

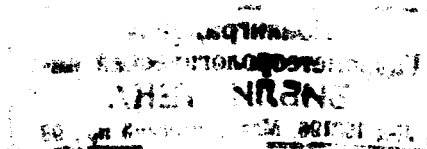
Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б. Д. ПАНИН, Р. П. РЕПИНСКАЯ

ПРОГНОЗ ВЛАЖНОСТИ, ОБЛАЧНОСТИ И ОСАДКОВ

Конспект лекций



ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

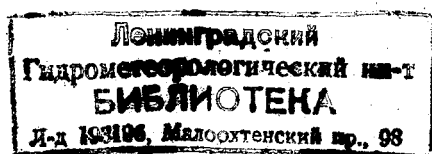
ЛЕНИНГРАД
1982

УДК 551.509.333

Рецензенты: кафедра гидрометеорологического обеспечения Высшего инженерного Краснознаменного института имени А. Ф. Можайского; *Ефимова Л. К.*, канд. физ.-мат. наук (Главная геофизическая обсерватория имени А. И. Воейкова).

*Одобрено Ученым Советом
Ленинградского гидрометеорологического института*

Рассматриваются способы численного прогноза влажности, облачности и осадков, применяемые в оперативной практике, и методика прогноза влаги, находящейся в трех агрегатных состояниях.



§ 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЛАЖНОГО ВОЗДУХА

В состав земной атмосферы наряду с азотом, кислородом, углекислым газом, аргонном и другими газами входит водяной пар, играющий важную роль в жизни атмосферы. Влажный воздух — смесь сухого воздуха и водяного пара — можно рассматривать как идеальную двухкомпонентную систему.

Основным источником водяного пара являются океаны, моря и увлажненная поверхность суши, откуда вода испаряется и куда снова выпадает в виде осадков. Водяной пар переносится и распределяется в атмосфере (неравномерно в пространстве и во времени) горизонтальными и вертикальными течениями воздуха и турбулентными потоками. Его содержание колеблется в весьма широких пределах: при очень низких температурах оно близко к нулю, а при высоких может достигать 4% от общего объема воздушной смеси. В среднем в атмосфере содержится $1,24 \cdot 10^{16}$ кг влаги, что эквивалентно слою осаждаемой воды 24 мм.

Водяной пар в атмосфере обновляется в среднем за $9,5 \div 11$ суток, т. е. примерно $33 \div 39$ раз в год. Одним из звеньев круговорота воды в атмосфере является конденсация водяного пара и формирование облака, генерирующего осадки. Облачность является мощным регулятором процессов переработки постоянного потока солнечной радиации в неравномерно распределенные в атмосфере притоки тепла. Особенно важно то, что облачность — один из наиболее изменчивых метеорологических элементов и что ее эволюция определяется крупномасштабными процессами, энергоснабжение которых она регулирует: ветром, сильно влияющим на скорость испарения воды с подстилающей поверхности и ответственным за горизонтальный перенос влаги, и вертикальными движениями, приводящими к возникновению либо исчезновению облачности.

Вследствие особой роли водяного пара в атмосферных процессах введено несколько различных характеристик для определения его количества в воздухе:

1) абсолютная влажность воздуха или плотность водяного пара ρ_n ;

2) удельная влажность воздуха, равная отношению массы водяного пара к массе влажного воздуха в фиксированном объеме

$$q = \frac{\rho_n}{\rho + \rho_n}, \quad (1.1)$$

и измеряемая обычно в г/г или г/кг;

3) парциальное давление (упругость) водяного пара

$$e(T) = \frac{\rho_n R^* T}{\mu_n} = \rho_n R_n T, \quad (1.2)$$

где μ_n — относительная молекулярная масса водяного пара; R^* — универсальная газовая постоянная; R_n — газовая постоянная водяного пара, равная приблизительно 1,6 газовой постоянной воздуха; T — температура воздуха в градусах по шкале Кельвина;

4) упругость насыщения $E(T)$ или насыщающая упругость, равная предельному значению упругости водяного пара при данной температуре;

5) относительная влажность f , равная отношению фактической упругости водяного пара к насыщающей упругости над плоской поверхностью чистой воды и выраженная в процентах:

$$f = \frac{e(T)}{E(T)} \cdot 100\% ; \quad (1.3)$$

6) точка росы $\tau = T_d - 273^\circ$ — температура в градусах Цельсия, при которой содержащийся в воздухе пар при постоянных общем атмосферном давлении $p_w = p + e$ (где p — давление сухого воздуха) и удельной влажности становится насыщенным по отношению к плоской поверхности воды;

7) дефицит точки росы

$$\Delta = t - \tau, \quad (1.4)$$

где t — температура воздуха по шкале Цельсия.

Получим теперь соотношения, связывающие различные характеристики влажности воздуха.

Пусть в некотором объеме воздуха сохраняются упругость водяного пара и общее давление, а температура понижается. Следовательно, насыщающая упругость будет уменьшаться. Температура, при которой относительная влажность достигнет 100%, будет представлять собой точку росы, а

$$e(T) = E(\tau), \quad (1.5)$$

где $E(\tau)$ — упругость водяного пара, соответствующая условиям насыщения. Перепишем соотношение (1.1) в виде

$$\begin{aligned} q &= \frac{e(T)}{R_n T \left(\frac{p}{RT} + \frac{e(T)}{R_n T} \right)} \approx \frac{e(T)}{1,6 \left(p + \frac{e(T)}{1,6} \right)} \approx \\ &\approx \frac{0,622 e(T)}{p + 0,622 e(T)} \approx \frac{0,622 e(T)}{p_w - 0,378 e(T)}, \end{aligned}$$

где p_w — давление ненасыщенного влажного воздуха.

Поскольку $p_w \gg e(T)$, то с большой точностью можно принять, что

$$q \approx \frac{0,622 e(T)}{p_w} \quad (1.6)$$

Для фактических условий удельная влажность насыщения

$$q = Q = 0,622 \frac{E(T)}{p_w} \quad (1.7)$$

Здесь $E(T)$ — упругость насыщения, соответствующая фактической температуре воздуха и связанная с температурой $t = T - T_0$ эмпирической формулой Магнуса

$$E(T) = E_0 \cdot 10^{\frac{at}{b+t}} \quad (1.8)$$

В формуле (1.8) обозначено: $E_0 = E(0) = 6,1078$ гПа — упругость насыщения водяного пара при $T_0 = 273^\circ \text{K}$; a и b — безразмерные величины, принимающие следующие значения:

$a = 7,63$, $b = 241,9$ над водой;

$a = 9,5$, $b = 265,5$ надо льдом.

Если над испаряющей поверхностью устанавливается подвижное равновесие между молекулами воды, отрывающимися от поверхности и возвращающимися к ней, то водяной пар насыщает окружающее пространство. Тогда, согласно равенству (1.5), насыщающая удельная влажность

$$Q = \frac{0,622 E(\tau)}{p_w}, \quad (1.9)$$

где $E(\tau)$ вычисляется по эмпирической формуле Магнуса, записанной для температуры точки росы

$$E(\tau) = E_0 \exp \left(-\frac{a\tau}{b+\tau} \right), \quad (1.10)$$

в которой a и b константы: $a = 17,1$, $b = 235$.

Очевидно, что расчеты Q по формуле (1.10) более корректны, чем по формуле (1.7).

Приведенные соотношения позволяют по измеренным или полученным в результате прогноза значениям температуры воздуха T и точки росы τ вычислять фактическую удельную влажность q и удельную влажность Q , соответствующую условиям насыщения.

§ 2. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ВЛАГИ

Определение условий, благоприятных для конденсации водяного пара, сводится к выяснению вопроса, достигнет ли воздух насыщения. Состояние насыщения или даже пересыщения, необходимое для начала процесса конденсации, достигается в атмосфере или благодаря притоку водяного пара к данному объему воздуха, или вследствие изменения температуры и давления, от которых зависит максимальная удельная влажность. При температурах, наблюдаемых в атмосфере, влага может находиться одновременно в трех агрегатных состояниях: газообразном, жидком и твердом. Поэтому при прогнозе необходимо вычислять ее содержание в трех фазах в пространстве и во времени.

Процессы переноса влаги и тепла в атмосфере, приводящие к конденсации влаги и образованию облаков — первичных продуктов конденсации, — а также к последующей их эволюции, описываются уравнениями переноса влаги и притока тепла.

Рассмотрим простейший вариант краткосрочного прогноза влажности в свободной атмосфере (выше пограничного слоя). В первом приближении будем полагать, что перенос влаги осуществляется без учета диффузии таким образом, что отсутствуют ее приток (испарение капельно-жидкой и кристаллической фаз) и отток (сублимация и конденсация водяного пара) в движущейся частице. В этом случае сохраняемой (консервативной) величиной при переносе массы воздуха является удельная влажность q .

Получим уравнение для прогноза локальных изменений удельной влажности в адиабатическом приближении. Воспользуемся для этой цели уравнением, описывающим закон сохранения массы водяного пара ρq в единичном объеме воздуха (без учета диффузии)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho q) + \operatorname{div}(\rho q \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

и уравнением неразрывности для полной массы жидкости, умноженным на q :

$$q \frac{\partial \rho}{\partial t} + q \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.1) и (2.2) через $\vec{V}$ обозначен вектор скорости. Запишем оба уравнения в изобарической системе координат и вычтем первое из второго. Получим, что

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \xi} \right), \quad (2.3)$$

где $\xi = \frac{p}{1000}$ — лагранжева вертикальная координата;

$\omega = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt}$ — аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат.

Таким образом, как следует из уравнения (2.3), локальные изменения удельной влажности в любой точке трехмерного пространства x, y, ξ при отсутствии источников и стоков влаги полностью определяются упорядоченным переносом водяного пара со средними скоростями в горизонтальном и вертикальном направлениях, т. е. адвекцией.

Уравнение (2.3), переписанное в виде

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad q = \text{const}, \quad (2.4)$$

означает, что при высказанной гипотезе в каждой индивидуальной частице воздуха, движущейся вдоль линий тока, имеет место сохранение удельной влажности q .

Уравнение (2.3) представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных. Для реализации прогноза удельной влажности на его основе необходимо знать в начальный момент t_0 , от которого ведется отсчет времени, и на всех последующих шагах значения функций u, v, ω , которые могут быть получены из динамической части задачи, т. е. путем решения полной системы уравнений модели атмосферы. Необходимо знать также начальное условие искомой функции $q(x, y, \xi)$, которое задается в виде известного, полученного из наблюдений или путем расчетов, распределения удельной влажности в исходный момент t_0 . Требуется, кроме того, граничные условия по переменным x, y , которые задаются в виде некоторых известных функций, описывающих изменение удельной влажности или потока водяного пара во времени на границах области. Например, граничные условия по x, y можно сформулировать в виде фиктивных граничных условий: на всем внешнем периметре прогностической области

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (2.5)$$

либо типа «вязкого слоя», когда

$$\left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (2.6)$$

где n — нормаль к боковым границам области.

Условие (2.5) означает неизменность значений q в каждом сеточном узле, расположенном на границе области, в течение всего срока прогноза. Пользуясь этим условием, мы получим прогноз для области на один шаг меньше исходной.

Согласно условию (2.6) значения q в каждой паре сеточных узлов, расположенных на одной нормали, восстановленной между

двумя внешними рядами точек, совпадают. С физической точки зрения это означает, что здесь отсутствует обмен влагой.

Кроме граничных условий по x и y , формулируются краевые условия по вертикальной координате при $\xi=0$ и $\xi=1$. На верхней границе атмосферы полагают

$$q \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (2.7)$$

Это условие означает, что при $\xi=0$ атмосфера сухая. Отметим, что условие (2.7) некорректно, так как верхняя граница атмосферы присутствует в прогностических схемах формально и условие (2.7) применяется для уровней, где ξ мало, но не равно нулю (например, для уровней тропопаузы, $\xi = 0,1$, $\xi = 0,2$ и других).

На нижней границе атмосферы простейшее краевое условие можно сформулировать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (2.8)$$

Такое условие означает, что при $\xi=1$ нет переноса влаги от подстилающей поверхности в атмосферу и обратно посредством механизмов вертикальных движений. Очевидно, что такое условие является очень грубым и может быть использовано в том случае, если подстилающая поверхность сухая.

Нередко нижнее краевое условие задают в виде

$$q \Big|_{\xi=1} = s \cdot Q \quad (0 \leq s \leq 1). \quad (2.9)$$

Условие (2.9) в некотором отношении является более корректным, поскольку параметр s в какой-то мере учитывает степень насыщения воздуха у земли и является функцией координат x , y , т. е. зависит от характера подстилающей поверхности. Только вблизи сильно увлажненной поверхности суши и над водой можно воспользоваться условием (2.9), приняв $s=1$, т. е. считать, что водяной пар находится в состоянии, близком к насыщению:

$$q \Big|_{\xi=1} = Q(T_v, p_*). \quad (2.10)$$

Здесь T_v — температура водной поверхности, а p_* — давление воздуха вблизи нее, т. е. при $z=0$. В остальных случаях значения функции s приходится выбирать произвольно.

Некорректность условий (2.9) и (2.10) заключается в том, что уровни $\xi=1$ и $z=0$ хотя и близки, но совпадают лишь в том случае, когда $p_* = 1000$ гПа. Кроме того, следует иметь в виду, что прогностическое уравнение записано для свободной атмосферы, влияние пограничного слоя, в котором происходит испарение, не учитывается, а сам пограничный слой стягивается в пленку, так что уровень $\xi=1$ является одновременно нижней границей атмосферы и его верхней границей.

§ 3. ПРОГНОЗ ВЛАЖНОСТИ С УЧЕТОМ КОНДЕНСАЦИИ

Уравнение переноса удельной влажности (2.4) справедливо лишь для ненасыщенного воздуха, когда температура точки росы T_d меньше температуры воздуха T и, следовательно, $q < Q$. Если $T = T_d$, $q \geq Q$, то уравнение переноса удельной влажности следует использовать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \xi} = -r, \quad (3.1)$$

где r — количество воды, сконденсировавшейся в единице объема воздуха за единицу времени, т. е. скорость конденсации (мощность стока) водяного пара. Величина r (вне облака $r=0$) пропорциональна изменению удельной влажности насыщения в частице воздуха: $r \sim \frac{dQ}{dt}$. Следовательно, зная Q на двух последовательных шагах по времени, можно оценить величину r .

Уравнение (3.1) можно решать с краевыми условиями (2.7) и (2.8) либо (2.9) по ξ и (2.5), (2.6) по x, y .

Поскольку насыщающая удельная влажность Q является функцией температуры, то температуру также необходимо прогнозировать путем интегрирования неадиабатического уравнения притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\omega}{\xi} = \frac{Lr}{c_p}, \quad (3.2)$$

где L — скрытая теплота конденсации (парообразования); $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$ — вертикальный градиент температуры: $\gamma_a = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{g}{R}$ — сухоадиабатический вертикальный градиент температуры $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,40$ — отношение теплоемкостей воздуха при постоянных давлении и объеме; $Lr = \epsilon_{\text{ф}} = \epsilon_{\text{конд}}$ — удельный приток тепла к движущемуся вдоль линий тока влажному воздуху вследствие конденсации водяного пара.

Для решения уравнения (3.2) необходимо знать начальные условия $T(x, y, \xi)_0$ и задать граничные условия. По переменным x, y последние аналогичны условиям (2.5) или (2.6), т. е.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (3.3)$$

либо

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (3.4)$$

При $\xi=0$ можно положить

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad (3.5)$$

т. е. считать, что вблизи верхней границы атмосферы имеет место изотермическое распределение температуры с высотой.

При $\xi=1$ граничные условия нередко формулируются в виде баланса тепловой энергии земной поверхности.

Поскольку в уравнения теплового баланса земной поверхности входит не только радиационный баланс, но также и потоки тепла в почву и в атмосферу, то в этом случае к уравнениям переноса тепла и влаги в атмосфере подключаются уравнения переноса тепла и влаги в почве. Причем граничное условие ставится на той глубине, где влажность насыщающая, а температура почвы постоянна.

При решении системы уравнений (3.1) и (3.2) о степени приближения воздуха к состоянию насыщения можно судить по величине разности между насыщающей Q и фактической удельной влажностью q : $\delta = Q - q$ ($\delta > 0$ — состояние ненасыщенное, $\delta \leq 0$ — состояние насыщенное). Однако предвычисление дефицита удельной влажности δ по приведенной формуле нецелесообразно, так как в ней каждый из членов обычно на порядок больше их разности, т. е. δ есть малая разность больших величин. Следовательно, если даже величина погрешности в определении q и Q будет на порядок меньше, чем величина самих членов, то ошибка в расчетах дефицита влажности будет того же порядка, что и δ . Поэтому для изучения условий конденсации, образования и эволюции облачности целесообразно применять уравнение переноса относительной влажности или дефицита влажности, что позволит сразу предвычислять названные характеристики.

§ 4. ПРОГНОЗ ТОЧКИ РОСЫ

Уравнение адвекции удельной влажности (2.4) неудобно в том смысле, что удельная влажность непосредственно не измеряется, а вычисляется по соотношению

$$q = \frac{0,622 E(\tau)}{p_w}. \quad (4.1)$$

Получим уравнение, которое позволило бы сразу прогнозировать условия насыщения. Для этой цели прологарифмируем соотношение (4.1) и возьмем индивидуальную производную с учетом того, что насыщающая упругость $E(\tau)$ — сложная функция, зависящая от времени. Получим

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dE}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{p_w} \frac{dp_w}{dt}, \quad (4.2)$$

где

$$\frac{1}{p_w} \frac{dp_w}{dt} = -\frac{\omega}{\zeta}.$$

Избавимся от индивидуальной производной $\frac{dE}{d\tau}$. Аналогично прологарифмируем и продифференцируем формулу Магнуса (1.10). В результате получим

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{d\tau} = \frac{a(\tau+b)-a\tau}{(b+\tau)^2}.$$

На основании оценки коэффициентов a и b можно заключить, что $b \gg a$. Тогда

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{d\tau} \approx \frac{a}{b}. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) с учетом соотношения (4.3) перепишем в виде

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = \frac{a}{b} \frac{d\tau}{dt} - \frac{\omega}{\zeta}. \quad (4.4)$$

Разрешим полученное уравнение относительно индивидуальных изменений точки росы:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{b}{aq} \frac{dq}{dt} + \frac{b}{a} \frac{\omega}{\zeta}. \quad (4.5)$$

Если рассматривать процесс без стоков влаги то $\frac{dq}{dt} = 0$. Следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial \tau}{dt} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} + \omega \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} - \frac{b}{a} \frac{\omega}{\zeta} = 0. \quad (4.6)$$

Введем в рассмотрение вертикальный градиент стратификации точки росы

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = P_0 \frac{\partial \tau}{\partial p}. \quad (4.7)$$

Используя уравнение статики в декартовой системе координат

$$\frac{\partial p_w}{\partial z} = -\rho g,$$

приведем соотношение (4.7) к виду

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = -\frac{P_0}{\rho g} \frac{\partial \tau}{\partial z}.$$

С учетом уравнения состояния перепишем полученное соотношение следующим образом:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = - \frac{P_0}{p_w} \frac{RT}{g} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{RT}{g \zeta} \gamma_\tau, \quad (4.8)$$

где

$$\gamma_\tau = - \frac{\partial \tau}{\partial z}.$$

Подставляя (4.8) в уравнение (4.6), получим

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} + \omega \frac{RT}{g \zeta} \gamma_\tau - \frac{b}{a} \frac{\omega}{\zeta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{RT}{g \zeta} \omega \left(\frac{b}{a} \frac{g}{RT} - \gamma_\tau \right) = 0. \quad (4.9)$$

Введем обозначение для адиабатического вертикального градиента точки росы

$$\gamma_{\tau_a} = \frac{b}{a} \frac{g}{RT},$$

тогда прогностическое уравнение для τ примет вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_{\tau_a} - \gamma_\tau) \frac{\omega}{\zeta} = 0. \quad (4.10)$$

Поскольку точка росы служит характеристикой влажности воздуха, а не его термического режима, то уравнение (4.10) позволяет непосредственно прогнозировать условия насыщения и интегрируется так же, как уравнение притока тепла при прогнозе температуры.

Получим теперь прогностическое уравнение для точки росы при условии, что в атмосфере имеются источники и стоки влаги.

В этом случае на основании уравнения (4.5) и того, что $\frac{dq}{dt} = -r$, имеем

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{r}{q} + \frac{b}{a} \frac{\omega}{\zeta}, \quad (4.11)$$

где при насыщении $q = Q$.

Очевидно, что уравнением (4.11) нужно пользоваться тогда, когда $T \leq \tau$. Если же $T > \tau$, прогноз τ выполняется по уравнению (4.10).

Указанные ограничения для уравнений (4.10) и (4.11) создают определенное неудобство при реализации прогноза влажности.

Рассмотрим, как можно поставить граничные условия по переменным x , y и z для полученных уравнений.

Боковые условия по переменным x , y ставятся для точки росы так же, как и для удельной влажности:

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial \tau}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

При $z=0$ атмосферу можно считать сухой, т. е. положить $q|_{z=0}=0$. Однако, исходя из соотношения

$$q|_{z=0} = 0,622 \frac{E(\tau)}{p},$$

нельзя требовать, чтобы

$$E(\tau) = 6,1078 \exp \left(-\frac{17,1 \tau}{235 + \tau} \right) = 0 \quad \text{при } z=0,$$

так как в этом случае должно выполняться условие

$$\exp \left(-\frac{17,1 \tau}{235 + \tau} \right) = 0.$$

Очевидно, что это условие невыполнимо, поскольку величина $-\frac{17,1 \tau}{235 + \tau}$ не может стремиться к $-\infty$. Поэтому по аналогии с (3.5)

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial t} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{при } z=0. \quad (4.12)$$

При $z=1$ (удельная влажность) $q=sQ$,
где

$$q \Big|_{z=1} = \frac{0,622 E(\tau)}{p} \Big|_{z=1},$$

$$Q \Big|_{z=1} = \frac{0,622 E(T)}{p} \Big|_{z=1}.$$

Окончательный вид нижнего граничного условия для уравнений (4.10) и (4.11) следующий:

$$E(\tau) = sE(T) \quad \text{при } z=1 \quad (4.13)$$

Зная $E(\tau)|_{z=1}$, по формуле Магнуса, записанной для точки росы, находят $\tau|_{z=1}$.

§ 5. ПРОГНОЗ ДЕФИЦИТА ТОЧКИ РОСЫ

Получим уравнение для прогноза дефицита точки росы $\Delta = T - T_d$. Рассмотрим адиабатический прогноз Δ . Воспользуемся уравнением притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\omega}{\zeta} = 0 \quad (5.1)$$

и уравнением точки росы в виде

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_{\tau a} - \gamma_{\tau}) \frac{\omega}{\zeta} = 0 \quad (5.2)$$

и вычтем (5.2) из (5.1). Результирующее уравнение получится следующим:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + u \frac{\partial \Delta}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_{a\Delta} - \gamma_{\Delta}) \frac{\omega}{\zeta} = 0, \quad (5.3)$$

где $\gamma_{\Delta} = \gamma - \gamma_{\tau}$ — градиент дефицита точки росы; $\gamma_{a\Delta} = \gamma_a - \gamma_{\tau a}$ — адиабатический градиент дефицита точки росы.

Уравнение (5.3) используется для прогноза влаги в газообразной форме (водяного пара). При его решении боковые граничные условия ставятся непосредственно для дефицита точки росы Δ в виде

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial \Delta}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0,$$

а краевые условия по ζ записываются через удельную влажность.

На верхней границе атмосферы можно потребовать, чтобы при постоянной температуре дефицит был равен некоторой достаточно большой (несколько десятков градусов) величине

$$\Delta|_{\zeta=0} = \text{const},$$

соответствующей малым значениям точки росы $\tau|_{\zeta=0} = \text{const}$, либо положить

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right|_{\zeta=0} = 0.$$

При постановке нижнего граничного условия сначала так, как это указано в предыдущем параграфе, определяют $E(\tau)|_{\zeta=1}$ и $\tau|_{\zeta=1}$, а затем, зная $T|_{\zeta=1}$ и $T_d|_{\zeta=1}$, вычисляют дефицит точки росы $\Delta|_{\zeta=1}$.

При использовании уравнения для дефицита точки росы (5.3) ошибка в прогнозе будет меньше, чем при использовании двух уравнений для точки росы (4.10) и (4.11).

§ 6. ПРОГНОЗ КОЛИЧЕСТВА ВЛАГИ, СКОНДЕНСИРОВАВШЕЙСЯ В ЕДИНИЦЕ ОБЪЕМА ВОЗДУХА

В общем случае, когда имеет место обмен теплом и влагой между движущейся частицей воздуха и окружающей средой, уравнение притока тепла должно использоваться в виде

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{Lr}{c_p}. \quad (6.1)$$

Для определения количества влаги r , сконденсировавшейся в единичном объеме воздуха, из уравнения (6.1) вычтем уравнение для точки росы τ (4.11) при условии, что $q=Q$ и $T=\tau$. Тогда получим

$$r = - \frac{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa} T - \frac{b}{a} \right) \frac{\omega}{\tau}}{\frac{L}{c_p} + \frac{b}{aQ}}. \quad (6.2)$$

Очевидно, чтобы определить r из полученного соотношения (6.2), необходимо знать прогноз функций T , Q и ω .

Конденсация влаги ($r > 0$) имеет место при восходящих движениях ($\omega < 0$), поскольку в числителе выражения (6.2) первое слагаемое $\frac{\kappa-1}{\kappa} T$ всегда положительное и больше, чем слагаемое $\frac{b}{a}$. Рассматриваемое соотношение справедливо также и в том

случае, когда наблюдаются нисходящие движения ($\omega > 0$), а $r = 0$. Уравнение (6.2) позволяет описывать конденсацию, связанную лишь с упорядоченными восходящими движениями в облаках слоистообразных форм (N_s , A_s). Для других процессов, приводящих к конденсации (смешение теплого и холодного воздуха, радиационные факторы, термическая конвекция и др.), уравнение (6.2) не применяется.

Если в уравнении притока тепла учесть также лучистые и турбулентные притоки тепла, то

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{Lr}{c_p} + \frac{\epsilon_n + \epsilon_r}{c_p \rho}. \quad (6.3)$$

Вычтем из этого уравнения уравнение для точки росы в форме (4.11). Получим физически более полное уравнение для расчета количества сконденсировавшейся влаги

$$r = \frac{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa} - \frac{b}{a} \right) \frac{\omega}{\zeta}}{\frac{L}{c_p} + \frac{b}{aQ}} - \frac{\frac{\epsilon_n + \epsilon_T}{c_p \rho}}{\frac{L}{c_p} + \frac{b}{aQ}}. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) также справедливо лишь для упорядоченных восходящих движений, но условие $\omega < 0$ в этом случае снимается. Если есть положительный приток тепла ($\epsilon_n + \epsilon_T > 0$), то r будет уменьшаться, так как воздух будет удаляться от состояния насыщения. Заметим, что, кроме конденсации, в атмосфере могут быть и другие стоки влаги. Так, при температурах существенно ниже 0° может происходить сублимация водяного пара, т. е. непосредственное выделение льда из влажного воздуха. Тогда в уравнении (6.4) вместо теплоты конденсации L будет стоять теплота сублимации (испарения кристаллов) L_c . Отличие названных величин весьма существенно (например, при 0° теплота конденсации L равна 597 кал/г, а теплота сублимации $L_c = 597 \text{ кал/г} + 80 \text{ кал/г}$, где 80 кал/г — теплота плавления), и это следует учитывать.

§ 7. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА УДЕЛЬНОЙ ВЛАЖНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Полученное в § 2 уравнение (2.3), как мы отмечали, описывает локальные изменения удельной влажности q за счет адвекции. Однако атмосфера представляет собой турбулентную среду со сложными неоднородными свойствами в горизонтальном и вертикальном направлениях. Понятно, что роль горизонтального и вертикального обмена (турбулентных пульсаций) в такой среде чрезвычайно велика.

Запишем уравнение переноса водяного пара в турбулентной атмосфере в декартовой системе координат

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} k \rho \frac{\partial q}{\partial z} + v \nabla^2 q + R. \quad (7.1)$$

Здесь k и v — коэффициенты турбулентной диффузии (перемешивания) водяного пара соответственно по вертикали и по горизонтали (их значения принимаются заданными); R — сумма всех источников и стоков влаги для газообразной, жидкой и твердой фаз.

Разрешив уравнение (7.1) относительно локальной производной $\frac{\partial q}{\partial t}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) - w \frac{\partial q}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} k \rho \frac{\partial q}{\partial z} + v \nabla^2 q + R. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Согласно уравнению (1.2) локальные изменения удельной влажности происходят под влиянием следующих факторов:

1) адвекции водяного пара со средней скоростью переноса в горизонтальном направлении

$$A_{\Gamma} = - \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right);$$

2) конвекции упорядоченного переноса влаги вертикальными токами

$$A_{\text{в}} = - w \frac{\partial q}{\partial z};$$

3) турбулентного перемешивания в вертикальном и горизонтальном направлениях, приводящего к сглаживанию полей q , если не происходит приток или отток водяного пара через границы прогностической области.

Уравнение (7.2) представляет собой линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка в частных производных. Простейшие граничные условия, необходимые для его решения, можно поставить в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{— для суши,} \\ \beta(\bar{q} - q) & \text{— для водной поверхности,} \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{z=H} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{x,y} = 0,$$

где H — верхняя граница рассматриваемого слоя атмосферы; $\bar{q}$ — максимальная плотность водяного пара; β — коэффициент массопередачи водяного пара.

§ 8. ПРОГНОЗ ОБЛАЧНОСТИ

Облака любых форм и ярусов представляют собой совокупность взвешенных на некоторой высоте над земной поверхностью капель воды или кристаллов льда (или тех и других вместе). Конденсация водяного пара приводит к образованию облаков и выпадению осадков. Первичным продуктом конденсации являются капельки воды — облачные элементы, которые непрерывно изменяются: возникают, растут, испаряются, исчезают. Их количество и размеры меняются, они сталкиваются, дробятся, сливаются, замерзают, кристаллизуются. Конденсацию влаги и облакообразование вызывают такие факторы, как понижение температуры воздуха и увеличение общего влагосодержания. Важнейшими процессами, приводящими к понижению температуры воздуха и облакообразованию, являются восходящие движения, радиационное выхолаживание, трансформационные изменения, вертикальное и горизонтальное перемешивание и адвекция. Именно эти процессы ответственны за непрерывную эволюцию облака. В свою очередь изменения температуры в облаке зависят от выделения или поглощения скрытого тепла и от излучения тепла его частицами — процессов, содействующих развитию вертикальных движений в облаке. Выделение тепла фазовых переходов может сыграть существенную роль в формировании свойств облака, но не является необходимым условием их образования. Таким образом, облако есть видимое проявление сложного термодинамического процесса и отражает динамику целого комплекса атмосферных явлений.

С точки зрения прогнозов различной заблаговременности, особенно долгосрочных, облачность необходимо рассматривать как один из регуляторов с обратной связью в единой физической системе атмосфера — деятельный слой подстилающей поверхности. Действительно, если учесть, что поток солнечного тепла, падающий на верхнюю границу атмосферы, практически постоянен во времени, то спрашивается, какие источники ответственны за возникновение долгосрочных аномалий погоды? Во внешних факторах обнаружить такие источники не удастся. Следовательно, их нужно искать среди механизмов, которые регулируют внутреннее взаимодействие между различными частями указанной физической системы. Одним из таких регуляторов и является облачность. Как мы уже отмечали, именно облачность перерабатывает практически постоянный поток солнечной радиации в притоки тепла, неравномерно распределенные в пространстве и во времени, и таким образом влияет на развитие атмосферных процессов, ответственных за ее эволюцию.

Прогноз облачности и осадков — одна из наиболее сложных проблем метеорологии. Поэтому рассмотрим сначала простейшие прогностические схемы.

1. Для прогноза облачности и осадков используются номограммы (демаркационные графики), которые позволяют по предвычисленным значениям дефицита точки росы (гигроскопической разности) Δ и вертикальной скорости $\frac{dp}{dt}$ указать градации явления

погоды. В. Льюис (1957 г.) впервые построил корреляционный график связи между диагностическими вертикальными токами, рассчитываемыми по термотропной модели, фактическими значениями Δ на поверхности 700 гПа и явлениями погоды. Аналогичные номограммы были построены П. К. Душкиным, Е. Г. Ломоносовым и Ю. Н. Луниным (1960 г.) для уровней 850 и 700 гПа. При этом использовались: более обширный экспериментальный материал; данные о влажности на поверхности 700 гПа и на более низких уровнях, влияние которых в процессах облакообразования может оказаться определяющим; более совершенная схема расчета вертикальных скоростей по трехуровневой квазигеострофической модели, созданной названными авторами (1959 г.), на основе теоретических разработок Н. И. Булеева и Г. И. Марчука (1958 г.). В качестве исходного материала для построения номограмм было использовано около 500 случаев для поверхности 850 гПа и около 400 — для поверхности 700 гПа, в каждом из которых имелись диагностические величины вертикальных токов и фактические значения дефицита точки росы Δ . Явления погоды, сопутствующие этим данным, анализировались по синоптической карте. На диаграммы, по оси ординат которых откладывались значения вертикальной скорости $\omega = \frac{dp}{dt} \left[\frac{\text{гПа}}{\text{г}} \right]$

а по оси абсцисс — значения гигроскопической разности, наносились следующие явления погоды: осадки в виде дождя или снега, облачность 10 баллов; облачно (7—10 баллов); небольшая облачность (4—6 баллов); ясно (меньше 4 баллов). После этого демаркационными линиями отделялись области осадков и значительной облачности с обеспеченностью около 80% и промежуточная область небольшой облачности с обеспеченностью примерно 50%. На рис. 1 приведена номограмма для поверхности 850 гПа, экспериментальная проверка возможностей которой на независимом материале показала оправдываемость по осадкам, облачности и градации «ясно» около 80%. По Л. А. Кузнецову демаркационные линии этой номограммы с удовлетворительной точностью могут быть аппроксимированы многочленами второго порядка по Δ :

$$\begin{aligned} \omega \text{ осадки} &= -1,1522 & -0,1805 & +2,4152, \\ \omega \text{ облачно} &= -0,6182 & +1,0090 & +6,9140, \\ \omega \text{ ясно} &= -0,4961 & +1,1889 & +9,0277. \end{aligned}$$

С помощью таких графиков можно по предвычисленным значениям дефицита точки росы и вертикальных токов классифици-

ровать явление погоды по градиентам, предсказывать осадки и количество облачности в баллах. В частности, оперативные испытания номограммы П. К. Душкина, Е. Г. Ломоносова и Ю. Н. Лунина показали, что прогноз осадков и всех градаций облачности также имеет оправдываемость около 80%. Такой подход в какой-то мере позволяет прогнозировать облачность, возникающую и за счет термической конвекции, поскольку условия для развития последней благоприятны там, где есть упорядоченные вертикальные движения. Существенными недостатками такого подхода являются: невозможность прогнозировать границы облачности;

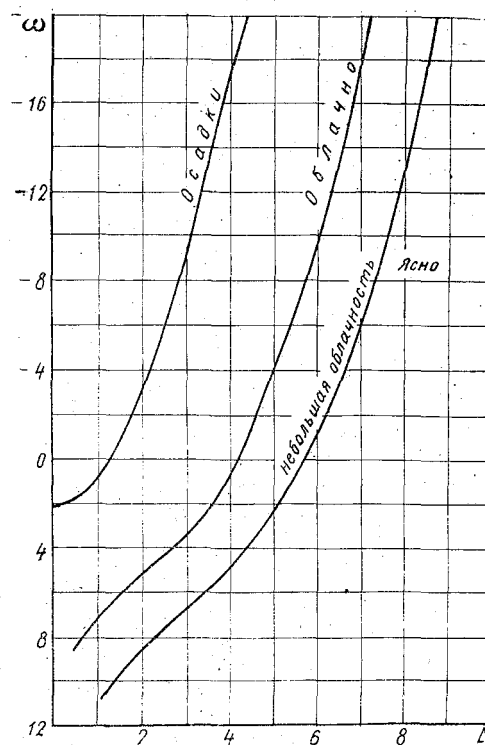


Рис. 1. Номограмма для определения явлений погоды на уровне 850 гПа

неучет горизонтального потока влаги, турбулентного тепло- и влагообмена и конвекции; предположение о том, что облачность образуется только вследствие упорядоченных движений. Характер вертикальных токов (величина и направление) оказывает существенное влияние на процессы облакообразования, но не решает полностью проблему прогноза облачности и осадков. Необходимо

учитывать также смешение различных воздушных масс, турбулентность и конденсацию, обусловленную радиационным выхолаживанием.

2. По методике М. Е. Швеца в Ленинградском бюро погоды был построен (1959 г.) аналогичный график (рис. 2). Для прогноза использовался расчет вертикальных скоростей на уровне 850 гПа в мм/с. Величина гигрометрической разности на этом же уровне предсказывалась с помощью уравнения для дефицита точки росы

$$\frac{d\Delta}{dt} = \left(\lambda T - \left[\frac{E(T)}{\frac{dE(T)}{dT}} \right]_{T=T_d} \right) \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p \rho} - \left[\frac{E(T)}{\frac{dE(T)}{dT}} \right]_{T=T_d} \cdot \frac{1}{q} \frac{dq}{dt},$$

где $\lambda = \frac{AR}{c_p} = 0,286$; $A = 2,39 \cdot 10^{-8}$ кал/эрг; $R = 2,87 \cdot 10^6$ см²/с² град.

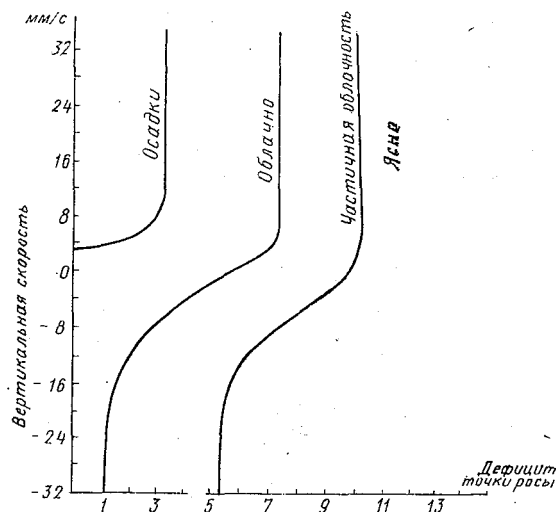


Рис. 2. График для прогноза облачности и осадков

На графике изображены демаркационные линии, отделяющие области ожидаемых осадков, сплошной облачности, частичной облачности (5—10 баллов общей облачности) и ясной погоды. Последняя градация включает случаи небольшой облачности (облачность менее 5 баллов).

3. Параметризацию облакообразования можно рассматривать также на основе учета прогностических значений влажности. Так, Дж. Смагоринским (1960 г.) построена номограмма (рис. 3), позволяющая по значениям относительной влажности f , представляющей отношение фактической упругости водяного пара к упругости насыщающего водяного пара при той же температуре

$$f = \frac{E(\tau)}{E(T)} \cdot 100\%;$$

определять наличие облачности различных ярусов. При этом для прогноза облачности нижнего, среднего и верхнего ярусов используется относительная влажность, осредненная по слоям 1000—800, 800—550, 550—300 гПа. Балл облачности k указывается в долях единицы. Область, в которой $k=1 \div 3$, соответствует осадкам.

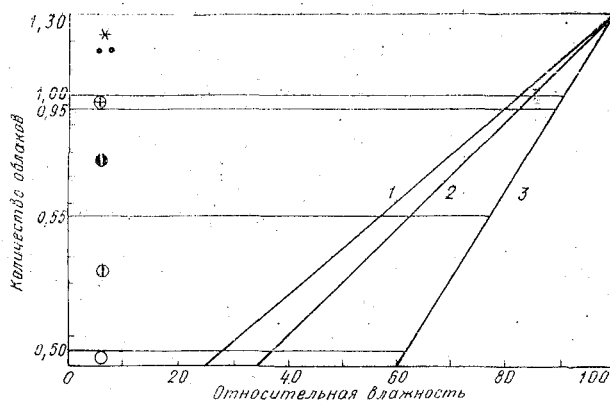


Рис. 3. Корреляционный график для прогноза облачности и осадков:
1—облака нижнего яруса; 2—облака среднего яруса;
3—облака верхнего яруса

В тех случаях, когда в приземном слое ожидается температура воздуха, близкая к 0°C , требуется указать фазовое состояние осадков. Приведенные выше номограммы не позволяют, уточнить вид осадков. С этой целью можно построить, например, такой график, какой изображен на рис. 4. С помощью номограмм не удастся также определить вертикальные границы облачности. Указанная возможность появляется лишь в том случае, если задать жесткое положение облачности по изобарическим поверхностям.

4. Такой прием используется, в частности, в численных моделях, построенных в σ -системе координат. В качестве вертикальной координаты в этой системе принимается лагранжева координата

$$\sigma = \frac{p}{p_*} \quad (0 \leq \sigma \leq 1),$$

где p — давление в движущейся частице; p_* — давление на уровне подстилающей поверхности, являющееся функцией горизонтальных координат и времени; $0 \leq \sigma \leq 1$. Границами облачности приняты следующие значения σ : облака нижнего яруса прогнозируются в слое $\frac{5}{6} \leq \sigma < 1$, среднего яруса — при $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{5}{6}$, верхнего яруса — при $\frac{1}{6} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$.

В ГМЦ СССР на основе полных уравнений гидротермодинамики разработана модель атмосферы «Синтез», в которой используется несколько иная система координат. В ней σ определяется формулой

$$\sigma = \frac{p - p_v}{p_n - p_v},$$

где p_v и p_n — значения давления на нижнем и верхнем уровнях рассматриваемой области атмосферы. В названной модели вся атмосфера разбита по вертикали на две области (тропосферу и стратосферу), в каждой из которых вертикальная координата определяется независимо и меняется в пределах $0 \leq \sigma \leq 1$. Границей областей является уровень тропопаузы. В обеих областях разделение по координате равномерное: в тропосфере выделено 4 слоя, в стратосфере — 2. Воздух в стратосфере предполагается «сухим», и прогноз влажности здесь не осуществляется. В тропосфере при задании начального поля удельной влажности используется предположение о насыщенности воздуха влагой. Принято, что в каждом слое влага конденсируется при достижении критического значения относительной влажности

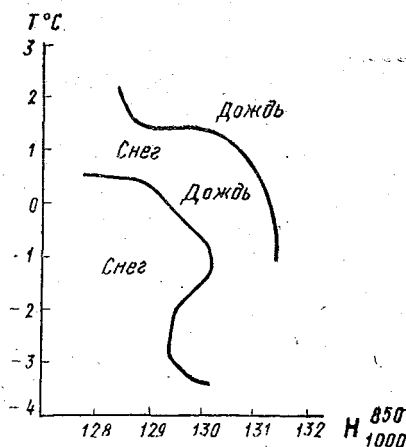


Рис. 4. Фазовое состояние облаков в зависимости от температуры в приземном слое $T^{\circ}\text{C}$ и толщины слоя 1000—850 гПа

$$f_{\text{кр}} = \frac{q}{Q}, \quad (8.1)$$

где q — прогностическое значение удельной влажности; Q' — прогностическое значение удельной влажности насыщения.

Данные о полях облачности получаются в схеме приближенно по данным об относительной влажности. Считается, что по достижении критического для рассматриваемого слоя значения относительной влажности $f_{кр}=0,9$, образуется облачность 10 баллов. При этом предполагается, что в верхнем тропосферном слое модели ($0 \leq \sigma \leq 0,25$) образуется облачность верхнего яруса, в следующем за ним нижележащем слое ($0,25 \leq \sigma \leq 0,5$) — облачность среднего яруса, а в слое, где $0,5 \leq \sigma \leq 0,75$ — облачность нижнего яруса.

В ряде численных схем при прогнозе облачности вводятся критические значения относительной влажности для облачности различных уровней. Наиболее строгий подход к прогнозу облачности состоит в определении границ облачности как уровней, где содержание капельно-жидкой и кристаллической фаз влаги в единице объема воздуха равно нулю. Однако в силу малого пространственного разрешения (большого шага дискретизации атмосферы по вертикали) решить такую задачу в настоящее время не представляется возможным.

§ 9. ПРОГНОЗ ОСАДКОВ

1. При прогнозе осадков обычно принимается предположение о наличии в атмосфере достаточного количества ядер конденсации и на каждом шаге по времени вычисляется количество сконденсировавшейся влаги. При этом прежде всего необходимо выяснить, достигнет ли воздух состояния насыщения. Водяной пар будет конденсироваться, если прогностическое значение удельной влажности будет больше или равно прогностическому значению удельной влажности насыщения, т. е. при условии, что $q \geq Q'$ и, следовательно, при $\tau \geq T$, $E(\tau) \geq E(T)$ и относительной влажности $f = \frac{q}{Q'} \geq 1$. Однако на практике обычно полагают, что влага

конденсируется при достижении некоторого критического значения $f_{кр} < 1$. Например, в модели ГМЦ «Синтез» $f_{кр}=0,9$, в модели НМЦ США (схема Ф. Г. Шумана) $f_{кр}=0,8$, в схеме «конвективного приспособления» по С. Манабе $f_{кр}=0,75$ и др. Тем самым учитывается, что в атмосфере происходят конденсация ($r \neq 0$) и выпадение осадков и при меньших, чем 100%, осредненных по области значениях относительной влажности. Введение $f_{кр}$ должно отвечать несоответствию задач крупномасштабной динамики атмосферы и данной параметризации, т. е. необходимо сглаживание детальной картины, если точки с $f=100\%$ не попадут в узлы расчетной сетки. Кроме того, обычно полагают, что выпадение осадков начинается сразу же по наступлении конденсации, а вся сконденсированная влага выпадает в виде осадков. Следо-

вательно, не учитывается влага, которая расходуется на формирование и уплотнение облаков и некоторые неадиабатические изменения температуры и влажности: испарение влаги с облаков, испарение влаги при падении капель сквозь ненасыщенные влагой слои воздуха.

2. Рассмотрим, как осуществляется прогноз осадков в упомянутой выше схеме «Синтез», используемой в оперативной практике ГМЦ СССР. На каждом временном шаге из динамической части задачи определяются значения функций u , v , σ , θ , T , Φ , q без учета притоков тепла вследствие радиационных и конденсационных процессов. Названные притоки тепла вычисляются один раз для двухчасового интервала. Для этого в каждом узле сеточной области в тропосфере производится проверка выполнения условия конденсации влаги. Если конденсация имеет место, рассчитывается количество выпавших осадков и связанных с этим изменений температуры и влажности путем решения следующей системы уравнений:

$$\tilde{q} = q \frac{AR_w T^2 / Lq + L/c_p}{AR_w T^2 / LQ' + L/c_p}, \quad (9.1)$$

$$\tilde{T} = \frac{L}{c_p} (q - \tilde{q}) + T, \quad (9.2)$$

где T и q — значения температуры и влажности, получаемые в результате решения приведенной системы уравнений; L — скрытая теплота парообразования; A — термический эквивалент работы; $Q = f_{кр} \cdot Q'$ (Q' — прогностическое значение удельной влажности насыщения, $f_{кр}$ — критическое значение относительной влажности).

Система уравнений (9.1) и (9.2) получена из уравнения Клаузиуса — Клапейрона и приближенного уравнения энергии, записанного в предположении, что выделяемая скрытая теплота идет только на нагревание окружающего воздуха.

Учет эффекта частичного испарения влаги, выпадающей в осадки при прохождении через ненасыщенные влагой слои, осуществляется по формулам, полученным А. С. Бестом. При этом предполагается, что капли, выпадающие в осадки, имеют радиус $r > 0,15$ мм. Изменение радиуса капли при ее прохождении через ненасыщенный слой с верхней границей z_1 и нижней границей z_2 определяется по формуле

$$r_1^2 - r_2^2 = 1,375 \left(1 - \frac{q}{Q'}\right)^{1,13} e^{-0,29} (e^{z_2} - e^{z_1}), \quad (9.3)$$

где r — радиус капли в мм; z_1 и z_2 — высоты в км.

Радиус капли определяется по количеству выпавших осадков η (мм) по формуле

$$r = 0,55 \eta^{0,232}. \quad (9.4)$$

Определенное таким образом количество влаги, испарившейся в некотором слое $z_1 - z_2$, используется для расчета изменений температуры $\tilde{T}$ и удельной влажности $\tilde{q}$ в этом слое по уравнениям (9.1) и (9.2).

Количество выпавших осадков рассчитывается по формуле

$$R = \sum_{i=1}^4 1,02 k_i n_i, \quad (9.5)$$

где i — номер слоя в тропосфере, в котором выпали осадки; n_i — количество воды в граммах, конденсирующееся в 1 кг влажного воздуха; k_i — коэффициент, зависящий только от толщины слоя.

3. Следуя С. Манабе, Дж. Смагоринскому и Р. Ф. Стриклеру, изложим так называемый «итерационный метод», использующийся для расчета неконвективной конденсации при постоянном давлении. Количество неконвективных осадков вычисляется при следующих предположениях:

а) конденсация имеет место тогда и только тогда, когда относительная влажность достигает единицы, т. е. 100%;

б) относительная влажность никогда не превышает единицы, т. е. $f \leq 1$;

в) весь сконденсировавшийся водяной пар мгновенно выпадает в виде осадков.

На каждом уровне, где имеется насыщение ($q > Q$), из уравнений

$$q + \delta q = Q(T + \delta T, p), \quad (9.6)$$

$$c_p \delta T + L \delta q = 0 \quad (9.7)$$

определяются: δq — величина, характеризующая пересыщение или, иначе, масса сконденсировавшейся влаги, которая должна выпасть в виде осадков; δT — изменение температуры, обусловленное выделением скрытой теплоты при конденсации водяного пара δq в единице массы воздуха.

Выполним линеаризацию уравнения (9.6). Учтем, что $q = f \cdot Q(T, p)$ и перепишем уравнение (9.6) следующим образом:

$$f \cdot Q(T, p) + \delta q = Q(T + \delta T, p).$$

Разложим функцию $Q(T + \delta T, p)$ в окрестности точки с координатами (T, p) в ряд Тейлора, в котором учтем лишь слагаемые первого порядка малости:

$$Q(T + \delta T, p) = Q(T, p) + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p \delta T. \quad (9.8)$$

Здесь $\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p$ означает дифференцирование насыщающего отношения смеси Q по температуре T при постоянном давлении ($p = \text{const}$). Подставим (9.8) в уравнение (9.6):

$$\delta q = (1 - f) Q(T) + \frac{\partial Q}{\partial T} \delta T. \quad (9.9)$$

Заменяя в уравнениях (9.9) и (9.7) δq и δT на Δq и ΔT и решая эти уравнения совместно относительно Δq , получим

$$\Delta q = \frac{(1 - f) Q(T)}{1 + \frac{L}{c_p} \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p}. \quad (9.10)$$

Однако целесообразнее сначала определить

$$\Delta T = - \frac{(1 - f) Q(T)}{\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p - \frac{c_p}{L}}, \quad (9.11)$$

а затем из уравнения (9.7)

$$\Delta q = - \frac{\Delta T c_p}{L}. \quad (9.12)$$

При вычислении приближенной величины $\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p$ используется уравнение Клаузиуса—Клапейрона

$$\frac{dE}{dT} = \frac{LE}{R_w T^2}, \quad (9.13)$$

где E — упругость насыщенного водяного пара;

$$R_w = 4,6156 \cdot 10^6 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-2} \text{ град}^{-1} = 0,11023 \text{ кал} \cdot \text{град}^{-1}$$

— удельная газовая постоянная водяного пара.

Определив $\Delta T^{(1)}$ и $\Delta q^{(1)}$ в каждом узле расчетной сетки, найдем прогностические значения

$$\begin{aligned} q_{\text{пр}} &= q^{(1)} = q_{\text{исх}} + \Delta q^{(1)} = q^{(0)} + \Delta q^{(1)}, \\ T_{\text{пр}} &= T^{(1)} = T_{\text{исх}} + \Delta T^{(1)} = T^{(0)} + \Delta T^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь верхние индексы означают номера итераций.

После получения $q^{(1)}$ и $T^{(1)}$ на первой итерации необходимо в каждом узле сеточной области проверить, достигнуто ли состояние насыщения ($f = 1$). Если $f > 1$, то $q^{(1)}$ и $T^{(1)}$ подставляются в соотношение для расчета относительной влажности $f = \frac{q}{Q}$ и

в уравнения (9.11) и (9.12) для того, чтобы получить следующую степень приближения для δq и δT согласно формулам

$$\begin{aligned}\delta q &= \Delta q^{(1)} + \Delta q^{(2)} + \dots + \Delta q^{(n)}, \\ \delta T &= \Delta T^{(1)} + \Delta T^{(2)} + \dots + \Delta T^{(n)},\end{aligned}$$

которые можно записать на основании уравнения (9.6).

Описанный цикл повторяется до тех пор пока f не будет близко к единице (100%). Этот процесс сходится очень быстро. Чтобы получить f с точностью до 1%, обычно требуется одна — две итерации.

После конденсации и выпадения массы влаги δq в виде осадков температура воздуха в конце первого шага по времени станет равной

$$T(t_0 + \Delta t) = T^{(1)} = T^{(0)} + \delta T^{(n)},$$

а в конце k -го шага

$$T(t_0 + k\Delta t) = T^{(k)} = T^{(0)} + \sum_k \delta T^{(n)},$$

где $k=0, 1, 2, \dots, K$.

Количество осадков, выпавших на некотором шаге по времени из m -го слоя, расположенного между изобарическими поверхностями p_{m-1} и p_m , находится по формуле (9.12), а общее количество для всего столба атмосферы — из соотношения

$$R_k = - \frac{1}{g} \int_0^{p_*} \delta q dp. \quad (9.14)$$

Здесь p_* — давление воздуха у земли. Осадки за весь прогностический период $t_0 + K\Delta t$ можно вычислить по формуле

$$R = - \frac{1}{g} \int_{t_0}^{t_0 + K\Delta t} \int_0^{p_*} \delta q dp dt \quad (9.15)$$

или

$$R = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \delta q_m^{(n)} (t_0 + k\Delta t). \quad (9.16)$$

Причем суммируются лишь такие результаты прогноза на каждом k -том шаге по времени, когда имеет место пересыщение во всех слоях ($\delta q_{k,m}^{(n)} > 0$), так как осадки, выпавшие из одного слоя, могут испариться в других ненасыщенных слоях.

4. Количество обложных осадков, выпавших из единичного столба воздуха, заключенного между изобарическими уровнями с давлением p_1 и p_2 за промежуток времени $t_0 + K\Delta t = t_1$, можно рассчитать также по формуле А. Ф. Дюбюка

$$R = \frac{1}{g} \int_{t_0}^{t_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dQ}{dt} dp dT. \quad (9.17)$$

Из этого соотношения видно, что количество влаги, конденсирующейся в единичном столбе воздуха за срок прогноза, определяется произведением барической толщины $\Delta p = p_1 - p_2$, эквивалентной общей массе воздуха в слое, на значение индивидуального изменения насыщающей удельной влажности $\frac{dQ}{dt}$ в нем.

Значения $\frac{dQ}{dt}$ связаны, строго говоря, с перемещением воздуха как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. Если приближенно принимать, что $\frac{dQ}{dt} \approx \omega \frac{dQ}{dp}$ и произвести в формуле (9.17) интегрирование методом трапеций при использовании данных на поверхностях 850, 700, 500 гПа, то для одного шага по времени получим

$$R_k = a_1 \delta Q_{850} + a_2 \delta Q_{700} + a_3 \delta Q_{500}, \quad (9.18)$$

где a_1, a_2, a_3 — коэффициенты; $\delta Q = Q(t_0) - Q(t_0 + \Delta t)$ — разность между максимальными значениями удельной влажности в начале и в конце подъема насыщенного воздуха с заданной изобарической поверхности до верхней границы облаков, значения Q вычисляются по результатам прогноза точки росы для данного шага по времени.

При расчете конденсации влаги слои между изобарическими поверхностями составляют 150, 175 и 100 гПа соответственно для поверхностей 850, 700 и 500 гПа. Учитывая указанные толщины слоев и то, что в столбе сечением 1 см^2 , барическая толщина которого равна 100 гПа, конденсация 1 г влаги и 1 кг воздуха эквивалентна выпадению 1 мм осадков, получим следующую приближенную формулу:

$$R' = 1,5 \delta Q_{850} + 1,8 \delta Q_{700} + \delta Q_{500}. \quad (9.19)$$

Формула (9.19) не учитывает конденсацию влаги в воздушных частицах, находящихся в начальный момент времени выше уровня 500 гПа. Этой величиной часто пренебрегают при расчете осадков вследствие сравнительно малого влагосодержания в верхней части тропосферы. Однако при больших вертикальных скоростях на уровне 500 гПа конденсация влаги может быть значительной. Учет указанного факта можно осуществить по формуле

$$R = R' (1 - 0,002 \omega_{500}) \text{ [мм/12 ч]}.$$

5. Оригинальный способ учета процессов крупномасштабного влагообмена предложил Т. К. Иоселиани, использующий уравнение для влажности в следующем виде:

$$\frac{dq}{dt} = F_{\varphi q} + F_{zq} - r, \quad (9.20)$$

где q — отношение смеси; $F_{\varphi q}$ — горизонтальный турбулентный перенос влаги; F_{zq} — вертикальный турбулентный перенос влаги; r — скорость конденсации на единицу массы сухого воздуха.

В уравнении (9.20) слагаемое, описывающее крупномасштабную конденсацию, является одним из основных и существенно влияет на формирование поля влажности. Кроме того, энергия, выделяющаяся при фазовых переходах, вносит заметный вклад в энергетику атмосферы. Однако вероятности фазовых переходов влаги связаны с различными физическими и химическими состояниями атмосферы, что делает сложным учет этого эффекта в гидродинамической схеме.

Т. К. Иоселиани предлагает два алгоритма параметризации облажных осадков. В обоих алгоритмах вся освобождающаяся энергия идет только на изменение температуры воздуха. Гравитационные силы, действующие на сконденсированную влагу, не уравниваются вертикальными движениями, поэтому вся сконденсированная влага мгновенно выпадает.

Учет таких факторов, как пересыщение и испарение падающих сквозь ненасыщенные слои воздуха капель, не производится.

Опишем предложенные алгоритмы.

а) Пусть конденсация влаги происходит при достижении 100%-го насыщения. Уравнение переноса влаги для такой атмосферы записывается в виде

$$\frac{dQ}{dt} = -r, \quad (9.21)$$

где через Q , как обычно, обозначено отношение смеси при насыщении.

Если учесть, что $Q = Q(T, p)$, то уравнение (9.21) можно записать так:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_T \omega = -r. \quad (9.22)$$

Допускается, что при конденсации всеми иными, кроме конденсационных, притоками энергии можно пренебречь из-за различия в характерных пространственно-временных масштабах. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} (c_p T) = \frac{\omega}{\rho} + ar. \quad (9.23)$$

Используя уравнения (9.22), (9.23) и уравнение Клаузиуса — Клапейрона, получим:

$$r = \frac{\omega}{1 + \frac{0,622 L^2}{c_p R_w T^2}} \cdot \frac{Q}{p} \left(1 - \frac{0,622 L}{c_p T} \right). \quad (9.24)$$

Очевидно, что формулой (9.24) имеет смысл пользоваться только при $r > 0$. Выражение $\left(1 - \frac{0,622 L}{c_p T}\right) < 0$ при разумном диапазоне температуры. Поэтому для выпадения осадков одним из необходимых условий является наличие восходящих токов.

б) Второй алгоритм расчета крупномасштабной конденсации основан на следующем предположении: если в некоторой области атмосферы оказывается, что содержание водяного пара превосходит значение насыщения, то «лишняя влага» конденсируется и выпадает в виде осадков. В этом алгоритме состоянием насыщения считается не 100%-ное насыщение, а меньшее:

$$Q(T) = f_{кр} Q'(T),$$

где $f_{кр}$ — выбирается экспериментально — $f_{кр} = 0,7-0,8$.

Из-за выделения скрытой теплоты конденсации происходит увеличение температуры и тем самым меняется условие насыщения. Процесс продолжается до тех пор, пока не установится соотношение:

$$c_p(T - T_0) = f[q_0 - Q(T)], \quad (9.25)$$

где T_0 и q_0 — температура и отношение смеси в начале процесса; T — конечная температура после завершения процесса конденсации; $q_0 > Q(T)$. Соотношение (9.25) позволяет определить конечную температуру и, следовательно, количество сконденсированного водяного пара.

Учитывая зависимость Q от T , можно искать значение T как решение уравнения:

$$F(T) \equiv T - T_0 + \left(\frac{L}{c_p}\right) [Q(T) - q_0] = 0. \quad (9.26)$$

Решение этого уравнения выполняется методом Ньютона—Рафсона с первым порядком аппроксимации. В уравнении (9.26)

$$T \approx T_0 - \frac{F(T_0)}{F'(T_0)}. \quad (9.27)$$

Здесь

$$F(T_0) = -\frac{L}{c_p} [q_0 - Q(T_0)], \quad (9.28)$$

$$F'(T_0) = \frac{d}{dT} [F(T_0)] = 1 + \frac{L^2}{c_p R_w T_0^2} Q(T_0), \quad (9.29)$$

где использовано уравнение Клаузиуса—Клайперона

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{LQ}{R_w T^2}.$$

Подставив (9.28) и (9.29) в (9.27), получим формулу для вычисления изменения температуры как результата крупномасштабной конденсации:

$$\Delta T = T^{n+1} - T^n = \frac{\frac{L}{c_p} [q^{n+1} - Q(T^n)]}{1 + \frac{L^2}{c_p R_w (T^n)^2} Q(T^n)}, \quad (9.30)$$

а новое значение температуры

$$T^{n+1} = T^n + \frac{\frac{L}{c_p} [q^{n+1} - Q(T^n)]}{1 + \frac{L^2}{c_p R_w (T^n)^2} Q(T^n)}. \quad (9.31)$$

Сходимость решения (9.31) гарантируется (при физически разумных значениях параметров) видом функциональной зависимости отношения смеси при насыщении от температуры.

§ 10. ПРОГНОЗ ВЛАЖНОСТИ В ТРЕХ ФАЗАХ, ОБЛАЧНОСТИ И ОСАДКОВ

Выше были рассмотрены схемы прогноза влажности, облачности и осадков, основанные на ряде упрощающих предположений. Более строгая постановка задачи прогноза указанных элементов основывается на уравнениях переноса влаги в трех фазах с явным описанием процессов перехода влаги из одних форм в другие. К сожалению, эти процессы к настоящему времени изучены еще недостаточно. Несмотря на отсутствие достаточно полных и надежных сведений о весьма сложных физических и химических процессах, определяющих механизмы фазовых переходов и формирование источников и стоков влаги в атмосфере, уже сейчас имеются работы, в которых сформулирована теоретическая модель прогноза влажности в трех фазах как составная часть прогноза атмосферных процессов. Рассмотрим такого рода модель, предложенную Г. И. Марчуком (1967 г.).

Система уравнений модели переноса влажности в трех фазах

В модели переноса влаги и газообразной, жидкой и твердой фазах, разработанной Г. И. Марчуком, используются уравнения для удельных содержаний водяного пара (q_1), жидкой (q_2) и твердой (q_3) фаз, которые связаны с плотностью воздуха (ρ), плот-

ностью водяного пара (s), воды (m) и кристаллов (M) соотношениями

$$q_1 = \frac{s}{\rho}, \quad q_2 = \frac{m}{\rho}, \quad q_3 = \frac{M}{\rho}, \quad (10.1)$$

$$(s+m+M \ll \rho).$$

Уравнения переноса для q_1, q_2, q_3 в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + u \frac{\partial q_1}{\partial x} + v \frac{\partial q_1}{\partial y} + w \frac{\partial q_1}{\partial z} &= \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \nu \rho \frac{\partial q_1}{\partial z} + \mu \nabla^2 q_1 + f_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + u \frac{\partial q_2}{\partial x} + v \frac{\partial q_2}{\partial y} + w \frac{\partial q_2}{\partial z} &= \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \nu \rho \frac{\partial q_2}{\partial z} + \mu \nabla^2 q_2 + f_2, \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} + u \frac{\partial q_3}{\partial x} + v \frac{\partial q_3}{\partial y} + w \frac{\partial q_3}{\partial z} &= \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \nu \rho \frac{\partial q_3}{\partial z} + \mu \nabla^2 q_3 + f_3, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где ν, μ — коэффициенты турбулентной диффузии по вертикали и по горизонтали (считаются заданными); f_1, f_2, f_3 — источники и стоки, характеризующие переходы влаги из одних фаз в другие. Остальные обозначения — общепринятые.

В уравнениях (10.2) использована простейшая модель турбулентного обмена поля влажности. Эта модель может быть уточнена на основе более строгой теории.

Модель фазовых переходов влаги

Источники и стоки влаги определяются следующими основными соотношениями:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\rho} [I + J - (K + S)], \\ f_2 &= \frac{1}{\rho} [K + T_a - (J + Z + R_m)], \\ f_3 &= \frac{1}{\rho} [Z + S - (I + T_a + R_m)], \end{aligned} \quad (10.3)$$

где I — переход из твердой фазы в газообразную (испарение кристаллов); J — переход из жидкой фазы в газообразную (испарение капель); K — переход из газообразной фазы в жидкую (конденсация водяного пара); S — переход из газообразной фазы в твердую (сублимация водяного пара); T_a — переход из твердой фазы в жидкую (таяние кристаллов); Z — переход из жидкой фазы в твердую (замерзание капель); R_m — выпадение жидкокапельных осадков (дождя); R_M — выпадение осадков в твердой фазе (снега).

Все перечисленные переходы должны быть определены количественно в единицах плотности за единицу времени.

Как указывалось выше, механизмы определяющие переходы в формулах (10.3), изучены недостаточно. Поэтому прибегают к простейшим параметризациям этих процессов. В нашу задачу не входит детальный разбор этих параметризаций и мы ограничимся общими соображениями, которые могут дать лишь некоторое представление о них. Более детально с параметризацией переходов можно ознакомиться в специальной литературе.

Наша цель состоит главным образом в формулировании задачи и рассмотрении принципов построения решения.

Для простоты можно принять, например, что при положительных температурах отсутствуют переходы I , S , Z и осадки в твердой фазе, а при отрицательных температурах отсутствуют переходы J , K , T_a и осадки в жидкой фазе.

Можно считать также, что $J=I$, $K=S$, $T_a=Z$, $R_m=R_M$ или отличаются друг от друга на некоторые постоянные величины, которые могут быть оценены.

Для определения K (S) могут быть использованы соотношения, приведенные в § 6.

Оценка процессов испарения осуществляется по формулам вида

$$J = \alpha_m (\bar{s} - s) m, \quad (10.4)$$

$$I = \alpha_M (\bar{s} - s) M, \quad (10.5)$$

где $\bar{s}$ — максимальная плотность водяного пара; α_m и α_M — сложные функции, зависящие от диффузии водяного пара с поверхности капель и кристаллов, плотности и размеров капель и кристаллов. Значения α_m и α_M отличны от нуля при $\bar{s} > s$, а также при положительных и отрицательных температурах соответственно.

Для описания процессов таяния и замерзания используются соотношения

$$T_a = \alpha_T (T - T_0) M, \quad (10.6)$$

$$Z = \alpha_Z (T_0 - T) m, \quad (10.7)$$

где T_0 — температура кристаллов льда (температура таяния); T — температура воздуха; α_T и α_z — функции, зависящие от теплопередачи к кристаллам (каплям), от затрат тепла на таяние (замерзание), размеров и плотности кристаллов (капель).

Самым сложным является вопрос о параметризации процессов формирования и выпадения осадков.

При определении количества осадков (массы капель или кристаллов), выпадающих из единичного объема облака, применяется параметризация вида

$$R_m = \alpha_R^m (m - \bar{m}), \quad (10.8)$$

$$R_M = \alpha_R^M (M - \bar{M}), \quad (10.9)$$

которая не является следствием какой-либо теории и строится на основе предположения, что R_m и R_M пропорциональны разностям $m - \bar{m}$ и $M - \bar{M}$, где $\bar{m}$ и $\bar{M}$ — максимальные плотности жидкой и кристаллической влаги в облаках (которые могут быть определены экспериментально). Здесь имеется в виду, что если m и M превосходят максимальные значения, то часть избытка массы капель или кристаллов выпадает в виде осадков.

Подчеркнем, что модель фазовых переходов, построенная на основе соотношений (10.4) — (10.9), весьма упрощена и ее следует рассматривать в качестве первого приближения к решению данной задачи.

Важно отметить, что микрофизические процессы, определяющие фазовые переходы влаги, мало влияют на изменения плотности воздуха. Поэтому переход от плотностей влаги к удельным содержаниям на основе соотношений (10.1) не связан с какими-либо существенными погрешностями.

На основе вышеизложенного записываются выражения для f_1 , f_2 и f_3 .

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_m (\bar{s} - s) q_2 + \alpha_M (\bar{s} - s) q_3 - C_m - C_M, \\ f_2 &= \alpha_T (T - T_0) q_3 + C_m - [\alpha_m (\bar{s} - s) + \alpha_z (T_0 - T)] q_2 - \\ &\quad - \alpha_R^m (q_2 - \bar{q}_2), \\ f_3 &= \alpha_z (T_0 - T) q_2 + C_M - [\alpha_M (\bar{s} - s) + \alpha_T (T - T_0)] q_3 - \\ &\quad - \alpha_R^M (q_3 - \bar{q}_3), \end{aligned} \quad (10.10)$$

где $C_m = \frac{K}{\rho}$, $C_M = \frac{S}{\rho}$,

а чертой сверху обозначены максимально возможные значения функций. Очевидно, что слагаемые в первой части выражений

(10.10), содержащие разности функций, положительны или отрицательны в зависимости от знака разностей $\bar{s} - s$, $T_0 - T$, $T - T_0$, $q_2 - \bar{q}_2$, $q_3 - \bar{q}_3$. Кроме того, должны выполняться следующие условия:

$$\alpha_m \neq 0, \quad \alpha_R^m \neq 0 \quad \text{при } T > T_0; \quad \alpha_z \neq 0 \quad \text{при } T < T_0;$$

$$\alpha_M \neq 0, \quad \alpha_R^M \neq 0 \quad \text{при } T < T_0; \quad \alpha_T \neq 0 \quad \text{при } T > T_0;$$

$$C_m = 0, \quad C_M = 0 \quad \text{при } s < \bar{s};$$

$$\text{при } s > \bar{s}: \quad C_m \neq 0, \quad \text{если } T > T_0; \quad C_M \neq 0, \quad \text{если } T < T_0.$$

Граничные и начальные условия

Для решения уравнений системы (10.2) необходимо поставить начальные и граничные условия. Граничные условия необходимо задать по трем пространственным независимым переменным. По x и y могут быть использованы простейшие условия, означающие неизменность q_1 , q_2 , q_3 на боковых границах (Γ)

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (10.11)$$

По переменной z требуется два условия для каждой искомой функции (q_1 , q_2 , q_3) при $z=0$ и $z=H$ (H — высота верхней границы той части атмосферы, в пределах которой изучается перенос влаги (например, тропосферы).

Постановка нижнего граничного условия представляет весьма сложную задачу. Ниже будут рассмотрены условия, лишь приближенно отражающие весьма сложные процессы поступления влаги в атмосферу и трансформацию ее в приземном слое.

Простейшие условия при $z=0$ можно записать в виде

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} = \begin{cases} 0 & \text{— для суши,} \\ -\beta(q_1 - \bar{q}_1) & \text{— для водной поверхности,} \end{cases} \quad (10.12)$$

$$q_2 = 0, \quad q_3 = 0,$$

где β — коэффициент массопередачи водяного пара, имеющий размерность $\left[\frac{1}{M} \right]$.

На верхней границе атмосферы при $z=H$ используются следующие условия:

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0. \quad (10.13)$$

Условия (10.12) и (10.13) означают отсутствие потока водяного пара на поверхности суши и на верхней границе, а также отсутствие влаги в жидкой и твердой фазах на нижней и верхней границах. Для водной поверхности (при $z=0$) поток водяного пара отличен от нуля, исключая случай, когда $q_1 = \bar{q}_1$.

Отсутствие потока водяного пара при $z=0$ для суши плохо отражает действительную картину. Более обоснованным является условие, которое учитывает испарение влаги с поверхности земли, поступающей из деятельного слоя по капиллярам. Такой учет может быть осуществлен с помощью функции $Q(x, y, t)$, которая характеризует распределение во времени и по поверхности суши количества влаги в столбе деятельного слоя единичной площади. Значения функции Q могут изменяться за счет испарения влаги с поверхности, за счет выпадения осадков и за счет фильтрации влаги в почве. При этом считается, что количество испаряющейся влаги пропорционально запасу влаги в деятельном слое, т. е.

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} = \begin{cases} -\beta(\sigma Q - q_1) & \text{при } \sigma Q > q_1, \\ 0 & \text{при } \sigma Q < q_1, \end{cases} \quad (10.14)$$

где σ — функция, которая определяет ту часть запаса влаги в деятельном слое, которая поступает к поверхности земли в единицу времени и создает удельную влажность в приземном слое, равную σQ . Размерности Q и σ равны $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}\right]$ и $\left[\frac{\text{м}^2}{\text{кг}}\right]$ соответственно.

Если температура приземного слоя отрицательна и влага из почвы на поверхность не поступает, то можно принять условие отсутствия потока водяного пара т. е. $\frac{\partial q_1}{\partial z} = 0$ при $z=0$. Для поверхности, покрытой снегом, условие (10.14) сохраняется, но вместо β и σ используются β_s и σ_s , которые имеют тот же смысл, но характеризуют массопередачу водяного пара в атмосферу и поступление влаги к поверхности для снежного покрова.

Для введенной в граничное условие функции Q представляется возможным записать уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \nu \rho \frac{\partial q_1}{\partial z} + \int_0^H [\alpha_R^m (m - \bar{m}) + \alpha_R^M (M - \bar{M})] dz - \delta \cdot Q, \quad (10.15)$$

которое с учетом условия (10.14) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} = & -\nu \beta \rho (\sigma Q - q_1) + \int_0^H [\alpha_R^m (m - \bar{m}) + \\ & + \alpha_A^M (M - \bar{M})] dz - \delta \cdot Q, \end{aligned} \quad (10.16)$$

где ν — коэффициент турбулентной диффузии; δ — функция, характеризующая фильтрацию влаги (приток или отток от поверхности подпочвенных вод). Первый член в правой части уравнения (10.16) описывает отток влаги от земной поверхности в атмосферу за счет турбулентной диффузии, второй и третий члены характеризуют увеличение почвенной влаги за счет осадков и изменение ее за счет притока (оттока) почвенных вод (количество осадков

определяется интегралом $\int_0^H [\alpha_R^m (m - \bar{m}) + \alpha_R^M (M - \bar{M})] dz$).

При отрицательных температурах для поверхности со снежным покровом уравнение (10.16) записывается без третьего члена

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\nu_{\text{ср}}(\sigma Q - q_1) + \int_0^H [\alpha_R^m (m - \bar{m}) + \alpha_R^M (M - \bar{M})] dz. \quad (10.17)$$

В этом случае считается, что фильтрация влаги в почве не имеет места, а Q определяет запас влаги единицы площади снежного покрова.

Таким образом, использование граничного условия (10.14) сопряжено с усложнением задачи за счет привлечения уравнений (10.16) или (10.17), которые следует решать совместно с уравнениями (10.2).

Необходимые для интегрирования этих уравнений начальные условия задаются для q_1, q_2, q_3, Q :

$$q_1 = q_1(x, y, z, t=0),$$

$$q_2 = q_2(x, y, z, t=0),$$

$$q_3 = q_3(x, y, z, t=0),$$

$$Q = Q(x, y, z, t=0).$$

Метод решения

Существует целый ряд приближенных методов решения уравнений для влажности. Рассмотрим алгоритм решения, предложенный Г. И. Марчуком (1967 г.), основанный на методе расщепления многомерной задачи. При этом будем считать, что решение уравнений (10.2), (10.16) или (10.17) осуществляется попутно с прогнозом составляющих скорости ветра. Таким образом, поля составляющих скорости ветра известны для любого момента времени (на каждом шаге по времени).

Для компактной записи алгоритма вводятся вектор-функции

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

которые позволяют систему уравнений (10.2) записать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 q + F. \quad (10.18)$$

Рассмотрим решение уравнения (10.18) на интервале времени

$$\tau \div \tau + 1 \quad \left(\tau = \frac{t}{\Delta t} \right)$$

методом расщепления.

Это уравнение расщепляется на три

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + u \frac{\partial q_1}{\partial x} + v \frac{\partial q_1}{\partial y} + w \frac{\partial q_1}{\partial z} = 0, \quad (10.19)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 q_2, \quad (10.20)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = F, \quad (10.21)$$

где $q_1^\tau = q^\tau$, $q_2^\tau = q_1^{\tau+1}$, $q_3^\tau = q_2^{\tau+1}$, $\bar{\rho}$ — среднее значение плотности. Уравнение (10.19) решается на любом шаге по времени по значениям вектор-функции q в начальный момент τ . Для решения уравнения (10.20) используются полученные в результате решения уравнения (10.19) значения $q_1^{\tau+1}$ (в момент $\tau + 1$), а решение уравнения (10.21) строится на основе решения уравнения (10.20), т. е. на основе $q_2^{\tau+1}$.

Сначала рассмотрим решение уравнения переноса (10.19). Это уравнение решается методом расщепления с использованием схемы предиктор-корректор.

Интервал времени, соответствующий шагу Δt , разбивается на две равных части

$$\tau \div \tau + \frac{1}{2}, \quad \tau + \frac{1}{2} \div \tau + 1.$$

На интервале $\tau \div \tau + \frac{1}{2}$ решаются расщепленные уравнения

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = -u \frac{\partial q_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = -v \frac{\partial q_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = -w \frac{\partial q_1}{\partial z}, \quad (10.22)$$

разностные аналоги которых имеют следующий вид:

$$q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{1}{2}} = q_{1,i,j,k}^\tau - \mu_i \begin{cases} q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{1}{2}} - q_{1,i-1,j,k}^{\tau+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_i > 0, \\ q_{1,i+1,j,k}^{\tau+\frac{1}{2}} - q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_i < 0, \end{cases}$$

$$q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{2}{6}} = q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{1}{6}} - \mu_j \begin{cases} q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{2}{6}} - q_{1,i,j-1,k}^{\tau+\frac{2}{6}} & \text{при } \mu_j > 0, \\ q_{1,i,j+1,k}^{\tau+\frac{2}{6}} - q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{2}{6}} & \text{при } \mu_j < 0, \end{cases}$$

$$q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{1}{6}} = q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{2}{6}} - \mu_k \begin{cases} q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{1}{6}} - q_{1,i,j,k-1}^{\tau+\frac{1}{6}} & \text{при } \mu_k > 0, \\ q_{1,i,j,k+1}^{\tau+\frac{1}{6}} - q_{1,i,j,k}^{\tau+\frac{1}{6}} & \text{при } \mu_k < 0, \end{cases} \quad (10.23)$$

где

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y}, \quad k = \frac{z}{\Delta z}, \quad \mu_i = \frac{u_{i,j,k}}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta t}{2},$$

$$\mu_j = \frac{v_{i,j,k}}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta t}{2}, \quad \mu_k = \frac{w_{i,j,k}}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta t}{2}, \quad (\Delta x = \Delta y = \Delta z).$$

Уравнения (10.23) решаются на интервалах, равных $\frac{\Delta t}{6}$, совокупность их решений определяют решения уравнения (10.19) на интервале $\frac{\Delta t}{2}$.

Разностные уравнения (10.23) имеют первый порядок точности по всем переменным. Эти уравнения по структуре одинаковы, поэтому решение их строится по одной схеме методом разностной факторизации (прогонки).

Рассмотрим решение первого из уравнений (10.23). Запишем это уравнение, опуская индексы j и k , в форме

$$(|\mu_i| + \mu_i) q_{1,i-1}^{\tau+\frac{1}{6}} - 2(1 + |\mu_i|) q_{1,i}^{\tau+\frac{1}{6}} + (|\mu_i| - \mu_i) q_{1,i+1}^{\tau+\frac{1}{6}} = -2q_{1,i}^{\tau}, \quad (10.24')$$

которая объединяет случаи $\mu_i > 0$ и $\mu_i < 0$. Уравнение (10.24') записано по трехточечной схеме. Представим его в виде

$$a_i q_{1,i-1}^{\tau+\frac{1}{6}} - 2b_i q_{1,i}^{\tau+\frac{1}{6}} + c_i q_{1,i+1}^{\tau+\frac{1}{6}} = -g_i, \quad (10.24)$$

где $a_i = |\mu_i| + \mu_i$, $b_i = 1 + |\mu_i|$, $c_i = |\mu_i| - \mu_i$, $g_i = +2q_{1,i}^{\tau}$.

Метод факторизации устойчив, если $a_i + c_i \leq 2b_i$. В данном случае это условие выполняется, в чем легко убедиться, подставив значения a_i , b_i и c_i , т. е. $2|\mu_i| < 2 + 2|\mu_i|$.

Решение уравнения (10.24) строится на основе соотношений, получающихся в результате последовательной записи сначала для всех значений индекса i в порядке возрастания (прогонка вперед). При этом функция q_1 с меньшими значениями индекса i выражается через функцию q_1 с большими значениями индекса i .

Затем уравнения записываются в порядке убывания индекса i (прогонка назад). При прогонке назад последовательно определяются значения функции q_1 .

Граничные значения $q_{1,0}$ и $q_{1,n}$ ($i=0, 1, \dots, n$) полностью определяют решение. Описанная схема решения записывается в виде

$$\beta_{i+1} = \frac{c_i}{2b_i - a_i \beta_i},$$

$$d_{i+1} = \frac{a_i d_i + g_i}{2b_i - a_i \beta_i},$$

$$q_{1,i} = \beta_{i+1} q_{1,i+1} + d_{i+1}.$$

При прогонке вперед определяются коэффициенты β_{i+1} и d_{i+1} , а при прогонке назад определяются значения $q_{1,i}$. Нетрудно заметить, что данный метод решения предполагает использование граничных условий только в случаях, когда в граничных узлах ($i=0, n$) составляющие скорости (в рассматриваемом случае «и») направлены внутрь области определения решения.

В совокупности полученные решения уравнения (10.23) определяют решение уравнения (10.19) для функции q_1 в момент времени $\tau + \frac{1}{2}$.

Аппроксимация уравнений (10.22) разностными уравнениями (10.23) приводит к появлению «счетной вязкости», которая способствует сглаживанию решений.

Для получения решения уравнения (10.19) в момент времени $\tau + 1$ и преодоления эффекта «счетной вязкости» целесообразно воспользоваться схемой корректора с центральными разностями

$$q_{1,i,j,k}^{\tau+1} = q_{1,i,j,k}^{\tau} - [\mu_i (q_{1,i+1,j,k} - q_{1,i-1,j,k}) + \mu_j (q_{1,i,j+1,k} - q_{1,i,j-1,k}) + \mu_k (q_{1,i,j,k+1} - q_{1,i,j,k-1})]^{\tau+\frac{1}{2}}, \quad (10.25)$$

которая имеет второй порядок точности.

Более точное решение уравнений (10.19) — (10.21) может быть построено, если использовать дивергентную форму уравнения (10.19) и решать эти уравнения относительно интегральных характеристик.

$$\tilde{q}_{i,j,k} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} q \rho dz. \quad (10.26)$$

В этом случае уравнения (10.23) записываются для функций $\tilde{q}_1$, а корректор принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{1,i,j,k}^{\tau+1} = & \tilde{q}_{1,i,j,k}^{\tau} - \left\{ \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(u\tilde{q}_1)_{i+1,j,k} - (u\tilde{q}_1)_{i-1,j,k}] + \right. \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta y} [(v\tilde{q}_1)_{i,j+1,k} - (v\tilde{q}_1)_{i,j-1,k}] + \frac{\Delta t}{2\Delta z} [(w\tilde{q}_1)_{i,j,k+1} - \\ & \left. - (w\tilde{q}_1)_{i,j,k-1}] \right\}^{\tau+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

После того как получено решение уравнения (10.19) решается уравнение (10.20), как уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \nu \rho \frac{\partial q_2}{\partial z} + \mu \nabla^2 q_2 \quad (q_2 = q_1^{\tau+1} \text{ при } t = t_{\tau}).$$

Это уравнение после почленного умножения на ρ и интегрирования по z , в пределах от z_{k-1} до z_{k+1} записывается для интегральной характеристики $\tilde{q}_2$.

Разностный аналог уравнения для $\tilde{q}_2$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{2,i,j,k}^{\tau+1} = & \tilde{q}_{2,i,j,k}^{\tau} + \frac{\Delta t}{\rho(\Delta z)^2} [(\nu\rho)_{k+\frac{1}{2}} (\tilde{q}_{2,k+1} - \tilde{q}_{2,k}) - \\ & - (\nu\rho)_{k-\frac{1}{2}} (\tilde{q}_{2,k} - \tilde{q}_{2,k-1})]_{i,j}^{\tau} + \frac{\mu \Delta t}{(\Delta s)^2} [\tilde{q}_{2,i+1,j,k} + \tilde{q}_{2,i,j+1,k} + \\ & + \tilde{q}_{2,i-1,j,k} + \tilde{q}_{2,i,j-1,k} - 4\tilde{q}_{2,i,j,k}]^{\tau}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Разностный аналог (10.28) уравнения (10.20) для $\tilde{q}_2$ записан по явной схеме с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями. Решение этого уравнения по явной схеме возможно, так как эффект турбулентной вязкости мал по сравнению с адвекцией и при малом Δt критерий счетной устойчивости выполняется.

Расчетная схема для $\tilde{q}_2$ так же, как и схема для $\tilde{q}_1$, удовлетворяет закону сохранения влаги при отсутствии потоков на границах области решения (т. е. при условии, что нормальные составляющие вектора скорости ветра на границах равны нулю).

Решение уравнения (10.21) $\frac{\partial q_3}{\partial t} = F$, ($q_3 = q_1^{\tau+1}$ при $t = t_{\tau}$) как уравнения согласования, представляется наиболее сложным. Не вдаваясь в детали, рассмотрим принципиальную сторону построения решения уравнения (10.21), которое запишем в ком-

понентной форме, опуская индекс «3» (указывающий на принадлежность решения уравнению (10.21)).

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = f_1, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t} = f_2, \quad \frac{\partial q_3}{\partial t} = f_3, \quad (10.29)$$

где f_1, f_2, f_3 определяются формулами (10.10). К системе уравнений (10.29) присоединим уравнение для Q :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = f_4, \quad (10.30)$$

где

$$f_4 = v\beta\rho (\sigma Q - q_1) + \int_0^H [\alpha_R^m (m - \bar{m}) + \alpha_R^M (M - \bar{M})] dz - \varepsilon \cdot Q. \quad (10.31)$$

Для решения уравнений (10.29) воспользуемся неявной разностной схемой

$$\begin{aligned} q_{1,i,j,k}^{\tau+1} &= q_{1,i,j,k}^{\tau} + \Delta t \{ \alpha_m (\bar{s} - s)^{\tau} q_2^{\tau+1} + \alpha_M (\bar{s} - s)^{\tau} q_3^{\tau+1} - c_m^{\tau} - c_M^{\tau} \}_{i,j,k}, \\ q_{2,i,j,k}^{\tau+1} &= q_{2,i,j,k}^{\tau} + \Delta t \{ \alpha_T (T - T_0)^{\tau} q_3^{\tau+1} + c_m^{\tau} - [\alpha_m (\bar{s} - s)^{\tau} + \\ &\quad + \alpha_z (T_0 - T)^{\tau}] q_3^{\tau+1} - \alpha_R^m (q_3^{\tau+1} - \bar{q}_2) \}_{i,j,k}, \\ q_{3,i,j,k}^{\tau+1} &= q_{3,i,j,k}^{\tau} + \Delta t \{ \alpha_z (T_0 - T)^{\tau} q_2^{\tau+1} + c_M^{\tau} - [\alpha_M (\bar{s} - s)^{\tau} + \\ &\quad + \alpha_T (T - T_0)^{\tau}] q_2^{\tau+1} - \alpha_R^M (q_2^{\tau+1} - \bar{q}_3) \}_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Нетрудно видеть, что последние два уравнения системы (10.32) содержат только две искомые функции q_2 и q_3 , а поэтому могут быть решены, как система двух линейных уравнений независимо от первого уравнения.

Определитель этой системы

$$\begin{aligned} D_{i,j,k}^{\tau} &= \left[\frac{1}{\Delta t} + \alpha_m (\bar{s} - s)^{\tau} + \alpha_z (T_0 - T)^{\tau} + \alpha_R^m \right]_{i,j,k} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\Delta t} + \alpha_M (\bar{s} - s)^{\tau} + \alpha_T (T - T_0)^{\tau} + \alpha_R^M \right]_{i,j,k} \end{aligned} \quad (10.33)$$

отличен от нуля, а поэтому решение для $q_2^{\tau+1}$ и $q_3^{\tau+1}$ существует.

После того как определены $q_2^{\tau+1}$ и $q_3^{\tau+1}$, из первого уравнения системы (10.32) может быть найдено $q_1^{\tau+1}$. Однако такой путь нахождения $q_1^{\tau+1}$ может привести к нарушению баланса

влаги и к неустойчивости. Поэтому целесообразно определить q_1 с помощью вспомогательной функции $R = q_1 + q_2 + q_3$ из условия

$$q_1^{\tau+1} = R^{\tau+1} - (q_2^{\tau+1} + q_3^{\tau+1}), \quad (10.34)$$

$$\text{где } R^{\tau+1} = R^{\tau} - \Delta t [\alpha_R^m (q_2^{\tau+1} - \bar{q}_2) + \alpha_R^M (q_3^{\tau+1} - \bar{q}_3)], \quad (10.35)$$

Соотношение (10.35) получается в результате почленного сложения уравнений (10.32). При таком подходе к нахождению q_1 должно выполняться условие

$$\Delta t [\alpha_R^m (q_2^{\tau+1} - \bar{q}_2) + \alpha_R^M (q_3^{\tau+1} - \bar{q}_3)] \leq q_1^{\tau} + q_2^{\tau} + q_3^{\tau}, \quad (10.36)$$

которое отражает тот факт, что количество осадков за малый интервал времени (шаг по времени) не должно превышать полного запаса влаги в начальный момент времени τ . В этом случае $R^{\tau+1} \leq R^{\tau}$, так как в квадратной скобке формулы (10.35) стоит положительная величина. Ограничение на Δt обеспечивает выполнение условия (10.36) и в конечном счете может трактоваться как вычислительное условие устойчивости.

Решение для Q определяется с помощью уравнения (10.30), которое записывается с помощью неявной разностной схемы

$$\begin{aligned} \frac{(Q^{\tau+1} - Q^{\tau})_{i,j}}{\Delta t} = & -\nu \beta \rho (\sigma Q^{\tau+1} - q_1^{\tau+1})_{i,j} - \delta \cdot Q_{i,j}^{\tau+1} + \\ & + \int_0^H [\alpha_R^m (m - \bar{m}) + \alpha_R^M (M - \bar{M})]_{i,j}^{\tau+1} dz. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Стоящие под интегралом функции $m = \rho q_2$ и $M = \rho q_3$ определены, а поэтому подынтегральное выражение тоже записано неявно.

Заметим, что для повышения точности решения уравнений (10.29) и сохранения баланса влаги целесообразно ввести интегральные характеристики для q_1 , q_2 и q_3 с помощью соотношения (10.26). Тогда вместо уравнений (10.29) приходим к уравнениям вида

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial t} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f_1 \rho dz, \quad \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial t} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f_2 \rho dz, \quad \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial t} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f_3 \rho dz,$$

которые решаются так же, как уравнения для q_1 , q_2 и q_3 .

Рассмотренный алгоритм прогноза влаги реализуется совместно с прогнозом полей ветра, температуры и давления (геопотенциала). Попутно с прогнозом влаги в трех фазах и осадков решается задача прогноза облачности, а также определяется фазовый приток тепла. За облако принимается пространство, где $q_2 \neq 0$, $q_3 \neq 0$.

Для прогноза облачности могут использоваться методы, рассмотренные в § 8.

Фазовый приток тепла определяется с помощью соотношения

$$\varepsilon_{\Phi} = L_K(K - J) + L_C(S - J) + L_{\Pi}(Z - T_a), \quad (10.38)$$

где L_K , L_C , L_{Π} — скрытая теплота конденсации, сублимации и плавления соответственно.

Рассмотренный алгоритм прогноза влаги (в системе координат x, y, z, t) может быть реализован в любой другой системе координат. В частности, если прогноз полей ветра, температуры и геопотенциала реализуется в изобарической системе координат (x, y, ξ, t) , то исходные уравнения для прогноза влаги записываются и решаются в этой же системе координат (x, y, ξ, t) . В этом случае для вектор-функций

$$q = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix} \text{ и } F = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix},$$

система уравнений (10.2), записанная одним уравнением, имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \xi} = \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \nu \xi^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} + \mu \nabla^2 q + F.$$

Для решения этого уравнения нижнее и верхнее граничные условия ставятся при $\xi=1$ и $\xi=0$. Интегральные характеристики вводятся с помощью соотношения.

$$\tilde{q} = \frac{p_{00}}{g} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_{k+1}} q d\xi \quad (p_{00} = 1000 \text{ гПа}).$$

В целом же алгоритм решения остается таким, как он изложен выше применительно к уравнениям в системе (x, y, z, t) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Кричак С. О. Гидродинамический прогноз осадков в неадиабатической бароклинной модели атмосферы над внетропической частью северного полушария — Тр. ГМЦ, 1975, вып. 160, с. 3—15.
2. Манабе С., Смагоринский Дж., Стриклер Р. Ф. Численное моделирование средней картины общей циркуляции с учетом процессов влагообмена. В сб.: Теория климата. Л.: — Гидрометеониздат, 1967, с. 185—229.
3. Бурцев А. И. Прогноз облачности и осадков. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. Л.: — Гидрометеониздат, 1969, с. 498—525.
4. Гандин Л. С., Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. Л.: — Гидрометеониздат, 1968. — 427 с.
5. Руководство по краткосрочным прогнозам погоды, ч. II. Л.: — Гидрометеониздат, 1965. — 492 с.
6. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Л.: — Гидрометеониздат, 1976. — 639 с.

7. Мусаелян Ш. А. О природе некоторых сверхдлительных атмосферных процессов. Л.: — Гидрометеиздат, 1978. — 142 с.

8. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л.: — Гидрометеиздат, 1967. — 356 с.

9. Швец М. Е. О конденсации водяного пара в атмосфере. — Изд. АН СССР, серия геофиз., 1955, № 6, с. 547—551.

10. Буйков М. В. Численное моделирование облаков слоистообразных форм. — Обнинск, ИЦ, 1978, с. 62.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Характеристики влажного воздуха	3
§ 2. Адиабатический прогноз влаги	6
§ 3. Прогноз влажности с учетом конденсации	9
§ 4. Прогноз точки росы	10
§ 5. Прогноз дефицита точки росы	14
§ 6. Прогноз количества влаги, сконденсировавшейся в единице объема воздуха	15
§ 7. Уравнение переноса удельной влажности в турбулентной атмосфере	16
§ 8. Прогноз облачности	18
§ 9. Прогноз осадков	24
§ 10. Прогноз влажности в трех фазах, облачности и осадков	32
Литература	45

Б. Д. ПАНИН, Р. П. РЕПИНСКАЯ

Прогноз влажности, облачности и осадков

Конспект лекций

Редактор Т. В. Иващенко

Корректор Л. В. Ломакина

Сдано в набор 16.11.81.	Подписано в печать 14.04.82.	М-32977
Формат 60×90 ^{1/16} .	Бумага тип. № 2.	Лит. гарн. Печать высокая.
Печ. л. 2,9.	Уч.-изд. л. 3,0.	Тираж 700 экз.
Поз. 93.	Зак. 319.	Темплан 1982 г.
		Цена 20 коп.

Издание ЛПИ им. М. И. Калинина, 195251, Ленинград, Политехническая, 29.
Типография ВОК ВМФ

THE
JOURNAL
OF
THE
ROYAL
ANTHROPOLOGICAL
INSTITUTE
OF GREAT
BRITAIN
AND IRELAND
VOLUME
LXXV
PART I
1945
PUBLISHED BY THE
INSTITUTE
21, BEDFORD SQUARE, LONDON, W.C.1
PRINTED BY
HARRISON AND SONS, ST. MARTIN'S LANE, LONDON, W.C.2