дело, когда цикличность связывается с наличием в процессе стока детерминированных составляющих. Здесь необходимо точно указать, о чем именно идет речь. Пусть $\xi(t)$ — ка-

кой угодно случайный процесс, а $f(t)$ — какая угодно детерминированная функция, значения которой определены для всех t , для которых рассматриваются значения $\xi(t)$, т. е. для целочисленных в случае процесса с дискретным временем и для любых — в случае процесса с непрерывным временем. Очевидно, что $\xi(t) = f(t) + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t)$ — новый случайный процесс. Такая общая постановка задачи о детерминированных составляющих не имеет какой-либо ценности. Эта задача приобретает смысл, если искать такую детерминированную функцию $f(t)$, чтобы процесс $\varepsilon(t)$ обладал более простыми свойствами, чем процесс $\xi(t)$, например, был бы эргодическим или даже стационарным. Работы этого направления по цикличности в последовательностях годовых объемов стока (в этом случае t — номер года) обычно связаны с предположением, что $f(t)$ — периодическая функция t , а $\varepsilon(t)$ — стационарный случайный процесс. Следует заметить, что если период T функции $f(t)$ будет равен целому числу лет, то процесс $\xi(t) = \varepsilon(t) + f(t)$ будет гармонизируемым процессом периода T и, следовательно, процессом эргодическим. Но тем не менее, исключение периодической функции $f(t)$ необходимо, ибо оперировать с гидрологическим рядом в N лет как с реализацией эргодического процесса, имея в нем периодическую составляющую в T лет, равносильно уменьшению объема выборки более чем в T раз до числа членов, равного целой части N/T . При этом такие операции возможны только если период T заранее известен.

Основной причиной появления периодических составляющих принято считать изменения солнечной активности, интенсивность которой оценивается обычно числами Вольфа

$$W = k(10g + f),$$

где g — количество групп пятен на Солнце; f — общее количество пятен во всех группах; k — коэффициент, зависящий от условий видимости. Ценность этого несколько формального показателя в том, что для него имеются наблюдения с 1700 г. К постоянной лучистой энергии Солнца добавляется поток заряженных частиц, усиливающийся и ослабевающий в ритме колебаний чисел Вольфа. Этот поток действует на ионосферу либо непосредственно, либо изменяя поток космических лучей, достигающих Земли. Явления в ионосфере действуют на слои атмосферы, расположенные ниже, и в конце концов возмущения доходят до приземных слоев через сложную цепочку причин и следствий. Это, с одной стороны, ведет к изменениям процесса формирования облаков, т. е. режима осадков, а с другой стороны, к изменению характера циркуляции атмосферы, т. е. опять-таки к изменениям погоды. Все это, конечно, так или иначе должно сказаться и на стоке: напомним здесь знаменитый тезис Воейкова, что река — есть продукт климата.

Если бы колебания солнечной активности (чисел Вольфа) были стационарным случайным процессом, то сказанное давало бы основание предполагать наличие только стохастической связи этих колебаний со стоком. Но так как в солнечной активности достаточно четко прослеживаются периодические составляющие, то эти соображения могут говорить и о наличии периодических составляющих в речном стоке. В начале текущего столетия была выдвинута гипотеза, что колебания солнечной активности порождаются приливами в теле Солнца, вызываемыми притяжением планет. Механизм этой связи не ясен. Возможно, что приливы образуют вихри в солнечном веществе не непосредственно, а являются лишь толчком, провоцирующим действие каких-то постепенно накапливающихся в теле Солнца факторов. Проверка этой гипотезы — задача небесной механики, теории приливов и астрофизики, на которой мы, естественно, не можем останавливаться. Для нас существенно лишь то, что эта гипотеза дает возможность более или менее удовлетворительно объяснить существование многолетних климатических колебаний с периодами в 11, 80 и, вероятно, в 35 лет, связывая их с периодическими изменениями взаимного расположения планет.

Но приливы, уже не на Солнце, а в океане, могут быть и непосредственной причиной климатических изменений. Известно, что приливы бывают максимальными при сизигиях, когда Солнце, Луна и Земля находятся в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости эклиптики (полнолуние и новолуние), и минимальными при квадратурах, когда плоскость, проведенная через Землю и Солнце нормально к плоскости эклиптики, и такая же плоскость, проведенная через Землю и Луну, образуют между собой прямой угол (первая и последняя четверти). Один раз в 18,6 года плоскость вращения Луны вокруг Земли совпадает с плоскостью эклиптики, т. е. все три светила оказываются на одной прямой, и приливы в это время увеличиваются по сравнению с обычными. Один раз примерно в 1850 лет Земля, Луна и Солнце оказываются не только на одной прямой, но одновременно Земля отстоит на наименьшее расстояние от Солнца, а Луна — от Земли. В это время приливы бывают особенно сильны. Усиление внутренних приливных волн усиливает вертикальные перемещения водных масс в океане, и в результате холодная вода придонных слоев поднимается к поверхности. Это ведет к похолоданию и к концентрации дополнительных водных масс в полярных областях за счет экваториальных вод. Перераспределение водных масс меняет фигуру Земли и ведет к ускорению ее вращения, что в свою очередь, влияет на течения и циркуляцию вод в океане, а стало быть и на климат. Изменение фигуры Земли ведет к изменениям (хотя и ничтожным) ее гравитационного поля и положения полюсов, а изменение скорости вращения меняет силу Гаусса—Кориолиса. Ка-

кими бы ничтожными ни были эти изменения, они влияют на океанические течения (и даже на течение рек), по-видимому, вполне ощутимо (это влияние можно отождествить с изменением уклона свободной поверхности; вспомним в связи с этим, что хотя уклон, например, Невы очень мал, но только благодаря ему река течет). Это опять-таки ведет к изменению влагооборота Земли, т. е. в конечном счете влияет на климат. Эти широко распространенные в науках о Земле качественные теоретические соображения вполне согласуются с обнаруженными А. В. Шнитниковым на основании чисто географических и исторических данных 1850-летними колебаниями климата. И хотя 1850-летние циклы сами по себе вряд ли могут иметь значение для инженерных и иных хозяйственных приложений гидрологии (в рядах гидрологических наблюдений они могут проявиться лишь в виде небольшого тренда), но открытие Шнитникова подтверждает роль приливов в изменении климата и погоды.

Таким образом, приливные явления на Солнце и на Земле могут рассматриваться как внешние воздействия с периодами, равными приблизительно 11, 19, 35 (?), 80, 1850 годам. Кроме приливных явлений, вызываемых астрономическими причинами, можно было бы перечислить и другие явления, которые могут вызвать нарушения эргодичности стока. В частности, можно указать на смещения полюсов от несовпадения оси вращения Земли с ее наименьшей осью инерции, влияющие на течения в океанах и, значит, на влагооборот. Поэтому приведенный набор периодов внешних воздействий, которые предположительно могут влиять на гидрологические процессы, должен быть, конечно, расширен. Но обращение к этим явлениям, так же как и подробный разбор влияния приливов на климат (возможный сейчас, конечно, только на уровне качественных и, отчасти, статистических соображений) выходит далеко за рамки данной книги. Интересующихся этим мы отсылаем к специальным работам по цикличности стока, как, например, к работам [9, 15, 52], содержащим обзор состояния вопроса и подробную библиографию, включающую работы, в которых изложены не только причины цикличности, но и анализ цикличности в гидрологических, метеорологических и океанических явлениях. Для нас важны не столько сами предполагаемые причины появления периодических составляющих в речном стоке, сколько то, что этих причин (а значит, и периодов) много и что все эти причины носят не региональный, а глобальный характер. Но вместе с тем трудно, конечно, ожидать, что все глобальные причины, действительно или предположительно влияющие на погоду, влияют и на сток. В режиме стока в силу значительной инерционности речных бассейнов по сравнению с инерционностью атмосферы вряд ли могут проявляться короткопериодические внешние воздействия, например, изменения приливов от

сизигии до квадратуры и следующей сизигии, имеющие период в один лунный месяц.

Против гипотезы о глобальном происхождении периодических составляющих в речном стоке говорит, как будто бы то, что если периодические возмущения носят глобальный характер, то они являются общими для всех рек, и, следовательно, периоды этих составляющих тоже должны быть одними и теми же для всех рек, чего в действительности не наблюдается: периоды для различных рек сплошь и рядом получаются совершенно различными. Это возражение разделял в свое время и автор в работе [21]. Оно было бы совершенно бесспорным, если бы атмосфера и речные бассейны были линейными системами и тогда нужно было бы считать, что нынешние методы выделения гармоник из гидрологических рядов (довольно далекие от совершенства) обнаруживают не действительные, а кажущиеся эффекты. Однако различие периодов гармонических слагаемых на разных реках может быть следствием совсем иной причины, а именно, нелинейности атмосферы и речных бассейнов как динамических систем. В нелинейной системе гармоническое внешнее воздействие периода T , порожденное приливами или иными причинами, может возбудить в стоке периодическую составляющую той же частоты $\omega = 2\pi/T$, но уже не гармоническую. Разложение ее в ряд Фурье дает основную гармонику с частотой ω и высшие гармоники с частотами $2\omega, 3\omega, \dots$. Так как $2T, 3T, \dots$ также суть периоды внешнего воздействия, то принципиально в нелинейной системе можно предполагать и возникновение гармоник с периодами $2T, 3T, \dots$, т. е. с частотами $\omega/2, \omega/3, \dots$ (так называемое деление частот). Эти гармоники называются субгармониками.

Таким образом, даже при чисто гармоническом воздействии набор гармоник в стоке должен быть достаточно обширным. Но внешние воздействия на речной сток не являются чисто гармоническими: из изложенного видно, что эти воздействия, даже если каждое из них будет чисто гармоническим, в сумме дают сложный набор гармоник. Кроме того, нет оснований считать все отдельные воздействия чисто гармоническими: вероятнее всего, что каждое из них есть воздействие периодическое, но не гармоническое. Поэтому, если число внешних воздействий есть n , а частоты их равны $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то суммарное внешнее воздействие будет содержать гармоники с частотами: $\omega_1, 2\omega_1, \dots; \omega_2, 2\omega_2, \dots; \omega_n, 2\omega_n, \dots$, т. е. $k\omega_i; i=1, \dots, n; k=1, 2, \dots$. В стоке же должны содержаться:

- 1) основные гармоники с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$;
- 2) высшие гармоники с частотами $k\omega_i; i=1, \dots, n; k=2, 3, \dots$;
- 3) субгармоники с частотами $\omega_i/k; i=1, \dots, n; k=2, 3, \dots$;
- 4) так называемые комбинационные тоны, порождаемые воздействием всех перечисленных гармоник, имеющие самые

разнообразные частоты, и появляющиеся в результате того, что нелинейная система не подчиняется принципу суперпозиции. Общее выражение для частот комбинационных тонов есть

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n,$$

где $m_1, m_2, \dots, m_n$ — произвольные положительные или отрицательные целые числа или числа, обратные целым, или нули.

Таким образом, гармоник, вообще говоря, должно быть бесконечное множество, и их периоды для всех рек должны быть, конечно, одинаковы. Но амплитуды и фазы одних и тех же гармоник в разных бассейнах будут различными. При этом в каждом бассейне те или иные гармоники могут быть полностью подавлены, или наоборот, усилены резонансом. Основные гармоники должны быть, по-видимому, выражены достаточно четко, но ни откуда не вытекает, что они должны иметь амплитуды, превышающие амплитуды всех остальных гармоник; вполне возможен резонанс того или иного комбинационного тона, а не основных гармоник. Все это свидетельствует о том, что знание набора периодов внешних воздействий $T_1, T_2, \dots, T_n$ облегчит выделение гармоник из гидрологических рядов далеко не в той степени, как это принято думать.

Во всех работах по периодическим составляющим в речном стоке обычно молчаливо предполагается, что расходы реки за вычетом суммы гармоник (при отсутствии ландшафтных изменений под воздействием человеческой деятельности) образуют эргодический гармонизируемый процесс годового периода, если считать время непрерывным, или стационарную случайную последовательность, если рассматривать только средние расходы за календарные годы. Иными словами, допускается, что внешние воздействия изменяют только математическое ожидание расхода, в котором появляется детерминированная составляющая в виде суммы гармоник, но не влияют на другие параметры распределений вероятностей. Нужно подчеркнуть, что такая закономерность ниоткуда не вытекает, и, если такое предположение принимается (как будет делаться и в данной книге), то оправдание этому заключается в том, что ничего более обоснованного сейчас предложить нельзя, и нет никакой надежды, что ближайшее будущее изменит это положение к лучшему.

Существенно, что сложение гармоник в процессе стока может практически и теоретически дать не периодическую, а почти периодическую детерминированную компоненту. Например, сумма двух гармоник

$$A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (8.1)$$

с периодами $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 29$ годам и $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 37$ годам есть периодическая функция с периодом в 1073 года (общее наименьшее кратное периодов T_1 и T_2), который с точки зрения

приложений равносильно бесконечно большому периоду, т. е. функция (8.1) ведет себя как почти периодическая функция. Если же периоды T_1 и T_2 не соизмеримы, т. е. T_1/T_2 есть иррациональное число (например, $\sqrt{2}$), то функция (8.1) есть не только практически, но и совершенно точно почти периодическая функция. В связи с этим свойством сложения гармоник полезно напомнить, что функция $\varphi(t)$ называется почти периодической функцией класса $p \geq 1$, если существует последовательность тригонометрических полиномов $P_1(t), P_2(t), \dots$, для которой выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} |\varphi(t) - P_n(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} = 0. \quad (8.2)$$

Периодическое или почти периодическое внешнее воздействие на речной бассейн есть только необходимая, но еще не достаточная предпосылка для утверждения о наличии периодической или почти периодической составляющей в речном стоке. Поэтому все сказанное в данном параграфе есть только указание на возможность существования в речном стоке гармоник определенных периодов, но не доказательство их существования. Доказательством влияния глобальных причин на речной сток часто считают группировки маловодных или многоводных лет. Но цикличность стока сама по себе еще ни о чем не говорит, ибо ее можно объяснить, не прибегая к предположению о гармониках, а просто исходя из естественной склонности любых случайных процессов к образованию циклов, неизбежность которой ясна из совершенно элементарных соображений.

Пусть случайный процесс порождается подбрасыванием монеты: время — номер бросания, а ордината процесса принимает значение единицы при выпадении герба и нуля при выпадении цифры. В таком процессе обязательно будут наблюдаться группировки единиц и нулей именно потому, что этот процесс случаен. Если бы группировок не было, а было бы последовательное чередование единиц и нулей $\dots 1, 0, 1, 0, \dots$ то процесс был бы не случайным, а периодическим с периодом 2. Отмеченная склонность была объяснена математически еще в 1927 г. [56] и привлекалась для объяснения цикличности процесса стока В. Г. Андреяновым и другими гидрологами. Существование гармоник в процессе стока можно будет считать доказанным только, если удастся выделить их из гидрологических рядов методами, дающими уверенность в достоверности результата.

Попытки выделения гармоник предпринимались неоднократно. Но они, по крайней мере у добросовестных авторов, обычно снабжаются очень существенными оговорками, как например «... нужно с большой осторожностью относиться к выводам... о наличии циклов (имеются в виду периоды гармоник,

Н. К.) большой длительности, которые получены по относительно коротким рядам наблюдений» [19], или «... вопрос о достоверности наличия скрытых периодичностей в природных рядах является вообще достаточно сложным» [52]. Чтобы разобраться в некоторых противоречивых утверждениях о гармониках и объяснить некоторые столь же противоречивые результаты расчетов, необходимо обратиться к спектральным представлениям о гидрологическом процессе.

9. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим некоторые количественные характеристики процесса стока при наличии в нем детерминированных составляющих. Представим расход реки $Q=Q(t)$ как сумму следующих слагаемых:

1) среднемноголетнего расхода

$$Q_0 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} Q(t) dt = \text{const}, \quad (9.1)$$

2) детерминированной части, состоящей из суммы гармоник

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(\omega_m t + \alpha_m),$$

в которой $\omega_1, \omega_2, \dots$ — частоты набора гармоник, указанного в § 8 (основных, высших, субгармоник и комбинационных);

3) случайной части $\xi(t)$ — гармонизируемого эргодического процесса с годовым периодом T и нулевым математическим ожиданием.

Таким образом,

$$Q(t) = \xi(t) + Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(\omega_m t + \alpha_m). \quad (9.2)$$

Ограничимся пока конечным числом S гармоник. Обозначим через Θ период детерминированной составляющей, т. е. общее наименьшее кратное периодов

$$T, \frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}, \dots, \frac{2\pi}{\omega_S},$$

а через λ — отношение Θ/T . Составим функцию

$$V(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \left\{ \xi(t+kT) + Q_0 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^S A_m \cos [\omega_m(t+kT) + \alpha_m] \right\} \left\{ \xi(t+\tau+kT) + Q_0 + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^S A_n \cos [\omega_n(t+\tau+kT) + \alpha_n] \right\}. \quad (9.3)$$

Учитывая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \xi(t+kT) \xi(t+kT+\tau) = \mu_2(t, \tau), \quad (9.4)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \xi(t+kT) = M\xi(t) = 0,$$

где $\mu_2(t, \tau)$ — вторая центральная моментная функция процесса $\xi(t)$, и выполняя элементарные действия, нетрудно получить

$$V(t, \tau) = \mu_2(t, \tau) + Q_0^2 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \left\{ Q_0 \sum_{m=1}^S A_m \cos [\omega_m(t+kT) + \right. \\ \left. + \alpha_m] + Q_0 \sum_{n=1}^S A_n \cos [\omega_n(t+\tau+kT) + \alpha_n] + \right. \\ \left. + \xi(t+kT) \sum_{n=1}^S A_n \cos [\omega_n(t+\tau+kT) + \alpha_n] + \right. \\ \left. + \xi(t+\tau+kT) \sum_{m=1}^S A_m \cos [\omega_m(t+kT) + \alpha_m] + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^S \sum_{n=1}^S A_m A_n \cos [\omega_m(t+kT) + \alpha_m] \cos [\omega_n(t+\tau+kT) + \alpha_n] \right\}. \quad (9.5)$$

Рассмотрим пределы отдельных членов в фигурных скобках. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N Q_0 \sum_{m=1}^S A_m \cos [(\omega_m + kT) + \alpha_m] &= X = \\ &= Q_0 \sum_{m=1}^S A_m \left\{ \cos (\omega_m t + \alpha_m) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \cos k\omega_m T - \right. \\ &\quad \left. - \sin (\omega_m t + \alpha_m) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \sin k\omega_m T \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\cos \omega_m (k + \lambda) T = \cos \omega_m k T$, а сумма членов $\cos \omega_m k T$ за период $\Theta = \lambda T$

$$\cos l\omega_m T + \cos (l+1)\omega_m T + \dots + \cos (l+\lambda-1)\omega_m T$$

равна нулю, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \cos k\omega_m T = 0 \quad (9.6)$$

и точно также

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \sin k\omega_m T = 0, \quad (9.7)$$

следовательно, $X=0$. Совершенно аналогично получается

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N Q_0 \sum_{n=1}^S A_n \cos [\omega_n (t + \tau + kT) + \alpha_n] = 0. \quad (9.8)$$

Далее

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \xi(t + kT) \sum_{n=1}^S A_n \cos [\omega_n (t + \tau + kT) + \alpha_n] &= Y = \\ &= \sum_{n=1}^S A_n \cos [\omega_n (t + \tau) + \alpha_n] \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \xi(t + kT) \cos k\omega_n T - \\ &- \sum_{n=1}^S A_n \sin [\omega_n (t + \tau) + \alpha_n] \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \xi(t + kT) \sin k\omega_n T \times \end{aligned}$$

непрерывного времени, так и для дискретного. Если время дискретно, то, конечно, не только t , но и τ принимает дискретные значения.

Функция $\mu_2(t, \tau)$ есть корреляционная (не нормированная) функция процесса $\xi(t)$. Будем обозначать ее через $R_*(t, \tau)$. Корреляционная же функция $R(t, \tau)$ процесса $Q(t) - Q_0$, как видно из (9.10), будет

$$R(t, \tau) = R_*(t, \tau) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \cos \omega_m \tau. \quad (9.11)$$

Считая теперь время непрерывным, построим преобразование Фурье корреляционной функции $R(t, \tau)$

$$\begin{aligned} S(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_*(t, \omega) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_m \tau \cos \omega \tau d\tau, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где

$$S_*(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_*(t, \tau) (\cos \omega \tau + i \sin \omega \tau) d\tau.$$

Интеграл в бесконечных пределах от $\cos \omega_m \tau \cos \omega \tau$ есть некоторая неопределенная функция ω и ω_m . Из теории преобразования Фурье известно, что раскрытие этой неопределенности дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_m \tau \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)],$$

где δ — дельта-функция Дирака, с которой мы уже встречались в § 5. Теперь формула (9.12) будет иметь вид

$$S(t, \omega) = S_*(t, \omega) + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)]. \quad (9.13)$$

Реальная часть этой функции

$$\operatorname{Re} S(t, \omega) = \operatorname{Re} S_*(t, \omega) + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)] \quad (9.14)$$

называется спектральной плотностью процесса $Q(t)$. В этой формуле

$$\operatorname{Re} S_*(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_*(t, \tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (9.15)$$

есть спектральная плотность процесса $\xi(t)$.

Если процесс $\xi(t)$ стационарен, то функция $R(t, \tau)$ не зависит от t и является четной функцией τ . В этом случае S и S_* также не зависят от t , мнимая часть этих функций равна нулю и они суть четные функции ω . Учитывая все это, можно их рас-

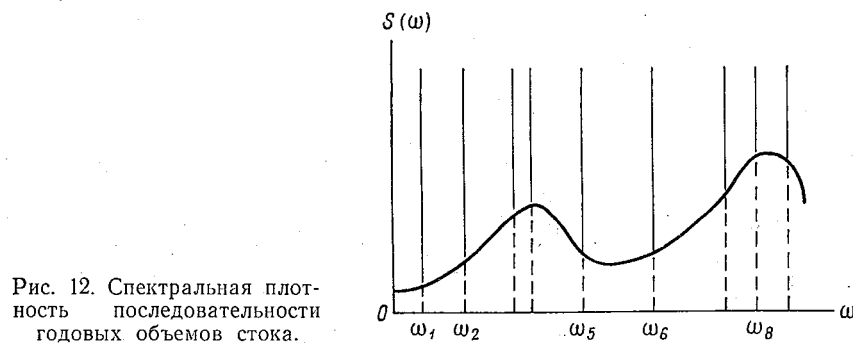


Рис. 12. Спектральная плотность последовательности годовых объемов стока.

смаатривать только при положительных значениях ω , т. е. можно записать:

$$S_*(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_*(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (9.16)$$

$$S(\omega) = S_*(\omega) + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \delta(\omega - \omega_m). \quad (9.17)$$

Из этих формул видно, что при отсутствии детерминированной составляющей спектральная плотность есть непрерывная функция ω . При наличии же детерминированной составляющей, представленной суммой гармоник с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots$, на эту непрерывную функцию накладываются бесконечные всплески в точках $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ (рис. 12). Такая же картина будет и тогда, когда процесс $\xi(t)$ не стационарен, а лишь гармонизуем, но только непрерывная часть спектра будет зависеть от t и будет несимметрична относительно оси ординат.

Рассмотрим теперь последовательность среднегодовых расходов. В этом случае время принимает только целочисленные

значения, процесс $\xi(t)$ стационарен и функция $R(t, \tau)$ зависит только от τ . Преобразование Фурье в данном случае будет

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2 \sum_{\tau=0}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} = 2 \sum_{\tau=0}^{\infty} R_*(\tau) \cos \omega\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \cos \omega_m \tau \cos \omega\tau = S_*(\omega) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} [\cos(\omega_m - \omega)\tau + \cos(\omega_m + \omega)\tau]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при $\omega = \omega_m$ опять имеются бесконечно большие всплески, а при $\omega \neq \omega_m$ двойная сумма в этой формуле обращается в нуль.

Таким образом, формула (9.17) остается в силе и для дискретного времени. Из приведенного вывода видно, что вероятностный процесс без гармонических слагаемых имеет непрерывный спектр, т. е. представим как сумма бесконечного (мощности континуума) множества гармоник с бесконечно малыми амплитудами. Процесс же, состоящий из бесконечного, но счетного множества гармонических слагаемых с конечными амплитудами имеет дискретный спектр. При всей принципиальной математической разнице в характере спектра в этих двух случаях физически разница между ними может быть несущественной. Если дискретные частоты гармоник достаточно плотно располагаются на оси ω , т. е. если при расположении этих частот в порядке возрастания разница между соседними членами ряда достаточно мала, то такой процесс с физической точки зрения, да и с точки зрения вычислительных методов выделения гармоник, может практически не отличаться от вероятностного процесса без детерминированных составляющих, имеющего непрерывный спектр.

Таким образом, нелинейные эффекты, порождающие, при конечном числе внешних периодических возмущений, бесконечное множество гармоник, могут привести к тому, что действие возмущений даст процесс, практически не отличающийся от процесса с непрерывным спектром. И только если в этом бесконечном множестве гармоник будет сравнительно небольшое конечное число таких, амплитуда которых значительно превосходит амплитуды остальных гармоник, а периоды более или менее заметно различаются, можно ожидать, что эти гармоники удастся четко выделить.

10. ВЫДЕЛЕНИЕ СКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ В ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДАХ

Центральный вопрос проблемы цикличности речного стока с точки зрения стохастической гидрологии есть вопрос о том, связана ли цикличность стока с наличием гармонических составляющих в последовательностях годовых объемов стока (т. е. достаточно острых пиков спектральной плоскости приближающихся к дельта-функциям) или она есть только проявление естественных свойств любого вероятностного процесса.

Используемые в гидрологии методы выделения периодических составляющих в случайных последовательностях, описанные в работе [52] и более подробно (в чисто математическом аспекте) в работе [55], имеют тот недостаток, что гармоники этими методами выделяются последовательно, т. е. из данного гидрологического ряда исключается сначала одна гармоника (например, с наибольшим периодом), затем вторая (со следующим меньшим периодом), и т. д. Поэтому выделению каждой данной гармоники мешают остальные, чем снижается достоверность анализа. Этим свойством методов выделения гармоник сплошь и рядом пытаются объяснить, что надежных и достоверных результатов до настоящего времени не имеется ни по одной реке. Однако, по-видимому, суть дела заключается не в методах. Чтобы исключить указанный недостаток методов выделения гармоник, можно использовать метод максимума правдоподобия, дающий параллельное, а не последовательное выделение гармоник. Если η_k есть модульный коэффициент годового объема стока k -того года, то по аналогии с формулой (9.2)

$$\eta_k = \xi_k + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \left(\frac{2\pi k}{T_m} + \alpha_m \right), \quad (10.1)$$

где ξ_k — чисто случайная часть модульного коэффициента. Если она имеет плотность распределения p , зависящую от параметров $a_1, \dots, a_n$, то мы можем написать функцию правдоподобия в виде

$$L = \prod_{k=1}^N p(\xi_k; a_1, \dots, a_n) = \\ = \prod_{k=1}^N p \left\{ \eta_k - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \left(\frac{2\pi k}{T_m} + \alpha_m \right); a_1, \dots, a_n \right\}, \quad (10.2)$$

где N — общее число членов гидрологического ряда. В этой формуле нужно ограничиться некоторым конечным числом n

Параметры гармоник в последовательностях годовых

Река—створ	Число лет наблюдений	Начало года	Вариант начальных условий	Распределение случайной компоненты	Параметры гармоник		
					I		
					T	A	α
Днепр — Киев	150	1/I	I	5.17	3,0	0,04	1,98
		1/I	II	5.17	1,8	0,08	2,15
		1/IV	I	5.14	2,9	0,07	—3,00
		Меженный сток		5.14	3,0	0,04	0,16
Неман — Смалнинкай	151	1/I	I	5.17	3,0	0,03	—2,31
		1/I	II	5.17	2,0	0,05	—2,23
		1/IV	I	5.17	2,6	0,06	2,91
		1/IV	I	5.14	2,8	0,03	—2,81
		Меженный сток		5.14	2,9	0,04	3,10
Нева — Петрокрепость	109	1/I	I	5.17	2,4	0,02	2,21
Волга — Волгоград	86	1/I	I	5.17	3,0	0,06	3,08
Гёта-Эльв — Венерсборг	151	1/I	I	5.17	3,1	0,03	—3,12
Вуокса — Иматра	141	1/I	I	5.17	2,9	0,04	2,42
Рейн — Базель	150	1/I	I	5.17	2,9	0,03	2,50
Влтава — Прага	136	1/I	I	5.17	3,2	0,09	0,17
Лаба (Эльба) — Дечин	110	1/I	I	5.17	3,2	0,07	—1,89
Дунай — Штайн-Кремс	129	1/I	I	5.17	3,0	0,02	0,90
Янзы — Ханькоу	91	1/I	I	5.17	3,0	0,03	—3,09
Дунай — Оршова	128	1/I	I	5.17	3,0	0,03	—0,06
Дунай — Рени	128	1/I	I	5.17	3,0	0,03	—0,56

Таблица 9

и меженных стоков (по Н. С. Коргановой)

(в порядке возрастания периодов)					
2			3		
<i>T</i>	<i>A</i>	<i>a</i>	<i>T</i>	<i>A</i>	<i>a</i>
4,0	0,06	1,29	5,7	0,10	—3,02
5,1	0,10	—1,86	9,5	0,09	—1,91
3,9	0,07	—0,85	5,7	0,06	—1,60
3,9	0,06	—3,1	4,8	0,12	2,74
4,0	0,03	—0,66	6,1	0,12	1,77
5,0	0,02	3,09	8,7	0,04	2,32
4,0	0,06	—0,59	6,1	0,02	2,50
4,0	0,05	2,45	6,1	0,02	—0,64
4,1	0,04	0,34	4,9	0,05	3,11
3,9	0,03	—2,70	5,6	0,05	—2,47
3,9	0,05	0,14	5,9	0,06	1,16
4,1	0,03	2,20	6,1	0,04	1,92
3,9	0,05	2,94	6,5	0,11	1,13
4,0	0,06	—0,01	6,1	0,03	—2,69
4,1	0,05	—2,19	6,2	0,05	—1,72
4,0	0,09	—0,54	6,1	0,05	—2,10
4,0	0,04	—2,56	5,8	0,02	2,28
3,7	0,04	2,20	6,2	0,04	2,52
4,0	0,05	—2,96	6,1	0,05	—1,83
4,0	0,05	0,99	6,2	—0,03	—2,24

Река—створ	Число лет наблюдений	Начало года	Вариант начальных условий	Распределение случайной компоненты	Параметры гармоник		
					4		
					<i>T</i>	<i>A</i>	α
Днепр — Киев	150	1/I	I	5.17	11,5	0,03	0,68
		1/I	II	5.17	12,8	0,09	2,13
		1/IV	I	5.14	13,0	0,07	1,84
		Меженный сток		5.14	6,0	0,05	3,06
Неман — Смалнинкай	151	1/I	I	5.17	13,1	0,04	0,07
		1/I	II	5.17	13,0	0,04	0,12
		1/IV	I	5.17	11,4	0,02	2,50
		1/IV	I	5.14	11,5	0,02	—0,34
		Меженный сток		5.14	5,8	0,06	2,86
Нева — Петрокрепость	109	1/I	I	5.17	11,0	0,07	2,59
Волга — Волгоград	86	1/I	I	5.17	10,0	0,06	1,34
Гёта-Эльв — Венерсборг	151	1/I	I	5.17	11,3	0,07	—1,19
Вуокса — Иматра	141	1/I	I	5.17	10,5	0,06	—0,77
Рейн — Базель	150	1/I	I	5.17	10,1	0,02	2,19
Влтава — Прага	136	1/I	I	5.17	10,8	0,04	—0,70
Лаба (Эльба) — Дечин	110	1/I	I	5.17	12,1	0,07	—1,82
Дунай — Штайн-Кремс	129	1/I	I	5.17	10,7	0,02	1,92
Янзы — Ханькоу	91	1/I	I	5.17	11,0	0,01	—1,37
Дунай — Оршова	128	1/I	I	5.17	11,5	0,04	2,99
Дунай — Рени	128	1/I	I	5.17	10,8	0,02	1,40

(в порядке возрастания периодов)								
5			6			7		
<i>T</i>	<i>A</i>	α	<i>T</i>	<i>A</i>	α	<i>T</i>	<i>A</i>	α
20,4	0,05	—2,91	38,5	0,04	1,90	82,9	0,03	0,52
26,9	0,08	—0,58	73,8	0,03	—1,74	97,3	0,04	1,83
17,7	0,05	1,54	24,8	0,05	0,34			
10,2	0,08	—1,10	18,2	0,07	—2,70	27,3	0,08	2,54
25,7	0,05	—2,23	39,6	0,01	0,92	142,0	0,03	—3,13
25,6	0,05	—2,30	78,0	0,09	—2,86	89,0	0,10	1,15
20,3	0,04	3,08	42,4	0,10	1,08	45,3	0,09	—1,38
20,2	0,03	2,68	37,6	0,03	—0,64	59,6	0,02	1,94
11,5	0,06	2,65	20,7	0,04	—2,52	35,7	0,03	0,42
20,9	0,05	—0,21	28,2	0,10	—1,65	72,1	0,04	—2,70
23,2	0,06	1,12	39,2	0,08	0,12	41,5	0,05	3,08
21,9	0,05	—2,86	32,7	0,05	2,73	69,5	0,03	—1,20
23,6	0,05	—1,76	28,9	0,10	2,68			
20,5	0,03	0,46	29,1	0,05	—0,92	95,3	0,03	0,20
22,7	0,08	0,73	38,6	0,07	—2,60	67,6	0,08	0,54
23,4	0,10	1,48	25,1	0,17	—0,96	69,6	0,07	3,14
22,9	0,05	2,78	31,0	0,02	2,41			
21,5	0,06	0,45	33,4	0,03	—2,05			
21,0	0,08	3,09	35,4	0,06	0,42			
21,2	0,07	—3,04	31,3	0,06	—0,36	71,8	0,03	1,54

гармоник, и таким образом мы будем иметь функцию правдоподобия

$$L = \prod_{k=1}^N p \left\{ \eta_k - \sum_{m=1}^h A_m \cos \left(\frac{2\pi k}{T_m} + \alpha_m \right); a_1, \dots, a_n \right\}, \quad (10.3)$$

зависящую от $3h+n$ параметров $A_1, T_1, \alpha_1; \dots; A_h, T_h, \alpha_h; a_1, \dots, a_n$, и выделение гармоник сводится к отысканию таких значений этих параметров, при которых L достигает максимума, т. е. сводится к обычной задаче на максимум функции многих переменных. Такой прием был использован в работе [77]. Его недостаток состоит в необходимости априорно принять то или иное аналитическое выражение для плотности распределения вероятностей p . Но этот недостаток нельзя считать существенным: для плотности распределения годовых стоков ξ_k существуют хорошо проверенные аналитические выражения и можно ожидать, что они пригодны также для η_k , особенно если амплитуды гармоник малы, что, как мы увидим ниже, и имеет место в действительности.

В табл. 9 даются параметры гармоник, вычисленные методом максимума правдоподобия, для некоторых рек. При этом для Днепра и Немана гармоники выделялись не только в последовательностях годовых, но и в последовательностях меженных стоков. Начальное приближение для вычисления периодов для этих рек принималось в двух вариантах: I — 3, 4, 6, 11, 12, 22, 35, 83 года и II — 2, 5, 6, 14, 30, 99 лет. По данным этой таблицы можно констатировать следующее.

1. Амплитуды гармоник достаточно малы, имеют один и тот же порядок и не имеют тенденции к монотонному изменению с увеличением периода.

2. Периоды гармоник с одним и тем же порядковым номером для разных рек колеблются в общем довольно сильно.

3. Амплитуды, периоды и фазы гармоник для Днепра и Немана зависят от субъективных факторов: исходного приближения, даты расщепки времени на годы и аналитического выражения плотности распределения случайной компоненты.

Все это свидетельствует о том, что метод максимума правдоподобия — наиболее надежный из всех известных — четкого результата не дает. Этим подтверждается реализация той возможности, на которую было указано в конце § 10: гармоники имеют хотя и дискретный, но густой спектр и поэтому (при неизбежном вводе в программу счета на ЦВМ лишь конечного их числа) небольшие отклонения в порядке или точности расчета приводят к выделению разных гармоник. Если учесть к тому же, что амплитуды гармоник соизмеримы с точностью определения годовых и меженных объемов стока, то нужно прийти к выводу, что действие возмущений дает процесс, практически не отличающийся от процесса с непрерывным спектром. По-ви-

димому, здесь мы встречаемся с очень рельефным случаем перехода количества в качество: большая густота спектра гармоник (существование которых вряд ли подлежит сомнению) приводит к тому, что достаточно детерминированный процесс приобретает свойства процесса вполне случайного. С прикладной точки зрения это значит следующее.

1. Методически всегда можно считать, что процесс стока имеет непрерывный спектр, а все водохозяйственные расчеты делать исходя из того, что этот процесс отдельных гармоник не содержит и является эргодическим процессом.

2. Попытки построения сверхдолгосрочных прогнозов на основе выделения гармоник в стоковых рядах вряд ли могут рассчитывать на успех.

11. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ЦИКЛИЧНОСТИ

Попытаемся теперь найти функции распределения вероятностей периодов маловодий и многоводий в процессе стока без периодических составляющих.

Пусть $\dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots$ есть стационарная последовательность модульных коэффициентов годовых объемов стока. Рассмотрим вероятность P совместного осуществления событий

$$\xi_k > x_k, \xi_{k+1} < x_{k+1}, \dots, \xi_{k+m} < x_{k+m}, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}.$$

Пусть $F_{m+2}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1})$ есть $m+2$ -мерная функция распределения вероятностей рассматриваемой последовательности. По предположению, эта последовательность стационарна и, следовательно, ее функции распределения вероятностей любых размерностей не зависят от k . Обозначим для краткости через A событие, состоящее в том, что

$$\xi_{k+1} < x_{k+1}, \dots, \xi_{k+m} < x_{k+m}.$$

Тогда искомая вероятность есть

$$P = P(\xi_k > x_k, A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}), \quad (11.1)$$

а функция распределения F_{m+2} есть вероятность

$$F_{m+2} = P(\xi_k < x_k, A, \xi_{k+m+1} < x_{k+m+1}). \quad (11.2)$$

Чтобы выразить вероятность (11.1) через вероятность (11.2), напомним на основании формулы умножения вероятностей и формулы вероятности противоположного события

$$\begin{aligned} & P(\xi_k > x_k, A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}) = \\ & = P(\xi_k > x_k | A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}) P(A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}) = \\ & = [1 - P(\xi_k < x_k | A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1})] P(A, \xi_{k+m+1} > \\ & > x_{k+m+1}) = P(A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}) - P(\xi_k < x_k, A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1} = P(\xi_{k+m+1} > x_{k+m+1} | A) P(A) - \\
& - P(\xi_{k+m+1} > x_{k+m+1} | \xi_k < x_k, A) P(\xi_k < x_k, A) = \\
& = [1 - P(\xi_{k+m+1} < x_{k+m+1} | A)] P(A) - \\
& - [1 - P(\xi_{k+m+1} < x_{k+m+1} | \xi_k < x_k, A)] P(\xi_k < x_k, A) = \\
& = P(A) - P(A, \xi_{k+m+1} < x_{k+m+1}) - P(\xi_k < x_k, A) + \\
& + P(\xi_k < x_k, A, \xi_{k+m+1} < x_{k+m+1}).
\end{aligned}$$

Выражая вероятности, входящие в последнюю формулу, через m -мерную, $m+1$ -мерную и $m+2$ -мерную функции распределения вероятностей, получаем

$$\begin{aligned}
P(\xi_k > x_k, A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}) &= F_m(x_{k+1}, \dots, x_{k+m}) - \\
& - F_{m+1}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}) - F_{m+1}(x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}) + \\
& + F_{m+2}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}). \quad (11.3)
\end{aligned}$$

Если теперь положить $x_k = x_{k+1} = \dots = x_{k+m} = x_{k+m+1} = x$, то эта формула даст вероятность $\Phi_-(m, x)$ наблюдать период длиной m лет, в течение которого модульные коэффициенты годового стока не будут превышать x

$$\Phi_-(m, x) = \varphi_m(x) - 2\varphi_{m+1}(x) + \varphi_{m+2}(x). \quad (11.4)$$

Здесь

$$\varphi_s(x) = F_s(x, \dots, x), \quad (11.5)$$

при любом s , в частности, при $s = m, m+1, m+2$.

Пусть последовательность модульных коэффициентов годового стока есть марковский процесс $n-1$ -го порядка. Тогда для $m \leq n-2$ следует пользоваться непосредственно формулой (11.4), а для $m \geq n-1$ эту формулу нетрудно привести с помощью формул (1.16) к такому виду

$$\Phi_-(m, x) = \frac{[\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)]^2}{\varphi_{n-1}(x)} \left[\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} \right]^{m-n+1}. \quad (11.6)$$

Если $n=1$ (марковский процесс нулевого порядка), то случайные числа ξ_k независимы. Тогда $\varphi_n(x) = \varphi_1(x) = F_1(x) = F(x)$, а смысл функции $\varphi_{n-1}(x) = \varphi_0(x)$ и ее связь с функцией $F(x)$ не определены. Поэтому формула (11.6) не действительна для $n=1$. Но при независимых ξ_k

$$\begin{aligned}
P(\xi_k > x_k, A, \xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}) &= P(\xi_k > x_k) P(\xi_{k+1} < x_{k+1}) \dots \\
& \dots P(\xi_{k+m} < x_{k+m}) P(\xi_{k+m+1} > x_{k+m+1}) = \\
& = [1 - F(x_k)] F(x_{k+1}) \dots F(x_{k+m}) [1 - F(x_{k+m+1})]
\end{aligned}$$

и, следовательно, при $n=1$ будет

$$\Phi_-(m, x) = [1 - F(x)]^2 F^m(x). \quad (11.7)$$

Формулу (11.7) можно считать частным случаем формулы (11.6), если принять формально $\varphi_0(x)=1$. Однако из этого не следует, что по формуле (11.4) можно определить $\Phi_-(0, x)$, положив $m=0$: понятие периода длиной в ноль лет и вероятности наблюдать такой период остаются неопределенными.

Поэтому функцию $H_-(m, x)$ распределения вероятностей длины m периода не превышения модульными коэффициентами стоков значения x следует определить для $m>0$ так:

$$H_-(m, x) = 1 - \sum_{s=m}^{\infty} \Phi_-(s, x). \quad (11.8)$$

Используя формулу (11.6), получаем для $m \geq n-1$

$$H_-(m, x) = 1 - [\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)] \left[\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} \right]^{m-n+1}. \quad (11.9)$$

Обратимся теперь к периодам, в течение которых модульные коэффициенты годовых стоков превышают заданное значение x . При независимых значениях ξ_k , т. е. при $n=1$, вероятность $\Phi_+(m, x)$ того, что такой период будет иметь длину в m лет, определяется по аналогии с формулой (11.7)

$$\Phi_+(m, x) = [1 - F(x)]^m F^2(x). \quad (11.10)$$

Переходя к случаю $n>1$, т. е. к марковскому процессу произвольного порядка, следует заметить, что такой процесс можно задать не только n -мерной функцией распределения вероятностей,

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_k < x_1, \dots, \xi_{k+n-1} < x_n),$$

но и функцией

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n) &= P(\xi_k > x_1, \dots, \xi_{k+n-1} > x_n) = \\ &= 1 + (-1)^1 \sum F_1 + (-1)^2 \sum F_2 + \dots + (-1)^{n-1} \sum F_{n-1} + (-1)^n F_n. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Здесь $\sum F_i$ — сумма всех i -тых функций распределения ($i < n$), получаемых из F_n . В частности,

$$\begin{aligned} G_1(x) &= 1 - F_1(x), \quad G_2(x_1, x_2) = 1 - F_2(x_1, \infty) - F_2(\infty, x_2) + \\ &\quad + F_2(x_1, x_2) = 1 - F_1(x_1) - F_1(x_2) + F_2(x_1, x_2), \\ G_3(x_1, x_2, x_3) &= 1 - F_3(x_1, \infty, \infty) - F_3(\infty, x_2, \infty) - \\ &\quad - F_3(\infty, \infty, x_3) + F_3(x_1, x_2, \infty) + F_3(\infty, x_2, x_3) + \\ &\quad + F_3(x_1, \infty, x_3) + F_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = & 1 - F_4(x_1, \infty, \infty, \infty) - F_4(\infty, x_2, \infty, \infty) - \\
& - F_4(\infty, \infty, x_3, \infty) - F_4(\infty, \infty, \infty, x_4) + F_4(x_1, x_2, \infty, \infty) + \\
& + F_4(\infty, x_2, x_3, \infty) + F_4(\infty, \infty, x_3, x_4) + F_4(x_1, \infty, \infty, x_4) + \\
& + F_4(x_1, \infty, x_3, \infty) + F_4(\infty, x_2, \infty, x_4) - F_4(x_1, x_2, x_3, \infty) - \\
& - F_4(x_1, x_2, \infty, x_4) - F_4(x_1, \infty, x_3, x_4) - F_4(\infty, x_2, x_3, x_4) + \\
& + F_4(x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned}$$

Для функции G_s при $s > n$ имеет место формула, аналогичная формуле (1.16) для F_s при $s > n$,

$$G_s(x_1, \dots, x_s) = G_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{k=n+1}^s \frac{G_n(x_{k-n+1}, \dots, x_k)}{G_{n-1}(x_{k-n+1}, \dots, x_{k-1})}. \quad (11.12)$$

Следует также учитывать, что аналогично соотношению

$$F_{s-1}(x_1, \dots, x_{s-1}) = F_s(x_1, \dots, x_{s-1}, \infty)$$

имеет место соотношение

$$G_{s-1}(x_1, \dots, x_{s-1}) = G_s(x_1, \dots, x_{s-1}, -\infty).$$

Обозначим через A_* событие, состоящее в том, что

$$\xi_{k+1} > x_{k+1}, \dots, \xi_{k+m} > x_{k+m}$$

и совершенно аналогично тому, как была выведена формула (11.3), найдем

$$\begin{aligned}
P(\xi_k < x_k, A_*, \xi_{k+m+1} < x_{k+m+1}) = & G_m(x_{k+1}, \dots, x_{k+m}) - \\
& - G_{m+1}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}) - G_{m+1}(x_{k+1}, \dots, \\
& \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}) + G_{m+2}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi_+(m, x) = \psi_m(x) - 2\psi_{m+1}(x) + \psi_{m+2}(x), \quad (11.13)$$

где

$$\psi_s(x) = G_s(x, \dots, x) \quad (11.14)$$

и для марковского процесса $n-1$ -го порядка будем иметь формулу, соответствующую формуле (11.6),

$$\Phi_+(m, x) = \frac{[\psi_{n-1}(x) - \psi_n(x)]^2}{\psi_{n-1}(x)} \left[\frac{\psi_n(x)}{\psi_{n-1}(x)} \right]^{m-n+1}. \quad (11.15)$$

Выразим ψ_n и ψ_{n-1} через функции распределения вероятностей, используя для этого формулы, связывающие G_s и F_s . Будем иметь

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= G_1(x) = 1 - F_1(x) = 1 - \varphi_1(x), \\ \psi_2(x) &= G_2(x, x) = 1 - 2F_1(x) + F_2(x, x) = 1 - 2\varphi_1(x) + \varphi_2(x).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}F_3(x, \infty, x) &\neq F_3(x, x, \infty), \\ F_3(x, x, \infty) &= F_3(\infty, x, x) = F_2(x, x) = \varphi_2(x)\end{aligned}$$

и обозначим

$$F_3(x, \infty, x) = \varphi_2^{(2)}(x).$$

Тогда

$$\psi_3(x) = G_3(x, x, x) = 1 - 3\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) + \varphi_2^{(2)}(x) - \varphi_3(x)$$

и точно также

$$\begin{aligned}\psi_4(x) &= G_4(x, x, x, x) = 1 - 4\varphi_1(x) + 3\varphi_2(x) + 2\varphi_2^{(2)}(x) + \\ &+ \varphi_2^{(2, 3)}(x) - 2\varphi_3(x) - 2\varphi_3^{(3)}(x) + \varphi_4(x),\end{aligned}$$

где

$$\varphi_2^{(2, 3)}(x) = F_4(x, \infty, \infty, x), \quad \varphi_3^{(3)}(x) = F_4(x, x, \infty, x).$$

Аналогично можно вывести соотношения и для высших значений n .

Для функции $H_+(m, x)$ распределения вероятностей длины m периода превышения модульными коэффициентами значения x , для $m \geq n-1$ получается формула, аналогичная формуле (11.9),

$$H_+(m, x) = 1 - [\psi_{n-1}(x) - \psi_n(x)] \left[\frac{\psi_n(x)}{\psi_{n-1}(x)} \right]^{m-n+1}. \quad (11.16)$$

На рис. 13 построены сплошными линиями функции распределения вероятностей длины m периодов маловодий $H_-(m, 1)$, т. е. периодов со стоком ниже нормы, и пунктиром — периодов многоводий $H_+(m, 1)$, т. е. периодов со стоком выше нормы. Одномерное распределение вероятностей годовых стоков принималось по формуле (5.15) с параметрами $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0,6$, а многомерное распределение — по (2.7). При этом рассмотрены: *I* — процесс с независимыми значениями, *II—VIII* — простой марковский процесс, *IX—XVII* — марковский процесс с зависимостью стока года от стока двух предшествующих лет и *XVIII* — то же с зависимостью от стока трех предшествующих лет. Функции распределения для наглядности представлены

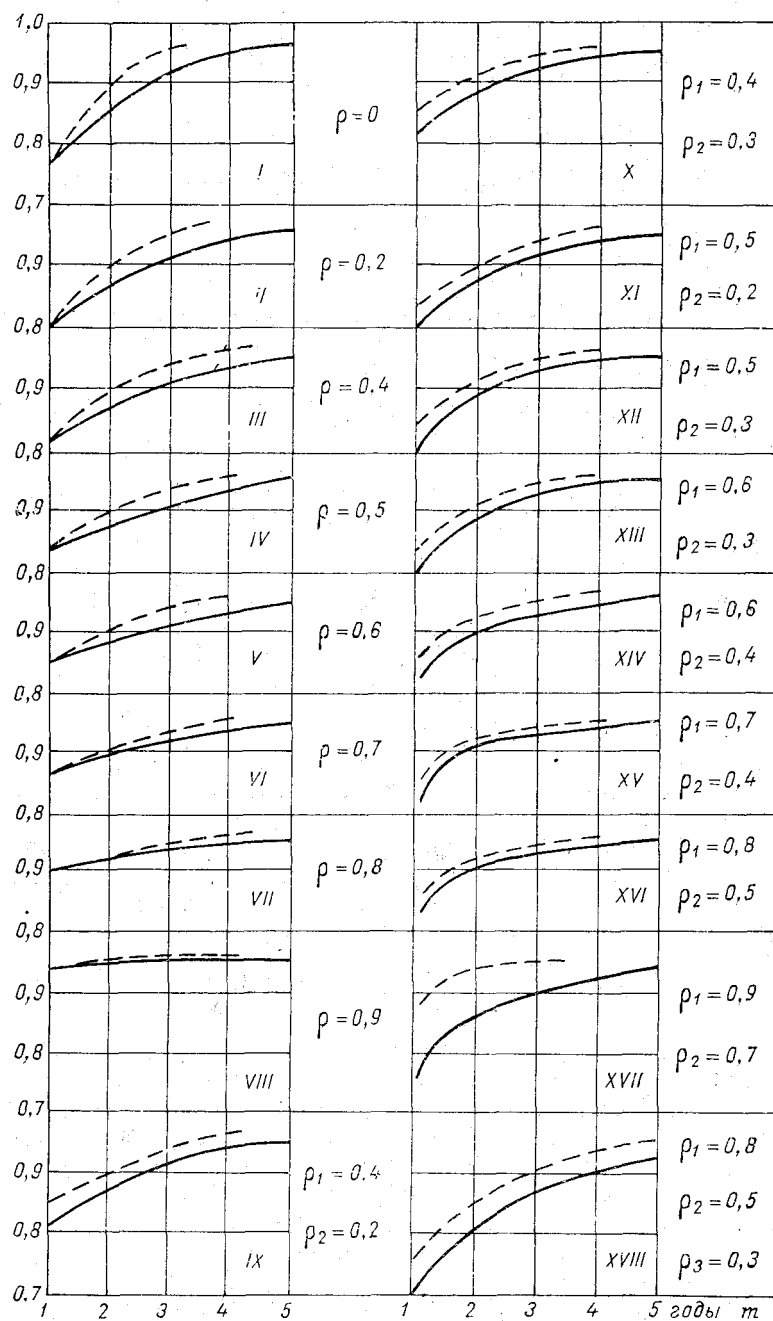


Рис. 13. Распределения вероятностей длительностей многоводий и маловодий.

кривыми, хотя, конечно, было бы правильнее представить их ступенчатыми.

На рис. 13 видно, что при $m=5$ значение функций распределения практически не зависит ни от порядка марковского процесса, ни от коэффициентов корреляции между стоком последовательных лет и составляет приблизительно 0,95. Это значит, что вероятность наблюдать во всех случаях затяжное маловодье длительностью более 5 лет составляет 5%, т. е. достаточно ве-

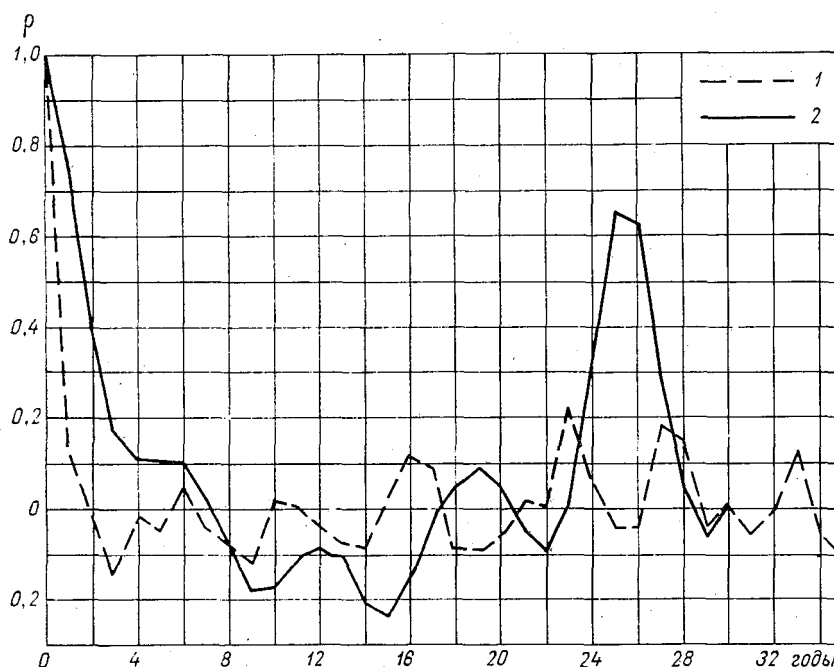


Рис. 14. Корреляционная функция последовательности годовых стоков.

1 — р. Неман (Смалининкай), 2 — р. Ангара (Панки).

лика: если бы водности различных рек были независимы, то это означало бы, что каждый момент времени на 5% рек мира падает на период затяжного маловодья. Но так как маловодье охватывает обычно сразу большие территории, то водности различных рек стохастически зависимы и, следовательно, каждый момент времени более чем на 5% рек мира падает на затяжное маловодье.

Обращает на себя внимание, что при $m < 5$ функции распределения вероятностей периодов маловодья и многоводья загибаются вниз с уменьшением коэффициента корреляции между соседними годами в случае простого марковского процесса (I—VIII) и с увеличением порядка n марковского процесса

(IX—XVII и особенно XVIII). В связи с этим обратимся к дальним корреляционным связям между годовыми стоками (рис. 14). Заметим, что вопреки распространенному мнению, отдаленная корреляционная связь сама по себе может привести к затяжному маловодью или многоводью только с малой вероятностью. Такая отдаленная связь между годовыми стоками четко выражена на р. Ангаре. Схематизируем ее, как показано на рис. 15, где коэффициент корреляции отличен от нуля только для стока лет, отдаленных интервалом в m лет.

Формула (1.16) в этом случае для $N+1$ -мерной ($N \geq m$) функции распределения вероятностей будет иметь вид

$$F_{N+1}(x_k, \dots, x_{N+1}) = F_2(x_k, x_{k+m}) \frac{\prod_{i=k+1}^{k+N} F_1(x_i)}{F_1(x_{k+m})}, \quad (11.17)$$

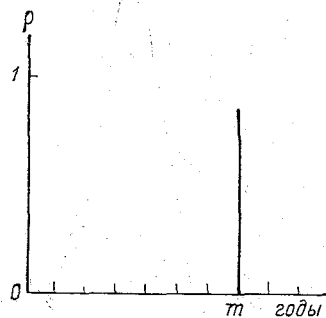


Рис. 15. Схематизация отдаленных корреляционных связей.

а формула (11.4) принимает вид

$$\Phi_-(N, x) = \{F_1(x)\}^{N-2} \{1 - F_1(x)\} \{F_1(x) - F_2(x, x)\}.$$

Отсюда легко получить следующее выражение для вероятности наблюдать маловодье (период с годовым стоком ниже нормы) длиной не менее N лет

$$\{F_1(1) - F_2(1, 1)\} \{F_1(1)\}^{N-2}. \quad (11.18)$$

Положив $N=m$, видим, что чем отдаленнее один от другого коррелятивно связанные годовые стоки, тем меньше вероятность наблюдать маловодье с длительностью, превышающей это отдаление m . Если, например, $m=25$ годам (рис. 14 до максимума $\rho=0,65$) и $F_1(1)=0,6$ (что примерно соответствует р. Ангаре), то $\{F_1(1)\}^{m-2}=4,38 \cdot 10^{-6}$, и значит вероятность (11.18) будет еще меньше. В формировании затяжных маловодий и многоводий, как можно судить по рис. 13, большую роль играет, по-видимому, общее число значимых ординат корреляционной функции на рис. 14, которое для р. Ангары достаточно ве-

лико (если считать значимыми $|\rho| > 0,2$), т. е. в конечном счете порядок марковского процесса, что подтверждает и рис. 13 IX и XVIII. Для р. Ангары порядок n процесса изменения годового стока, если судить по рис. 14, должен быть очень велик (примерно 27—28). Однако к выводам, касающимся р. Ангары, следует относиться с осторожностью, так как гидрологический ряд по этой реке, содержащий затяжные периоды маловодья и многоводья, недостаточно репрезентативен и трудно сказать, чем объясняется всплеск коэффициента корреляции на рис. 14: действительной природой процесса или недостаточной (по отношению к периодам маловодья и многоводья) длиной ряда гидрологических наблюдений, делающей вычисления неточными. Трудно сказать также, чем объясняются широко известные затяжные периоды маловодья и многоводья на этой реке: тем, что ее сток — марковский процесс высокого порядка или тем, что мы попросту наблюдаем реализацию маловероятного события, т. е. случай хотя и редкий, но отнюдь не невозможный.

12. О ПОНЯТИИ МАКСИМАЛЬНОГО РАСХОДА

Проблема расчета максимальных расходов возникает в связи с проектированием гидротехнических сооружений и является составной частью проблемы их надежности.

Мы будем различать два случая:

1) гидротехнический узел не имеет водохранилища, способного в ощутимой мере аккумулировать сток половодья или паводка, и таких водохранилищ нет в бассейне реки выше данного узла;

2) гидротехнический узел имеет водохранилище ощутимой емкости, достаточной хотя бы для частичной аккумуляции стока половодья или паводка, или такие водохранилища имеются выше данного узла.

В дальнейшем всюду, где не оговорено противное имеется в виду первый из этих двух случаев, в котором водосбросы плотин нужно рассчитывать просто на максимальный естественный расход. Если бы был известен абсолютный максимум естественного расхода реки в створе плотины проектируемого гидротехнического узла, то никакой проблемы максимальных расходов не было бы. Кое-какие пути оценки абсолютного максимума в литературе намечаются [18], но это лишь пути оценки, а не точного определения, которое столь же трудно, как, например, определение абсолютного максимума человеческого роста. В настоящее время мы не можем отказаться от традиционного подхода, т. е. мы вынуждены считать, что конечного абсолютного максимума расхода не существует и назначать расчетный расход по вероятности его превышения, задаваемый из тех или иных соображений. Как только задача ставится в такой плоскости, сейчас же возникает четыре чрезвычайно сложных вопроса:

1. Что следует понимать под максимумом расхода?
2. Что следует понимать под вероятностью превышения расчетного расхода?
3. Как задать численное значение этой вероятности?
4. Как определить расчетный расход по заданной вероятности его превышения?

Первый вопрос не требует комментариев только в том случае, когда существует один четко выраженный максимум расхода в каждом году, вызванный весенним снеготаянием, как это имеет место, например, на очень многих реках СССР. В общем же случае река имеет случайное число максимумов расхода в году, как это наблюдается в Закарпатье, на Дальнем Востоке, на юго-западе США и во многих других районах. В этом общем случае некоторые максимумы носят характер незначительных всплесков, т. е. они заведомо несущественны. Это обстоятельство приводит к необходимости выработки какого-то принципа выделения значимых максимумов. Такой принцип должен удовлетворять двум условиям:

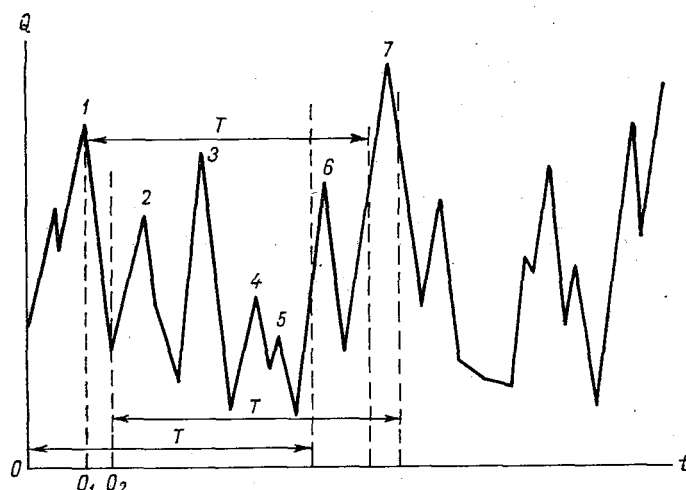


Рис. 16. К выделению значимых максимумов расхода.

1) получающаяся в результате его применения выборка максимальных расходов не должна зависеть от даты рассечки времени на годы;

2) для рек снегового питания с преобладанием весеннего стока (по классификации Воейкова), имеющих один четкий паводочный максимум расхода в году, используемый принцип должен давать выборку, содержащую все такие и только такие максимумы.

Искомый принцип может быть следующий. Рассмотрим рассечки, получающиеся при совмещении начала года с каждым из 365 его дней. Для каждого года в каждой рассечке выделим максимум максимумов расхода (т. е. наибольшие из значений Q , отвечающих тем t , при которых $dQ/dt=0$) и отбросим все остальные максимумы. Например, на рис. 16 максимум 1 есть годовой максимум максимумов для всех годовых

периодов T , начинающихся в любой момент между моментами O и O_1 . Если начало периода совпадает с моментом O_1 , то соответствующим максимумом максиморумом будет максимум 3, а когда оно совпадает с моментом O_2 — максимум 7. Максимумы 2, 4, 5, 6 ни при какой рассечке времени на годы не оказываются годовыми максимумами максиморумами, т. е. с точки зрения принятого принципа они не являются значимыми максимумами. Годовые (за календарные годы) числа выделенных таким образом максимумов будут в общем случае случайными числами. Только эти максимумы считаются в дальнейшем значимыми.

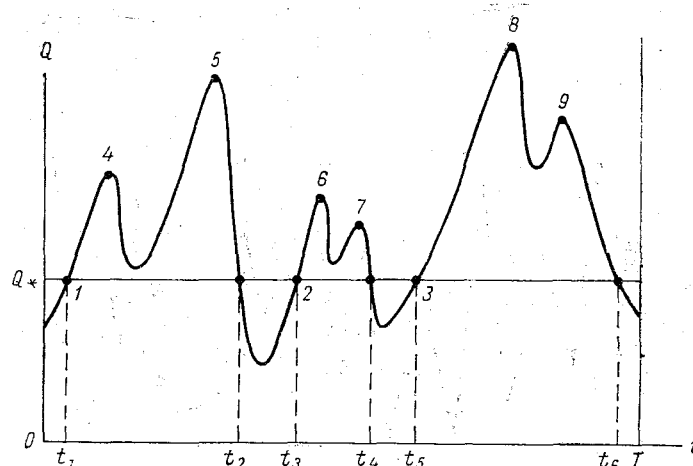


Рис. 17. К определению вероятности превышения расчетного расхода.

Сформулированный принцип есть развитие предписания Указаний [59], согласно которому рассматривается выборка максимум максиморумов расхода за каждый календарный год.

Мы дали одно из возможных определений значимых максимумов. Но ни откуда не следует, что расчетный расход водосбросных сооружений должен обязательно связываться с этими максимумами. Будет он с ними связан, или нет, зависит от того, как определить понятие вероятности превышения расчетного расхода. В это понятие можно вложить разный смысл. Можно даже характеризовать превышение расчетного расхода Q_* не вероятностью этого события, а величиной иной природы. За параметр, характеризующий превышение фактического расхода Q над расчетным Q_* , можно взять, в частности, следующие величины (рис. 17).

1. Математическое ожидание $M\tau$ суммарного времени τ за период T , в течение которого $Q > Q_*$ (для реализации про-

цесса стока на рис. 17, $\tau = t_2 - t_1 + t_4 - t_3 + t_6 - t_5$). Отношение $\Phi_1 = M\tau/T$ есть средняя за время T вероятность того, что в произвольный момент $0 < t < T$ будет $Q > Q_*$.

2. Математическое ожидание Φ_2 числа выбросов случайного процесса $Q(t)$ над уровнем Q_* (точки 1—3) за время T .

3. Математическое ожидание Φ_3 числа максимумов (любых) процесса $Q(t)$, превышающих Q_* (точки 4—9) за время T .

4. Математическое ожидание Φ_4 числа значимых максимумов процесса $Q(t)$, превышающих Q_* за время t .

5. Вероятность Φ_5 того, что максимум максимумов Q за время T (точка 8) превысит Q_* .

Все эти характеристики $\Phi_1 - \Phi_5$ могут быть определены чисто математически, если известна система функций F_n (§ 1), управляющих процессом изменения мгновенных расходов. Но это не значит, что задание одной из этих характеристик определяет другие: из формул, приводимых в работе [21] видно, что одной и той же функции $\Phi_1(Q_*)$ соответствует множество различных функций $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$. Возможность определения всех этих функций по системе функций F_n , вытекающая из того, что последняя содержит всю информацию о процессе $Q(t)$, имеет большое принципиальное значение. Но практическое использование этой возможности нецелесообразно, так как проще и точнее вычислять функции $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ иными путями, исходя непосредственно из гидрологического ряда.

Вопрос о том, какую из этих функций лучше взять за основу (т. е. нормировать) для определения максимального расчетного расхода Q_* — не гидрологический и не математический, а технический вопрос. Он сводится к тому, какое понимание факта превышения расчетного расхода лучше отвечает концепциям надежности водосбросных сооружений. Но так как теория надежности развита недостаточно для того, чтобы оценивать такие тонкости, то сейчас безразлично, какому именно из пяти перечисленных параметров отдать предпочтение. Выбор в качестве характеристики превышения расчетного расхода вероятности Φ_5 основывается только на традиции.

Задачу о распределении вероятностей максимумов Q иногда пытаются свести к так называемым предельным распределениям, рассматриваемым в монографии Э. Гумбеля [14]. Предельные распределения суть распределения максимальных членов выборки из генеральной совокупности, поэтому прямой связи с интересующими нас распределениями здесь нет. Но предельные распределения используются в теории распределения вероятностей максимумов Q , построенной П. Тодоровичем и его учениками [87, 88, 89, 97]. Эта теория имеет в виду общий случай, когда число максимумов расхода (значимый максимум Тодорович определяет иначе, чем это сделано выше) в году случайно и вероятность появления максимума в данный промежуток

времени зависит не только от длины этого промежутка, но и от его положения в календаре. Она безупречна по строгости и математически весьма элегантна. Но, к сожалению, строгость этого блестящего в математическом отношении решения не исключает необходимости принимать (при его практическом использовании) те или иные априорные предположения о входящих в задачу исходных функциях и экстраполировать их за пределы, освещенные наблюдениями, которая в той или иной форме проявляется во всех без исключения исследованиях максимальных расходов. Как ясно из гл. 2, это обстоятельство не устранимо вне генетической теории стока.

Здесь мы рассмотрим более грубый подход к задаче. Предположим сначала следующее:

- 1) все значимые максимумы принадлежат одной и той же генеральной совокупности;
- 2) все они стохастически независимы;
- 3) годовое число r этих максимумов одно и то же для всех лет.

Вероятность того, что какой-то (один) значимый максимум окажется меньше Q , есть $F(Q)$, где F — обозначение для функции распределения вероятностей максимумов. Вероятность того, что за N лет службы сооружения ни один максимум не превысит Q (а именно эту вероятность и логично нормировать), при сделанных предположениях есть $\{F(Q)\}^{rN}$, а вероятность P_N того, что за это время он будет превышен хотя бы один раз, выразится так:

$$P_N = 1 - \{F(Q)\}^{rN}. \quad (12.1)$$

Соответствующая вероятность однократного превышения есть

$$1 - F(Q) = 1 - (1 - P_N)^{\frac{1}{rN}} \approx \frac{1}{rN} P_N. \quad (12.2)$$

Отсюда видно, что вероятность однократного превышения расчетного расхода приблизительно в r раз меньше вероятности P_1 его превышения один раз в год. Действующие нормативы [59] предусматривают определение расчетного расхода по функции распределения вероятностей абсолютных годовых максимумов, трактуемой как вероятность $1 - F(Q)$. В действительности это не вероятность, а величина, приближающаяся к P_1 (при том построении распределения вероятностей максимумов, который указан в работе [59], эта величина не будет точно совпадать с P_1 в смысле изложенного принципа построения выборки значимых максимумов).

Таким образом, нормативы преувеличивают $1 - F(Q)$ для рек с несколькими максимумами в году, а значит преуменьшают максимальные расчетные расходы. Это обстоятельство отмеча-

ется не впервые: сказанное (кроме определения значимых максимумов), как и соображения, излагаемые в § 13, только развитие того, что уже высказывалось в работах [36, 44] и в других источниках, и постепенно входит в обиход проектных организаций, в частности Сибгидропроекта.

Число r — либо единица, либо случайное число, меняющееся от года к году. Поэтому в приведенных формулах под r следует подразумевать математическое ожидание числа значимых максимумов в году и считать, что формулы остаются в силе и тогда, когда rN имеет дробную часть. Третье из сделанных предположений этим устраняется, но первые два остаются. Проанализируем эти предположения.

Представим, что используемый календарный гидрологический ряд имеет неограниченную длину. Тогда, разбив год на произвольное число мелких интервалов, мы будем иметь для каждого такого интервала выборку значимых максимумов неограниченного объема. Построенные по этим выборкам функции распределения вероятностей будут, вообще говоря, различны. Объединяя же все значимые максимумы в одну выборку, получаем среднюю по всем выборкам вероятность $F(Q)$ того, что значимый максимум окажется меньше Q . Полученный результат в сочетании с формулой (12.1) можно интерпретировать как приближенное решение задачи Тодоровича. Но можно рассматривать его иначе: этот результат означает, что наряду с перечисленными пятью параметрами Φ_1 — Φ_5 , через которые можно определить расчетный расход, мы пришли к шестому, $\Phi_6 = 1 - F(Q)$, имеющему совершенно четкое определение и такое же право на существование, как и Φ_5 . Но преимущество Φ_6 заключается в том, что вычисление этого параметра проще вычисления Φ_5 .

Второе из перечисленных предположений не влияет на определение параметра Φ_6 , но от выполнения этого предположения зависит справедливость формулы (12.1). Однако имеются основания считать, что это предположение выполняется с высокой точностью. В частности, когда река имеет один четко выраженный максимум расхода весеннего половодья, рассматриваемое предположение оправдывается непосредственным вычислением коэффициента корреляции между максимумами, а также тем, что корреляция между годовым стоком, как правило, достаточно слаба, а корреляция между максимумами должна быть еще слабее, так как на нее влияет дополнительный случайный фактор — форма гидрографа. Несколько максимумов обычно наблюдается на реках с ливневыми паводками. А поскольку связь между отдельными ливнями достаточно слаба, то связь между их последствиями — максимумами расходов — должна быть еще слабее, по той же причине, что и в предыдущем случае. Слабость стохастических связей между ливневыми максимумами проявляется, в частности, в том, что заблаговременность

прогноза не только объема, но и самого факта возникновения паводка, например на горных реках Закарпатья, не превышает нескольких часов. К тому же, когда рассматриваются не все, а только значимые максимумы, интервалы времени между которыми более интервалов между обычными максимумами, предположение об их стохастической независимости должно быть тем более справедливым.

13. О НОРМАТИВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ РАСЧЕТНОГО МАКСИМАЛЬНОГО РАСХОДА

Рассмотрим теперь третий из четырех вопросов, указанных в начале § 12. Из формулы (12.2) следует, что можно нормировать: а) срок службы сооружения N и вероятность P_N превышения расчетного расхода за этот срок, т. е. вычислять $F(Q)$ как

$$F(Q) = (1 - P_N)^{\frac{1}{TN}} \quad (13.1)$$

и определять Q по найденному значению $F(Q)$; б) вероятность P_1 превышения расчетного расхода в течение года и определять $F(Q)$ по формуле (13.1), положив в ней $N=1$; в) непосредственно $F(Q)$ или $\Phi_6 = 1 - F(Q)$. Действующие нормативы, как уже указывалось, стремятся нормировать P_1 , но поскольку эти нормативы имеют в виду главным образом реки с одним четким половодьем, то никогда не следует упускать из вида, что для этих условий $P_1 = \Phi_6$.

Вероятность P_1 назначалась и назначается в зависимости от класса сооружения, т. е. от его производственного значения, которое определяется для ГЭС установленной мощностью и средней годовой выработкой энергии, для водохранилищ ирригационных систем — размерами орошаемой площади и т. д. по следующей шкале [59].

Класс капитальности	I	II	III	IV
Вероятность P_1 %	0,01	0,1	0,5	1

Этот принцип назначения максимальных расчетных расходов встречал и встречает серьезные возражения [36, 44], в результате которых в Указаниях [59] сделаны следующие изъятия.

1. Сооружения, разрушение которых угрожает катастрофическим наводнением, проверяются, независимо от их класса на расход с вероятностью $P_1 = 0,01\%$, как сооружения I класса. К таким сооружениям в Указаниях относятся сооружения, «характеризуемые следующими признаками:

а) высота плотины и объем водохранилища достаточны для образования волны прорыва, затопляющей долину потоком

с большой скоростью течения и разрушительной силы, если время добегания до населенных пунктов или важных объектов народного хозяйства недостаточно для полной потери волной ее разрушительной силы;

б) наличие в составе подпорожного фронта земляных или других типов плотин, катастрофически разрушающихся при переливе воды через их гребень, или при слабом основании сооружений в нижнем бьефе, легко подвергающемся размыву.

2. При наличии специального задания на проектирование сооружения должны обеспечивать пропуск максимального расхода, возникающего вследствие полного или частичного разрушения расположенных выше плотин.

3. Водосбросы плотин, разрушение которых угрожает сохранности расположенных ниже железнодорожных и автомобильных мостовых переходов, путей и станций рассчитываются на безопасный пропуск расходов не меньше, чем установленные для указанных сооружений соответствующими нормами».

Однако эти изъятия не устраняют всех замечаний, которые делались в работах [36, 44] и других источниках по поводу самого принципа назначения вероятности P_1 в зависимости от класса сооружения. Максимальный расчетный расход должен быть, очевидно, поставлен в зависимость от тяжести последствий от его превышения, т. е. от разрушения сооружения. Между тем эта тяжесть не обязательно определяется классом сооружения даже тогда, когда последствием разрушения сооружения будет только прекращение выпуска соответствующей продукции. Например, при одном и том же классе капитальности, разрушение плотины русловой ГЭС может практически означать разрушение всего гидроузла, в то время как разрушение сравнительно небольшой плотины деривационной ГЭС той же мощности повлечет за собой значительно меньший ущерб.

Для сооружений одного и того же класса последствия от одного и того же превышения расчетного расхода зависят от типа плотины, даже если перелив воды через ее гребень не обязательно ведет к ее катастрофическому разрушению. В частности, последствия одного и того же превышения расчетного расхода будут гораздо более тяжелыми для плотин с донными отверстиями, чем для водосливных плотин со щитами на гребне: в первом случае для пропуска повышенного расхода потребуются значительно большая форсировка уровня перед плотиной, чем во втором.

Если превышение расчетных расходов для сооружений низших классов будет иметь место, то это произойдет в общих гидрометеорологических условиях сразу на большой территории и может повлечь за собой массовое разрушение этих мелких сооружений. Ущерб от этого может быть не меньше, а даже больше ущерба от разрушения единичных крупных сооружений

высших классов капитальности, рассчитываемых на расходы с меньшей вероятностью превышения.

По-видимому, нормироваться должна не сама вероятность P_1 , а принципы и исходные данные для ее назначения, причем должны приниматься во внимание последствия разрушения плотины. Очень возможно, что с учетом всего сказанного выше окажется целесообразным принимать вероятность превышения расчетного расхода одинаковой для всех сооружений за срок их службы, например, исходя из следующих соображений. Если срок службы сооружений I класса оценить в 50 лет, то вероятность превышения расчетного расхода (при норме в 0,01% для одного паводка) для всего срока будет приблизительно $0,01 \times 50 = 0,5\%$. Если массовое разрушение мелких сооружений наносит такой же ущерб, как разрушение единичных крупных, то полученную величину 0,5% и следует принять в качестве норматива для всех сооружений за срок их службы. Различия в технических свойствах сооружений, грунтах основания и т. п. следует учитывать при назначении запасов на превышение расчетных уровней, допустимых скоростей в нижних бьефах и т. д. Вводить различные нормативные значения вероятности P_N для различных сооружений целесообразно только в зависимости от того, может или нет разрушение сооружения повлечь за собой гибель людей. В оценке последней возможности нужно, конечно, учитывать не только обстановку данного момента, но и перспективы дальнейшего развития территорий, которые могут оказаться под угрозой затопления.

14. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАКСИМАЛЬНЫХ РАСХОДОВ

После того, как вероятность $F(Q)$ превышения (или непревышения) расчетного расхода Q так или иначе задана, определение этого расхода по функции распределения вероятностей максимумов выполняется элементарно. Суть задачи заключается в выборе этой функции.

Как уже неоднократно подчеркивалось, самое хорошее совпадение функции распределения вероятностей расходов (в данном случае максимальных), заданной каким-либо аналитическим выражением, с эмпирической функцией распределения не дает никакой гарантии, что это аналитическое выражение достаточно точно передает действительную функцию распределения вероятностей в зоне очень малых вероятностей превышения, какие представляют интерес для проблемы максимальных расходов. Поэтому споры о том, какому аналитическому выражению следует отдать предпочтение — совершенно беспредметны. При нынешнем состоянии проблемы речь может идти не о том, чтобы приблизиться к действительному распределению, а только

о таком выборе расчетной зависимости, которая при принятых нормативных вероятностях превышения расчетных расходов давала бы такие их значения, какие обеспечивали бы достаточную гарантию надежности сооружений, и о таком использовании этой зависимости, которое не приводило бы к логическим неувязкам, в которые особенно легко впасть, когда водохозяйственная система содержит гидравлически связанные крупные водохранилища (каскады, бассейновые схемы), трансформирующие паводки. Указания [59] предписывают использовать в качестве функции распределения вероятностей макси-

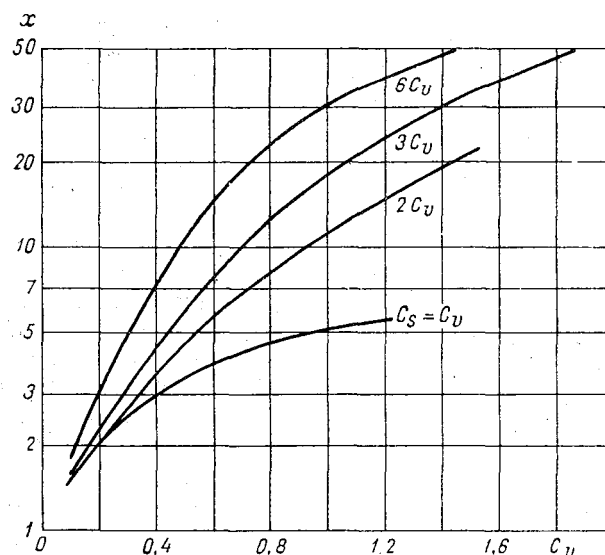


Рис. 18. Зависимость модульного коэффициента расчетного максимального расхода от C_v и C_s при $P = 0,001\%$ (вероятность непревышения максимума для особо важных внеклассных сооружений).

мальных расходов формулу трехпараметрического гамма-распределения (5.17). Это положение Указаний основано на большом опыте использования указанной формулы в советской проектной практике, в котором и заключено преимущество рекомендуемой формулы перед другими возможными. В связи с этой формулой нужно заметить, что модульный коэффициент максимального расхода x , отвечающий данной вероятности превышения P_1 , как видно на рис. 18 и 19, существенно зависит от коэффициента асимметрии C_s , определение которого по статистике v_3 при малой выборке, как известно, крайне ненадежно. Лучше всего пользоваться статистиками λ_2 и λ_3 (§ 6).

Зависимость параметров распределения от даты расчистки времени на годы может быть существенной, как видно из

табл. 10, составленной по данным работы [97], чем и подтверждается необходимость отказа от субъективных определений максимального расхода, о которых говорилось выше. Аналогичные результаты получаются и для других регионов, например для р. Амура, где зависимость выборки $Q_{\max \max}$ от даты рас-сечки времени на годы также существенна.

До сих пор имелся в виду случай, когда на реке нет водо-хранилищ с емкостью, достаточной для трансформации па-водка. Рассмотрим теперь случай, когда гидротехнический узел

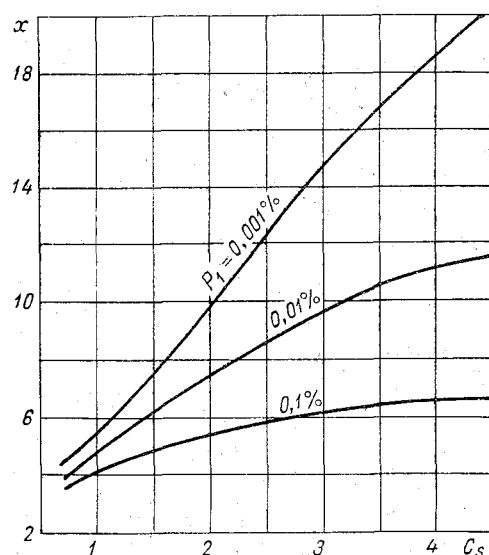


Рис. 19. Зависимость модульного коэффици-ента расчетного максимального расхода от вероятности превышения P_1 и C_s при $C_v = 0,7$.

имеет такое водохрани-лище и это водохранили-ще — единственное на данной реке. Наполнение водохранилища может наступить на спаде па-водка уже после того, как имел место максимум ес-тественного расхода, и тогда максимальный рас-ход через водосбросы пло-тины окажется меньше ес-тественного максималь-ного расхода. Излагаемая ниже расчетная схема для этих условий есть разви-тие приема, сообщенного автору В. П. Ягиным.

Самое правильное и надежное в данном слу-чае — рассчитать пропу-ски паводков через пло-тину по всему имеющему-ся календарному ряду, т. е. произвести расчет

регулирования в промежутках между холостыми сбросами ме-тодами теории регулирования речного стока, а в периоды холо-

Таблица 10

Параметры распределения $Q_{\max \max}$ р. Сускеханна — створ отмель Уилка (Susquehanna River, створ Wilkes Barre) США, Пенсильвания (наблюдения 1891—1964 гг.)

Начало года	$M Q_{\max \max}$ $\text{м}^3 \text{с}$	v_{-1}	C_v	C_s	C_s / C_v
1/I	4020	1,07	0,266	1,47	5,54
1/V	3880	1,08	0,293	1,48	5,05
1/IX	3890	1,08	0,285	1,52	5,33

стных сбросов по возможности более точными методами, т. е. гидравлическими, с учетом трансформации паводочной волны, при этом желательно принимать для входного створа действительный, а не схематизированный гидрограф паводка. Эти расчеты дадут максимальные сбрасываемые расходы (или максимальные уровни верхнего бьефа), т. е. преобразуют первоначальную выборку — гидрологический ряд — в выборку максимальных расходов, пропускаемых в нижний бьеф. Из этой выборки необходимо отобрать значимые максимумы, так же как это делается для естественных расходов, и затем построить функцию распределения вероятностей этих максимумов, приняв в качестве ее аналитического выражения опять-таки формулу трехпараметрического гамма-распределения. Выбор именно этой формулы, конечно, не обязателен, но пока не видно оснований для того, чтобы предпочесть ей какую-либо другую. После этого необходимо определить сбрасываемый расход, отвечающий данной вероятности превышения, и проверить водосбросы плотины на этот расход. По поводу всех этих операций необходимо заметить следующее.

1. Может показаться, что в данном случае функция распределения вероятностей может иметь скачок в нуле, так как (при большом водохранилище) возможны годы, когда паводок аккумулируется полностью. Но это неверно: не функция распределения вероятностей сбрасываемых расходов имеет скачок в нуле, а математическое ожидание годового числа r максимумов, фигурирующее в (13.1), будет в этих случаях меньше единицы.

2. Возникает вопрос, не лучше ли вести расчет не по календарному ряду, а по очень длинной искусственно разыгранной реализации процесса стока, которая позволит получить выборку сбрасываемых расходов значительно большего объема. На этот вопрос следует ответить отрицательно, когда речь идет о водохранилищах сезонного регулирования, сбросы из которых происходят каждый или почти каждый год. Так как никакая искусственно разыгранная реализация не содержит в себе больше информации, чем исходный гидрологический ряд, то ряд максимумов сбрасываемых расходов, построенный по искусственной реализации притока к водохранилищу, какой бы длины он ни был, не будет содержать больше информации, чем такой же ряд, полученный по исходному календарному ряду. К тому же увеличение объема вычислений при использовании длинной искусственной реализации притока может существенно увеличить машинное время, когда процесс холостого сброса рассчитывается по гидравлическим уравнениям.

3. Если водохранилище наполняется и опорожняется каждый или почти каждый год, то в такого рода расчетах можно за начальный момент выбирать дату наиболее позднего начала сработки водохранилища (выявляемую по расчетам регулирования

стока без детального расчета пропуска паводка) и считать, что в этот момент водохранилище наполнено. Это может привести к преувеличению одного-двух первых членов ранжированной по возрастанию выборки максимальных сбрасываемых расходов, т. е. к небольшой ошибке, которая пойдет в запас надежности.

4. Значительно сложнее случай водохранилища многолетнего регулирования, начальное наполнение которого может быть любым. Пусть $\Psi(z)$ есть функция распределения вероятностей наполнения z водохранилища на ту дату, с которой начинается используемый календарный ряд. Эта функция строится методами теории регулирования стока (глава 5), не связанными с детальным расчетом сбросов и имеет вид, представленный на рис. 20. Если произвести описанные расчеты при фи-

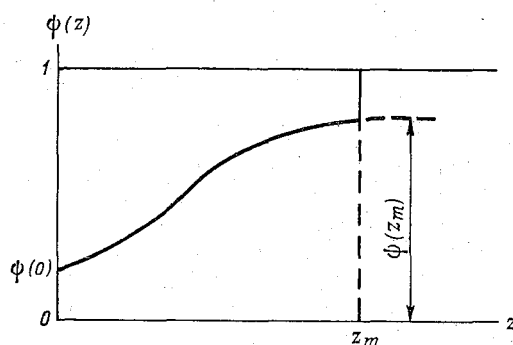


Рис. 20. Функция распределения вероятностей уровней воды в водохранилище для произвольного момента времени.

0 — отметка уровня мертвого объема, z_m — отметка уровня нормального подпора.

ксированном $z=z_*$ из интервала $0 < z < z_m$ (0 — отметка уровня мертвого объема, z_m — отметка нормального подпора, т. е. наивысшего возможного уровня), то в результате получится функция $F(Q/z_*)$ распределения вероятностей максимальных сбрасываемых расходов при условии $z=z_*$ и математическое ожидание $M(r/z_*)$ при том же условии. Серия таких расчетов для разных z определит условную по отношению к начальному наполнению водохранилища функцию распределения вероятностей максимальных сбрасываемых расходов $F(Q/z)$ и условное математическое ожидание $M(r/z)$. Безусловная функция распределения этих расходов на основании формулы полной вероятности есть

$$F(Q) = \int F(Q|z) d\Psi(z)$$

или, выражая интеграл Стильеса через интеграл Римана и функции скачков (рис. 20),

$$F(Q) = F(Q|0)\Psi(0) + F(Q|z_m)[1 - \Psi(z_m)] + \int_0^{z_m} F(Q|z)\phi(z) dz,$$

где $\psi(z) = d\Psi(z)/dz$ — плотность распределения $\Psi(z)$. Аналогично для безусловного математического ожидания Mr числа значимых максимумов будет

$$Mr = M(r|0)\Psi(0) + M(r|z_m)[1 - \Psi(z_m)] + \int_0^{z_m} M(r|z)\psi(z) dz.$$

5. В случае многолетнего регулирования, особенно глубокого, выборка максимальных сбрасываемых расходов при малых z , рассчитанная описанным путем, может оказаться очень малой, и тогда для малых z может оказаться целесообразным расчет по длинной, искусственно разыгранной реализации. Трудность генерирования искусственной реализации мгновенных, среднечасовых и даже среднесуточных расходов (из-за недостаточной репрезентативности исходного ряда для надежного построения соответствующих эмпирических функций распределения или трансформирующих функций Φ § 2) и громоздкость этой операции могут сделать целесообразной использование при малых z схематизированных гидрографов паводков. Однако этот вопрос требует дальнейшей разработки.

6. Изложенная принципиальная расчетная схема, по-видимому, логически наиболее правильна. Практически она приемлема, конечно, только для проверочных расчетов на окончательных стадиях проектирования, а также в качестве эталона для проверки различного рода приближенных приемов, используемых на предварительных стадиях проектирования.

7. В случае каскадов нельзя предложить единой расчетной схемы. В каждом конкретном случае разработка такой схемы требует глубокого инженерного и технико-экономического анализа, выходящего за рамки данной книги. Например, можно исходить из условия одинаковой надежности всех узлов каскада, независимо от их класса и расчетного срока службы, а можно пойти на то, что некоторые ступени будут обладать меньшей надежностью, чем нижележащие, но тогда нижележащие ступени нужно рассчитывать на максимальный расход, возникающий в результате разрушения менее надежной вышележащей ступени. Схемы расчета максимальных расходов в этих случаях будут совершенно различны, причем эти случаи отнюдь не исчерпывают возможных ситуаций. Проблема максимальных расчетных расходов для каскадов настолько сложна, что даже в своей чисто принципиальной части она требует специального исследования.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГИДРОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ
РЕГУЛИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА

15. УРАВНЕНИЯ ВОДНОГО БАЛАНСА ВОДОХРАНИЛИЩ
И РАСЧЕТНАЯ ОБЕСПЕЧЕННОСТЬ ИХ РЕЖИМА

В теории регулирования речного стока водохранилищами существуют две основные задачи: 1) выработка оптимальной стратегии регулирования, т. е. таких правил отдачи воды водопользователям и водопотребителям, которые обеспечивают экстремум некоторого функционала, зависящего от режима отдачи и имеющего, обычно, экономический смысл; 2) построение вероятностных характеристик режима регулирования (функций распределения вероятностей наполнений водохранилищ и т. п.), отвечающих заданной (не обязательно оптимальной) стратегии. Для решения этих задач наиболее удобна и вместе с тем дает достаточную точность модель В (табл. 1), которой мы и будем придерживаться. Основой решения в обоих случаях являются уравнения водного баланса водохранилищ. Рассматривая регулирование стока одним водохранилищем, обозначим через Q_k^+ средний расход притока в водохранилище за k -тый интервал времени Δt , через Q_k^- средний расход, необходимый потребителям за то же время, через W_k объем воды в водохранилище к концу k -того интервала, дополненный объемом воды, сброшенным за этот интервал через плотину вхолостую или уменьшенный на объем воды, недоданной за то же время потребителям, через $s(W_{k-1})$ фактический объем воды в водохранилище к концу $k-1$ -го интервала. Если V — полный полезный объем водохранилища, то, очевидно, $s(W) = 0$ при $W < 0$, $s(W) = W$ при $0 \leq W \leq V$ и $s(W) = V$ при $W > V$. При этом предполагается, что потери уже вычтены из расхода притока, т. е. Q_k^+ есть приток нетто. Уравнение водного баланса водохранилища записывается в общем виде в конечных разностях как

$$Q_k^+ = Q_k^- + \frac{W_k - s(W_{k-1})}{\Delta t}. \quad (15.1)$$

Пусть год T делится на N интервалов Δt , Q_0 — среднегодовой расход реки и

$$\xi_k = \frac{Q_k^+}{Q_0}, \quad \alpha_k = \frac{Q_k^-}{Q_0}, \quad \beta = \frac{V}{Q_0 \Delta t}, \quad x_k = \frac{W_k}{Q_0 \Delta t},$$

$$s(x_{k-1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_{k-1} < 0 \\ x_{k-1} & \text{при } 0 \leq x_{k-1} \leq \beta \\ \beta & \text{при } x_{k-1} > \beta \end{cases}$$

Тогда уравнение (15.1) будет иметь вид

$$\xi_k = \alpha_k + x_k - s(x_{k-1}). \quad (15.2)$$

Отдача α_k регламентируется правилами регулирования. В оптимизационных задачах она выражается алгоритмически. В остальных же случаях отдача может быть поставлена в зависимость от номера интервала k и от наполнений водохранилища в несколько предшествующих интервалов $s(x_{k-1}), \dots, s(x_{k-m})$, т. е.

$$\alpha_k = \alpha_k \{s(x_{k-1}), \dots, s(x_{k-m})\}, \quad (15.3)$$

или короче

$$\alpha_k = \alpha_k(x_{k-1}, \dots, x_{k-m}). \quad (15.4)$$

Если, задавая правила регулирования в виде функции (15.3), пользоваться формулой (15.4), то нужно помнить, что при $x_{k-i} \leq 0$ при любом i будет

$$\begin{aligned} \alpha_k(x_{k-1}, \dots, x_{k-i+1}, x_{k-i}, x_{k-i-1}, \dots, x_{k-m}) = \\ = \alpha_k(x_{k-1}, \dots, x_{k-i+1}, 0, x_{k-i-1}, \dots, x_{k-m}) \end{aligned} \quad (15.5)$$

и при $x_{k-i} \geq \beta$ соответственно

$$\begin{aligned} \alpha_k(x_{k-1}, \dots, x_{k-i+1}, x_{k-i}, x_{k-i-1}, \dots, x_{k-m}) = \\ = \alpha_k(x_{k-1}, \dots, x_{k-i+1}, \beta, x_{k-i-1}, \dots, x_{k-m}). \end{aligned} \quad (15.6)$$

В случае каскада водохранилищ можно написать, по аналогии с уравнением (15.1), для i -той ступени каскада

$$Q_{ik}^+ = Q_{ik}^- + \frac{W_{ik} - s_i(W_{i,k-1})}{\Delta t}. \quad (15.7)$$

Здесь Q_{ih}^+ — расход воды, приходящей в водохранилище, Q_{ih}^- — расход воды, уходящей из него при условии, что все водопользователи и водопотребители удовлетворяются водой полностью. Очевидно,

$$Q_{ik}^- = Q_{ik}^* + Q_{ik}^{**} + \Delta Q_{ik}, \quad (15.8)$$

где Q_{ik}^* — расход, который необходимо пропустить в k -том интервале сквозь плотину i -той ступени для хозяйственного использования (например, расход турбин ГЭС i -той ступени и расход на шлюзование); Q_{ik}^{**} — требуемый расход безвозвратного водозабора; ΔQ_{ik} — расход потерь. Расход Q_{ik}^+ складывается из бокового притока в i -тое водохранилище q_{ik} и расхода, поступающего из $i-1$ -го водохранилища $Q_{i-1,k}^*$, уменьшенного на некоторую величину в случае дефицита или увеличенного на расход холостого сброса в случае переполнения $i-1$ -го водохранилища. В случае дефицита ($i-1$ -е водохранилище сработано до уровня мертвого объема) общая отдача $Q_{i-1,k}^* + Q_{i-1,k}^{**}$ уменьшается на величину $W_{i-1,k}/\Delta t$, а расход $Q_{i-1,k}^*$ — на некоторую меньшую величину $C_{i-1,k}(W_{i-1,k})/\Delta t$.

Таким образом,

$$Q_{ik}^+ = q_{ik} + Q_{i-1,k}^* + \frac{D_{i-1,k}(W_{i-1,k})}{\Delta t}, \quad (15.9)$$

где последний член правой части — поправка к расходу $Q_{i-1,k}^*$ за счет дефицитов и холостых сбросов, причем функция D определяется так:

$$D_{i-1,k}(W_{i-1,k}) = C_{i-1,k}(W_{i-1,k}) \text{ при } W_{i-1,k} < 0,$$

$$D_{i-1,k}(W_{i-1,k}) = 0 \text{ при } 0 \leq W_{i-1,k} < V_{i-1},$$

$$D_{i-1,k}(W_{i-1,k}) = W_{i-1,k} - V_{i-1} \text{ при } W_{i-1,k} > V_{i-1}.$$

Двойной индекс при функциях D и C связан с тем, что функция C может быть различной не только для разных водохранилищ, но и для разных временных интервалов. Эта функция входит в правила регулирования. Выражение (15.9) не учитывает времени добегания от $i-1$ -й до i -той плотины, которое будучи выражено в долях Δt обозначается через τ_i . Если учесть этот фактор [21, 23], то уравнение (15.9) следует написать так:

$$Q_{ik}^+ = q_{ik} + Q_{i-1,k-\tau_i}^* + \frac{D_{i-1,k-\tau_i}(W_{i-1,k-\tau_i})}{\Delta t}. \quad (15.10)$$

Объединяя уравнения (15.7), (15.8), (15.10), получаем

$$\begin{aligned} q_{ik} + Q_{i-1,k-\tau_i}^* + \frac{D_{i-1,k-\tau_i}(W_{i-1,k-\tau_i})}{\Delta t} = \\ = Q_{ik}^* + Q_{ik}^{**} + \Delta Q_{ik} + \frac{W_{ik} - s_i(W_{i,k-1})}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Обозначим через

$$\Theta_{li} = \tau_{l+1} + \dots + \tau_i \quad (l < i, \Theta_{ii} = 0)$$

время добегания от l -той до i -той плотины и запишем на основании уравнения (15.10)

$$\begin{aligned}
 q_{1, k-\Theta_{1i}} &= Q_{1, k-\Theta_{1i}}^* + Q_{1, k-\Theta_{1i}}^{**} + \Delta Q_{1, k-\Theta_{1i}} + \\
 &+ \frac{W_{1, k-\Theta_{1i}} - s_1(W_{1, k-\Theta_{1i}-1})}{\Delta t}, \\
 q_{2, k-\Theta_{2i}} &+ Q_{1, k-\Theta_{1i}}^* + \frac{D_{1, k-\Theta_{1i}}(W_{1, k-\Theta_{1i}})}{\Delta t} = \\
 &= Q_{2, k-\Theta_{2i}}^* + Q_{2, k-\Theta_{2i}}^{**} + \Delta Q_{2, k-\Theta_{2i}} + \frac{W_{2, k-\Theta_{2i}} - s_2(W_{2, k-\Theta_{2i}-1})}{\Delta t}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 q_{ik} &+ Q_{i-1, k-\Theta_{i-1, i}}^* + \frac{D_{i-1, k-\Theta_{i-1, i}}(W_{i-1, k-\Theta_{i-1, i}})}{\Delta t} = \\
 &= Q_{ik}^* + Q_{ik}^{**} + \Delta Q_{ik} + \frac{W_{ik} - s_i(W_{i, k-1})}{\Delta t}.
 \end{aligned}$$

Сложив все эти уравнения, получим

$$\begin{aligned}
 Q_{ik} &= Q_{ik}^* - \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{i-1} D_{j, k-\Theta_{ji}}(W_{j, k-\Theta_{ji}}) + \sum_{j=1}^i \left\{ Q_{j, k-\Theta_{ji}}^{**} + \right. \\
 &+ \left. \Delta Q_{j, k-\Theta_{ji}} + \frac{1}{\Delta t} [W_{j, k-\Theta_{ji}} - s_j(W_{j, k-\Theta_{ji}-1})] \right\}. \quad (15.12)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$Q_{ik} = \sum_{j=1}^i q_{j, k-\Theta_{ji}}$$

— естественный (т. е. при отсутствии водохранилищ) средний расход за k -тый интервал в створе i -той плотины.

Пусть Q_0 — среднегодовой расход в створе последней плотины каскада. Положим

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ik} &= \frac{Q_{ik}^{**}}{Q_0}, \quad \gamma_{ik} = \frac{Q_{ik}^*}{Q_0}, \quad \xi_{ik} = \frac{Q_{ik}}{Q_0}, \quad \pi_{ik} = \frac{\Delta Q_{ik}}{Q_0}, \\
 x_{ik} &= \frac{W_{ik}}{Q_0 \Delta t}, \quad \beta_i = \frac{V_i}{Q_0 \Delta t}, \quad C_{ik}(x_{ik}) = \frac{C_{ik}(W_{ik})}{Q_0 \Delta t}, \\
 D_{ik}(x_{ik}) &= \frac{D_{ik}(W_{ik})}{Q_0 \Delta t}, \quad s_i(x_{ik}) = \frac{s_i(W_{ik})}{Q_0 \Delta t},
 \end{aligned}$$

тогда (15.12) примет следующий вид:

$$\xi_{ik} = \gamma_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} D_{j, k-\Theta_{ji}}(x_{j, k-\Theta_{ji}}) + \sum_{j=1}^i \left\{ \alpha_{j, k-\Theta_{ji}} + \pi_{j, k-\Theta_{ji}} + \right. \\ \left. + x_{j, k-\Theta_{ji}} - s_i(x_{j, k-\Theta_{ji}-1}) \right\}. \quad (15.13)$$

Здесь

$$s_i(x_{ik}) = \begin{cases} 0 \\ x_{ik}; \\ \beta_i \end{cases} \quad D_{ik}(x_{ik}) = \begin{cases} C_{ik}(x_{ik}) \text{ при } x_{ik} < 0 \\ 0 \text{ при } 0 \leq x_{ik} \leq \beta_i \\ x_{ik} - \beta_i \text{ при } x_{ik} > \beta_i. \end{cases}$$

Необходимо заметить, что концепция, приводящая к понятию времени добегания [23], носит приближенный характер. В основу расчета каскада, строго говоря, следовало бы положить не уравнение водного баланса (15.7), построенное на предположении, что свободная поверхность водохранилища всегда горизонтальна (т. е. не имеет уклона), а уравнения неустановившегося течения в водохранилище. Тогда все запаздывания в наполнении бьефов были бы автоматически учтены этими уравнениями и вводить время добегания не потребовалось бы. Но этот принципиально наиболее правильный путь настолько сложен, что о его практической реализации говорить не приходится, по крайней мере в настоящее время. Приближенный характер исходной концепции делает бесполезными попытки особенно точного определения времени добегания и допускает округление значений Θ_{ji} до целых чисел. Получающаяся при этом ошибка зависит, конечно, от величины расчетного интервала Δt , соответствующий выбор которого в необходимых случаях может быть использован как средство уменьшения ошибок округления. Дробные значения Θ_{ji} создают большие неудобства как в принципиальном решении задачи, так и в алгоритмизации и программировании.

Вернемся к случаю одиночного водохранилища и обозначим через $\Phi_k(x_k)$ функцию распределения вероятностей наполнений водохранилища в конце k -того интервала.

Математическое ожидание $P(x)$ отношения суммарного времени в году, в течение которого наполнение водохранилища не менее x , к общей длительности года определяется, согласно [21, 23], по формуле

$$P(x) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=l}^{l+N-1} \Phi_k(x). \quad (15.14)$$

Расчетную обеспеченность режима можно определить как $P(0)$. Формула (15.14) дает возможность построить также характеристику дефицитов, т. е. значений P для отрицательных x . Каким образом дефицит будет распределяться между отдель-

ными водопотребителями и водопользователями, питающимися от данного водохранилища, а значит, какова будет обеспеченность отдельных компонентов водохозяйственного комплекса, зависит от правил эксплуатации водохранилища в условиях дефицита. Поэтому вопрос об обеспеченности отдельных компонентов может быть решен не в общем виде, а только для конкретных правил эксплуатации.

Если процесс регулирования почему-либо нестационарен, то $\Phi_k(x)$ не будет периодической функцией своего индекса периода N , и в этом случае формула (15.14) будет давать значения $P(x)$, меняющиеся от года к году.

Вопрос о расчетной обеспеченности для каскадов и других систем водохранилищ должен решаться в каждом случае индивидуально. Допустим, что каскад питает несколько оросительных систем. В этом случае может представлять интерес обеспеченность режима каждой из них. Правила регулирования могут быть таковы, что ограничение подачи воды каждой оросительной системе против требуемого количества начинается, как только питающее эту систему водохранилище срабатывается до уровня мертвого объема. В этом случае расчетная обеспеченность для каждой системы может быть подсчитана по формуле (15.14). Однако правила регулирования могут быть и другие. Например, какой-то оросительной системе (орошающей наиболее ценные культуры) вода подается по полной потребности даже в ущерб другим системам. Тогда обеспеченность отдельных систем должна определяться по иным зависимостям, которые нельзя дать в общем виде, так как они связаны с конкретными правилами регулирования.

Наряду с обеспеченностью отдельных оросительных систем, энергетической системы, в которой работают ГЭС при водохранилищах и т. д., может представлять интерес вопрос об абсолютном перебое, т. е. о вероятности того, что все водопользователи и водопотребители, питаемые данной системой водохранилищ, ограничиваются в своей потребности. Пусть для этого необходимо, чтобы наполнения $x_{1k}, \dots, x_{Rk}$ всех R водохранилищ системы удовлетворяли условиям $x_{1k} < a_k^{(1)}, \dots, x_{Rk} < a_k^{(R)}$, где $a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(R)}$ — некоторые неотрицательные числа; $\Phi_k(x_{1k}, \dots, x_{Rk})$ — совместная функция распределения вероятностей наполнений водохранилищ в конце k -того интервала. Введем случайную величину ϑ_k , принимающую только два значения: $\vartheta_k = 1$ при $x_{1k} < a_k^{(1)}, \dots, x_{Rk} < a_k^{(R)}$ и $\vartheta_k = 0$, если не выполняется хотя бы одно из этих неравенств. Число Λ интервалов Δt в году, в которых ограничиваются все водопользователи и водопотребители, равно

$$\Lambda = \sum_{i=k}^{k+N-1} \vartheta_i.$$

Следовательно, математическое ожидание Λ будет

$$\begin{aligned} M\Lambda &= \sum_{i=1}^{k+N-1} [1 \cdot P(\vartheta_i=1) + 0 \cdot P(\vartheta_i=0)] = \\ &= \sum_{i=k}^{k+N-1} P(\vartheta_i=1) = \sum_{i=k}^{k+N-1} \Phi_i(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(R)}), \end{aligned}$$

откуда искомая характеристика есть

$$\frac{M\Lambda}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^{k+N-1} \Phi_i(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(R)}). \quad (15.15)$$

Точно также может быть решен вопрос и об абсолютной обеспеченности, т. е. о вероятности того, что никакие водопользователи и водопотребители не ограничивают себя в потребности. Пусть для этого необходимо неравенство $x_{1k} > b_k^{(1)}, \dots, x_{Rk} > b_k^{(R)}$. Тогда искомая вероятность P будет

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{N} \sum_{i=k}^{k+N-1} \int_{b_i^{(R)}}^{\infty} \dots \int_{b_i^{(1)}}^{\infty} \frac{\partial^R}{\partial x_{1i} \dots \partial x_{Ri}} \Phi_i(x_{1i}, \dots, x_{Ri}) \times \\ &\quad \times dx_{1i} \dots dx_{Ri}. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Эти формулы являются обобщением формулы (15.14).

16. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ СТОКА И МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Начнем с простейшего случая — регулирования стока водохранилищем одной ГЭС, работающей параллельно с тепловыми электростанциями. Пусть N, P, S — активные мощности ГЭС, тепловых электростанций (суммарная) и потребителей энергии, ΔS — потери мощности в электрической сети, Q_T — расход турбин ГЭС, H — ее напор, B — стоимость энергетического топлива, расходуемого тепловыми электростанциями в единицу времени для работы с мощностью P , тогда

$$N = N(Q_T, H), \quad B = B(P), \quad S + \Delta S = N + P. \quad (16.1)$$

Первые два из этих соотношений — энергетические характеристики ГЭС и тепловой части энергосистемы — задаются графически. Выражения (16.1) относятся к мгновенным мощностям, расходу и напору. Используя модель В (табл. 1), необходимо от мгновенных энергетических характеристик перейти к среднеинтервальным. Эта чисто энергетическая задача разрешима только приближенно. Она рассматривается, например, в работе [60]. При переходе к среднеинтервальным характери-

стикам в качестве аргументов мощности ГЭС целесообразно взять не расход и напор, а расход и наполнение водохранилища, которыми определяется достаточно точно среднеинтервальный напор (исключая периоды паводков на ГЭС очень низкого напора, водохранилища которых, как правило, имеют очень малый объем и не способны осуществлять длительное регулирование). Для среднеинтервальных значений вместо (16.1) будет

$$N_k = N_k \left[Q_k^-, \frac{s(W_k) + s(W_{k-1})}{2} \right], \quad B_k = B_k(P_k), \quad S_k = N_k + P_k. \quad (16.2)$$

Здесь Q_k^- и s имеют те же значения, что и в (15.1), а S_k есть среднеинтервальная нагрузка энергосистемы, включая по-

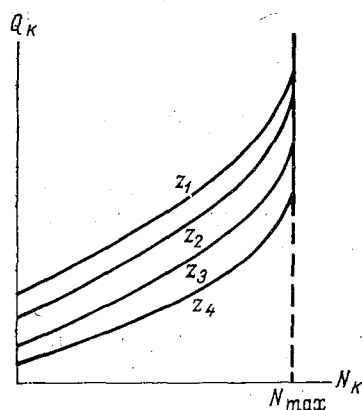


Рис. 21. Среднеинтервальная расходная характеристика ГЭС.

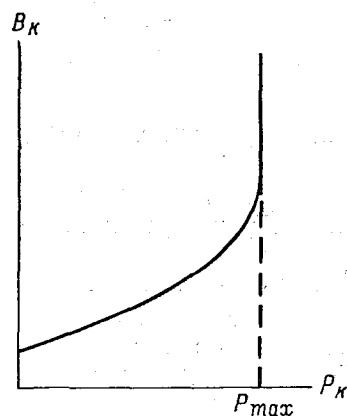


Рис. 22. Среднеинтервальная суммарная расходная характеристика тепловых электростанций энергосистемы.

тери в сетях. Среднеинтервальные характеристики ГЭС и тепловых электростанций зависят, вообще говоря, от номера интервала k , в частности, потому что в разных интервалах состав используемого энергетического оборудования может быть различным в связи с плановыми ремонтами. Общий вид среднеинтервальных характеристик ГЭС и тепловых электростанций представлен на рис. 21 и 22, на которых $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ — различные значения $z = [s(W_k) + s(W_{k-1})]/2$ в интервале $0 \leq z \leq V$, а $N_{\max}$ и $P_{\max}$ — полные располагаемые мощности ГЭС и тепловых электростанций. Предполагается, естественно, что $\max S_k \leq N_{\max} + P_{\max}$. Рис. 21 и 22 не должны, конечно, восприниматься в том смысле, что можно пропускать сколь угодно большие расходы через турбины ГЭС или расходовать произвольно большое количество топлива на тепловых электростанциях.

В действительности существуют предельные значения расхода воды и топлива, которые физически нельзя превзойти. Но принятая схематизация энергетических характеристик, на которой не указаны предельные значения, дает тем не менее гарантию, что эти предельные значения не будут превышены: превзойти их — значит расходовать воду или топливо, не увеличивая мощности ГЭС или соответственно тепловых электростанций, что находится в противоречии с самим принципом минимума издержек, из которого мы будем исходить далее, и, следовательно, такие ситуации автоматически исключаются в самом процессе решения задачи.

Из (16.2) и (15.1) следует

$$B_k = B_k \left\{ S_k - N_k \left[Q_k^+ - \frac{W_k - s(W_{k-1})}{\Delta t}, \frac{s(W_k) + s(W_{k-1})}{2} \right] \right\} \quad (16.3)$$

или, сокращенно, $B_k = B_k(Q_k^+, W_k, W_{k-1})$. В этой сокращенной записи зависимость B_k от S_k включена в зависимость B_k от k , ибо S_k есть функция k . Зависящая от режима регулирования часть Y_k^* издержек на эксплуатацию энергосистемы складывается практически из затрат на энергетическое топливо и издержек от недодачи энергии потребителям. Ограничения потребителей возникают только при $W_k < 0$, следовательно, ущерб можно рассматривать как некоторую функцию $f(W_k)$, равную нулю при $W_k > 0$ и быстро возрастающую с ростом W_k . Таким образом,

$$Y_k^* = B_k(Q_k^+, W_k, W_{k-1}) + f(W_k) = Y_k^*(Q_k^+, W_k, W_{k-1}). \quad (16.4)$$

Следует иметь в виду, что здесь не учтен целый ряд тонкостей, например то, что дефицит может выражаться не только в нехватке энергии, т. е. среднеинтервальной мощности, но и в нехватке мгновенной мощности, или то, что дефицит в каком-либо интервале может привести к дополнительным издержкам не только в данном, но и в следующих интервалах, ибо он может вызвать необходимость перестройки технологии тех или иных производств, последствия которой будут сказываться за пределами интервала, и т. д. Мы не можем останавливаться на всех этих экономических и энергетических деталях, ибо это очень увело бы нас в сторону от гидрологического направления данной книги.

Пусть в начале k -того интервала в условиях эксплуатации, когда известны все Q_i^+ и W_i для $i < k$, необходимо принять решение о будущем режиме. Очевидно, это целесообразно сделать так, чтобы суммарные зависящие от режима издержки были минимальны. Учитывая, что значимость затрат, производимых

в настоящем и в будущем не одинакова, слагаемое издержек для интервала $i > k$ будет не $Y_i^*(Q_i^+, W_i, W_{i-1})$, по (16.4), а

$$Y_i^{(k)} = e^{-p(l-k)\Delta t} Y_i^*(Q_i^+, W_i, W_{i-1}), \quad (16.5)$$

где p — величина, обратная сроку окупаемости капиталовложений.

Таким образом, режим нужно строить так, чтобы минимизировать математическое ожидание суммы

$$X_k = \sum_{i=k}^{\infty} Y_i^{(k)}(Q_i^+, W_i, W_{i-1}). \quad (16.6)$$

Учитывая, что $Y_i^{(k)} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и что поэтому слагаемые $Y_i^{(k)}$ при больших i практически не влияют на X_k , бесконечную сумму (16.6) можно заменить конечной, т. е. написать

$$X_k = \sum_{i=k}^K Y_i^{(k)}(Q_i^+, W_i, W_{i-1}), \quad (16.7)$$

где K — достаточно большое число, и минимизировать

$$MX_k = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X_k p(Q_k^+, \dots, Q_k^+ | Q_{k-1}^+, \dots, Q_1^+) \times \\ \times dQ_k^+ \dots dQ_k^+. \quad (16.8)$$

Здесь p — плотность распределения вероятностей среднеинтервальных расходов, а интервалу, следующему за моментом начала эксплуатации, приписан номер 1.

Выражение (16.8) предполагает прогнозирование предстоящего притока только по притоку предшествующему. Это выражение можно обобщить на случай, когда используются другие предикторы прогноза. Однако, мы не будем касаться здесь обширной темы использования прогнозов в регулировании стока, требующей для своего освещения специальной монографии.

Дж. Литтл [39], основываясь на том, что

$$p(Q_k^+, \dots, Q_{k+1}^+, Q_k^+ | Q_{k-1}^+, \dots, Q_1^+) dQ_k^+ \dots dQ_{k+1}^+ dQ_k^+ = \\ = p(Q_k^+, \dots, Q_{k+1}^+ | Q_k^+, Q_{k-1}^+, \dots, Q_1^+) dQ_k^+ \dots \\ \dots dQ_{k+1}^+ p(Q_k^+ | Q_{k-1}^+, \dots, Q_1^+) dQ_k^+,$$

а $Y_k^{(k)} = Y_k^*$ и не зависит от Q_i при $i > k$, записывает выражение (16.8) так:

$$MX_k = \int_{-\infty}^{\infty} (Y_k^* + MX_{k+1}) p(Q_k^+ | Q_{k-1}^+, \dots, Q_1^+) dQ_k^+.$$

Это выражение служит для оптимизационных расчетов, непосредственно использующих аналитические выражения для плотности распределения вероятностей p и выполняемых обычно методом динамического программирования [67, 69]. Распространение этой расчетной схемы на более сложные случаи (несколько водохранилищ, расположенных каскадом, или хотя бы на различных реках, но связанных электрическими связями через общую сеть, на которую работают ГЭС при водохранилищах, учет гидрологических прогнозов в расчетах оптимального регулирования и т. п.) приводит к очень громоздким выкладкам и вычислениям, главным образом из-за громоздкости выражений для соответствующих функций или плотностей распределения вероятностей.

Более гибкими в этом отношении оказались методы Монте-Карло, которые предполагают использование не функций или плотностей распределения вероятностей расходов, а искусственных реализаций процесса стока. Следует особо подчеркнуть, что выбор того или иного представления стока — аналитического (т. е. плотностью распределения расходов) или методом Монте-Карло — отнюдь не предопределяет метода оптимизации (прямое отыскание минимума MX_k , динамическое программирование и т. п.). То, что в дальнейшем используется прямое отыскание минимума MX_k связано не с использованием метода Монте-Карло, а со стремлением не перегружать изложение пояснениями специфических для теории оптимального управления математических вопросов.

В момент принятия решения в эксплуатационных условиях расходы естественного притока $Q_1, \dots, Q_{k-1}$ известны (здесь мы опустили, для простоты записи, верхний индекс $+$). Пользуясь уравнением (3.4), разыграем ансамбль искусственных реализаций процесса стока, продолжающих известную реализацию $Q_1, \dots, Q_{k-1}$. Это — так называемые условные реализации, т. е. реализации, отвечающие случаю, когда для каждой из них предшествующие расходы были $Q_1, \dots, Q_{k-1}$. Для этого с помощью таблицы или датчика равномерно распределенных в интервале $0 < \eta < 1$ случайных чисел η генерируем случайное число $\eta_k^{(1)}$ и находим соответствующее ему случайное число $\varepsilon_k^{(1)}$ из нормально распределенной (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией) генеральной совокупности. Технические приемы осуществления этой операции многообразны, но суть ее всегда сводится к построению, указанному на рис. 1. После этого по уравнению (3.4) можно вычислить расход $Q_k^{(1)}$ в k -том интервале для первой реализации. Далее генерируем случайное число $\eta_{k+1}^{(1)}$, по нему находим $\varepsilon_{k+1}^{(1)}$ и, зная $Q_k^{(1)}, Q_{k-1}, \dots, Q_{k-n+1}$, определяем по (3.4) расход $Q_{k+1}^{(1)}$. Для вычисления $Q_{k+2}^{(1)}$ используются число $\varepsilon_{k+2}^{(1)}$ и расходы $Q_{k+1}^{(1)}, Q_k, \dots, Q_{k-n+2}$. Анало-

гично находятся $Q_{k+3}^{(1)}$, $Q_{k+4}^{(1)}$, и т. д. — расходы, составляющие первую условную реализацию ансамбля. Совершенно так же строятся вторая ($Q_{k+1}^{(2)}$, $Q_{k+2}^{(2)}$, ..., $Q_K^{(2)}$), третья ($Q_{k+1}^{(3)}$, $Q_{k+2}^{(3)}$, ..., $Q_K^{(3)}$) и т. д. условные реализации, общее число их L должно составлять несколько десятков. Теперь для MX_k можно написать следующую оценку:

$$MX_k = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \sum_{i=k}^K Y_i^{(j)}(Q_i^{(j)}, W_i, W_{i-1}). \quad (16.9)$$

Необходимо найти такие $W_k, W_{k+1}, \dots, W_K$, которые дают минимум выражению (16.9). Это можно сделать хорошо разработанными в вычислительной математике методами отыскания экстремумов функций многих переменных. Регулирование нужно вести так, чтобы к концу k -того интервала достигнуть значения W_k . К этому моменту становится точно известен средний за k -тый интервал расход Q_k , который к началу интервала был задан только своим условным распределением вероятностей. Естественно, что мы сократим издержки, если в последующие интервалы будем пользоваться не значениями $W_{k+1}, W_{k+2}, \dots$, вычисленными в начале k -того интервала, а проделаем для $k+1$ -го интервала весь расчет заново, точно так же, как был сделан расчет для k -того интервала. В начале $k+2$ -го интервала расчет опять следует проделать заново, и т. д. Таким образом, для каждого интервала оптимальная стратегия выбирается заново.

Описанная процедура алгоритмически содержит все правила регулирования. При проектировании ГЭС иногда требуется установить, какова обеспеченность режима — вероятность отсутствия перебоев — или, иначе, какова вероятность того, что всегда $W > 0$. Здесь нужно различать два случая.

1. Состав энергетической системы не изменяется с течением времени, т. е. характеристики ГЭС и тепловой части энергосистемы, так же как и нагрузка S , зависят от времени (т. е. от индекса k) периодически с периодом в один год. Процесс регулирования в этом случае эргодичен. Разыграем по уравнению (3.4) реализацию процесса стока, задавшись n произвольными начальными значениями среднеинтервальных расходов. Зададимся также начальным наполнением водохранилища, соотносясь с принятыми начальными значениями расходов: например, если эти расходы примерно соответствуют паводку и, следовательно, начало первого интервала совпадает с концом паводка, то целесообразно считать, что в начале первого интервала водохранилище наполнено, т. е. $W_0 = V$. Проведем далее для $k=1, 2, \dots$ расчет оптимальной стратегии по изложенной выше схеме, полагая, что естественный приток к водохранилищу следует первоначально разыгранной реализации. Это значит,

что все условные реализации, разыгрываемые на каждом шаге оптимизации, имеют общее начало: до этого шага они совпадают с первоначально разыгранной реализацией. В результате получится реализация последовательности $W_1, W_2, \dots$. Чтобы исключить влияние произвольно принятых начальных условий, отбросим 4—5 первых лет этой реализации. Оставшаяся ее часть даст эргодическую последовательность W_k , по которой можно построить все требуемые функции распределения и пользоваться далее формулой (15.14). Длина первоначальной реализации при этом должна быть выбрана так, чтобы получившаяся эргодическая последовательность W_k имела длину не менее нескольких десятков лет. За эту реализацию можно принять и наблюдаемый гидрологический ряд, если он достаточно длинный.

2. Процесс регулирования не эргодичен, например, потому, что состав энергетической системы изменяется с течением времени. В этом случае вместо одной длинной начальной реализации процесса стока необходимо иметь ансамбль (несколько десятков) коротких (10—15 лет) реализаций и по каждой из них произвести все описанные расчеты. Это даст ансамбль неэргодических реализаций процесса W_k , и построение соответствующих функций распределения необходимо вести путем статистической обработки результатов расчета не по времени, как в предыдущем случае, а по реализациям.

Распространение изложенного решения на каскады ГЭС не представляет трудностей. В этом случае $Q_{ik}^{**}=0$, $C_{ik}(W_{ik})=W_{ik}$ и, если считать к тому же, что потери ΔQ_{ik} составляют незначительную долю естественного расхода и учитываются в этом расходе соответствующими поправками, то уравнение (15.12) приобретает вид

$$Q_{ik} = Q_{ik}^* - \frac{1}{\Delta t} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} D_{j, k-\theta_{ji}}(W_{j, k-\theta_{ji}}) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^i [W_{j, k-\theta_{ji}} - s(W_{j, k-\theta_{ji}-1})] \right\}. \quad (16.10)$$

Издержки на энергетическое топливо, когда в энергосистеме имеется один каскад из v ступеней и нет других ГЭС, определяются аналогично выражению (16.3)

$$B_k = B_k \left\{ S_k - \sum_{i=1}^v N_{ik} \left[Q_{ik}^*, \frac{s(W_{ik}) + s(W_{i, k-1})}{2} \right] \right\}. \quad (16.11)$$

Ущерб от недодачи энергии потребителям в данном случае можно выразить неотрицательной функцией $f(W_{1k}, \dots, W_{vk})$, равной нулю, когда все ее аргументы положительны, и отлича-

ющейся от нуля, когда хотя бы один из аргументов отрицателен. Подставив Q_{ih}^* из (16.10) в (16.11), легко написать выражение для математического ожидания издержек, аналогично выражению (16.9), после чего все сводится, как и в предыдущем случае, к минимизации этого математического ожидания подбором надлежащих значений W_{jl} ($j=1, \dots, v$; $l=k, \dots, K$). Розыгрыш реализаций как условных, так и (при определении вероятностных характеристик режима) первоначальных должен производиться здесь по матричному уравнению (3.24), т. е. по эквивалентной ему системе уравнений (3.25).

При многоотраслевом водном хозяйстве функция издержек зависит от тех же аргументов, что и в рассмотренных случаях, поэтому принципиально решение остается тем же самым. Наиболее трудная часть задачи в многоотраслевом случае состоит в формировании конкретной функции издержек, особенно той ее части, которая связана с ущербами. Этот вопрос не относится к гидрологии.

В оптимизационных задачах отдача задается алгоритмически. Именно этим вызывается необходимость при построении вероятностных характеристик режима регулирования выполнять розыгрыш многих ансамблей реализаций: 1) основного (первоначального) и 2) условных — на каждом шаге оптимизации. Если отдача задана не алгоритмически, а в явной форме, например в виде (15.4), необходимости в розыгрыше условных реализаций не возникает, и все дело сводится к последовательному вычислению значений W_k ($k=1, 2, \dots$) по уравнению (15.1) или значений W_{ik} ($i=1, \dots, v$; $k=1, 2, \dots$) по уравнениям (15.12), когда Q_k или Q_{ik} изменяются в соответствии с разыгранными реализациями — ансамблям сравнительно коротких реализаций в не эргодическом случае, или одной длинной — в эргодическом. Обработка получаемых в результате искусственных выборок W_k и W_{ik} позволяет выявить все вероятностные характеристики режима.

Явное задание отдачи может возникнуть в задачах регулирования стока, не связанных с оптимизацией (например, регулирование для водоснабжения, где обычно требуется выдержать заданный график подачи воды), а также в задачах, которые на всех стадиях проектирования могут рассматриваться упрощенно как не оптимизационные, и только при составлении плана эксплуатации водохранилищ рассматриваются как оптимизационные. При явном задании отдачи возможно сравнительно простое решение задач теории регулирования стока на основании его аналитического представления, не только имеющее значительное преимущество перед методом Монте-Карло как орудие теоретических обобщений, но и способное конкурировать с этим методом как вычислительное средство. К изложению этого решения мы и перейдем.

17. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод интегральных уравнений расчета регулирования речного стока на регламентированную отдачу, основанный на прямом применении формулы полной вероятности, использован в работе [22]. В дальнейшем этот метод получил развитие в ряде работ [12, 13, 21, 23, 26—29, 43, 53]. Однако в них, кроме работ [21, 23], рассматривается только многолетнее регулирование стока с делением времени на очень крупные интервалы (табл. 1, модели Г и Д). Речной сток представляется как марковский процесс и описывается функцией перехода. Получающиеся при этом интегральные уравнения для функций распределения вероятностей наполнений водохранилища очень сложны даже для сравнительно простых случаев. К более простому, гибкому и регулярному варианту метода интегральных уравнений можно прийти, описывая сток не функцией перехода, а соответствующей многомерной плотностью распределения вероятностей. Хотя преимущества указанного варианта неоспоримы, однако ядра интегральных уравнений, к которым он приводит, — достаточно сложные функции. Но эта сложность порождается уже свойствами самой задачи, т. е. необходимостью рассматривать трансформацию системой водохранилищ сложных (к тому же, многокомпонентных) марковских процессов. Под системой водохранилищ здесь понимается несколько водохранилищ, связанных между собой гидравлически (каскад) или хотя бы только электрически, в результате параллельной работы на общую сеть ГЭС при этих водохранилищах. Другими словами, здесь возникают трудности, специфические для больших систем. Хотя в каждом конкретном случае эти трудности связаны с функциональным типом уравнений, описывающих систему, но основа их всегда одинакова и заключается в многомерности системы («проклятие многомерности», по терминологии западной литературы). В данном случае эта многомерность приводит к тому, что разработка методов решения интегральных уравнений регулирования речного стока в сложных случаях (в простейших случаях указанное решение выполняется хорошо известными приемами и не требует пояснений) из технической задачи перерастает в самостоятельную проблему, которая еще только ждет своего решения. Следует заметить, что «проклятие многомерности» ни в какой мере не обходит и метод Монте-Карло.

Рассмотрим сначала регулирование стока одним водохранилищем.

Для описания стока как марковского процесса n -ного порядка следует задать его $n+1$ -мерную плотность распределения вероятностей

$$p_k(\xi_k, \dots, \xi_{k-n}), \quad (17.1)$$

например формулой (2.7).

Безусловная функция распределения будет иметь вид

$$\Phi_k(x_k, \dots, x_{k-n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(x_k, \dots, x_{k-n} | x_{k-n-1}, \dots, x_{k-n-m}) d\Phi_{k-n-1}(x_{k-n-1}) \dots d\Phi_{k-n-m}(x_{k-n-m}). \quad (17.5)$$

Здесь $\Phi_i(x_i)$ — безусловная функция распределения вероятностей наполнений водохранилища в конце i -того интервала; эту функцию и следует определить.

Обозначим для краткости

$$\{x_k, \dots, x_{k-n}\} = X, \quad x_{k-n-i} = z_i, \quad \Phi_{k-n-i} = \Psi_i$$

и запишем выражение (17.5) так:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x_k, \dots, x_{k-n}) &= \Phi_k(X) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(X | z_1, \dots, z_m) d\Psi_1(z_1) \dots d\Psi_m(z_m). \end{aligned} \quad (17.6)$$

Формулу (17.6) необходимо преобразовать так, чтобы функции $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ входили под интеграл в ее левой части непосредственно, а не как дифференциалы.

В общем виде для произвольного m искомая форма уравнения (17.6) очень громоздка.

Для $m=2$ она будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi_k(X) &= \Phi_k(X | \beta, \beta) - \int_0^\beta \Psi_1(z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \Phi_k(X | z_1, \beta) dz_1 - \\ &- \int_0^\beta \Psi_2(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} \Phi_k(X | \beta, z_2) dz_2 + \int_0^\beta \int_0^\beta \Psi_1(z_1) \Psi_2(z_2) \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \Phi_k(X | z_1, z_2) dz_1 dz_2, \end{aligned} \quad (17.7)$$

для $m=1$ и $m=0$

$$\Phi_k(X) = \Phi_k(X | \beta) - \int_0^\beta \Psi(z) \frac{\partial}{\partial z} \Phi_k(X | z) dz \quad (17.8)$$

(когда $m=0$, т. е. когда α_k вообще не зависит от наполнений водохранилища, тем не менее ξ_{k-n} зависит от x_{k-n-1} , что видно из предыдущих формул. Случай $m=1$ отличается от $m=0$ лишь тем, что ξ_{k-n} зависит от x_{k-n-1} не только через функцию s , но и через α_{k-n}).

Рассмотрим случай $m=1$. Напишем формулу (17.8) более подробно

$$\begin{aligned} \Phi_k(x_k, \dots, x_{k-n}) &= \Phi_k(x_k, \dots, x_{k-n} | \beta) - \\ &- \int_0^\beta \Phi_{k-n-1}(x_{k-n-1}) \frac{\partial}{\partial x_{k-n-1}} \Phi_k(x_k, \dots, x_{k-n} | x_{k-n-1}) dx_{k-n-1}. \end{aligned} \quad (17.9)$$

Положим $x_{k-1} = \infty, \dots, x_{k-n} = \infty$, тогда

$$\Phi_k(x_k, \infty, \dots, \infty) = \Phi_k(x_k)$$

— безусловная функция распределения вероятностей наполнений водохранилища в конце k -того интервала, а

$$\begin{aligned} \Phi_k(x_k, \infty, \dots, \infty | x_{k-n-1}) &= \Psi_k(x_k | x_{k-n-1}) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_k} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi_k(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n} | x_{k-n-1}) dy_{k-n} \dots dy_k \end{aligned}$$

будет условной функцией распределения вероятностей наполнений в конце k -того интервала при условии, что в конце $k-n-1$ -го интервала наполнение было x_{k-n-1} . Эта условная функция известна, поскольку φ_k задана формулой (17.3). На основании выражения (17.9) теперь можно написать:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x_k) &= \Psi_k(x_k | \beta) - \int_0^\beta \Phi_{k-n-1}(x_{k-n-1}) \frac{\partial}{\partial x_{k-n-1}} \times \\ &\times \Psi_k(x_k | x_{k-n-1}) dx_{k-n-1}, \end{aligned}$$

или более компактно

$$\Phi_k(x) = \Psi_k(x | \beta) - \int_0^\beta \Phi_{k-n-1}(y) \frac{\partial}{\partial y} \Psi_k(x | y) dy. \quad (17.10)$$

Если сток — гармонизуемый процесс (т. е. если его вероятностные характеристики одинаковы для всех лет) и рассматривается установившийся режим регулирования, то $\Phi_k(x) = \Phi_{k+N}(x)$. Учитывая это и написав уравнение (17.10) для $k = l, l+1, \dots, l+N-1$, где l — произвольное целое число, получим систему N интегральных уравнений для определения N неизвестных функций $\Phi_k(x)$.

Очевидно, что в более сложном случае $m > 1$ вместо линейной системы интегральных уравнений (17.10) будет нелинейная система с интегралами всех кратностей от 1 до m . В остальном решение не меняется.

Рассмотренное решение задачи регулирования стока дано без учета потерь воды из водохранилища. Потери можно учесть, если считать их детерминированными и включить в отдачу α_k или исключить из ξ_k . Считать их детерминированными — значит учитывать только их среднееголетние значения за каждый расчетный интервал. Такой подход приемлем, если потери играют второстепенную роль и их учет дает только некоторую поправку к результатам расчета, получаемым без их учета. Однако в засушливых районах потери на испарение могут быть существенными и стать фактором принципиального значения. В этих условиях необходимо считаться с их случайным характером.

Если расход потерь в k -том интервале ΔQ_k , а необходимая отдача нетто Q_k^- , то уравнение (15.1) следует записать так:

$$Q_k^+ = Q_k^- + \Delta Q_k + \frac{W_k - s(W_{k-1})}{\Delta t}. \quad (17.11)$$

Расход потерь ΔQ_k можно представить выражением

$$\begin{aligned} \Delta Q_k = & (E_k - e_k) \frac{\omega_k + \omega_{k-1}}{2} + (E_k - E_k^*) \left(\Omega - \frac{\omega_k + \omega_{k-1}}{2} \right) + \\ & + \varepsilon_k e_k \left(\Omega - \frac{\omega_k + \omega_{k-1}}{2} \right) + \Pi_k, \end{aligned} \quad (17.12)$$

где ω_k — площадь зеркала водохранилища в конце k -того интервала; Ω — площадь зеркала водохранилища при полном наполнении; E_k , E_k^* , e_k — средние за k -тый интервал слой испарения с водной поверхности, слой испарения с поверхности суши и слой осадков; ε_k — коэффициент стока в k -том интервале; Π_k — средний расход потерь на фильтрацию за интервал.

Главная часть потерь представлена первым членом правой части выражения (17.12), а точных данных о коэффициенте стока, соотношении между E_k и E_k^* и потерях на фильтрацию обычно нет. Поэтому формулу (17.12) необходимо представить в упрощенном виде

$$\Delta Q_k = \frac{1}{2} (1 + \lambda) (\omega_k + \omega_{k-1}) h_k. \quad (17.13)$$

Здесь $h_k = E_k - e_k$ и

$$\lambda = 2 \frac{(E_k - E_k^* + \varepsilon_k e_k) \left(\Omega - \frac{\omega_k + \omega_{k-1}}{2} \right) + \Pi_k}{(E_k - e_k) (\omega_k + \omega_{k-1})} \approx \text{const.}$$

Уравнение (17.11) теперь будет иметь вид

$$\xi_k = \alpha_k + [a(x_k) + a(x_{k-1})] \eta_k + x_k - s(x_{k-1}), \quad (17.14)$$

причем

$$a(x_k) = \frac{h_0 \omega_k}{Q_0} \cdot \frac{1 + \lambda}{2}, \quad \eta_k = \frac{h_k}{h_0},$$

где h_0 — среднее многолетнее значение h_k . Очевидно, $a(x_k)$ — монотонно возрастающая функция при $0 \leq x_k \leq \beta$ и постоянная при $x_k < 0$ и $x_k > \beta$, т. е.

$$a(x_k) = \frac{1 + \lambda}{2} \cdot \frac{h_0 \omega(0)}{Q_0} \quad \text{при } x_k < 0,$$

$$a(x_k) = \frac{1 + \lambda}{2} \cdot \frac{h_0 \beta}{Q_0} \quad \text{при } x_k > \beta,$$

где $\omega(0)$ — площадь зеркала водохранилища при наполнении его до уровня мертвого объема.

Уравнения (17.12) и (17.13) отвечают периоду до покрытия льдом водохранилища. Когда водохранилище покрывается льдом, потери на испарение практически прекращаются и вода теряется на ледообразование. Эти потери можно учесть выражением (17.13), в котором под h_k следует подразумевать средний за интервал слой воды, переходящей в лед. Коэффициент λ в этом случае будет, конечно, иметь иное выражение. В период снеготаяния лед, осевший на берегах, возвращается в водохранилище в виде воды, т. е. h_k в это время отрицательно. Мы не будем останавливаться на деталях учета зимних потерь, которые с точки зрения регулирования стока всегда являются второстепенным фактором. Существенно то, что эти потери также можно с некоторым приближением выразить уравнением (17.13).

Уравнение водного баланса (17.14) содержит в качестве исходных случайные процессы ξ_k и η_k . По поводу η_k или h_k необходимо заметить, что эта величина имеет разное физическое происхождение (испарение летом и ледообразование зимой). Однако это не мешает рассматривать последовательность значений η_k как единый случайный процесс, причем h_0 есть среднее значение h_k по всем интервалам за все годы.

Случайный процесс η_k можно также считать марковским процессом с $r+1$ звеньями. Этот процесс в общем случае стохастически связан с процессом ξ_k , поэтому характеристика двух указанных процессов задается совместной плотностью распределения вероятностей

$$p_k(\xi_k, \dots, \xi_{k-n}, \eta_k, \dots, \eta_{k-r}). \quad (17.15)$$

Переход к условной плотности распределения вероятностей наполнений водохранилища φ_k здесь требует применения более общей формулы, чем (17.2).

Пусть имеется случайный вектор $\{z_1, \dots, z_s, z_{s+1}, \dots, z_S\}$, первые s компонентов которого — функции остальных $S-s$ компонентов и еще s компонентов некоторого другого вектора $\{y_1, \dots, y_s\}$, т. е.

$$z_i = z_i(y_1, \dots, y_s, z_{s+1}, \dots, z_S), \quad i=1, \dots, s.$$

Тогда плотность распределения φ случайного вектора $\{y_1, \dots, y_s\}$ выразится через плотность (17.15)

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, \dots, y_s) = & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial(z_1, \dots, z_s)}{\partial(y_1, \dots, y_s)} p\{z_1(y_1, \dots, y_s, \\ & z_{s+1}, \dots, z_S), \dots, z_s(y_1, \dots, y_s, z_{s+1}, \dots, z_S), \\ & z_{s+1}, \dots, z_S\} dz_{s+1} \dots dz_S. \end{aligned} \quad (17.16)$$

При $S-s=0$ эта формула обращается в формулу (17.2). В нашем случае

$$\begin{aligned} z_1 &= \xi_k, \dots, z_s = \xi_{k-n}, z_{s+1} = \eta_k, \dots, z_S = \eta_{k-r}, \\ y_1 &= x_k, \dots, y_s = x_{k-n}, \end{aligned}$$

а α_k по-прежнему определяется формулой (15.4), т. е. (17.14) можно записать в виде

$$\xi_k = x_k - s(x_{k-1}) + [a(x_k) + a(x_{k-1})] \eta_k + \alpha_k(x_{k-1}, \dots, x_{k-m}). \quad (17.17)$$

На основании этого уравнения нетрудно найти

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_s)}{\partial(y_1, \dots, y_s)} = \prod_{i=0}^n [1 + a'(x_{k-i}) \eta_{k-i}]$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_k, \dots, x_{k-n} | x_{k-n-1}, \dots, x_{k-n-m}) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=0}^n [1 + a'(x_{k-i}) \eta_{k-i}] p_k\{x_k - s(x_{k-1}) + \\ + [a(x_k) + a(x_{k-1})] \eta_k + \alpha_k(x_{k-1}, \dots, x_{k-m}), \dots, x_{k-n} - \\ - s(x_{k-n-1}) + [a(x_{k-n}) + a(x_{k-n-1})] \eta_{k-n} + \\ + \alpha_{k-n}(x_{k-n-1}, \dots, x_{k-n-m}), \eta_k, \dots, \eta_{k-r}\} d\eta_k \dots d\eta_{k-r}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

Таким образом, разница между данным случаем и предыдущим заключается только в том, что (17.3) заменяется формулой (17.18). В остальном все предыдущие построения переносятся без изменений на рассматриваемый случай.

Рассмотрим теперь простейшие частные задачи, а именно регулирование на постоянную отдачу стока реки казахстанского типа, характеризующегося тем, что за очень короткий период весеннего паводка проходит практически весь годовой сток, причем период паводка занимает в календаре достаточно устойчивое положение. В этом случае за период Δt следует принять один год (если, конечно, не интересоваться процессом сработки водохранилища в промежутки между паводками) и, пренебрегая длительностью паводка, считать, что водохранилище наполняется мгновенно в один и тот же момент в каждом году. Процесс чередования годовых объемов стока и годовых слоев испарения будем считать простым марковским процессом ($n=1$). В этих условиях отдача α не зависит ни от наполнений водохранилища в предыдущие годы, ни от индекса k , от которого не зависят также функции распределения вероятностей годового стока (среднегодовых расходов), а при установившемся режиме регулирования — и функции распределения вероятностей наполнений водохранилища. Формула (17.18) приобретает вид

$$\varphi_k(x_k, x_{k-1} | x_{k-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + a'(x_k) \eta_k] [1 + a'(x_{k-1}) \eta_{k-1}] \times \\ \times p \{x_k - s(x_{k-1}) + [a(x_k) + a(x_{k-1})] \eta_k + \alpha, x_{k-1} - s(x_{k-2}) + \\ + [a(x_{k-1}) + a(x_{k-2})] \eta_{k-1} + \alpha, \eta_k, \eta_{k-1}\} d\eta_k d\eta_{k-1}, \quad (17.19)$$

а уравнение (17.10) будет

$$\Phi(x) = \Psi(x | \beta) - \int_0^{\beta} \Phi(y) \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x | y) dy. \quad (17.20)$$

Здесь

$$\Psi(x | y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + a'(x_k) \eta_k] [1 + a'(x_{k-1}) \eta_{k-1}] \times \\ \times p \{x_k - s(x_{k-1}) + [a(x_k) + a(x_{k-1})] \eta_k + \alpha, x_{k-1} - s(y) + \\ + [a(x_{k-1}) + a(y)] \eta_{k-1} + \alpha, \eta_k, \eta_{k-1}\} d\eta_k d\eta_{k-1} dx_{k-1} dx_k. \quad (17.21)$$

Если потери учитывать упрощенным способом, включая их в отдачу, то уравнение (17.20) останется без изменений, однако формула (17.21) упростится и примет вид

$$\Psi(x | y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} p \{x_k - s(x_{k-1}) + \alpha, x_{k-1} - s(y) + \alpha\} dx_{k-1} dx_k. \quad (17.22)$$

И, наконец, в самом простом случае, когда сток смежных лет стохастически не связан, уравнение (17.20) опять останется без изменения, а вместо формул (17.21) и (17.22) будет

$$\Psi(x|y) = \int_{-\infty}^x p[x_k - s(y) + \alpha] dx_k = F[x - s(y) + \alpha], \quad (17.23)$$

где F — функция распределения вероятностей годового стока. Подставляя $\Psi(x|y)$ из (17.23) в (17.20), получаем

$$\Phi(x) = F(x - \beta + \alpha) + \int_0^{\beta} \Phi(y) p(x - y + \alpha) dy \quad (17.24)$$

— уравнение, подробно рассмотренное в работах [26—29].

Остановимся подробнее на последовательности и деталях расчета регулирования стока водохранилищем на реке казахстанского типа (весь текст пети- том написан Н. С. Коргановой). В данном случае простой марковский процесс задается симметричной двумерной плотностью $p(\xi_k, \xi_{k-1})$ распределения вероятностей модульных коэффициентов стока ξ_k и ξ_{k-1} в два смежных года. Для простоты записи положим $\xi_k = t$, $\xi_{k-1} = \tau$, $x_k = u$, $x_{k-1} = v$ и, учитывая, что y , по смыслу уравнения (17.20), принимает значения только в пределах $0 \leq y \leq \beta$, в которых $s(y) = y$, запишем (17.22) в такой форме:

$$\begin{aligned} \Psi(x|y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} p\{u - s(v) + \alpha, v - y + \alpha\} dv du = \\ &= \int_{-\infty}^x du \left\{ \int_{-\infty}^0 p(u + \alpha, v - y + \alpha) dv + \int_0^{\beta} p(u - v + \alpha, v - y + \alpha) dv + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\beta}^{\infty} p(u - \beta + \alpha, v - y + \alpha) dv \right\} + \int_{-\infty}^{x+\alpha} \int_{-\infty}^{\alpha-y} p(t, \tau) d\tau dt + \\ &+ \int_{-\infty}^x du \int_0^{\beta} p(u - v + \alpha, v - y + \alpha) dv + \int_{-\infty}^{x+\alpha-\beta} dt \left\{ \int_{-\infty}^{\alpha-y} p(t, \tau) d\tau dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\alpha+\beta-y} p(t, \tau) d\tau \right\} = F(x + \alpha, \alpha - y) + F(x + \alpha - \beta, \infty) - \\ &- F(x + \alpha - \beta, \alpha + \beta - y) + \int_{-\infty}^x \int_0^{\beta} p(u - v + \alpha, v - y + \alpha) dv du, \end{aligned}$$

где F — совместная функция распределения вероятностей ξ_k и ξ_{k-1} . Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x|y) &= \psi(x, y) = -F_{\tau}(x + \alpha, \alpha - y) + F_{\tau}(x + \alpha - \beta, \alpha + \beta - y) - \\ &- \int_{-\infty}^x \int_0^{\beta} p_{\tau}(u - v + \alpha, v - y + \alpha) dv du, \end{aligned}$$

где $p_{\tau} = \partial p(t, \tau) / \partial \tau$, $F_{\tau} = \partial F(t, \tau) / \partial \tau$. Интеграл в этом выражении не сводится к двумерной функции распределения.

Для плотности $p(t, \tau)$ используем выражение (2.7) при $n=1$, что дает

$$p(t, \tau) = \frac{f'(t) f'(\tau)}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{f^2(t) - 2\rho f(t) f(\tau) + f^2(\tau)}{2(1-\rho^2)} \right\}.$$

Здесь через f обозначена функция, преобразующая данное распределение к нормальному, одинаковая для всех интервалов, поскольку каждый из них равен году, f' есть ее производная, а ρ — коэффициент корреляции между $f(\xi_k)$ и $f(\xi_{k-1})$, не зависящий от k . Из этой формулы

$$p_\tau(t, \tau) = p(t, \tau) \left[\frac{f''(\tau)}{f'(\tau)} - \frac{f(\tau) - \rho f(t)}{1-\rho^2} \right].$$

Если распределение вероятностей задано непосредственно преобразующей функцией $f(t)$, например (5.8) или (5.13), то вычисление $f'(\tau)$ и $f''(\tau)$ не вызывает никаких затруднений. Несколько сложнее случаи, когда используется эмпирическая функция распределения или аналитическое выражение для плотности $p(t) = dF(t)/dt$, выделить из которого преобразующую функцию простыми выкладками не удастся. В обоих случаях определение $f(t)$ сводится к решению трансцендентного уравнения (2.2), которое в обозначениях данного примера записывается так:

$$F(t) = \frac{1}{2} + G\{f(t)\}.$$

Это решение может выполняться специально разработанными для таких задач вычислительными методами, или графически, как на рис. 2. Вычисление производных f' и f'' различно для двух указанных случаев.

1. Если в качестве $F(t)$ используется эмпирическая функция распределения, то имеются значения $f(t)$ только для наблюдаемых t . Функция $f(t)$ аппроксимируется полиномами, различными для различных интервалов t , на коэффициенты которых накладывается естественное ограничение, вытекающее из того, что не только $f(t)$, но и производные $f'(t)$ и $f''(t)$, вычисленные по полиномам для левого и правого интервалов, должны быть одинаковы на границе этих интервалов. Для такой аппроксимации имеются стандартные машинные программы. Производные f' и f'' вычисляются дифференцированием полиномов.

2. Если для $p(t)$ подобрано аналитическое выражение, например (5.17), то дифференцируя дважды предыдущее уравнение, получаем:

$$f'(t) = \sqrt{2\pi} p(t) \exp \left[\frac{f^2(t)}{2} \right], \quad f''(t) = \left[f(t) f'(t) + \frac{p'(t)}{p(t)} \right] f'(t).$$

Интегрируя $p(t, \tau)$ по t , найдем

$$F_\tau(t, \tau) = p(\tau) \left\{ \frac{1}{2} + G \left[\frac{f(t) - \rho f(\tau)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right] \right\},$$

т. е.

$$F_\tau(x + \alpha, \alpha - y) = p(\alpha - y) \left\{ \frac{1}{2} + G \left[\frac{f(x + \alpha) - \rho f(\alpha - y)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right] \right\}.$$

$$F_\tau(x + \alpha - \beta, \alpha + \beta - y) = p(\alpha + \beta - y) \left\{ \frac{1}{2} + G \left[\frac{f(x + \alpha - \beta) - \rho f(\alpha + \beta - y)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right] \right\}.$$

Далее

$$F(x + \alpha - \beta, \infty) = \frac{1}{2} + G[f(x + \alpha - \beta)]$$

и

$$F(x + \alpha, \alpha - y) = G_*[f(x + \alpha), f(\alpha - y)],$$

$$F(x + \alpha - \beta, \alpha + \beta - y) = G_*[f(x + \alpha - \beta), f(\alpha + \beta - y)],$$

где G_* — двумерная нормальная функция распределения вероятностей. Эта функция

$$G_*(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{f_1} \int_{-\infty}^{f_2} \exp\left\{-\frac{w_1^2 - 2\rho w_1 w_2 + w_2^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dw_2 dw_1$$

табулирована [83], но при машинных расчетах ее, конечно, удобнее определять численным интегрированием, так же как двойной интеграл в выражении для $\Phi(x, y)$. Таким образом, все функции, через которые выражаются Ψ и ψ , определены полностью.

Выразим теперь интеграл в уравнении (17.20) с помощью какой-либо формулы приближенных квадратур и запишем это уравнение так:

$$\Phi(x) = \Psi(x|\beta) - \sum_{i=0}^n A_i \Phi(y_i) \psi(x, y_i). \quad (*)$$

Здесь $y_0=0, y_1, \dots, y_{n-1}, \beta$ и коэффициенты A_i определяются выбором квадратурной формулы (Котеса, Симпсона, Чебышева и т. д.). В частности, полагая $y_i = i \frac{\beta}{n}$ и интегрируя по формуле трапеций, будем иметь

$$\Phi(x) = \Psi(x|\beta) - \frac{\beta}{n} \left[\frac{1}{2} \Phi(0) \psi(x, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi\left(i \frac{\beta}{n}\right) \psi\left(x, i \frac{\beta}{n}\right) + \frac{1}{2} \Phi(\beta) \psi(x, \beta) \right].$$

Если пользоваться формулой прямоугольников, то в этом выражении подлежит отбросу коэффициент $1/2$ при $\Phi(0)$ и $\Phi(\beta)$. Полагая далее $x=0, y_1, \dots, y_{n-1}, \beta$ (в частности $x=i \frac{\beta}{n}$), получаем систему $n+1$ уравнений для определения $\Phi(0), \Phi(y_1), \dots, \Phi(\beta)$.

Таким образом, при вычислении $\Psi(x/y)$ и $\psi(x, y)$ все интегралы следует определять только для $x=i\beta/n$ (если нас не интересуют дефициты и «холостые» сбросы).

Нижеследующий численный пример заимствован из работы [30], где вычисления производились по алгоритму, существенно отличающемуся от изложенного. Однако, как и следовало ожидать, эти два алгоритма дают практически совпадающие результаты (разница получается в третьей или четвертой значащей цифре).

Пусть годовая отдача (включая потери) и полезная емкость водохранилища, отнесенные к математическому ожиданию годового стока, суть $\alpha=0,6$ и $\beta=0,8$ и пусть распределение вероятностей модульных коэффициентов годового стока дается формулой (5.17) с $\gamma=2$ (т. е. $C_v=0,71, C_s=2C_v$). Тогда

$$p(t) = 4te^{-2t}, \quad p'(t) = 4(1-2t)e^{-2t}.$$

Вычисление преобразующей функции $f(t)$ приводит к следующим результатам:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(t)$	$-\infty$	-2,000	-1,540	-1,172	-0,876	-0,628	-0,424
t	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$f(t)$	-0,232	-0,160	-0,100	0,244	0,380	0,508	0,628
t	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$f(t)$	0,740	0,848	0,948	1,044	1,136	1,224	1,308

Вычисление коэффициента корреляции ρ между $f(t)=f(\xi_k)$ и $f(\tau)=f(\xi_{k-i})$ выполняется по гидрологическому ряду элементарно. При $\rho=0,4$ система уравнений для определения значений функции распределения вероятностей наполнений водохранилища получается следующей:

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= 0,0243 + 0,02090\Phi(0) + 0,05232\Phi(0,2) + 0,05704\Phi(0,4) + \\ &\quad + 0,04801\Phi(0,6) + 0,01453\Phi(0,8), \\ \Phi(0,2) &= 0,0650 + 0,02631\Phi(0) + 0,06460\Phi(0,2) + 0,07200\Phi(0,4) + \\ &\quad + 0,06752\Phi(0,6) + 0,02492\Phi(0,8), \\ \Phi(0,4) &= 0,1375 + 0,02842\Phi(0) + 0,06901\Phi(0,2) + 0,07460\Phi(0,4) + \\ &\quad + 0,07180\Phi(0,6) + 0,02902\Phi(0,8), \\ \Phi(0,6) &= 0,2652 + 0,02712\Phi(0) + 0,06325\Phi(0,2) + 0,6804\Phi(0,4) + \\ &\quad + 0,06451\Phi(0,6) + 0,02610\Phi(0,8), \\ \Phi(0,8) &= 0,4019 + 0,02381\Phi(0) + 0,05422\Phi(0,2) + 0,05761\Phi(0,4) + \\ &\quad + 0,05270\Phi(0,6) + 0,02094\Phi(0,8).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= 0,0658; \quad \Phi(0,2) = 0,1217; \\ \Phi(0,4) &= 0,1985; \quad \Phi(0,6) = 0,3202; \\ \Phi(0,8) &= 0,4477,\end{aligned}$$

т. е. расчетная обеспеченность $1 - \Phi(0) = 0,9342$ и вероятность холостого сброса $1 - \Phi(\beta) = 0,5523$. Чтобы найти распределение вероятностей холостых сбросов и дефицитов, необходимо найденные значения Φ подставить в уравнение (*) и вычислить $\Phi(x)$ для значений $-\alpha < x < 0$ и $x > \beta$. Это дает

$$\begin{aligned}\Phi(-\alpha) &= 0, \quad \Phi(-0,4) = 0,0177, \\ \Phi(1,4) &= 0,7298, \quad \Phi(2,0) = 0,8902.\end{aligned}$$

При $\rho=0$ уравнение (17.20) переходит в (17.24), а значит все вычисления значительно упрощаются. В этом случае расчетная обеспеченность оказывается равной 0,9640, что, как и следовало ожидать, больше чем при наличии стохастической связи между стоком смежных лет.

Основная вычислительная трудность метода интегральных уравнений связана с вычислением кратных интегралов в формуле (17.4). В рассмотренном примере кратность равна двум и можно применять обычные квадратурные формулы. В более сложных случаях процедура кратного интегрирования производится более изощренными приемами, изложение которых потребовало бы такого углубления в вопросы вычислительной математики, какое выходит далеко за рамки данной книги.

Переходя к каскадам, мы ограничимся двумя водохранилищами. Полагая, что потери незначительны и поэтому могут быть учтены как детерминированные изменения безвозвратных отдач, напишем уравнение (15.13) для двух ступеней каскада:

$$\xi_{1k} = \gamma_{1k} + \alpha_{1k} + x_{1k} - s_1(x_{1, k-1}), \quad (17.25)$$

$$\begin{aligned} \xi_{2k} = & \gamma_{2k} - D_{1, k-\Theta}(x_{1, k-\Theta}) + \alpha_{1, k-\Theta} + \alpha_{2k} + x_{1, k-\Theta} + x_{2k} - \\ & - s_1(x_{1, k-\Theta-1}) - s_2(x_{2, k-1}). \end{aligned} \quad (17.26)$$

Здесь индекс при Θ за ненадобностью опущен. Временем добегания можно пренебречь, если оно мало по сравнению с Δt . Имея в виду этот случай и полагая, что каждая из отдач γ_{1k} , α_{1k} , γ_{2k} , α_{2k} в k -том интервале связана правилами регулирования с наполнениями обоих водохранилищ, запишем уравнения (17.25) и (17.26) так:

$$\xi_{1k} = \gamma_{1k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}) + \alpha_{1k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}) + x_{1k} - s(x_{1, k-1}), \quad (17.27)$$

$$\begin{aligned} \xi_{2k} = & \gamma_{2k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}) + \alpha_{1k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}) + \\ & + \alpha_{2k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}) - D_{1k}(x_{1k}) + x_{1k} + x_{2k} - \\ & - s_1(x_{1, k-1}) - s_2(x_{2, k-1}). \end{aligned} \quad (17.28)$$

Ограничимся простым марковским процессом стока, т. е. значением $n=1$, тогда совместная плотность распределения естественных расходов в створах плотин, характеризующая этот процесс, будет

$$p_k(\xi_{1k}, \xi_{1, k-1}; \xi_{2k}, \xi_{2, k-1}).$$

Якобиан в формуле (17.2), как нетрудно убедиться, равен единице. Аналогично изложенному выше находим условную плотность распределения вероятностей наполнений водохранилищ:

$$\begin{aligned} & \varphi_k(x_{1k}, x_{1, k-1}, x_{2k}, x_{2, k-1} | x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) = \\ & = p_k \{ x_{1k} - s_1(x_{1, k-1}) + \alpha_{1k}(x_{1k}, x_{2, k-1}) + \gamma_{1k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}), \\ & \quad x_{1, k-1} - s_1(x_{1, k-2}) + \alpha_{1, k-1}(x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) + \\ & \quad + \gamma_{1, k-1}(x_{1, k-2}, x_{2, k-2}), \\ & \quad x_{1k} + x_{2k} - s_1(x_{1, k-1}) - s_2(x_{2, k-2}) - D_{1k}(x_{1k}) + \\ & + \alpha_{1k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}) + \alpha_{2k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}) + \gamma_{2k}(x_{1, k-1}, x_{2, k-1}), \\ & \quad x_{1, k-1} + x_{2, k-1} - s_1(x_{1, k-2}) + s_2(x_{2, k-2}) - D_{1, k-1}(x_{1, k-1}) + \\ & + \alpha_{1, k-1}(x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) + \alpha_{2, k-1}(x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) + \\ & + \gamma_{2, k-1}(x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) \}. \end{aligned} \quad (17.29)$$

Отсюда совместная условная функция распределения вероятностей наполнений водохранилищ в конце k -го интервала будет равна

$$\Psi_k(x_{1k}, x_{2k} | x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) = \int_{-\infty}^{x_{2k}} \int_{-\infty}^{x_{1k}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(y_{1k}, y_{1, k-1}, y_{2k}, y_{2, k-1} | x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) dy_{1, k-1} dy_{2, k-1} dy_{1k} dy_{2k}. \quad (17.30)$$

По формуле полной вероятности имеем для безусловной функции распределения

$$\Phi_k(x_{1k}, x_{2k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(x_{1k}, x_{2k} | x_{1, k-2}, x_{2, k-2}) \times \\ \times d\Phi_{1, k-2}(x_{1, k-2}) d\Phi_{2, k-2}(x_{2, k-2}), \quad (17.31)$$

где $\Phi_{1, k-2}$ и $\Phi_{2, k-2}$ — безусловные одномерные функции распределения вероятностей наполнений в конце $k-2$ -го интервала. Выполняя в (17.31) интегрирование по частям и учитывая, что отдачи могут зависеть от $x_{1, k-2}$ и $x_{2, k-2}$ только в диапазоне

$$0 < x_{1, k-2} < \beta_1, \quad 0 < x_{2, k-2} < \beta_2$$

получаем

$$\Phi_k(x_{1k}, x_{2k}) = \Psi_k(x_{1k}, x_{2k} | \beta_1, \beta_2) - \\ - \int_0^{\beta_1} \Phi_{1, k-1}(y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} \Psi_k(x_{1k}, x_{2k} | y_1, \beta_2) dy_1 - \\ - \int_0^{\beta_2} \Phi_{2, k-1}(y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \Psi_k(x_{1k}, x_{2k} | \beta_1, y_2) dy_2 + \\ + \int_0^{\beta_1} \int_0^{\beta_2} \Phi_{1, k-1}(y_1) \Phi_{2, k-1}(y_2) \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \Psi_k(x_{1k}, x_{2k} | y_1, y_2) dy_2 dy_1. \quad (17.32)$$

Положив здесь сначала $x_{2k} = \infty$, а затем $x_{1k} = \infty$, получим в левой части соответственно $\Phi_{1k}(x_{1k})$ и $\Phi_{2k}(x_{2k})$. Это дает систему интегральных уравнений для определения безусловных одномерных функций распределения вероятностей наполнения $\Phi_{1k}(x_{1k})$, $\Phi_{2k}(x_{2k})$.

Для более сложных каскадов, более сложных правил регулирования и сложных ($n > 1$) марковских процессов задача решается по изложенной схеме, но, естественно, приводит к более громоздким результатам, чем выражение (17.32).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев Г. А. К вопросу определения эмпирических квантилей и коэффициента корреляции.— «Метеорология и гидрология», 1963, № 4, с. 16—23.
2. Алексеев Г. А. Объективные методы выравнивания и нормализации корреляционных связей. Л., Гидрометеиздат, 1971. 363 с.
3. Алехин Ю. М. Статистические прогнозы в геофизике. Л., Изд-во ЛГУ, 1963. 86 с.
4. Балек К. Применение стохастической теории для долгосрочного прогнозирования среднегодового стока.— В кн.: Статистические методы в гидрологии. Л., Гидрометеиздат, 1970, с. 241—244.
5. Блохинов Е. Г. Новые приемы для оценки параметров случайных колебаний речного стока по данным многолетних наблюдений.— «Труды ГГИ», 1968, вып. 143, с. 134—185.
6. Блохинов Е. Г., Сарманов О. В. Гамма-корреляция и ее использование при расчетах многолетнего регулирования речного стока.— «Труды ГГИ», 1968, вып. 143, с. 52—75.
7. Буслаев И. В., Давлетгалиев С. К., Куперман И. Г. Применение метода канонических разложений для моделирования речного стока.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства, вып. 10. Алма-Ата, «Наука», 1973, с. 143—152.
8. Гергов Г. И. Закономерности в изменении модуля стока.— «Метеорология и гидрология», 1972, № 8, с. 75—81.
9. Гирс А. А. Многолетние колебания атмосферной циркуляции и долгосрочные гидрометеорологические прогнозы. Л., Гидрометеиздат, 1971. 280 с.
10. Гостев А. Д. Математическое описание режима расходов рек.— «Проблемы регулирования речного стока», 1947, вып. 1, с. 5—19.
11. Гриневич Г. А., Петелина Н. А., Гриневич А. Г. Композиционное моделирование гидрографов. М., «Наука», 1972. 181 с.
12. Грузинов В. И. Применение теоремы полной вероятности к расчетам водохозяйственного многолетнего регулирования речного стока. Научные доклады высшей школы.— «Энергетика», 1958, № 1, с. 115—119.
13. Грузинов В. И. Многолетнее регулирование речного стока в случаях двух гидростанций, работающих в каскаде.— «Энергетика», 1958, № 3, с. 117—125.
14. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М., «Мир», 1965. 450 с.
15. Дроздов О. А., Григорьева А. С. Многолетние циклические колебания атмосферных осадков на территории СССР. Л., Гидрометеиздат, 1971. 158 с.
16. Захаров В. П., Ким В. Я. Непрерывная периодичность гидрологического процесса как методическая основа водохозяйственных расчетов.— «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1963, вып. 1, с. 73—100. Алма-Ата, изд-во АН КазССР.
17. Кайсл Ч. Анализ временных гидрологических рядов. Л., Гидрометеиздат, 1972. 138 с.

18. Калинин Г. П. Проблемы глобальной гидрологии. Л., Гидрометеиздат, 1968. 377 с.
19. Калинин Г. П., Давыдова А. И. Циклические колебания стока рек северного полушария.—В кн.: Проблемы речного стока. М., изд-во МГУ, 1968, с. 9—22.
20. Картвелишвили Н. А. О математическом описании и методике расчетов регулирования речного стока.—«Известия АН СССР», ОТН, 1956, № 1, с. 126—136.
21. Картвелишвили Н. А. Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного стока. Л., Гидрометеиздат, 1967. 291 с.
22. Картвелишвили Н. А. Энергетическое многолетнее регулирование речного стока в некоторых сложных случаях.—«Известия АН СССР», ОТН, 1957, № 6, с. 102—109.
23. Картвелишвили Н. А. Регулирование речного стока. Л., Гидрометеиздат, 1970. 218 с.
24. Картвелишвили Н. А., Корганова Н. С. Современные проблемы стохастической гидрологии.—«Водные ресурсы», 1972, № 3, с. 147—160.
25. Картвелишвили Н. А., Корганова Н. С. Интегральные уравнения регулирования речного стока.—«Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1973, вып. 10, с. 97—111.
26. Киктенко В. А. Обобщенный метод расчета многолетнего регулирования речного стока на отдачу нетто.—«Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1965, вып. 3, с. 58—73.
27. Киктенко В. А., Оширов Э. Н. Аналитический метод определения отдачи и сбросов при многолетнем регулировании стока.—«Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1964, вып. 2, с. 99—113.
28. Киктенко В. А., Оширов Э. Н. Методика аналитического расчета многолетнего регулирования стока при большой емкости водохранилища.—«Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1964, вып. 2, с. 114—134.
29. Киктенко В. А., Оширов Э. Н. Развитие обобщенного метода расчетов многолетнего регулирования стока на основе интегральных уравнений.—«Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1965, вып. 3, с. 74—95.
30. Киктенко В. А., Мальковский И. М., Оширов Э. Н. Обобщенный расчет регулирования стока при учете коррелятивной связи между водностью смежных лет.—«Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1968, вып. 6, с. 156—169.
31. Киласония А. Н. Выбор метода моделирования гидрологических рядов с учетом внутригодового распределения стока.—«Сообщения Академии наук Грузинской ССР», 1966, вып. 4, № 2, с. 387—394.
32. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей.—«Известия АН СССР», сер. матем., 1950, т. 5, № 1, с. 3—14.
33. Корганова Н. С. Об аналитических выражениях распределений вероятностей гидрологических величин.—«Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1973, вып. 10, с. 153—160.
34. Коренистов Д. В., Крицкий С. Н., Менкель М. Ф. Проблемы регулирования речного стока.—В кн.: Проблемы изучения и использования водных ресурсов. М., «Наука», 1972, с. 50—83.
35. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф. Расчет многолетнего регулирования речного стока с учетом коррелятивной связи между стоками смежных лет.—«Проблемы регулирования речного стока», 1959, вып. 8, с. 5—36.
36. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф. Об основных положениях методики расчета максимального стока.—«Труды ГГИ», 1969, вып. 162, с. 3—17.
37. Крюков В. Ф. Статистические критерии проверки гипотезы однородности двух выборок.—«Труды ГГИ», 1973, вып. 196, с. 97—123.
38. Кузнецов Н. Т., Соседов И. С. Колебания водоносности рек Северного Казахстана.—В кн.: Колебания и изменения речного стока. Изд. АН СССР, 1960, с. 48—57.

39. Литтл Д. Ж. Использование водохранилищ в гидроэнергетической системе.— В кн.: Оптимальное регулирование стока водохранилищами гидроэлектростанций. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963, с. 43—50.
40. Львович М. И. Изменения речного стока под влиянием земледелия.— В кн.: Колебания и изменения речного стока. Изд. АН СССР, 1960, с. 58—88.
41. Львович М. И. Изменения стока р. Хуанхе в связи с осуществлением плана мелиораций в ее бассейне.— В кн.: Колебания и изменения речного стока. Изд. АН СССР, 1960, с. 146—166.
42. Львович М. И., Назаров Г. В., Разумихин Н. В. Исследования влияния обработки почвы на сток в южном Заволжье.— В кн.: Колебания и изменения речного стока. Изд. АН СССР, 1960, с. 105—145.
43. Мониава А. Я. Расчет многолетнего регулирования стока при параллельной работе электростанций.— «Труды Института энергетики АН Грузинской ССР», 1959, т. 12, с. 235—243.
44. Морозов А. А. О расчете максимальных расходов рек при проектировании гидротехнических сооружений.— «Известия АН СССР», ОТН, 1952, № 7, с. 1104—1116.
45. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962. 720 с.
46. Раткович Д. Я. Закономерности чередования маловодных и многоводных лет как основа расчетов регулирования речного стока.— «Труды ГГИ», 1968, вып. 143, с. 76—105; 1968, вып. 160, с. 36—80; 1969, вып. 162, с. 62—173; 1970, вып. 180, с. 179—293.
47. Раткович Д. Я. Математическая модель колебаний годового стока для гидрологических и водохозяйственных расчетов.— «Гидротехническое строительство», 1972, № 3, с. 20—25.
48. Руководство по определению расчетных гидрологических характеристик. Л., Гидрометеиздат, 1973. 111 с.
49. Румянцев В. А., Сулимов В. С. Об устойчивости эмпирических значений статистических параметров гидрометеорологических процессов.— «Труды ГГИ», 1973, вып. 196, с. 3—41.
50. Сарманов И. О. Построение корреляции между равномерно распределенными случайными величинами.— «Труды ГГИ», 1968, вып. 160 с. 81—89.
51. Сарманов И. О. Несимметричная гамма-корреляция.— «Труды ГГИ», 1969, вып. 162, с. 37—61.
52. Саруханиян Э. Н., Смирнов Н. П. Многолетние колебания стока Волги. Л., Гидрометеиздат, 1971. 165 с.
53. Сванидзе Г. Г. Основы расчета регулирования речного стока методом Монте-Карло. Тбилиси, «Мецниереба», 1964. 272 с.
54. Сванидзе Г. Г., Киласония А. Н. О влиянии начала гидрологического года на значения статистических параметров стока и потребной емкости водохранилища.— «Метеорология и гидрология», 1969, № 1, с. 66—73.
55. Серебренников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. М., «Наука», 1965. 244 с.
56. Слуцкий Е. Е. Сложение случайных причин как источник циклических процессов. Избранные труды. М., 1960, с. 99—132.
57. Соколовский Д. Л. Речной сток. Л., Гидрометеиздат, 1968. 539 с.
58. Талалаевский Г. В. О применении асимптотической кривой для аппроксимации эмпирических кривых распределения.— «Труды ГГИ», 1973, вып. 196, с. 147—168.
59. Указания по определению расчетных гидрологических характеристик СН 435-72. Л., Гидрометеиздат, 1972. 19 с.
60. Цветков Е. В. Расчет оптимального регулирования стока водохранилищами гидроэлектростанций на ЦВМ. М., «Энергия», 1967. 135 с.
61. Чокан Ш. Ч., Григорьев В. А., Редькин В. К. Кривые распределения при расчете водохранилища по циклам регулирования.— «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1971, вып. 8, с. 103—119.
62. Чокан Ш. Ч., Григорьев В. А., Редькин В. К. Двухмодельные функции распределения стока.— «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», 1971, вып. 8, с. 120—140.

63. Чеботарев А. И., Харченко С. И. О методах оценки возможных изменений речного стока под влиянием земледелия.— «Метеорология и гидрология», 1964, № 7, с. 27—32.
64. Beard L. R. Monthly streamflow simulation. Computer Program 23-C-L263: Hydrol. Eng. Center. U. S. Army Corps of Eng. Washington D. C., 1957, p. 1—6.
65. Borgman L. E., Amorochio J. Some statistical problems in hydrology.— «Intern. Statist. Inst. Rev.», 1970, vol. 38, N 1, p. 82—96.
66. Fiering M. B. Streamflow synthesis. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., U.S.A., 1967, p. 139, ill.
67. Hall W. A., Harboe R. C., Yeh W. W.-G., Askew A. J. Optimum firm power output from a two reservoir system by incremental dynamic programming.— «Eng. Rep.», 1969, N 69—59, Los Angeles, Univ. of California, p. 65, ill.
68. Hall W. A., Shephard R. W. Optimum operations for planning of a complex water resources system.— «Eng. Rep.», 1967, N 67—54, Los Angeles, Univ. of California, p. 75, ill.
69. Heidari M., Ven Te Chow, Meredith D. D. Water resources system analysis by discrete differential dynamic programming. Univ. of Illinois of Urbana-Champaign, Dept. of Civil Eng., 1971, p. 188, ill.
70. Hufschmidt M. M., Fiering M. B. Simulation techniques for designing of water-resource systems. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1966, p. 212, ill.
71. Hurst H. E. Long-term storage capacities of reservoir.— «Am. Soc. Civil Eng. Trans.», 1951, vol. 116, p. 776—808.
72. Kaczmarek Z. O metodach doboru zespołu zmiennych prognozujących.— «Wiadomości Służby Hydrol. V(XVII)», 1969, 3, p. 11—22.
73. Kaczmarek Z. Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii. Warszawa, 1970, p. 312, ill.
74. Kaczmarek Z. Błędy w modelach prognostycznych.— «Wiadomości Służby Hydrol. V(XVII)», 1970, 1.
75. Kaczmarek Z., Litynski J. Statistical methods in long-term weather forecasting.— «WMO Tech. Note», 1965, N 66, p. 263—273.
76. Klemes V. A two-step probabilistic model of storage reservoir with correlated inputs.— «Water Resources Research», 1970, vol. 6, N 3, p. 756—767.
77. Korganova N. S., Kartvelishvili N. A. On determinate components in process of natural streamflow. Intern. Symp. on Math. Models in Hydrology, Warsaw, Poland 1971. Proc. vol., p. 1.
78. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. Computer experiments with fractional gaussian noises.— «Water Resources Research», 1969, vol. 5, N 1, p. 288—267.
79. Matalas N. C. Some aspects of time series analysis in hydrologic studies.— «Proc. Hydrol. Symp.», 1966, N 5, Montreal, Canada, Mc Gill Univ.
80. Matalas N. C. Mathematical assessment of synthetic hydrology.— «Water Resources Research», 1967, vol. 3, N 4, p. 937—945.
81. Matalas N. C. Time series analysis.— «Water Resources Research», 1967, vol. 3, N 3.
82. Melentijevich M. J. The analysis of range with output linearly dependent upon storage.— «Hydrol. Paper», 1965, N 11, Fort Collins, U.S.A., Colorado State Univ., p. 29.
83. Pearson K. Tables for biometricians and statisticians. P. II, London, 1931, p. 516.
84. Quimpo R. G. Stochastic model of daily river flow sequences.— «Hydrol. Paper», 1967, N 18, Fort Collins, U.S.A., Colorado State Univ., p. 30.
85. Revelle C., Joeres E., Kirby W. The linear decision rule in reservoir management and design. I. Development of the stochastic model.— «Water Resources Research», 1969, vol. 5, N 4, p. 767—777.
86. Roefs T. G., Bodin L. D. Multireservoir operation studies.— «Water Resources Research», 1970, vol. 6, N 2, p. 410—420.
87. Todorovic P. On some problems involving random number of random variables.— «Ann. Math. Statist.», 1970, 41(3), p. 1059—1063.

88. Todorovic P., Rousselle J. Some problems of flood analysis.—
"Water Resources Research", 1971, vol. 7, N 5, p. 1144—1150.
89. Todorovic P., Zelenhasic E. A stochastic model for flood analysis.—
"Water Resources Research", 1970, vol. 6, N 6, p. 1641—1648.
90. Yevdjevich V. M. Fluctuation of wet and dry years.—"Hydrol. Paper",
Colorado State Univ., P. I, 1963, N I, p. 50, P. II, 1965, N 10, p. 69.
91. Yevdjevich V. M. The application of surplus, deficit and range in hydrology.—
"Hydrol. Paper", 1965, N 10, Fort Collins, U.S.A., Colorado State Univ., p. 69.
92. Yevdjevich V. M. Stochastic problems in design of reservoirs. Water
Research. Ed. Kneese and Smith, Baltimore, Maryland, J. Hopkins Press
for Resources for the Future, 1966, p. 371—411.
93. Yevdjevich V. M. Significance tests of periodicity in hydrologic time
series. Intern. Symp. on Math. Models in Hydrology. Warsaw, Poland, 1971.
Proc. vol., p. I.
94. Yevdjevich V. M. Probability and statistics in hydrology. Fort Collins,
Colorado, U.S.A., 1972, p. 301, ill.
95. Yevdjevich V. M. Stochastic process in hydrology. Fort Collins, Colo-
rado, U.S.A., 1972, p. 276, ill.
96. Young G. K., Sommers W. P., Pisano W. C., Fitch W. N. Assess-
ing unplanned reservoirs using a daily flow model.—"Water Resources
Research", 1969, vol. 5, N 2, p. 362—379.
97. Zelenhasic E. Theoretical probability distributions for flood peaks.—
"Hydrol. Paper", 1970, Nov., N 42, Fort Collins, U.S.A., Colorado State
Univ., p. 35.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. <i>Речной сток как вероятностный процесс</i>	6
1. Общие математические характеристики и свойства речного стока	6
2. Гипотезы многомерных распределений вероятностей гидрометеорологических процессов	17
3. Уравнения в конечных разностях реализаций гидрометеорологических процессов	32
4. Гидрологические прогнозы с вероятностной точки зрения	49
Глава 2. <i>Одномерные распределения вероятностей гидрологических величин</i>	56
5. Аналитические выражения одномерных распределений	56
6. Оценка параметров одномерных распределений по гидрологическим рядам	67
7. Об определении параметров распределений вероятностей расходов при недостатке или отсутствии гидрологических наблюдений	79
Глава 3. <i>Цикличность речного стока</i>	85
8. Возможные причины появления детерминированных составляющих в гидрологических рядах	85
9. Корреляционная функция и спектральная плотность гидрологического процесса	93
10. Выделение скрытых периодичностей в гидрологических рядах	101
11. Вероятностное объяснение цикличности	107
Глава 4. <i>Максимальные расходы</i>	116
12. О понятии максимального расхода	116
13. О нормативной вероятности превышения расчетного максимального расхода	122
14. Функции распределения вероятностей максимальных расходов	124
Глава 5. <i>Стохастическая гидрология и теория регулирования речного стока</i>	130
15. Уравнения водного баланса водохранилищ и расчетная обеспеченность их режима	130
16. Оптимальное регулирование стока и метод Монте-Карло	136
17. Метод интегральных уравнений	144
Список литературы	158

*Николай Арчилович
Картвелишвили*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГИДРОЛОГИЯ

Редактор *З. М. Кожина*
Художник *А. И. Бородин*
Художественный редактор *В. С. Итальянцев*
Технический редактор *М. С. Костакова*
Корректоры: *Т. В. Алексеева, Л. И. Хромова*

Сдано в набор 12/XII 1974 г. Подписано к печати 6/III 1975 г.
М-17085. Формат 60×90¹/₁₆, бумага тип. № 1. Печ. л. 10,25.
Уч.-изд. л. 10,47. Тираж 2000 экз. Индекс ГЛ-342.
Заказ № 602. Цена 1 р. 30 к.

Гидрометеониздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, д. 23.

Ленинградская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.