



И.Ф.Карасев
В.В.Коваленко

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

РЕЧНОЙ ГИДРАВЛИКИ И ГИДРОМЕТРИИ

Санкт-Петербург Гидрометеоиздат 1992



УДК 556.536+532.543

Рецензент д-р техн. наук М. С. Грушевский

В монографии изложены стохастические подходы к основным задачам речной гидравлики и гидрометрии. Приведены зависимости для характеристик неустановившегося движения потока и гидравлических сопротивлений открытых русел в стохастической форме. Изложены принципы рациональной организации наблюдений на реках, методы интерполяции и экстраполяции измеренных расходов воды при вычислении речного стока.

Сделана попытка получить вероятностно-гидравлические критерии для некоторых типов русловых процессов. Предложены методы вероятностной оценки надежности гидротехнических сооружений с учетом стохастической природы гидрологических процессов и характеристик гидравлического режима рек.

Книга предназначена для гидрологов и гидротехников, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

The monograph „Stochastic methods of river hydraulic and hydrography“ presents stochastic approaches to the main problems of river hydraulic and hydrography. Dependences for the characteristics of non-stationary flow and hydraulic resistences of open channels in the stochastic form are given. The principles of the rational organization of observations on rivers, methods of interpolation and extrapolation of measured discharges for estimating streamflow are discussed on the same basis.

An attempt is made to derive probabilistic-hydraulic criteria for some types of channel processes. Methods of probabilistic estimation of the reliability of hydraulic structures with regard to the stochastic nature of hydrologic processes and characteristics of the hydraulic regime of rivers are suggested.

The book is intended for hydrologists, hydraulic engineers, students and post-graduates training in relevant professions.

Монография

Иосиф Филиппович Карасев, Виктор Васильевич Коваленко

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕЧНОЙ ГИДРАВЛИКИ И ГИДРОМЕТРИИ

Редактор А. Б. Иванова. Художник А. В. Васильев. Художественный редактор Е. Н. Чукаева. Технический редактор Н. И. Перлович. Корректор А. А. Сандлер

ИБ № 1872

Сдано в набор 13.08.91. Подписано в печать 04.01.92. Формат 60×90^{1/16}. Бумага книжная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 13. Кр.-отт. 13. Уч.-изд. л. 13,89. Тираж 1050 экз. Индекс ГЛ-150. Заказ № 180. Цена 2 р. 60 к. Гидрометеиздат. 199226. Санкт-Петербург, ул. Беринга, 38.

Типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени объединения «Техническая книга» имени Евгении Соколовой 190000, г. Санкт-Петербург, Прачечный переулок, 6.

К 1805040700-016
069(02)-92 20-91

ISBN 5-286-00627-2 © И. Ф. Карасев, В. В. Коваленко, 1992 г.

86
ВНИИ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ И НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

Речная гидравлика и гидрометрия — органично взаимосвязанные научные дисциплины. Прежде чем гидравлика смогла установить закономерности движения водных потоков, гидрометрия должна была накопить определенный объем результатов измерений и наблюдений. В этом смысле, если не предмет, то научная значимость гидрометрии не оставляет сомнений. Однако в первой половине XX века в связи с успехами гидравлики, в частности с созданием полуэмпирической теории турбулентности, неожиданно появилась тенденция рассматривать гидрометрию в качестве некоего ремесла, что побудило ученых Государственного гидрологического института во главе с В. Г. Глушковым выступить в защиту гидрометрии как науки.

Гидрометрию нельзя сводить к концепциям гидравлики и гидродинамики. Известный гидротехник Н. Н. Жуковский писал, что «всякая попытка ... подвести результаты наблюдений к выводам гидродинамики не может рассматриваться иначе, как покушение к переходу на чисто спекулятивное отношение к явлениям природы». Но это означает, что недопустимо любое рассеяние результатов наблюдений относительно гидравлических зависимостей отождествлять с погрешностями измерений. Гидравлические обобщения всегда имеют некоторую меру неопределенности, которую можно раскрыть на основе оценки погрешностей гидрометрических данных. Если же обратиться к основополагающим предпосылкам гидравлики — осреднению характеристик потока, замене пространственного движения плоским [115], то их допустимость можно оценить только средствами гидрометрии.

В то же время, чтобы предвидеть, что покажет опыт, надо знать, что можно ожидать с точки зрения теории. Иными словами, методы гидрометрии всегда нуждаются в гидравлическом обосновании.

Отсюда следуют 1) необходимость взаимосвязанного развития речной гидравлики и гидрометрии и 2) перспективность синтеза этих научных дисциплин на стохастической основе, сочетающей детерминизм гидравлических зависимостей с известной неопределенностью гидрометрических данных, поскольку они не свободны от погрешностей измерений.

Приведенные подходы в той или иной мере авторы рассмотрели в предшествующих публикациях. Так, в работе [55] приведены гидравлические и статистические аспекты решения задач и обоснования методики гидрометрии, однако в ней отсутствует синтез этих аспектов. Общая трактовка важнейших закономерностей движения потоков с учетом детерминированных вариаций гидравлических характеристик приведена в работе [67], но в ней нет пригодных для применения на практике расчетных зависимостей. Эти обстоятельства послужили основанием для подготовки предлагаемой монографии. Ее цель авторы видят в том, чтобы

в сравнительно доступной форме на примерах решения ряда важных задач гидрологии, гидравлики и речной гидрометрии раскрыть возможности стохастических моделей. При этом не преследовалась цель написать всеобъемлющую книгу по стохастической гидравлике или гидрометрии — для этого еще не накоплен необходимый объем теоретических разработок нового подхода и его экспериментального обоснования. Но уже сегодня можно располагать достаточными теоретическими предпосылками и экспериментальными данными, чтобы практически использовать некоторые стохастические модели, еще не охватывающие весь комплекс проблем, но дающие новые решения и представляющие теоретический и практический интерес.

Как известно, философским категориям необходимости и случайности соответствуют два вида закономерностей — динамические и статистические. Стохастические модели, выражающие диалектическое единство необходимости и случайности, вполне адекватны реальным явлениям.

Еще недавно генетические представления в гидрологии противопоставляли стохастическим. Подобная драма идей в полной мере разыгралась в дискуссии ученых-гидрологов в 50-х годах. Гидрологам с самого начала была ясна связь речного стока с рельефом местности, осадками и другими климатическими факторами. Казалось, если установить соответствующие уравнения этой связи, то всякая случайность в определении стока будет исключена. Однако изгнание случайности из гидрологии не состоялось: дело в том, что случайную природу имеют стокообразующие факторы. Более того, Н. А. Картвелишвили [68] предположил существование физического закона, который в сочетании с детерминистическими уравнениями гидрологии и гидравлики позволял бы определять вероятность характеристик стока без обращения к данным наблюдений. Пока такой общий закон неизвестен. Вместе с тем, существует возможность синтеза стохастического (вероятностного) и детерминированного подходов на основе пусть не универсальных, но достаточно общих уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова.

Первая (вводная) глава книги посвящена постановке вопроса о необходимости применения методов теории случайных процессов к решению прикладных задач гидравлики и гидрометрии. В сжатом виде приведены основные математические методы, используемые в остальных главах.

Во второй главе описаны факторы гидравлических сопротивлений, показана связь наблюдаемых в речных потоках квазипериодических эффектов (например, низкочастотных пульсаций расходов воды) с реальными характеристиками гидравлических сопротивлений, не учитываемыми в современной гидравлике. Получены оценки временного и пространственного масштабов указанных пульсаций и показан их стохастический характер.

В третьей главе сделана попытка стохастически обобщить некоторые критерии, используемые в теории русловых процессов,

и применить методы теории случайных функций для решения ряда практических задач морфометрии и гидравлики (оценка точности измерения средних скоростей потока, поперечных сечений русла, характеристик продольного профиля и т. д.).

В четвертой главе предложены уравнения речной гидрометрии для определения расходов воды в фиксированных гидрометрических створах. Так как в наиболее распространенной модели расхода (скорость — площадь) используют данные о скоростях течения, то работа гидрометрической вертушки в турбулентном потоке исследована на основе более общей, чем применявшиеся ранее, стохастической модели.

Пятая глава посвящена вопросам оптимизации гидрологической сети. По сравнению с традиционными подходами основное внимание уделено новым стохастическим аспектам, в частности применению дифференциальных уравнений, описывающих изменение плотности вероятности водных запасов в русловой сети, и пространственно-временной дискретизации измерений.

Авторы признательны сотрудникам лаборатории гидрометрии ГГИ Т. И. Соколовой, В. П. Атроховой и Г. Д. Калашниковой, сотрудникам кафедры гидрофизики и гидропрогнозов ЛГМИ Л. Д. Карабань и А. В. Илларионову, оказавшим помощь и содействие в работе.

ГЛАВА I

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И МЕТОДЫ ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

1.1. О соотношении динамических и стохастических закономерностей в гидравлике и гидрометрии

Роль динамических и стохастических закономерностей наиболее полно можно раскрыть, рассматривая гидрологические системы. В достаточно общем виде гидрологическая система представляет собой речной бассейн, состоящий из многочисленных подсистем, например ГЭС или ряда близко расположенных мостовых переходов (рис. 1.1). С точки зрения системного анализа задачи, связанные с рассмотрением таких объектов, можно разбить на группы: 1) оценка состояния, 2) прогноз и 3) управление. Если не останавливаться на географическом подходе к оценке осредненного за год водного режима, например по картам основных гидрологических характеристик, то текущее состояние оценивают, как правило, с помощью непосредственных измерений, т. е. гидрометрическими методами. Для прогноза и управления необходимы уже соответствующие математические модели, обычно содержащие осредненные по тем или иным пространственным координатам элементы, т. е. являющиеся гидравлическими (модели руслового и склонового стока, водоемов, насыщенной и ненасыщенной зон грунтовых вод). Обычно такие модели представляют собой дифференциальные уравнения, и поэтому абстрактно гидрологическую систему можно описать следующим векторным уравнением:

$$\partial Y / \partial t + L(\Lambda, U, Y, x, t) = \epsilon, \quad (1.1)$$

где Y — вектор параметров, характеризующих состояние речного бассейна (уровни и расходы воды и т. д.); ϵ — вектор внешних воздействий (осадки, температура воздуха, тектонические воздействия и т. д.); Λ — вектор заданных функций и коэффициентов, характеризующих физические, геометрические, морфологические и т. п. параметры системы; U — вектор управляющих воздействий (например, режим регулирования расходов воды на ГЭС); L — оператор, определяемый конкретным набором используемых моделей отдельных звеньев гидрологического цикла; x — вектор пространственных координат; t — время.

Интегрируя по времени (1.1), получаем

$$Y(t) = Y(t_0) - \int_{t_0}^t L(\Lambda, U, Y, x, t) dt + \int_{t_0}^t \epsilon dt. \quad (1.2)$$

Начальное (текущее) состояние системы $Y(t_0)$ определяют гидрометрическими методами с помощью сети пунктов наблюдений, оптимальное размещение которых представляет собой важную самостоятельную задачу. Зная прогнозируемые внешние воздействия (или их «сценарии»), можно прогнозировать (или имитировать) поведение гидрологической системы, решая тем или иным численным методом систему (1.2). При выборе управляю-

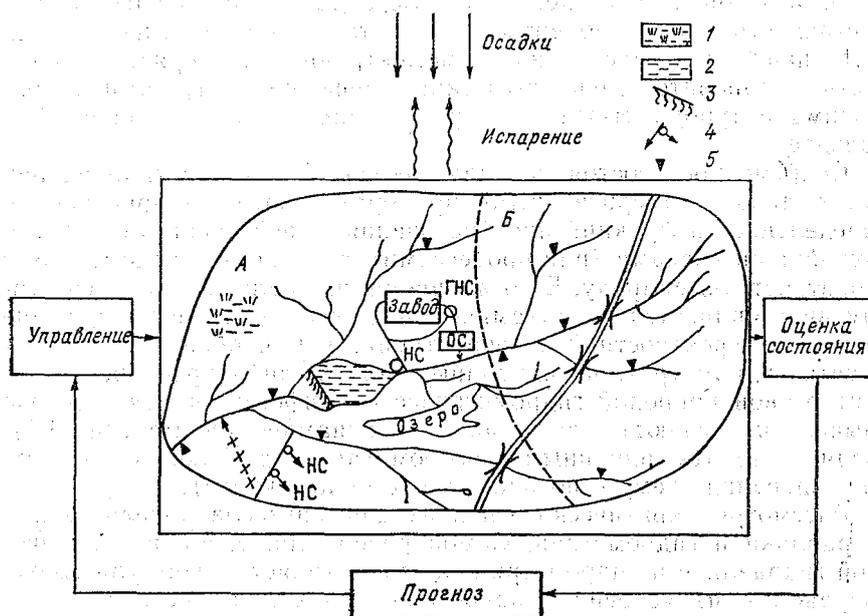


Рис. 1.1. Гидрологическая система.

А — зона активного использования стока, Б — зона формирования стока; 1 — бодото, 2 — водокрaнилице, 3 — ГЭС, 4 — гидромелиоративная система, 5 — пост; НС — насосная станция, ГНС — главная насосная станция, ОС — очистные сооружения.

щих воздействий U перед системой ставят определенные цели (например, пространственное перераспределение речного стока), для достижения которых необходимо оптимальное управление. В роли управляющих воздействий может выступать и часть компонентов вектора Λ : поперечный профиль проектируемого канала, уклон его дна или шероховатость русла. В качестве U можно рассматривать и компоненты ϵ , например управление погодой.

Решить векторное уравнение (1.1) в динамическом (детерминистическом) смысле означает найти функцию $Y(t)$ при известном начальном состоянии системы $Y(t_0)$. В более общем случае процесс $Y(t)$ необходимо рассматривать как случайный (стохастический). Возможны три источника, порождающих стохастичность решений:

1) так как начальное состояние определяют из измерений, которые всегда сопровождаются погрешностями, то величину $Y(t_0)$ можно задать только в вероятностном смысле;

2) как внешние воздействия на систему ε (например, осадки), так и собственные ее параметры (например, коэффициент шероховатости в деформируемом русле) являются случайными процессами («шумят»);

3) даже если начальные условия заданы точно, а параметры системы и внешние воздействия строго детерминированы, то стохастичность может появиться из-за того, что решение модели (1.1) начиная с определенного момента времени теряет устойчивость и становится случайным (аналогично переходу ламинарного режима в турбулентный при критических значениях числа Рейнольдса).

Современное состояние дел таково. Так как в гидрометрии имеют дело с измерительными приборами, которым присуща неопределенность функций преобразования, в ней оперируют только случайными числами (или процессами), т. е. $Y(t_0)$ заведомо имеет вероятностную природу. В то же время гидравлика в ее современном виде опирается на динамические модели (1.1), исключая элементы вероятностной интерпретации. Таким образом, состыковать гидрометрию и гидравлику можно, либо пренебрегая вероятностной природой гидрометрической информации (что сейчас обычно и делают), либо обобщая динамические модели (1.1), вводя в них тем или иным способом характеристики вероятностного описания (чему и посвящена настоящая книга).

Рассмотрим критически основные динамические модели речной гидравлики и гидрометрии. Самой распространенной в практической гидравлике и гидрометрии моделью является формула Шези, получаемая из условия уравнивания сил тяжести ($F_{тяж} \sim \sim g \sin \alpha \approx g i_0$, где g — ускорение свободного падения; α — угол наклона водной поверхности к горизонту; i_0 — уклон дна) и сил трения ($F_{тр} \sim KU^m$, где K — эмпирический коэффициент; $m = 1$ и 2 для ламинарного и турбулентного режимов соответственно, в переходной области $1 \leq m \leq 2$).

Следовательно, при турбулентном режиме, наблюдающемся в реальных потоках, и при условии, что $K = g/(C^2R)$, где C — коэффициент Шези, R — гидравлический радиус,

$$i_0 = U^2/(C^2R). \quad (1.3)$$

Коэффициент Шези связан с коэффициентом гидравлического сопротивления формулой $\lambda = 2g/C^2$. В любом случае должно быть справедливым уравнение неразрывности

$$\partial F/\partial t + \partial Q/\partial x = q(x, t), \quad (1.4)$$

где Q — расход воды, F — площадь живого сечения, $q(x, t)$ — боковая приточность.

Но так как в данном случае движение предполагается установившимся и равномерным, то $\partial F/\partial t = 0$; $\partial Q/\partial x = 0$. Прямым

следствием формулы Шези является однозначность связи расхода воды с уровнем H . Так как из (1.3) следует, что $Q^2 = i_0 C^2 R F^2$ при $i_0 = \text{const}$, $C^2 R F^2 = f(H)$, то $Q = f(H)$.

Несмотря на огромное значение формулы Шези в гидравлике и гидрометрии (примерно такое же, как закона Ома в электротехнике) ее нельзя безоговорочно использовать для решения задач, в которых параметры потока меняются во времени и по продольной координате. Простейшей моделью, устраняющей этот недостаток, является модель кинематической волны. Основная предпосылка этой модели состоит в том, что несмотря на неустановившийся и неравномерный режим движения связь расхода и уровня воды считают однозначной. Это приводит к такой системе уравнений:

$$Q = f(x, F),$$

$$\partial F / \partial t + \partial Q / \partial x = q(x, t).$$

Подставляя первое уравнение во второе, получаем

$$\partial F / \partial t + \partial f(F, x) / \partial x = q(x, t).$$

Функцию $f(F, x)$ надо задать, т. е. из предварительных измерений или расчетов должна быть известна связь расходов воды и площадей живого сечения в каждой точке x на всем рассматриваемом участке русла.

Эта модель является уже довольно общей, так как позволяет ставить и решать краевые задачи математической физики, учитывая при этом нелинейность связи расхода и уровня воды и боковую приточность. Для решения многих гидрологических задач, связанных с количественным учетом стока в условиях плавноизменяющегося движения, этой моделью можно ограничиться. Для более «тонких» гидравлических задач недостатки этой модели недопустимы. Основным недостатком является предположение о том, что при неравномерном и неустановившемся движении связь расходов воды с уровнем (площадью живого сечения) однозначная. Опыт показывает, что иногда в этих условиях зависимость $Q = f(F)$ неоднозначна. Самый простой способ описать неоднозначную связь — предположить, что расход воды в створе зависит не только от площади живого сечения (или уровня), но и от производной, т. е. ввести в уравнения, так сказать, «предысторию» по продольной координате:

$$Q = f(F, x) - k \partial F / \partial x.$$

В этом случае модель кинематической волны обобщается и принимает вид уравнения параболического типа:

$$\partial F / \partial t + \partial f(F, x) / \partial x - k \partial^2 F / \partial x^2 = q(x, t).$$

Такой путь учета влияния градиента площади на расход воды несколько необычен и пока допустим лишь в эвристическом

смысле. Более формальный путь — обобщение формулы Шези при условии, что

$$I = i_0 - \partial h / \partial x = Q^2 / (C^2 R F^2),$$

где I — уклон водной поверхности.

Связи типа $Q = f(H, I)$ давно применяют в гидрометрии при подсчете стока в условиях переменного подпора по семейству соответствующих кривых или по уравнениям регрессии расходов воды по двум уровням. Параболическая модель значительно рас-

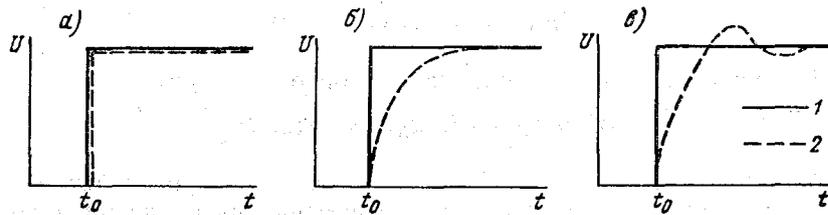


Рис. 1.2. Реакция потока (I) на внешнее возмущение (2).

a — формула Шези, b — параболическая модель, v — гиперболическая модель (уравнения Сен-Венана).

ширяет возможности по сравнению с моделью кинематической волны, так как позволяет учесть нелинейность и неоднозначность связи $Q = f(H)$. Но эта модель не может описать ряд эффектов, имеющих место в потоках, (например, колебательные процессы). Если формула Шези вообще не содержит время, как независимую переменную, и поэтому определяемая по этой формуле реакция потока, вызванная внешним возмущением в виде скачка, мгновенно достигает своего установившегося значения в момент приложения возмущения (рис. 1.2 a), то в параболической модели реакция потока плавно нарастает (см. рис. 1.2 b). Эта ситуация больше соответствует действительности, так как безынерционные системы вообще не существуют в природе, а формула Шези слишком упрощает положение. Но поток может достигать состояния равновесия и аperiodическим путем (см. рис. 1.2 v). Однако и параболическая модель не может описать такие колебания, если, конечно, они не заданы граничными условиями (т. е. не созданы в процессе управления).

Этот недостаток устраняет система уравнений гиперболического типа Сен-Венана, которую получают, если кроме сил тяжести и

трения, как в формуле Шези, рассматривают еще и силы инерции:

$$i_0 - \partial h / \partial x = U^2 / (C^2 R) + (1/g) (\partial U / \partial t) + (\alpha U / g) (\partial U / \partial x), \quad (1.5)$$

$$\partial Q / \partial x + \partial F / \partial t = q, \quad (1.6)$$

где α — коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению.

Эта система дифференциальных уравнений не самая общая из известных одномерных гидравлических идеализаций, но зато одна из самых проверенных.

Особенность гидрометрии состоит в том, что измерения производятся в фиксированных створах (x_0), т. е. для нее достаточны модели с сосредоточенными параметрами. Используя в (1.5) расходы воды и считая, что информация об уровне и уклоне известна из измерений, а также используя (1.6), получаем [73]

$$dQ/dt = f_1(x_0, t) Q^2 + f_2(x_0, t) Q + f_3(x_0, t), \quad (1.7)$$

где $f_1(x_0, t) = -gF/K^2$, $f_2(x_0, t) = (2\alpha/F)\partial F/\partial t$, $f_3(x_0, t) = gIF$, $K = Q/(CF\sqrt{R})$ — модуль расхода.

1.2. Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова

Из трех указанных возможностей появления стохастичности в настоящей работе рассмотрены только первые две. Ниже описаны основные типы используемых в дальнейшем случайных процессов [11, 54, 76, 130].

Случайной называют функцию, значение которой при любом значении аргумента случайно. Если в качестве аргумента выступает время, то говорят о случайном процессе (рис. 1.3 а). Для любого момента времени t (сечения) можно построить кривую распределения плотности вероятности $p(x)$ (см. рис. 1.3 б). Таким образом, чтобы задать случайную функцию X , необходимо задать набор плотностей вероятности $p(x_1/t_1)$, $p(x_2/t_2)$, $p(x_3/t_3)$ и т. п. Обычно этот набор записывают как $p(x_1, x_2, \dots, x_n/t_1, t_2, \dots, t_n)$ и называют n -мерной плотностью вероятности. Так как ее получить очень сложно, то на практике для описания случайных процессов часто используют более простые характеристики:

- 1) математическое ожидание

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x/t) dx,$$

зависящее только от одномерного закона распределения;

- 2) корреляционную функцию

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1) x_2(t_2) p(x_1, x_2/t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

зависящую от двумерного закона распределения. Ее физический смысл заключается в том, что она показывает, как меняется статистическая связь координат случайного процесса в зависимости от расстояния (сдвиги) между ними;

3) дисперсию (значение корреляционной функции при $t_1 = t_2$)

$$\sigma^2 = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x/t) dx.$$

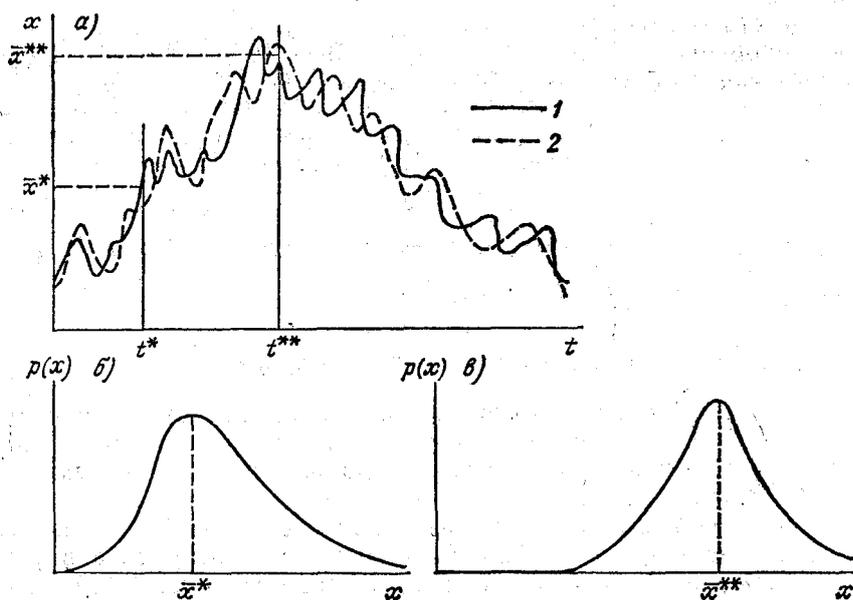


Рис. 1.3. Случайная функция (а) и кривые распределения плотности вероятности для двух сечений в моменты времени t^* (б) и t^{**} (е).

1, 2 — реализации случайной функции.

Раздел теории случайных процессов, ограниченный изучением только этих характеристик, называют корреляционной теорией.

Случайные процессы можно также классифицировать по виду кривой распределения плотности вероятности, например нормальные (гауссовские) процессы. В гидрологии расчетные характеристики распределены, как правило, не по нормальному закону, а имеют некоторую положительную асимметрию, которую описывают, например, кривые Пирсона.

На практике, в том числе и в гидрологических расчетах, используют два специфических вида процессов: марковский случайный процесс и процесс «белого шума». Марковским, по имени русского математика А. А. Маркова (1856—1922), называют процесс, для которого закон распределения ординаты функции, т. е.

$p(x/t)$, в любой будущий момент времени зависит только от значения ординаты в данный момент времени и не зависит от значений ординаты случайной функции в прошлом:

$$p(x_k/x_1, \dots, x_{k-1}) = p(x_k/x_{k-1}).$$

Проще это можно сформулировать так: распределение плотности вероятности нашего поведения в будущем зависит только от того, кем мы являемся сегодня, а наше прошлое не имеет никакого значения.

Еще более специфический вид случайных процессов представляет собой процесс «белого шума», или процесс с независимыми ординатами. Обычно его вводят с помощью дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \text{при } \tau = 0, \quad \delta(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \neq 0$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - a) d\tau = 1 \quad \text{при } \tau = a, \quad \delta(\tau - a) = 0 \quad \text{при } \tau \neq a.$$

Процесс с независимыми ординатами имеет корреляционную функцию вида

$$K(t_1, t_2) = \sigma_0^2 \delta(\tau),$$

где σ_0^2 — интенсивность шума.

Этот процесс можно представить как беспорядочно следующие друг за другом положительные и отрицательные игольчатые импульсы. Амплитуда этих импульсов имеет случайный характер и подчиняется нормальному закону с плотностью вероятности

$$p(x) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) \exp[-(x - \bar{x})^2/(2\sigma^2)].$$

Часто этот процесс называют «дельта-коррелированным». Он полностью определяется одномерным законом распределения

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i).$$

Хотя в природе такие процессы реально не существуют, они являются полезной идеализацией.

Уравнение (1.7) можно записать в виде

$$dQ/dt = (-gF/K^2)Q^2 + (2\alpha Q/F) \partial F/\partial t + gIF$$

и ввести новые обозначения: $-gF/K^2 \equiv c(t)$; $gIF + (2\alpha Q/F) \partial F/\partial t \approx gIF \equiv N(t)$; $Q^2 = \varphi(Q)$, причем функция $\varphi(Q)$ в общем случае не обязательно квадратическая. Если $c(t)$ и $N(t)$ неслучайные функции, то и решением этого уравнения будет неслучайный (динамический) процесс $Q = f(t)$. Однако на самом деле $c(t)$ и $N(t)$ — случайные функции. Поэтому надо принять

$c(t) = \bar{c}(t) + \tilde{c}(t)$; $N(t) = \bar{N}(t) + \tilde{N}(t)$, где $\tilde{c}(t)$ и $\tilde{N}(t)$ — случайные процессы с независимыми ординатами (белые шумы). Решением такого стохастического уравнения будет марковский случайный процесс. Чтобы показать это, можно проинтегрировать уравнение по времени от t до $t + \Delta t$:

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) + \int_t^{t + \Delta t} [\bar{c}(t) + \tilde{c}(t)] Q^2 dt + \int_t^{t + \Delta t} [\bar{N}(t) + \tilde{N}(t)] dt.$$

Из этого соотношения следует, что значение расхода воды в будущем $Q(t + \Delta t)$ зависит только от его значения $Q(t)$ в рассматриваемый момент t и не зависит от его прошлых значений до момента t , так как \tilde{c} и \tilde{N} являются белыми шумами и статистически не зависят от своих прошлых значений. Таким образом, существует равенство

$$p[Q(t + \Delta t)/Q(t), Q(t - \Delta t), Q(t - 2\Delta t) \dots] = p[Q(t + \Delta t)/Q(t)],$$

что соответствует условиям марковского случайного процесса (это было бы не так при другой исходной модели (1.7), или если бы шумы не были белыми).

Раз процесс марковский, то, чтобы его полностью описать статистически, необходимо научиться вычислять двумерные условные плотности вероятности $p[Q(t + \Delta t)/Q(t)]$ для чего следует получить соответствующее дифференциальное уравнение.

Решением рассматриваемого стохастического уравнения будет марковский случайный процесс:

$$p(Q_k/Q_1, \dots, Q_{k-1}) = p(Q_k/Q_{k-1}),$$

где $p(Q_k/Q_1, \dots, Q_{k-1})$ — условная плотность распределения случайной величины $Q(t_k)$ при условии совместного выполнения равенства $Q(t_1) = Q_1, \dots, Q(t_{k-1}) = Q_{k-1}$.

Из определения марковского процесса следует, что любые многомерные законы распределения можно выразить через условные двумерные плотности вероятности начального состояния:

$$p(Q_1, \dots, Q_n) = p(Q_n/Q_{n-1}) \dots p(Q_2/Q_1) p(Q_1).$$

Это легко показать для трехмерной плотности. Из теории вероятностей известно, что условная плотность вероятности определяется по формуле

$$p(Q_n/Q_{n-1}) = p(Q_n, Q_{n-1})/p(Q_{n-1}).$$

В соответствии с ней

$$p(Q_1, Q_2, Q_3) = p(Q_3/Q_1, Q_2) p(Q_1, Q_2).$$

Согласно свойству марковских процессов, $p(Q_3/Q_1, Q_2) = p(Q_3/Q_2)$, поэтому

$$p(Q_1, Q_2, Q_3) = p(Q_3/Q_2) p(Q_2/Q_1) p(Q_1).$$

Из теории вероятностей известна также формула, связывающая одномерную и двумерную плотности вероятности:

$$p(Q_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(Q_n, Q_{n-1}) dQ_n.$$

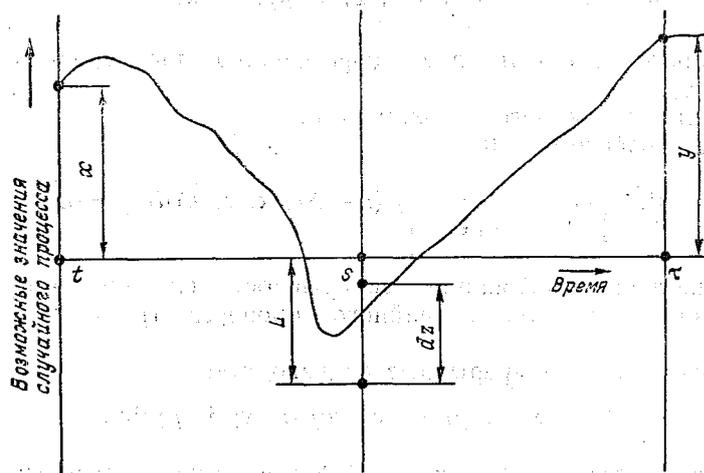


Рис. 1.4. К выводу уравнения Маркова.

Следовательно, все законы распределения марковского случайного процесса можно выразить через двумерные законы, т. е. двумерный закон распределения $p(Q_n, Q_{n-1})$, заданный для любых значений времени t_n и t_{n-1} , является полной характеристикой процесса.

В дальнейшем изложении выражение (Q_n/Q_{n-1}) обозначено как $p(t, x; \tau, y)$ (где t и τ — предыдущий и последующий моменты времени, а x и y — соответствующие им ординаты процесса) и введен интегральный закон распределения:

$$F(t, x; \tau, y) = P\{Y_i(\tau) < y / X(t) < x\}.$$

Если существует производная

$$\partial F(t, x; \tau, y) / \partial y = p(t, x; \tau, y),$$

то при $X(t) = x$ и $t < \tau$ она является условной плотностью распределения $Y(\tau)$. Дальнейшие рассуждения поясняет рис. 1.4.

Траектория случайного процесса из точки (t, x) попадает в интервал $(z, z + dz)$ в момент времени s с вероятностью $p(t, x; s, z) dz$.

Из любой точки интервала $(z, z + dz)$ в момент τ траектория попадает в полубесконечный интервал $(-\infty, y)$ с вероятностью $F(s, z; \tau, y)$. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем

$$F(t, x; \tau, y) = \int F(s, z; \tau, y) p(t, x; s, z) dz.$$

Дифференцируя F по y , находим так называемое уравнение Маркова

$$p(t, x; \tau, y) = \int p(s, z; \tau, y) p(t, x; s, z) dz,$$

из которого следуют два дифференциальных уравнения для $p(t, x; \tau, y)$.

Для вывода первого положим, что:

1) для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[(1/\Delta t) \int_{|y-x| \geq \delta} p(t - \Delta t, x; t, y) dy \right] = 0,$$

т. е. выполнено требование непрерывности случайного процесса (вероятность скачков случайного процесса $|y-x| \geq \delta$ равна нулю);

2) существуют непрерывные производные

$$\partial p(t, x; \tau, y)/\partial x \text{ и } \partial^2 p(t, x; \tau, y)/\partial x^2;$$

3) для любого $y - \delta < x < y + \delta$ существуют пределы:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[(1/\Delta t) \int_{|y-x| < \delta} (y-x) p(t - \Delta t, x; t, y) dy \right] = a(t, x),$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[(1/\Delta t) \int_{|y-x| < \delta} (y-x)^2 p(t - \Delta t, x; t, y) dy \right] = b(t, x).$$

Согласно уравнению Маркова,

$$p(t - \Delta t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, z; \tau, y) p(t - \Delta t, x; t, z) dz. \quad (1.8)$$

По определению вероятности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t - \Delta t, x; t, z) dz = 1,$$

поэтому можно записать

$$p(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x; \tau, y) p(t - \Delta t, x; t, z) dz. \quad (1.9)$$

При вычитании (1.8) из (1.9) и делении этой разности на Δt получаем

$$\frac{p(t - \Delta t, x; \tau, y) - p(t, x; \tau, y)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} [p(t, z; \tau, y) - p(t, x; \tau, y)] p(t - \Delta t, x; t, z) dz.$$

По второму предположению, разность в подынтегральном выражении при использовании ряда Тейлора имеет вид

$$p(t, z; \tau, y) - p(t, x; \tau, y) = (z - x) \frac{\partial p(t, x; \tau, y)}{\partial x} + \frac{(z - x)^2}{2} \frac{\partial^2 p(t, x; \tau, y)}{\partial x^2} + O(|z - x|^3).$$

Можно показать, что как условная ($p(t, x; \tau, y)$), так и безусловная ($p(\tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t; \tau, y) dx$) плотности вероятности подчиняются следующему уравнению Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(\tau, y)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y) p(\tau, y)] + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y) p(\tau, y)],$$

где

$$a(\tau, y) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{(1/\Delta t) M[Y(\tau) - Y(\tau - \Delta t)]\},$$

$$b(\tau, y) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{(1/\Delta t) M[Y(\tau) - Y(\tau - \Delta t)]^2\}.$$

Таким образом, $a(\tau, y)$ — скорость изменения математического ожидания процесса $Y(t)$ в текущий момент времени (коэффициент сноса); $b(\tau, y)$ — скорость изменения дисперсии случайного процесса $Y(t)$ в текущий момент времени (коэффициент диффузии).

Искомой функцией в этом уравнении является плотность вероятности $p(\tau, y)$, независимыми аргументами — τ и y . Для решения необходимо задать начальное условие $p(\tau_0, y) = \varphi(y)$.

Для определения физического смысла уравнения ФПК рассмотрим «блуждание» каких-либо частиц на прямой Oy . Через $p(\tau, y)$ обозначим концентрацию частиц в момент времени τ в точке с координатой y . Произведение скорости $a(\tau, y)$ на концентрацию $p(\tau, y)$ даст регулярный поток частиц, а величина $-0,5 \partial [b(\tau, y) p(\tau, y)] / \partial y$ — диффузионный, так как $b(\tau, y)$ — скорость изменения дисперсии (разброса) частиц. Общий поток частиц, точнее плотность потока, равен

$$G(\tau, y) = a(\tau, y) p(\tau, y) - 0,5 \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y) p(\tau, y)].$$

Тогда уравнение ФПК примет вид

$$\partial p(\tau, y) / \partial \tau + \partial G(\tau, y) / \partial y = 0$$

и является математическим выражением закона сохранения общего числа частиц, а если вернуться от концентрации частиц к плотности вероятности, то уравнением неразрывности, выражающим закон сохранения вероятности.

Плотность вероятности состояния системы деформируется во времени ($\partial p/\partial \tau$) и смещается в «пространстве» ($\partial G/\partial y$). Однако общее количество вероятности во всей бесконечной области существования случайного процесса неизменно, если отсутствуют стоки и источники вероятности, т. е. если отсутствуют поглощение и восстановление реализации случайного процесса $Y(\tau)$. Действительно, при интегрировании уравнения ФПК получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau, y) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} G(\tau, y) dy.$$

При отсутствии источников и стоков правый интеграл равен нулю. Следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau, y) dy = \text{const}$, причем эту константу нормируют единицей, т. е. вероятностью достоверного события.

Для решения уравнения ФПК кроме начального условия следует задать граничные условия:

$$[\kappa_1(\tau) \partial p/\partial y - v_1(\tau) p(\tau, y)]|_{y=L_1} = 0;$$

$$[\kappa_2(\tau) \partial p/\partial y - v_2(\tau) p(\tau, y)]|_{y=L_2} = 0.$$

При $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ имеем граничные условия поглощения $p(\tau, L_1) = p(\tau, L_2) = 0$.

Смысл этого условия, если снова вернуться к частицам, следующий: частицы непрерывно покидают пределы интервала $[L_1, L_2]$. Плотность вероятности уже не удовлетворяет условию нормировки и с течением времени обращается в нуль. При

$$\kappa_1 = 0,5b(L_1, \tau), \quad \kappa_2 = 0,5b(L_2, \tau),$$

$$v_1 = a(L_1, \tau), \quad v_2 = a(L_2, \tau)$$

получаем граничные условия отражения:

$$[a(\tau, y) p(\tau, y) - 0,5b(\tau, y) \partial p(\tau, y)/\partial y] \Big|_{y=L_1}^{y=L_2} = 0,$$

т. е. поток через границу равен нулю (частицы «отскакивают»). Для стохастической модели

$$dQ/dt = [\bar{c}(t) + \tilde{c}(t)]_{\varphi}(Q) + \bar{N}(t) + \tilde{N}(t),$$

где $\tilde{c}(t)$ и $\tilde{N}(t)$ — случайные процессы с независимыми ординатами (белые шумы) (рис. 1.5). Считаем, что белые шумы имеют нор-

мальное (гауссовское) распределение амплитуд и следующие корреляционные функции;

$$K_{\tilde{c}}(t, \tau) = M[\tilde{c}(t)\tilde{c}(\tau)] = G_{\tilde{c}}(t)\delta(t-\tau),$$

$$K_{\tilde{N}}(t, \tau) = M[\tilde{N}(t)\tilde{N}(\tau)] = G_{\tilde{N}}(t)\delta(t-\tau),$$

$$K_{\tilde{c}\tilde{N}}(t, \tau) = M[\tilde{c}(t)\tilde{N}(\tau)] = G_{\tilde{c}\tilde{N}}(t)\delta(t-\tau),$$

где $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$ и $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ — интенсивности и взаимные интенсивности белых шумов; $\delta(t+\tau)$ — дельта-функция.

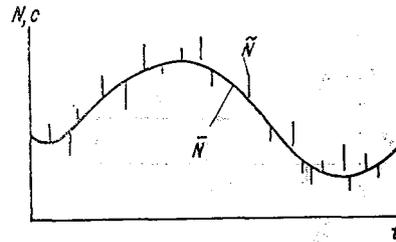


Рис. 1.5. Случайный процесс с независимыми ординатами.

Запишем без вывода формулы для коэффициентов сноса и диффузии:

$$a(t, Q) = (\bar{c}(t) + M[\tilde{c}(t)])\varphi(Q) + 0,5(\partial\varphi/\partial Q) \times \\ \times [G_{\tilde{c}}\varphi(Q) + G_{\tilde{c}\tilde{N}}] + \bar{N},$$

$$b(t, Q) = G_{\tilde{c}}\varphi(Q)\varphi(Q) + 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}\varphi(Q) + G_{\tilde{N}}.$$

Из этих соотношений видно, что коэффициенты $a(t, Q)$ и $b(t, Q)$ полностью определяются видом исходного динамического уравнения и характеристиками шумов.

Уравнение ФПК

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q}[a(Q, t)p(Q, t)] + 0,5\frac{\partial^2}{\partial Q^2}[b(Q, t)p(Q, t)] \quad (1.10)$$

относят к определенному классу уравнений в частных производных (параболический тип) и применяют к нему методы решений, разработанные в математической физике, в частных случаях — метод разделения переменных. Однако при произвольных (сложных) зависимостях для коэффициентов сноса и диффузии эффективно применяют численные методы, в которых дифференциальное уравнение заменяют на конечно-разностный аналог, например:

$$(p_j^{i+1} - p_j^i)/\Delta t = -(a_j^i p_j^i - a_{j-1}^i p_{j-1}^i)/\Delta Q + 0,5 \times \\ \times (b_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2b_j^i p_j^i + b_{j-1}^i p_{j-1}^i)/\Delta Q^2,$$

где i и j — номер расчетного шага по времени и расходу воды соответственно (рис. 1.6 а).

Граничными условиями могут служить условия поглощения

$$p(t, Q_n) = p(t, Q_k) = 0.$$

В качестве начального условия принимают гистограмму (см. рис. 1.6 б) с условием нормировки $\sum_{j=0}^N p_{ij} = 1$. Расчет производят последовательно по временным шагам в соответствии с алгоритмом:

$$p_j^{i+1} = p_j^i + F \left(\begin{matrix} i \\ j-1; j; j+1 \end{matrix} \right) \Delta t.$$

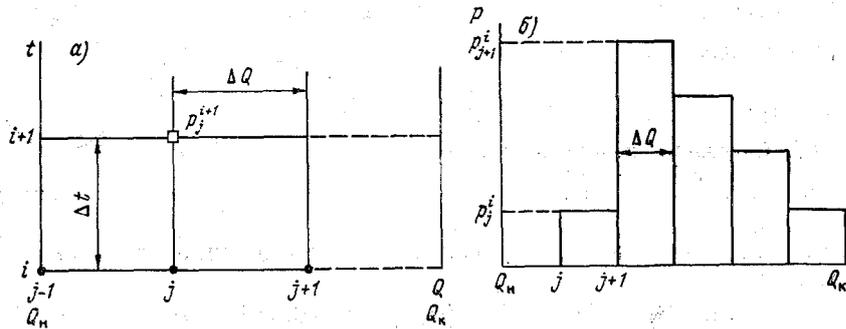


Рис. 1.6. Прямоугольная сетка (а) и гистограмма (б).

Это — так называемая явная разностная схема. Она проста логически, однако при ее использовании можно потерять устойчивость счета при переходе от одного временного слоя к другому, так как незначительная погрешность, возникающая в результате округлений, может возрастать от слоя к слою. Указанных недостатков нет у так называемой неявной схемы, хотя сам алгоритм расчета по ней существенно усложняется. Рассмотрим алгоритм решения, именуемый методом прогонки. Конечно-разностная аппроксимация уравнения ФПК имеет вид

$$(p_j^i - p_j^{i-1})/\Delta t = - (a_j^i p_j^i - a_{j-1}^i p_{j-1}^i)/\Delta Q + 0,5 \times \\ \times (b_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2b_j^i p_j^i + b_{j-1}^i p_{j-1}^i)/\Delta Q^2$$

или, более сжато,

$$A_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2B_j^i p_j^i + C_{j-1}^i p_{j-1}^i = - (1/\Delta t) p_j^{i-1}, \quad (1.11)$$

где использованы следующие обозначения:

$$A_{j+1}^i = b_{j+1}^i/(2\Delta Q^2), \quad B_j^i = (\Delta Q^2 + \Delta Q \Delta t a_j^i + \Delta t b_j^i)/(2\Delta Q^2 \Delta t), \\ C_{j-1}^i = (2\Delta Q a_{j-1}^i + b_{j-1}^i)/(2\Delta Q^2).$$

Левое граничное условие аппроксимируется так:

$$\kappa_i^i(p_j^i - p_{j-1}^i)/\Delta Q - v_i^i(p_{j-1}^i + p_j^i)/2 = 0$$

или

$$p_{j-1}^i = V_j^i p_j^i + W_j^i. \quad (1.12)$$

При $j = 0$

$$V_0^i = (2\kappa_1^i - \Delta Q v_1^i)/(2\kappa_1^i + \Delta Q v_1^i), \quad W_0^i = 0.$$

Подставляя (1.12) в (1.11), получаем

$$p_j^i = \frac{A_{j+1}^i}{2B_j^i - C_j^i W_j^i} p_{j+1}^i + \frac{\Delta t C_{j-1}^i V_j^i + p_j^{i-1}}{\Delta t (2B_j^i - C_j^i W_j^i)}. \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.12) и (1.13), получаем рекуррентные формулы для вычисления W_j^i и V_j^i :

$$W_{j+1}^i = \frac{A_{j+1}^i}{2B_j^i - C_j^i W_j^i}, \quad V_{j+1}^i = \frac{\Delta t C_{j-1}^i V_j^i + p_j^{i-1}}{\Delta t (2B_j^i - C_j^i W_j^i)}. \quad (1.14)$$

Значения p_j^{i-1} находят из начального условия. Соотношения (1.14) реализуют прогонку левого граничного условия в прямом направлении. Зная W_j^i и V_j^i , значения p_j^i находят по формуле (1.12), начиная с правого граничного условия (обратная прогонка).

Исчерпывающей характеристикой для статистического описания случайной функции является n -мерная плотность вероятностей. Существуют и более простые характеристики, именуемые моментами распределения:

$$m^k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q^k p(Q, t) dQ.$$

При $k = 1$ имеем математическое ожидание случайной величины $M[Q]$, при $k = 2$ — дисперсию $\sigma^2 = D[Q]$. Отношение $\sqrt{D[Q]}/M[Q]$ называют коэффициентом вариации C_v . При $k = 3$ получаем величину, определяющую коэффициент асимметрии C_s , а при $k = 4$ — эксцесс.

Можно показать, что задание кривой плотности вероятности эквивалентно заданию бесконечного числа моментов:

$$p(Q, t) \sim m^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Однако во многих практически важных случаях достаточно ограничиться только несколькими первыми моментами распределения. Например, при нормальном распределении достаточно знать математическое ожидание и дисперсию, так как

$$p(Q, t) = (1/\sqrt{2\pi D[Q]}) \exp\{- (Q - m^1)^2 / (2D[Q])\}.$$

Знать на практике только эти характеристики достаточно во многом потому, что точность исходной информации не позволяет сделать надежные выводы о числовых значениях моментов выше третьего порядка, т. е. если даже по уравнению ФПК рассчитана эволюция плотности вероятности во времени, то экспериментальные данные позволяют подсчитать и сравнить с теоретическими расчетами только математическое ожидание и дисперсию (в некоторых случаях, при достаточно длинных рядах наблюдений, коэффициент асимметрии). Следовательно, разумно упростить задачу и получить уравнения, позволяющие описывать эволюцию не самих распределений плотности вероятности, а только нескольких первых моментов.

Схема выводов этих уравнений такова. Уравнение ФПК умножают на расход воды Q и интегрируют в бесконечных пределах:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} dQ = - \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial}{\partial Q} [a(Q, t) p(Q, t)] dQ + \\ + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial^2}{\partial Q^2} [b(Q, t) p(Q, t)] dQ.$$

Левая часть имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial p}{\partial t} dQ = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} Q p(Q, t) dQ = \frac{\partial}{\partial t} m^1 = \frac{\partial}{\partial t} M[Q].$$

Правая часть равна математическому ожиданию коэффициента сноса $M[a(Q, t)]$. Таким образом, получено дифференциальное уравнение для математического ожидания

$$dM[Q]/dt = M[a(Q, t)],$$

которое следует решать при начальном условии $\int_{-\infty}^{\infty} Q p(Q, t=0) dQ = m^1(0) = M[Q(0)]$.

Уравнение для дисперсии имеет вид

$$dD[Q]/dt = M[2Qa(Q, t) + b(Q, t)]$$

при начальном условии $D[Q(t=0)] = M[Q^2(t=0)]$. Зная из решений этих уравнений, как меняются во времени $M[Q]$ и $D[Q]$, определяют, как эволюционирует кривая плотности вероятности в нормальном приближении.

Аналогично можно записать уравнения и для старших моментов. В практической гидрологии эволюцию распределений можно описать системой из трех дифференциальных уравнений для $M[Q]$, $D[Q]$ и m^3 .

1.3. Стохастическое обобщение модели кинематической волны

Приведенная модель кинематической волны имеет вид

$$\partial F / \partial t + \partial f(F, x) / \partial x = q(x, t), \quad (1.15)$$

т. е. представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (где $Q = f(F, x)$).

Известно [70], что решения подобных уравнений сводятся к решению конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение уравнений с частными производными выше первого порядка сводят к решению счетной последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Это позволяет при известных ограничениях на характер шумов рассматривать процесс, описанный уравнением (1.15), как марковский и применять все выводы, связанные с уравнением ФПК, которое в многомерном случае имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

где

$$a_i = a_i(t, x) = a_i(t, x_1, \dots, x_n); \quad b_{ij} = b_{ij}(t, x).$$

Многомерность можно связывать с расширением системы уравнений за счет уравнений фильтров, преобразующих реальные шумы в белые.

Чтобы подробно ознакомиться с необходимыми ограничениями и допущениями, неизбежными при постановке задачи в рамках теории марковских случайных процессов, можно обратиться к выводу уравнения плотности вероятности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в работе [70]. Основное допущение заключено в малости параметра τ_0/T , где τ_0 — «время корреляции» случайного воздействия (речь может идти и о пространственной корреляции), T — характерный временной масштаб задачи. При $q = 0$ уравнение (1.15) аналогично соотношению, описывающему концентрацию примеси в поле случайных скоростей. Введем одноточечную плотность вероятности

$$p_{t,x}(F) = \langle \delta(F(x, t) - F) \rangle, \quad (1.16)$$

зависящую параметрически от t и x . Дифференцируя (1.16) по t с учетом (1.15) (при $q = 0$), получаем

$$\frac{\partial p_{t,x}}{\partial t} = - \langle f(x, t) \delta \delta(F(x, t) - F) / \partial x \rangle. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) незамкнуто относительно плотности вероятности $p_{t,x}$, так как содержит корреляцию в правой части, которая через решение (1.17) зависит от случайного процесса $f(x, t)$. Расщепляя известными способами указанную корреляцию, можно получить замкнутое соотношение, которое в приближении диффузионного случайного процесса имеет вид

$$\frac{\partial p_{t,x}}{\partial t} = \int dx' \Phi(x, x') \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') \frac{\partial}{\partial x} p_{t,x}(F),$$

где $\Phi(x, x') = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B(0, \tau)$, B — корреляционная функция $f(x, t)$.

Особенно простой вид уравнение примет при изотропных флуктуациях $f(x, t)$:

$$\partial p_{t,x} / \partial t = \Phi(0) \partial^2 p_{t,x}(F) / \partial x^2. \quad (1.18)$$

Изменение плотности $p_{x,t}(F)$ от заданного начального распределения p_{x,t_0} определяют по интегральному преобразованию

$$p_{x,t}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} G(|x - \xi|, t) p_{\xi,t_0}(F) d\xi,$$

где зависимость ядра G только от разности $|x - \xi|$ связана с предположением об однородности и изотропности процесса. Важное полугрупповое свойство этого преобразования связано с тем, что эволюция процесса, описываемая уравнением типа (1.18), происходит без последствия.

Неоднородную граничную задачу можно свести с помощью метода переменной системы отсчета [49] к однородной задаче для неоднородного уравнения

$$\partial \tilde{p}_{t,x}(F) / \partial t = \Phi(0) \partial^2 \tilde{p}_{t,x}(F) / \partial x^2 - \tilde{p}'_{t,x=0}(F), \quad (1.19)$$

где

$$\tilde{p}_{t,x}(F) = p_{t,x}(F) - p_{t,x=0}.$$

Введем искусственно в (1.19) «равномерную неоднородность» $\tilde{p}'_{t,x,q} = \text{const}$, связанную, например, с боковой приточностью. Тогда для участка реки длиной l при однородных граничных условиях установившееся распределение $\tilde{p}_x(F)$ удовлетворяет стационарному уравнению, соответствующему (1.19), решение которого имеет вид

$$\tilde{p}_x(F) = cx(l - x) / \Phi,$$

где c — константа.

Из этой формулы видно, что предельное распределение, возникающее в процессе стабилизации, имеет в центре участка экстремум, зависящий от статистических свойств боковой приточности и пропускной способности русла.

При $n = \infty$ (уравнение в частных производных не первого порядка) понятие плотности вероятности обобщают понятием характеристического функционала, о чем пойдет речь в следующем разделе.

1.4. Описание движения речного потока как случайного процесса с помощью характеристических функционалов

В п. 1.1 динамические модели гидравлики постепенно усложнены вплоть до системы Сен-Венана. Решить уравнение, соответствующее динамической модели, значит найти зависимость искомой ве-

личины, например площади живого сечения в модели кинематической волны, от независимых аргументов (продольной координаты и времени). Но раз выяснено, что режим рек подчиняется вероятностным закономерностям, то естественно попытка дать полное статистическое описание речного потока. Оказывается, это можно (в принципе) сделать с помощью так называемых характеристических функционалов [106].

Для того чтобы говорить о площади живого сечения в вероятностном смысле, необходимо, чтобы ее значение $F(x, t)$ в любой точке (x, t) было случайной величиной, т. е. каждой паре (x, t) должна быть сопоставлена плотность вероятности $p_{x, t}(F)$. Более того, введение N -мерной плотности вероятности

$$p_{x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_N, t_N}(F_1, F_2, \dots, F_N), \quad (1.20)$$

определяемой соотношением

$$\begin{aligned} & p \{F_1 < F_1(x_1, t_1) < F_1 + dF_1; F_2 < F_2(x_2, t_2) < \\ & < F_2 + dF_2, \dots, F_N < F_N(x_N, t_N) < F_N + dF_N\} = \\ & = p_{x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_N, t_N}(F_1, F_2, \dots, F_N) dF_1 dF_2 \dots dF_N, \end{aligned}$$

позволяет говорить о полном вероятностном описании площади живого сечения. Вместо самой плотности вероятности (1.20) можно рассматривать преобразование Фурье (характеристическую функцию):

$$\Phi_{x_1, t_1; \dots, x_N, t_N}(\theta_1, \dots, \theta_N) = \exp\left(i \sum_{k=1}^N \theta_k F_k\right), \quad (1.21)$$

где $i = \sqrt{-1}$, а черта означает статистическое осреднение.

Преимущество подхода, основанного на характеристических функциях, а не на плотностях вероятности, заключается в том, что случайный процесс можно задать с помощью одной величины — характеристического функционала, определяемого по (1.21) при $N \rightarrow \infty$:

$$\Phi[\theta(x, t)] = \exp\left\{i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, t) F(x, t) dx dt\right\}, \quad (1.22)$$

где пределы интегрирования определяются областью изменения x и t и могут быть конечными.

Для случайной функции $F(x, t)$ ее характеристический функционал можно определить, зная все конечномерные плотности вероятности (1.20). Для этого необходимо в качестве аргумента $\theta(x, t)$ функционала $\Phi[\theta(x, t)]$ принять функцию

$$\theta(x, t) = \theta_1 \delta(x - x_1, t - t_1) + \dots + \theta_N \delta(x - x_N, t - t_N), \quad (1.23)$$

где $\theta_1, \dots, \theta_N$ — числа, а $\delta(x, t)$ — функция Дирака.

Подставляя (1.23) в (1.22), получаем

$$\begin{aligned} \Phi[\theta(x, t)] &= \exp \left\{ i \sum_{k=1}^N \theta_k(x, t) F_k(x, t) \right\} = \\ &= \Psi_{x_1, t_1; \dots, x_N, t_N}(\theta_1, \dots, \theta_N). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Можно говорить о случайной площади живого сечения в фиксированный момент времени t , используя функционал

$$\Phi[\theta(x), t] = \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N \theta_k(x) F_k(x, t) dx \right\}, \quad (1.25)$$

или о совместном функционале, например, площади и боковой приточности:

$$\Phi[\theta_F(x), \theta_q(x), t] = \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} [\theta_F(x) F(x, t) + \theta_q(x) q(x, t)] dx \right\}.$$

В параболической модели примем

$$Q = \sum_{i=1}^n a_i F^i - k \partial F / \partial x.$$

Данные многочисленных расчетов (табл. 1.1) показали, что часто можно ограничиться формулой

$$Q = aF^2 - k \partial F / \partial x + b, \quad (1.26)$$

причем, подставляя (1.26) в уравнение неразрывности, можно считать в первом приближении $\partial a / \partial x \approx 0$, $\partial k / \partial x \approx 0$, $\partial b / \partial x \approx 0$ (рис. 1.7), хотя $a = a(x)$, $k = k(x)$, $b = b(x)$. Тогда, пренебрегая пока $q(x, t)$, получаем

$$\partial F / \partial t + a \partial F^2 / \partial x - k \partial^2 F / \partial x^2 = 0. \quad (1.27)$$

Для характеристического функционала (1.25), учитывая, что

$$\partial \Phi / \partial t = \langle i (\theta \partial F / \partial t) \exp \{ i (\theta F) \} \rangle,$$

Таблица 1.1

Коэффициенты формулы $Q = aF^2 - k \partial F / \partial x + b$, аппроксимирующей пропускную способность русла на примере р. Тверцы

№ створа	$a \cdot 10^{-3}$	$k \cdot 10^{-3}$	b
I	2,3	7,2	29,70
II	8,4	2,6	7,96
III	3,8	2,1	10,80
IV	4,2	2,7	18,90
V	6,9	1,2	4,15

получаем

$$\partial\Phi/\partial t = (\theta \{i \partial D^2\Phi/\partial x + k \partial^2 D\Phi/\partial x^2\}), \quad (1.28)$$

где D — вариационные производные ($a=1$).

Характеристический функционал $\Phi[\theta(x), t]$ находят из (1.28) по его значению $\Phi[\theta(x), t_0] = \Phi_0[\theta(x)]$.

Так как экспериментально можно получить только моменты статистического решения, то естественный интерес представляет собой цепочка моментных уравнений для (1.27). При замене в (1.27) x на x_j , умножении (1.27) на $F(t, x_1), \dots, F(t, x_{j-1})$,

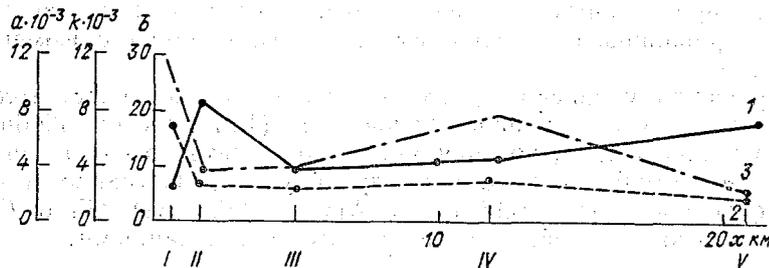


Рис. 1.7. Изменение коэффициентов a (1), k (2) и b (3) по длине реки.

$F(t, x_{j+1}), \dots, F(t, x_l)$ и суммировании этого равенства по j от 1 до l получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \otimes^l F(t, x^l) - k \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \otimes^l F(t, x^l) + \sum_{j=1}^l a \frac{\partial}{\partial x_j} \times \\ \times \left[\otimes^l F(t, x^l) F(t, x_j) \right] = 0,$$

где $\otimes^l F(t, x^l)$ — тензорная степень функции F .

Для $F(x^{l+1})$ положим $(\Gamma_k F)(x^l) = F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, x_k)$ ($k \leq l$), т. е. оператор Γ_k переводит функцию $F(x^{l+1})$, зависящую от $l+1$ точек, в функцию $F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, x_k)$, зависящую от l точек. Вводя оператор

$$B_l = \sum_{j=1}^l a \frac{\partial}{\partial x_j} \circ \Gamma_k, \text{ получаем}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \otimes^l F(t, x^l) - k \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \otimes^l F(t, x^l) + (B_l \otimes^l F)(t, x^l) = 0. \quad (1.29)$$

Интегрируя обе части (1.29) по начальной мере $\mu(dF_0)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} M_l(t, x^l) - k \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} M_l(t, x^l) + B_l M_{l+1}(t, x^l) = 0; \quad l = 1, 2, \dots \quad (1.30)$$

где

$$M_l(t, x^l) = \int \otimes^l F(t, x^l) \mu(dF_0); \quad x^l = (x_1, \dots, x_l).$$

При $t = 0$ заданы начальные условия $M_l(t, x) |_{t=0} = m_l(x^l)$.

При определенных условиях можно ограничиться системой (1.30), приравнявая к нулю все моменты, начиная с моментов порядка l .

В решении уравнения (1.28) «случайность» возникает только из-за случайности начальных условий. В (1.27) введем обобщенную функцию $q(x, t)$, которая может содержать боковую приточность (детерминированную или случайную), деформации и граничные условия $\delta(x - x_0)F_0(t, x_0)$, $\delta(x - x_k)F_k(t, x_k)$ (F_0 и F_k — могут быть как случайными, так и детерминированными):

$$\partial F / \partial t + a \partial F^2 / \partial x - k \partial^2 F / \partial x^2 = q(x, t). \quad (1.31)$$

Если $q(x, t)$ — детерминированная функция, то (1.28) примет вид

$$\partial \Phi / \partial t = \theta \{ i \partial D^2 \Phi / \partial x + k \partial^2 D \Phi / \partial x^2 + i q \Phi \}. \quad (1.32)$$

При наличии функции $q(x, t)$ площадь $F(x, t)$ в любой момент времени зависит не только от начального распределения $F(x, 0) = F_n(x)$ но и от значений $q(x, \tau)$, $0 \leq \tau \leq t$. При статистическом описании площади $F(x, t)$ зависимость ее осредненных характеристик от конкретного начального распределения площадей исчезает (так как осреднение произведено как раз по «начальным» площадям, т. е. по вероятностной мере, заданной на множестве всевозможных начальных площадей), но ее зависимость от детерминированной функции $q(x, \tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$) сохраняется (т. е. от $q(x, t)$ зависит характеристический функционал площади $\Phi[\theta(x), t]$).

Если $q(x, t)$ — случайная функция, то имеем две случайные связанные функции $F(x, t)$ и $q(x, t)$, полным статистическим описанием которых является их совместный пространственно-временной характеристический функционал

$$\Omega[\theta(x, t), f(x, t)] = \exp \{ i(\theta F) + i \int (f q) \}$$

или пространственный по F и пространственно-временной по q характеристический функционал

$$\Omega[\theta(x), f(x, t), t] = \exp \left\{ i(\theta F) + i \int_{t_0}^{\infty} (f q) dt \right\}.$$

Знание последнего функционала позволяет судить лишь о пространственном (но не о пространственно-временном) статистическом режиме площади. Так как

$$\partial\Omega/\partial t = i(\theta \partial F/\partial t) \exp \left\{ i(\theta F) + i \int_{t_0}^{\infty} (fq) dt \right\},$$

то подставляя $\partial F/\partial t$ из (1.31) и делая преобразования, получаем

$$\partial\Omega/\partial t = (\theta \{i \partial D^2\Omega/\partial x + k \partial^2 D\Omega/\partial x^2 + D_f\Omega\}).$$

Это уравнение имеет первый порядок по времени, и, следовательно, функционал $\Omega[\theta(x), f(x), t]$ можно найти по заданному его начальному значению:

$$\Omega[\theta(x), f(x, t), t_0] = \Omega_0[\theta(x), f(x, t)].$$

Например,

$$\Omega_0[\theta(x), 0] = \Phi_0[\theta(x)], \quad \Omega_0[0, f(x, t)] = F[f(x, t)],$$

где Φ_0 и F заданы.

Если q и F считать независимыми, то $\Omega = \Phi_0 F$.

Уравнение для пространственно-временного функционала $\Omega[\theta(x, t), f(x, t)]$ имеет вид

$$\partial D_\theta \Omega/\partial t = ai \partial D_\theta^2 \Omega/\partial x + k \partial^2 D_\theta \Omega/\partial x^2 + D_f \Omega.$$

Начальное условие

$$\Omega[\theta(x) \delta(t - t_0), f(x, t) e(t - t_0)] = \Omega_0[\theta(x), f(x, t)],$$

где

$$e(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Можно получить уравнение и для одного функционала $\Phi[\theta(x), t]$ при случайной $q(x, t)$. Однако чтобы оно было замкнутым, необходимо предположить, что процесс $q(x, t)$ гауссовский и δ -коррелированный.

Запишем систему Сен-Венана в следующем виде

$$i_0 - \partial h/\partial x = (1/g)(\partial U/\partial t) + (\alpha U/g)(\partial U/\partial x) + kU^2, \quad (1.33)$$

$$\partial h/\partial t + \partial(Uh)/\partial x = 0, \quad (1.34)$$

где $k = \lambda/(2Rg)$, k считаем постоянным; h — глубина.

Вариационные производные от Ω в данном случае имеют вид:

$$D_\theta \Omega = \langle iU \exp \{i(\theta \cdot U) + i(f \cdot h)\} \rangle,$$

$$D_f \Omega = \langle ih \exp \{i(\theta \cdot U) + i(f \cdot h)\} \rangle,$$

$$D_{\theta f} \Omega = \langle -Uh \exp \{i(\theta \cdot U) + i(f \cdot h)\} \rangle.$$

Продифференцировав эти выражения по t и подставив в полученные соотношения производные $\partial U/\partial t$ и $\partial h/\partial t$ из (1.33), (1.34), получаем

$$\frac{\partial^2 D_\theta \Omega}{\partial t^2} = i g i_0 \frac{\partial \Omega}{\partial t} - g i \frac{\partial^2 D_{\theta f} \Omega}{\partial x^2} + \frac{i \alpha}{2} \frac{\partial^2 D_\theta \Omega}{\partial x \partial t} + i k g \frac{\partial D_\theta^2 \Omega}{\partial t}.$$

Общие методы решения уравнений в вариационных производных не разработаны. Формально записать решение для эволюционного уравнения

$$\partial \Phi [\theta(x), t] / \partial t = L \Phi [\theta(x), t],$$

где L — линейный оператор в пространстве функционалов, можно в виде континуального интеграла

$$\Phi [\theta(x), t] = \int \Phi [\theta_0(x), t_0] d\mu [\theta_0(x), t_0; \theta(x), t],$$

где интегрирование произведено по мере Грина μ в функциональном пространстве. Однако расшифровка и физическая интерпретация подобной записи трудны.

Более частным методом является использование функциональных степенных рядов

$$\Phi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \quad (1.35)$$

где Φ_n — однородный степенной функционал n -й степени, имеющий вид

$$\Phi_n = \Phi_n [\theta(x), t] = \int \dots \int \theta_{\alpha_1}(x_1), \dots, \theta_{\alpha_n}(x_n) \times \\ \times \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n; t) dx_1, \dots, dx_n.$$

Поскольку

$$\Phi = \overline{\exp \{i(\theta \cdot F)\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i^n/n!) \overline{(\theta \cdot F)^n},$$

$$\Phi_n = (i^n/n!) \overline{(\theta \cdot F)^n},$$

то

$$\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n; t) = (i^n/n!) \overline{F_{\alpha_1}(x_1, t) \dots F_{\alpha_n}(x_n, t)}.$$

Таким образом, определение функционала Φ_n эквивалентно определению всех пространственных моментных функций n -го порядка для F . При этом никакой конечный отрезок ряда не обладает свойствами характеристического функционала, и поэтому необходимо задать, хотя бы приближенно все члены ряда.

Подставим ряд (1.35) в уравнение (1.28). Так как вариационное дифференцирование понижает, а скалярное умножение на i повышает на единицу степень функционала от $\theta(x)$, то, приравнявая друг к другу степенные функционалы одинаковой степени в левой и правой частях, получаем

$$\partial \Phi_n / \partial t = i(\theta \partial D^2 \Phi_{n+1} / \partial x) + k \partial^2 D \Phi_n / \partial x^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.36)$$

Из (1.36) видно, что при любом n выражение для $\partial\Phi_n/\partial t$ содержит не только Φ_n , но и Φ_{n+1} , т. е. для любого конечного n система (1.36) незамкнута. Выход заключается в поисках связей $\Phi_{n+1} = f(\Phi_n)$ (например, по гипотезе Миллионщикова, $\Phi_4 = 0,5 \Phi_2^2$).

Есть еще один возможный путь построения решения. Запишем уравнение

$$\partial F/\partial t = -a \partial F^2/\partial x + k \partial^2 F/\partial x^2.$$

Если $a \approx 0$, т. е. $Q = -k \partial F/\partial x$, что может быть на устьевом участке (так как $i_0 \approx 0$, т. е. расход воды не зависит от глубины), или $Q = c - k dF/dx$, где $c = \text{const}$, (так как $\partial c/\partial x = 0$) или значение $a \partial F^2/\partial x$ мало, то решение уравнения для характеристического функционала

$$\partial\Phi/\partial t = (\theta \cdot k \partial^2 D\Phi)/\partial x^2$$

имеет вид

$$\Phi[\theta(x), t] = \Phi_0 \{ [4\pi k(t-t_0)]^{-0,5} \int \exp \{ -|x-x'|^2/[4k(t-t_0)] \} \times \theta(x') dx' \}.$$

Таким образом, в этом случае эволюция во времени пространственного характеристического функционала для F сведена к сглаживанию его функционального аргумента $\theta(x)$ при помощи гауссовской весовой функции с дисперсией $2kt$.

Чтобы понять физический смысл этого решения, обратимся к динамическому уравнению

$$\partial F/\partial t = k \partial^2 F/\partial x^2.$$

Даже не решая его, можно установить два важных свойства:

1) сохранение симметрии по x , т. е. замена x на $-x$ дела не меняет, так как $\partial^2 F/\partial x^2 = \partial^2 F/\partial (-x)^2$ (но не по t , так как $\partial F/\partial t \neq \partial F/\partial (-t)$). Такие уравнения схожи с уравнениями диффузии, поэтому говорят об «изотропности» закона диффузии $F(t, x) = F(t, -x)$;

2) выравнивание экстремумов. Так как в точке $F_{\text{макс}}$ $\partial^2 F/\partial x^2 < 0$ и, следовательно, $\partial F/\partial t < 0$, то происходит процесс сглаживания, а всплески не появляются.

Выпишем решение в явном виде. Так как для подобного уравнения фундаментальное решение (при $F|_{t_0} = \delta(x-\xi)$) имеет вид

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t_0)}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4k(t-t_0)} \right],$$

то общее решение можно записать в виде формулы

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, t_0) F_0(\xi) d\xi = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\xi) \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4k(t-t_0)} \right] d\xi,$$

показывающей, что происходит сглаживание (выравнивание) первоначального распределения площади $F_0(\xi)$. Чтобы образно показать подобную ситуацию, представим, что в створе плотины с ограниченным запасом воды в верхнем бьефе в точке $x_0 = 0$ резко поднят затвор, т. е. $F|_{t_0} = \delta(x - x_0)F_1$. Тогда дальнейшие события разовьются так, как показано на рис. 1.8. Похожая ситуация отмечается и для статистического решения. Запасы воды в начальный момент времени известны только в статистическом

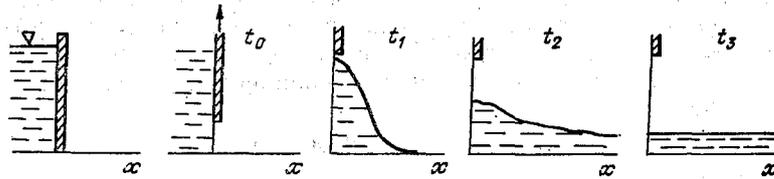


Рис. 1.8. Процесс выравнивания площадей живого сечения.

смысле, т. е. задан начальный функционал:

$$\begin{aligned} \Phi[\theta(x_1), t] &= \int_{F=0}^{\infty} \left\{ \exp \left[\int_{-x}^{x_1} i\theta(x_1) F(x_1) dx_1 \right] \right\} p[F(x_1)] dF(x_1) = \\ &= \int_{F=0}^{\infty} (\exp 0) p[F(x_1)] dF(x_1). \end{aligned}$$

Значение функционала в произвольный момент времени будет

$$\begin{aligned} \Phi[\theta(x), t] &= \int_{F=0}^{\infty} \left\{ (4\pi k(t-t_0))^{-0,5} \int_{-x}^x \exp \left[-\frac{|x-x'|^2}{4k(t-t')} \right] dx \right\} \times \\ &\quad \times p[F(x_1)] dF, \end{aligned}$$

т. е. происходит аналогичное сглаживание по координате, но не самой площади, а плотности вероятности. Разумеется, что в начальный момент времени можно задать распределение плотности вероятности вдоль потока, тогда

$$\Phi[\theta(x), t_0] = \int_{F=0}^{\infty} \left\{ \exp \left[\int_{-x}^x i\theta(x) F(x) dx \right] \right\} p[F(x)] dF,$$

или только в конечном числе точек

$$\theta(x) = \delta(x - x_1)\theta_1 + \delta(x - x_2)\theta_2 + \dots,$$

тогда

$$\Phi[\theta(x), t_0] = \int_{F=0}^{\infty} \left(\exp \sum_{i=1}^n \theta_i F_i \right) p_{x_1, x_2}(F_1, F_2, \dots) dF_1 dF_2 \dots$$

и получить закон эволюции во времени моментных функций различного порядка.

Разумеется, что наибольший интерес представляют собой статистические решения для уравнения с учетом $Q = f(F)$ и $q(x, t)$. В принципе это можно сделать и тем самым избавиться от нелинейности зависимости $Q = f(F)$ с помощью обычной или статистической линеаризации.

ГЛАВА 2

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ И ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В РУСЛОВЫХ ПОТОКАХ

2.1. О существовании периодических решений уравнений гидравлики

В гл. 1 сказано, что один из источников стохастичности в решении уравнений гидравлики — возникновение неустойчивости. Известно, что при определенных условиях в потоках идет процесс волнообразования. В настоящее время это трактуют как потерю устойчивости, критерии которой получают путем анализа линеаризованной гиперболической системы, однако периодическая установившаяся цепочка волн не отмечена. Это связано с тем, что при появлении волн линейные уравнения уже не описывают реального течения, имеющего существенно нелинейный характер и описываемого квазилинейной системой Сен-Венана. Ее подробно исследовал Н. А. Картвелишвили [66], используя качественную теорию дифференциальных уравнений. Он установил, что в фазовом пространстве отсутствуют замкнутые траектории, соответствующие периодическим решениям, как классическим, так и обобщенным (разрывным). Отсюда следует вывод, что последовательность волн есть последовательность со случайными характеристиками.

Однако наблюдаемые в потоках периодические образования свидетельствуют о существовании предельных циклов в фазовом пространстве. Наиболее вероятный механизм, приводящий к образованию устойчивых решений, — наличие автоколебаний, т. е. колебаний в неконсервативных системах, поддерживаемых за счет неперiodических источников энергии. При так называемой абсолютной неустойчивости могут возникать автоколебания, что связано с возникновением обратной связи, переводящей поток из режима усиления в режим генерации. Внутренняя обратная связь между входом и выходом может образоваться, например, за счет непризматичности русла (в частности, сужение приводит к появлению отраженных волн, а следовательно, и к возможности удовлетворения критерия абсолютной неустойчивости) либо за счет такой зависимости гидравлических сопротивлений от режима течения, при которой появляются участки, пропускная способность которых уменьшается с уменьшением глубины.

Если параметры в системе Сен-Венана изменить определенным образом, то возможны предельные циклы. При этом можно учесть сужение русла, вводя в уравнения морфометрический градиент $(\partial F/\partial x)$ *. При наличии замкнутых фазовых траекторий

величины U , h и F , входящие в уравнения Сен-Венана, должны зависеть от аргумента $p = x - at$, где a — скорость распространения волны. При $\alpha = 1$

$$\frac{dh}{dp} = - \frac{(gF/B) \{i_0 - [K^{-2} - (gF)^{-1} (\partial F/\partial x)_*] U^2\}}{U^2 - 2aU + a^2 - gF/B} = M(h, U),$$

$$\frac{dU}{dp} = - \frac{g(a-U) \{i_0 - [K^{-2} - (gF)^{-1} (\partial F/\partial x)_*] U^2\}}{U^2 - 2aU + a^2 - gF/B} = N(h, U),$$

где K — пропускная способность русла, B — ширина потока.

Критерий Бендексона [7] — аналитический критерий несуществования на фазовой плоскости замкнутых контуров, целиком составленных из траекторий: выражение $\partial M/\partial h + \partial N/\partial U$ не должно менять знака. Для системы Сен-Венана критерий выполнен. При $(\partial F/\partial x)_* = 0$ и $F/B = h$ значение $\partial M/\partial h + \partial N/\partial U = 0$, если

$$-U^2 \frac{\partial C^{-2}}{\partial h} - \frac{2aU}{C^2 h} + \frac{3U^2}{C^2 h} = \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 h}\right) \left(1 + \frac{6aU - 3U^2 - 3a^2}{U^2 - 2aU + a^2 - gh}\right).$$

Для приближенной оценки примем, что $a \sim U$, $i_0 \sim U^2/(C^2 h)$, тогда $(2U^2 \partial C/\partial h)/C^3 \sim -i_0$. При $\partial C/\partial h > 0$ это условие не выполняется, что указывает на невозможность существования замкнутых контуров. Однако если $\partial C/\partial h < 0$ или $i_0 < 0$, то при определенных соотношениях между значениями U , C , $\partial C/\partial h$ и i_0 существование цикла этим критерием не запрещено. Аналогично можно исследовать и влияние морфометрического градиента. На вопрос, будет ли периодическая волна устойчива, в общем случае нельзя ответить, исходя из данной системы, так как она не описывает эволюцию во времени.

Можно наглядно изобразить области, в которых не возникает стохастичность (отвлекаясь от стохастичности исходных данных), если использовать известное условие устойчивости [66]:

$$1/\lambda^2 > \mu^2 - 2\alpha + \alpha, \quad (2.1)$$

где

$$\lambda = \sqrt{B_0 Q_0^2 / (g F_0^3)}, \quad \mu = [F_0 / (B_0 K_0)] (\partial K / \partial h)_0;$$

индекс «нуль» указывает на значения, относительно которых линеаризованы уравнения движения для получения критерия (2.1).

На рис. 2.1 показаны области условной устойчивости и неустойчивости. Во второй из них течение заведомо неустойчиво и, следовательно, в конечном итоге — стохастично. Существует диапазон соотношения между μ и α , в котором имеет место абсолютная устойчивость; в этом диапазоне правая часть неравенства (2.1) всегда отрицательна. Иначе говоря, при определенных гидравлико-морфометрических (μ) и кинематических (α) параметрах потока никакое соотношение между внешними объемными силами и конвективными силами инерции (λ) не может вызвать неустойчивость. Но даже в этой области в силу обоих

указанных обстоятельств вполне возможна статистическая постановка гидравлических задач.

Таким образом, встают два вопроса: о кинематической структуре потока (решение этого вопроса определено коэффициентом α) и о гидравлических сопротивлениях (о характере параметра μ).

Вопрос о гидравлических сопротивлениях по существу центральный во всей речной гидравлике. При выводе уравнений гидравлической идеализации, т. е. осредненных по живому сечению, принято, что диссипативный член j пропорционален скорости:

$$j = j(U). \quad (2.1')$$

Приведя уравнение гидромеханики к безразмерному виду, можно показать [113], что коэффициент сил сопротивления λ , определяющий конкретный вид формулы (2.2), зависит

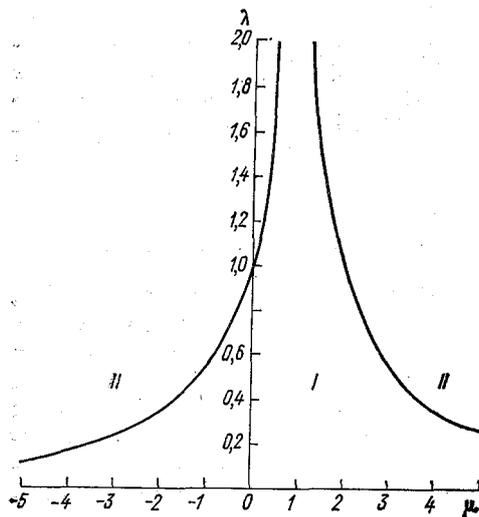


Рис. 2.1. Области условной устойчивости (I) и неустойчивости (II) открытых потоков ($\alpha = 1$).

от обобщенных переменных:

$$\lambda = \lambda(\text{Sh}, \text{Fr}, \text{Re}, N_{ij}), \quad (2.2)$$

где Sh , Fr , Re , N_{ij} — числа Струхаля, Фруда, Рейнольдса и турбулентности соответственно.

Конкретный вид формулы (2.2) для речных потоков неизвестен. Для установившегося развитого турбулентного спокойного потока остается только зависимость $\lambda = \lambda(N_{ij})$. Эмпирически для этого случая установлено, что формула (2.1') приобретает вид

$$j = U^2/(C^2R). \quad (2.3)$$

Причем все основные формулы классической гидравлики для C таковы, что $\partial C/\partial h > 0$, т. е. коэффициент Шези возрастает с глубиной.

Если автомодельность по числам Re и Fr для обычных речных условий принята (хотя и с оговорками), то против независимости сопротивлений от ускорения и монотонности изменения C по глубине есть возражения. Действительно, многочисленные исследования показывают, что гидравлические сопротивления зависят не только от наполнения русла и шероховатости, но и от

предыстории движения. Не будем углубляться в эту сложную область гидравлики, приведем только один частный результат, подтверждаемый эмпирическими данными. Теоретически установлена, например, зависимость [73]

$$\lambda_{\text{неуст}}/\lambda_{\text{уст}} \approx 1/(1 + \bar{\omega}^2/4) - \bar{N}(2,5 + \bar{\omega}^2/2)/(1 + \bar{\omega}^2/4), \quad (2.4)$$

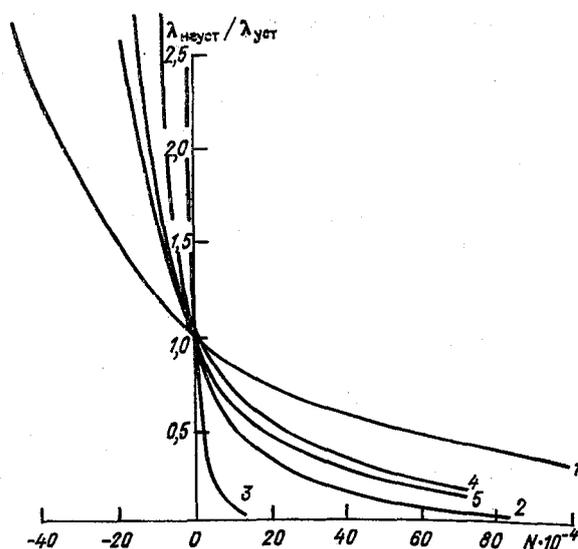


Рис. 2.2. Результаты обработки данных натуральных наблюдений.

1—3 — р. Тверца, створы 1, 2 и 5 соответственно;
4, 5 — р. Свирь, створы 1 и 4 соответственно.

где $\lambda_{\text{уст}}$ и $\lambda_{\text{неуст}}$ — коэффициенты сопротивления установившегося и неустановившегося потоков соответственно, $\bar{\omega}$ и \bar{N} — безразмерные частота и ускорение соответственно.

На рис. 2.2 приведены эмпирические кривые, подтверждающие качественно формулу (2.4). Таким образом, $\partial C/\partial N \neq 0$ вопреки обычным формулам гидравлики.

2.2. Критериально-статистические характеристики кинематической структуры руслового потока

Турбулентный русловой поток, казалось бы, обладает неограниченной свободой формировать поля осредненных скоростей и внутренних течений. Однако если рассматривать крупномасштабные структурные образования, то они в природе не столь многообразны, как можно было бы ожидать [80, 93]. Отсюда возникло стремление найти универсальные принципы, лежащие в основе

организации тех или иных форм движения потока. Один из них — вариационный принцип минимума диссипации энергии. В нем некоторые исследователи видели пример телеологических тенденций в природе, якобы «стремящейся к организованной и экономной» реализации движения. Мопертюи окутывал вариационные принципы механики философским мистицизмом и подкреплял их религиозными доводами. На самом же деле, вариационные принципы — всего лишь математически сформулированные экстремальные свойства движения [142]. Принцип минимума диссипации позволяет выделить реальные движения из числа возможных [57]. На основе этого принципа получены оценки масштабов макротурбулентности [24], уравнения формы речных русел [53, 86], радиуса кривизны излучин [149] и решены другие задачи гидравлики.

Обратимся к феноменологическому уравнению турбулентного движения для продольной составляющей скорости течения в пространстве v_x , продольной x , поперечной y и вертикальной z осей координат:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_T \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_T \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_T \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\gamma I. \quad (2.5)$$

В порядке первого приближения допустимо исходить из постоянного значения коэффициента турбулентной вязкости $v_T = \text{const}$. Тогда левая часть уравнения (2.5), если приравнять ее к нулю, приводит к уравнению М. В. Остроградского, выражающему условие экстремума диссипации энергии:

$$\Phi = v_T \int_0^L \int_0^B \int_0^h \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz, \quad (2.6)$$

где L , B и h — соответственно длина участка движения, ширина и глубина потока.

Таким образом, вариационный принцип диссипации энергии при $v_T = \text{const}$ имеет естественную основу, заключенную в самих уравнениях движения.

Рассмотрим поле средних продольных скоростей на вертикалях в прямоугольном русле. Заметна неравномерность их распределения по ширине потока (рис. 2.3). При этом градиенты скоростей могут возникать у одной стенки и, меняя знак на оси потока, достигать максимума у противоположной стенки. Иногда же в поперечном сечении потока возникает система дискретных элементов. Для струй, не примыкающих к стенкам, краевой эффект торможения создан влиянием поверхностей раздела. Естественно предположить, что существуют некоторые критериальные условия, от которых зависит картина течения.

Для установки этого критерия прежде всего используем вариационный принцип минимума диссипации энергии для получения функции, описывающей распределение средних скоростей на вертикалях по ширине потока $v(y)$. Дополнительным усло-

вием при определении экстремума функционала (2.6) примем уравнение неразрывности

$$\int_0^B v h dy = Q,$$

которое посредством постоянного множителя β присоединено к выражению (2.6):

$$\Phi_1 = \int_0^B \gamma_T [(\partial v / \partial y)^2 + \beta h v] dy, \quad (2.7)$$

где B — ширина русла по урезу воды или ширина структурного элемента.

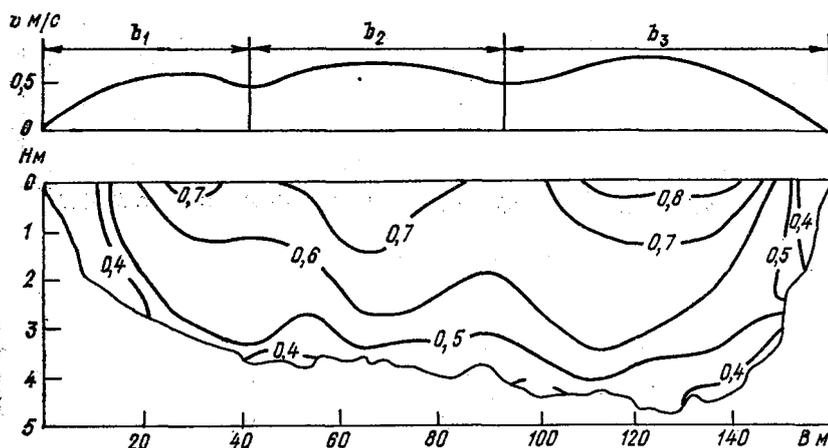


Рис. 2.3. Распределение скоростей течения в поперечном сечении Каракумского канала (306,5 км от головного сооружения в 1986 г. (наблюдения В. М. Хачатурова).

Функционал (2.7) достигает экстремума, если функция $v(y)$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\beta v h - \gamma_T (\partial v / \partial y)^2 = C_1.$$

Решением этого уравнения будет параболическая функция

$$v = [\beta h / (4 \gamma_T)] (y^2 - B y) + v_{гр}, \quad (2.8)$$

где $v_{гр}$ — скорость на боковой границе потока или его фрагмента.

Непосредственно по данным измерений на реках, каналах и в лабораторных лотках установлено соотношение $v_{гр} = 0,93 v_0$, не зависящее от степени кинетичности потока (рис. 2.4). Значение β найдено по (2.7), что позволило окончательно получить

$$v = v_0 [0,93 + (0,4/B^2) (B y - y^2)]. \quad (2.9)$$

Если обратиться к полю мгновенных скоростей турбулентного потока, то их аналитическое представление — задача исключительной трудности. Как отмечает Н. Н. Моисеев [105], уравне-

ния движения вязкой жидкости допускают целый спектр решений, которым соответствует система ламинарных и турбулентных течений. Поиск решения с учетом условий конкретной задачи — сложнейшая математическая процедура, недоступная инженерной практике. Так возникла потребность в создании полуэмпирических теорий турбулентности, рассматривающих упрощенные модели движения жидкости. Большую роль играет понятие об изотропной и однородной турбулентности, введенное Тэйлором в 1935 г. Однако сама по себе эта модель непригодна для описания каких-либо русловых турбулентных течений, поскольку все они испытывают возмущающее влияние внешних границ. Эту

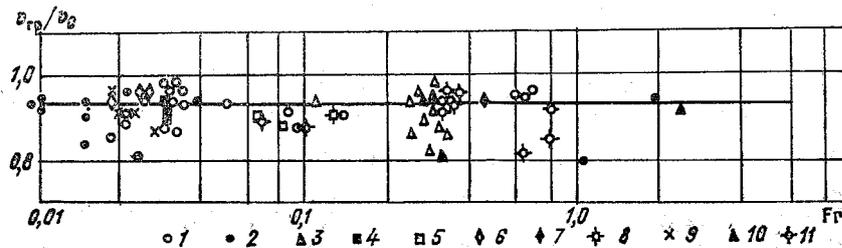


Рис. 2.4. Соотношение средних по вертикали скоростей течения на границах потока или его фрагментов и средней скорости в поперечном сечении.

1 — р. Дон—х. Хованский; 2 — р. Пьяна—д. Камкино; 3 — р. Большой Нарын—устье; 4 — р. Неман—с. Мосты; 5 — р. Сырдарья—к. Каль; 6 — р. Вахш—к. Туткаул; 7 — р. Варзоб—с. Даган-Ата; 8 — р. Сары-Таг—устье; 9 — каналы Берзен-Палвай—Клычбай; 10 — модель быстроготока в опытах А. М. Латышенкова; 11 — лотки в опытах Р. М. Каримова, Б. Ф. Смищенко и И. П. Спицына.

трудность преодолел А. Н. Колмогоров в теории локально изотропной турбулентности [79]. Ее основная физическая предпосылка состоит в том, что при передаче энергии движения по каскаду от крупномасштабных компонентов турбулентности к мелкомасштабным ориентирующее влияние среднего течения ослабляется при каждом переходе к более мелким возмущениям. Другими словами, если рассматривать мелкомасштабные компоненты турбулентных течений, то любую развитую турбулентность с достаточно большим числом Рейнольдса можно считать локально изотропной и локально однородной.

Продольные мгновенные скорости турбулентного потока представлены в виде трех компонентов: скорости невозмущенного движения и наложенных на нее структурных ($w_{ст}$) и случайных (w) отклонений

$$v_t = v_0 + w_{ст} + w. \quad (2.10)$$

Структурные отклонения обусловлены динамическими закономерностями распределения скоростей в крупномасштабных элементах, случайные порождены мелкомасштабной турбулентностью потока. Если структурные возмущения непосредственно связаны с полем осредненных скоростей течения, то на случай-

ных возмущениях его ориентирующее влияние уже не сказывается. Но из этого следует, что в случае развитой турбулентности совокупность всех возмущений (за вычетом структурных, т. е. наиболее крупных) подчинена статистическому режиму локально изотропной турбулентности.

Во многих задачах теории турбулентности поле пульсационных скоростей можно считать стационарным, т. е. не меняющимся во времени, и однородным, сохраняющим постоянство своих статистических характеристик во всех точках пространства. В этих случаях для изучения турбулентности с успехом использован аппарат случайных функций. В наиболее полном виде его изложили А. С. Монин и А. М. Яглом [106]. Приведем лишь некоторые простейшие соотношения, используемые при изучении турбулентных течений в открытых потоках.

Непрерывное изменение какой-либо характеристики потока во времени можно представить как реализацию случайного процесса. Далее рассмотрено преимущественно распределение мгновенных скоростей турбулентного потока как случайное поле в одномерном пространстве, в котором отклонения скорости от осредненных значений выражены случайной функцией координаты x или y .

Пространственную связанность случайных отклонений скорости w выражают корреляционные функции: продольная для точек, расположенных вдоль потока (по оси x) на расстояниях ξ друг от друга:

$$B_{LL}(\xi) = \overline{w(x)w(x+\xi)}, \quad (2.11)$$

и поперечная (по оси y), в которой сопоставлены случайные отклонения значений w в точках поперечной оси потока при параметре сдвига ζ ,

$$B_{NN}(\zeta) = \overline{w(y)w(y+\zeta)}. \quad (2.12)$$

При рассмотрении пространственных разностей пульсационных скоростей в точках потока введены продольная и поперечная структурные функции. Выражение продольной структурной функции имеет вид

$$D_{LL}(\xi) = \overline{[w(x+\xi) - w(x)]^2}. \quad (2.13)$$

Корреляционные и структурные функции можно нормировать делением на дисперсию:

$$\sigma_w^2 = \overline{\{v_t(x) - [v_0 + w_{ст}(x)]\}^2} = \overline{[w(x)]^2}, \quad (2.14)$$

где σ_w — среднеквадратическое отклонение пульсационной скорости.

Для продольных функций

$$R_{LL}(\xi) = B_{LL}(\xi)/\sigma_w^2, \quad G_{LL}(\xi) = D_{LL}(\xi)/\sigma_w^2. \quad (2.15)$$

Поперечные функции $R_{NN}(\xi)$ и $G_{NN}(\xi)$ можно выразить аналогично.

Из физических соображений ясно, что для однородного случайного поля пульсаций скоростей связь между значениями $w(x)$ и $w(x + \xi)$, как и между значениями $w(y)$ и $w(y + \zeta)$, затухает при $\xi \rightarrow \infty$ и $\zeta \rightarrow \infty$. Поэтому $B_{LL}(\xi) \rightarrow 0$ и $B_{NN}(\zeta) \rightarrow 0$ соответственно при $\xi \rightarrow \infty$ и $\zeta \rightarrow \infty$. При указанных условиях структурная и корреляционная функции связаны соотношением (в качестве примера приведена запись для поперечной оси потока):

$$G_{NN}(\zeta) = 2[R_{NN}(0) - R_{NN}(\zeta)]. \quad (2.16)$$

Значения параметров сдвига ξ_0 и ζ_0 , при которых корреляционные функции близки к нулю, названы радиусами корреляции. Что касается структурных функций, то их характеризуют величины ξ_n и ζ_n , при которых $D_{LL}(\xi_n)$ и $D_{NN}(\zeta_n)$ достигают «насыщения», т. е. увеличиваются мало или остаются неизменными с дальнейшим увеличением ξ и ζ .

При достаточно однородном поле пульсационных скоростей корреляционные функции с большой достоверностью аппроксимируются экспоненциальными зависимостями:

$$R_{LL} = \exp(-a_1\xi), \quad R_{NN} = \exp(-a_2\zeta),$$

на основе которых непосредственно установлены средние масштабы турбулентности (радиусы корреляции)

$$\xi_c = 1/a_1, \quad \zeta_c = 1/a_2.$$

Эти масштабы являются статистической оценкой средних расстояний, на которых сохраняется положительное значение моментов корреляции между пульсациями мгновенных скоростей потока. Характерными значениями рассматриваемых функций будут:

$$R_{NN}(0) = 1, \quad R_{NN}(\zeta_0) = 0, \quad G_{NN}(0) = 0, \quad G_{NN}(\zeta_0) = 2.$$

Особо интересна аппроксимация структурных функций вида (2.16). Наиболее целесообразно воспользоваться степенной зависимостью

$$G_{NN}(\bar{\zeta}) = 2(\zeta/\zeta_0)^m. \quad (2.17)$$

Для локально изотропной турбулентности Колмогоров установил «закон двух третей», в соответствии с которым $m = 2/3$. Этот закон справедлив в инерционном диапазоне масштабов турбулентности, т. е. таких которые намного больше размеров мельчайших вихрей l_v , диссипирующих энергию в результате проявления вязкости, но намного меньше масштабов основного движения l_0 :

$$l_v \ll l_{ин} \ll l_0.$$

Структурная функция в диапазоне вязкого трения зависит от квадрата пространственного параметра ξ .

О соотношении приведенных масштабов турбулентности можно судить по их роли в русловом потоке: с масштабами порядка l_0 связаны руслоформирующие процессы, масштабы инер-

ционного интервала $t_{ин}$ определяют диффузионный обмен, а размер мельчайших вихрей является одним из параметров диссипации энергии.

По результатам наблюдений на реках, в каналах и лабораторных лотках опубликовано множество статистических характеристик турбулентности [24, 37]. Среди них мало данных о поперечных корреляционных и структурных функциях, а именно такие данные необходимы для дальнейшего анализа. Эти характеристики удалось получить по результатам измерений расходов воды фотопневматическим методом, предложенным В. Э. Видом [25] и

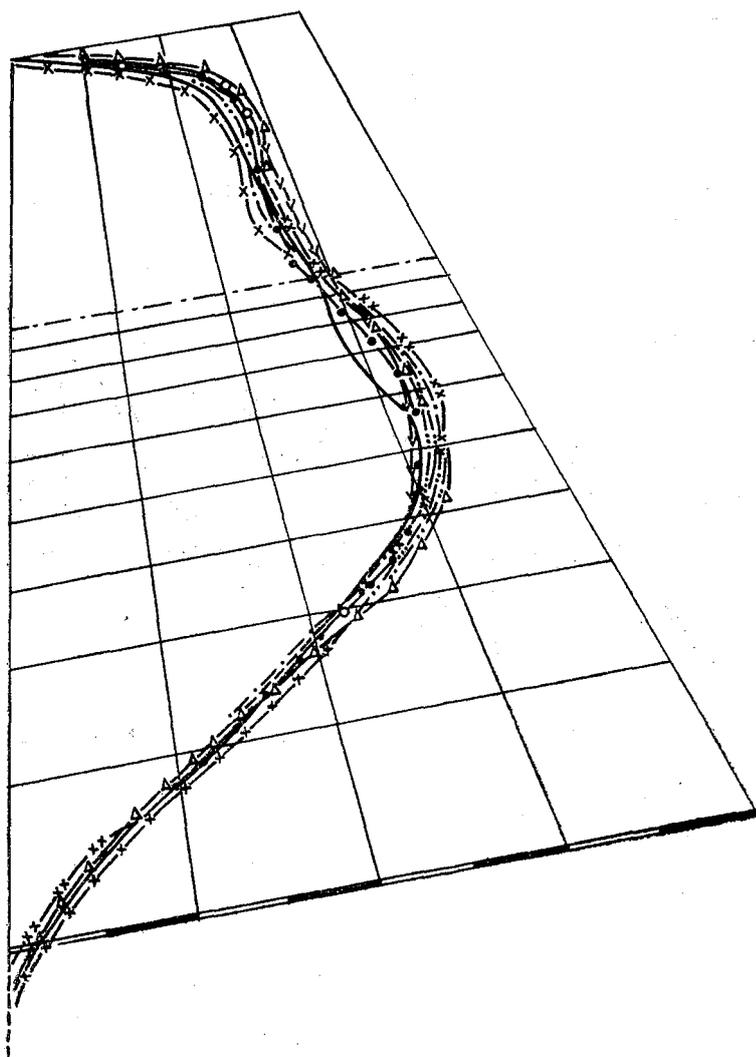


Рис. 2.5. Эпюры интегральных скоростей в канале.

внедренным на Невинномысском канале в 1961—1963 гг.

Через перфорированный трубопровод, уложенный на дно, подают сжатый воздух. Всплывая, воздушные пузырьки автоматически «интегрируют» местные скорости по вертикали и образуют на поверхности воды эпюру элементарных расходов (рис. 2.5). Каждую эпюру можно рассматривать как одну из реализаций распределения средних скоростей на вертикалях в масштабе ω_n/h (ω_n —

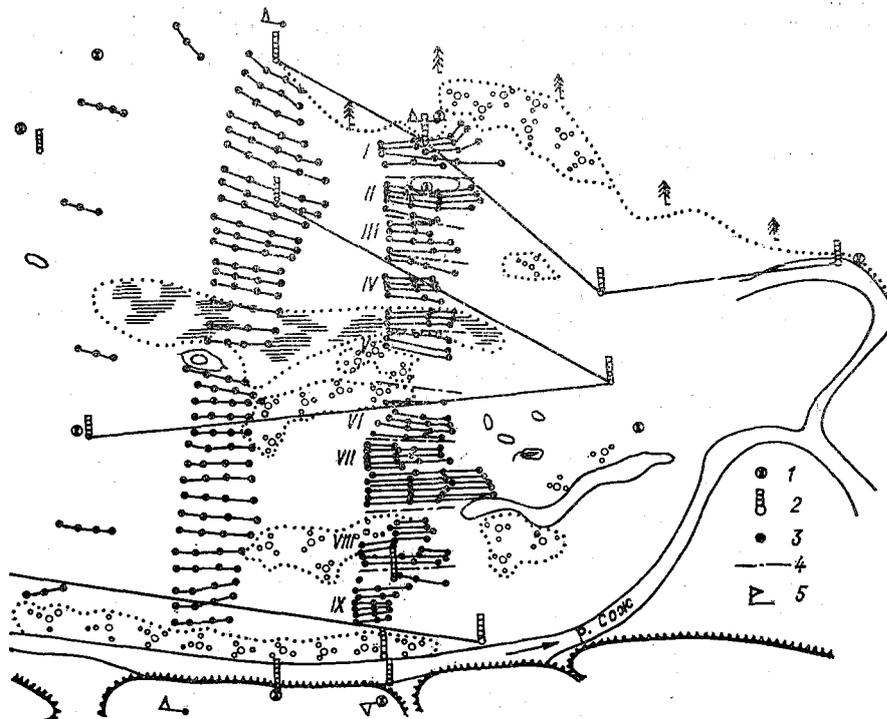


Рис. 2.6. План течений на пойме р. Сож по наблюдениям аэрогидрометрической экспедиции ГГИ (1971 г.).

1 — опорные точки плано-высотного обоснования, 2 — уровенные и уклонные временные гидрологические посты, 3 — положение поплавков; 4 — границы фрагментов поймы, 5 — створ наблюдений.

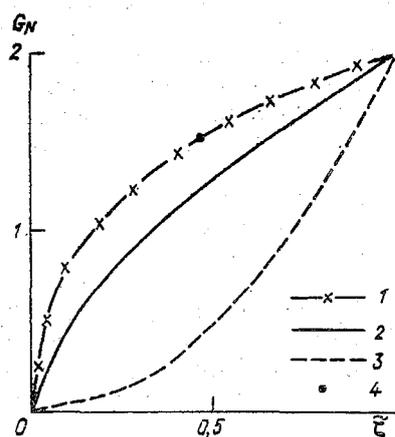
скорость всплытия пузырька). Обработка фотоэпюр позволила непосредственно получить поперечную корреляционную функцию, а на ее основе — и поперечную структурную функцию по формуле (2.16) при нормированном параметре сдвига $\zeta = \zeta/\zeta_0$.

Под руководством одного из авторов аэрогидрометрическая экспедиция ГГИ осуществила беспрецедентные по массовости пуски и аэрофотосъемку поплавков в пойме р. Сож [56]. На рис. 2.6 приведены три положения поплавков из семи пусков. На фотопланах удалось зафиксировать последовательность скоростных полей по фрагментам II, IV и VII. Полученные три ряда со-

стояли из 19 значений средних по ширине фрагментов поверхностных скоростей v_{ϕ} , измеренных в один и тот же момент времени (с отклонением не более 20 с) через каждые 3—4 мин. Относительные среднеквадратические отклонения скоростей v_{ϕ} во фрагментах составили $\sigma_v = 0,12$. Коэффициенты корреляции этих скоростей в смежных фрагментах $r = 0,25$, что указывает на слабую скоррелированность (кинематическую обособленность) течений во фрагментах — элементах дискретной структуры потока на пойме. Вместе с тем оказалась значимой отрицательная взаимная корреляция пульсаций скоростей в пойменных протоках II и VII, находящихся вблизи противоположных границ поймы ($r = -0,51$).

Рис. 2.7. Поперечные структурные функции.

1 — по реализациям фотоэпюр скоростей течения в канале, 2 — инерционный интервал, 2 — вязкостный интервал, 4 — точка насыщения.



В физическом смысле это значит, что крупномасштабные колебания всего поля скоростей происходят при наличии тенденции к сохранению условия неразрывности движения водных масс: возрастание расходов воды в одной части поймы компенсируется их уменьшением в другой. Период этих колебаний приблизительно равен 20 мин. Генезис колебательного процесса не выяснен, но можно полагать, что он возникает в результате динамического взаимодействия потоков рек Сож и Проня, сливающихся в 2,5 км выше створа наблюдений.

На рис. 2.7 приведен график $G_{NN}(\xi)$ по результатам обработки фотопневматических измерений. Для сравнения изображены также структурные функции инерционного и вязкостного масштабов турбулентности.

Основные черты турбулентного движения отражают показатель степени приведенных структурных функций. Для локально изотропной турбулентности — это «закон двух третей», для диапазона вязкого трения — квадратичная зависимость. В реальном потоке, испытывающем влияние крупномасштабных возмущений и жестких границ течения, структурные функции пульсационных скоростей имеют показатели степени $m = 0,4$, что свидетельствует

о менее тесной взаимной корреляции пульсационных скоростей, чем в гипотетической среде изотропной турбулентности. Более того, при наличии динамических (детерминированных) составляющих в изучаемых реализациях, т. е. когда эффекты неоднородности скоростного поля становятся ощутимыми, структурная функция, начиная с некоторого значения параметра сдвига $\xi < \xi_0$, практически не изменяется.

Степень неоднородности пространственного распределения мгновенных скоростей зависит от общей структуры потока. Неоднородность не исключает существования локально однородных областей внутри потока, а именно к ним относятся структурная функция и ее параметры, приведенные на рис. 2.7. Но для того чтобы скоростное поле было локально однородным, динамические приращения скоростей, обусловленные структурой, должны быть меньше их пространственных разностей, выражаемых через структурные функции в пределах среднего масштаба возмущений ξ_{cp} .

Сформулируем критерий квазиоднородности турбулентного потока в поперечном сечении русла: квадраты максимальных динамических приращений средних скоростей на вертикалях в пределах радиуса корреляции ξ_{cp} должны оставаться по крайней мере на порядок меньше поперечной структурной функции пульсационных скоростей. Из степенной аппроксимации структурной функции (2.17) при параметре сдвига ξ_{cp} с учетом того, что максимальный градиент средних скоростей на вертикалях находится у стенки, получаем условие локальной однородности кинематической структуры потока в поперечном сечении русла:

$$v'_y(0) \xi_{cp} \leq 0,33 \sqrt{D_{NN}(\xi_{cp})}. \quad (2.18)$$

По данным многих натуральных и экспериментальных наблюдений, для среднеквадратического отклонения средней скорости на вертикали можно принять зависимость

$$\sigma_v \approx 0,7v_*,$$

где $v_* = \sqrt{gh}l'$ — динамическая скорость.

Теперь структурную функцию $D_{NN}(\xi_{cp})$ можно представить через ее нормированное значение:

$$D_{NN}(\xi_{cp}) = 0,49v_*^2 G_{NN}(\xi_{cp}). \quad (2.19)$$

Параметры структурной функции, выражаемой зависимостью (2.17), определены по данным фотопневматических измерений:

$$m = 0,40, \quad \xi_{cp} = 0,4h, \quad \xi_0 = 1,4h.$$

После подстановки статистических характеристик турбулентности и производной $v'_y(0)$ по (2.9) получаем неравенство

$$[0,4Cv_*/(b\sqrt{g})] 0,45h \leq 0,33 \cdot 0,7v_* \sqrt{2(0,45/1,6)^{0,40}}.$$

Отсюда приблизительно определяем поперечный масштаб элемента структуры квазиоднородного потока:

$$b \geq 0,72Ch/\sqrt{g} = 0,72\tilde{C}h, \quad (2.20)$$

где $\tilde{C} = C/\sqrt{g}$.

Из условия (2.18) получаем критерий квазиоднородности кинематической структуры в поперечном сечении потока:

$$\theta = \tilde{b} \sqrt{\lambda} \geq 1, \quad (2.21)$$

где $\tilde{b} = B/h$, $\lambda = 2g/C^2$.

Ширина естественных речных русел почти всегда значительно превосходит глубину. Этим обеспечивается квазиоднородность кинематической структуры потока, при которой $\theta > 1$. Если влияния пульсационных составляющих и пристенных градиентов осредненных по вертикали скоростей на кинематическую структуру соизмеримы, что характерно для каналов и лотков, значения критерия уменьшаются и находятся в пределах $\theta = 0,3 \dots 0,5$.

Критерий θ открывает новые возможности для обобщения эмпирических данных о морфометрии и гидравлических сопротивлениях русел рек и каналов.

2.3. Факторы гидравлических сопротивлений

В гидравлических расчетах сопротивления оценивают применительно к основному уравнению равномерного движения:

$$RI = \lambda [v^2/(2g)], \quad (2.22)$$

которое преобразуют в формулу Шези

$$v = C \sqrt{RI}, \quad (2.23)$$

где C — коэффициент Шези, связанный с коэффициентом сопротивлений зависимостью

$$C = \sqrt{2g/\lambda}, \quad (2.24)$$

где R — гидравлический радиус.

Этот расчетный прием равнозначен приведению равномерного потока любой формы к прямоугольному плоскому потоку без торозящих боковых стенок при глубине, равной гидравлическому радиусу действительного сечения площадью F : $R = F/\chi$ (χ — смоченный периметр). Считают, что таким образом учтено влияние формы русла на режим течения. Однако замечено, что это далеко не всегда удается достичь. К. Шик и Н. Григг [161] в специальных экспериментах показали, что при одних и тех же значениях R и шероховатости поверхности лотка n средние скорости течения в нем различались более чем в 2 раза. Необходимость особого учета формы русла при определении коэффициентов сопротивлений выявлена в более поздних опытах А. К. Каземипура и

С. Д. Апелъта [151], К. Наллури и Б. А. Адероджи [154]. В тех и других опытах отчетливо обнаружено влияние относительной ширины русла \bar{b} на сопротивление движению потока. Сам по себе этот факт не нов, но его количественные оценки весьма противоречивы. С одной стороны, считают, что в русле ограниченной ширины сопротивление больше, чем в бесконечно широком. И. И. Мечитов [95] и Г. Гарбрехт [148] приводят формулы для количественной оценки этого эффекта. А с другой — еще в начале XX века Зидек установил обратную зависимость средней скорости потока от его ширины В. И, наконец, Х. Вагнер [166] исходя из предпосылок полуэмпирической теории турбулентности пришел к неоднозначной зависимости коэффициента сопротивления λ от \bar{b} : достигнув минимума при сравнительно малых $\bar{b} = 2 \dots 3$, значения λ монотонно возрастают по мере того как $\bar{b} \rightarrow \infty$.

Казалось бы, этих прецедентов достаточно, чтобы принимать их во внимание при расчетах, но на деле в инженерной гидравлике все остается по-прежнему: оценку гидравлических сопротивлений сводят к определению коэффициента Шези C для плоского потока. И несть числа формулам для C : в середине 30-х годов их было более 100! Наиболее распространены зависимости вида:

$$C = R^y/n, \quad (2.25)$$

где n — коэффициент шероховатости; показателю степени y придают различные значения: $y = 1/5$ — по Форхгеймеру, $y = 1/6$ — по Маннингу, $y = 1/8$ — по Доу Го-женю [44].

Надо отдать должное Н. Н. Павловскому [111], который еще в 20-е годы установил более сложное, чем (2.25), выражение для C , введя в него переменный показатель степени, зависящий от R и n :

$$y = 2,5 \sqrt{n} - 0,13 - 0,75 (\sqrt{n} - 0,1) \sqrt{R}. \quad (2.26)$$

При достаточно больших наполнениях русла формула Павловского приводит к уменьшению C с увеличением R . Этот эффект на первый взгляд кажется нефизичным [5, 46], и поэтому предложено ограничивать действие формулы (2.25) диапазоном R до 3 или, в крайнем случае, до 5 м. Ограничение области применения специфично не только для формулы Павловского: в той же мере это относится и к иным эмпирическим зависимостям — формулам Маннинга, Форхгеймера и др. Все дело в том, насколько достоверны экстраполированные значения C . На рис. 2.8 приведена совокупность разнообразных кривых $C = f(R)$, полученных по данным натуральных наблюдений. На том же рисунке приведена кривая, рассчитанная по формуле Павловского при $n = 0,021$, которая в какой-то мере осредняет положение всех эмпирических точек и дает стабилизирующиеся или мало изменяющиеся значения C при $R > 5$ м.

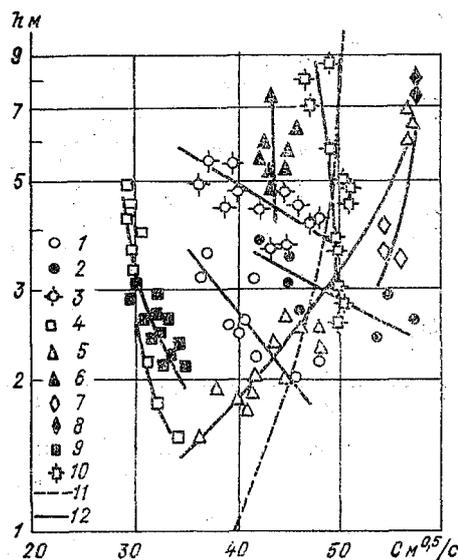
При сравнении результатов расчета по шести наиболее известным зависимостям формула Павловского дала также средние значения C во всем диапазоне изменения R от 1 до 20 м [45].

Итак, гидравлические сопротивления с глубиной изменяются неоднозначно. Рассмотрим основные факторы, которыми можно объяснить эту неоднозначность.

Характеристики гидравлических сопротивлений вычисляют по гидрометрическим данным: λ — из уравнения (2.24) и C — из формулы Шези. Ясно, что получаемые оценки зависят от точности измерения элементов расходов воды и особенно уклона свободной поверхности I и его инерционных коррективов: конвективных I_v при выраженной неравномерности и локальных I_t при нестационарности потока.

Рис. 2.8. Зависимость коэффициента C от средней глубины потока.

1—3 — Каракумский канал: песчаные ($n = 0,022 \dots 0,034$), супесчаные ($n = 0,023 \dots 0,029$) и глинистые ($n = 0,024 \dots 0,044$) грунты соответственно; 4 — р. Енисей—с. Чао-Холь, $n = 0,025 \dots 0,068$; 5 — р. Варта—г. Познань, $n = 0,023 \dots 0,033$; 6 — р. Алдан—г. Томмот, $n = 0,028 \dots 0,033$; 7, 8 — р. Волга: г. Чкаловск ($n = 0,018 \dots 0,026$) и г. Камышин ($n = 0,023 \dots 0,030$); 9 — р. Кафирниган—к. Умар, $n = 0,029 \dots 0,060$; 10 — р. Дунай—г. Вена, $n = 0,024 \dots 0,042$; 11 — формула Павловского, $n = 0,025$; 12 — формула (2.33), $n = 0,025$.



ности потока. Для определения I_v необходимо иметь данные о площадях живых сечений, ограничивающих участок измерения уклонов, а для оценки I_t нужно временное разрешение наблюдений [94]. На практике такие дополнительные наблюдения проводят далеко не всегда, что ведет к систематическим погрешностям определения I .

Существуют и другие факторы, которые нередко не учитывают при оценке гидравлических сопротивлений: изменение шероховатости дна и берегов при различном направлении русла, крупность и степень подвижности наносов и др. По данным В. Е. Сергутина и А. А. Радюка [132], увеличение мутности речной воды может снизить коэффициент шероховатости в 2 раза, а образование гряд, как установили, М. А. Михалев и С. Я. Павлов [100], ведет к увеличению гидравлических сопротивлений в 1,5 и даже в 4 раза по сравнению с сопротивлениями при гладком дне.

Существуют некоторые другие факторы, от которых зависит движение русловых потоков. Так, А. Д. Гиргидов [32] теоретически оценил вовсе не пренебрежимое влияние ветровых кас-

тельных напряжений и перепадов атмосферного давления на уклоны свободной поверхности, особенно при достаточно больших глубинах потока (8—10 м и более) и малых уклонах ($I < 10^{-5}$).

В последнее время в литературе все чаще появляются указания на то, что в реках и каналах в большинстве случаев реализуется гладкий или переходный режим сопротивлений, зависящих от числа Рейнольдса [9].

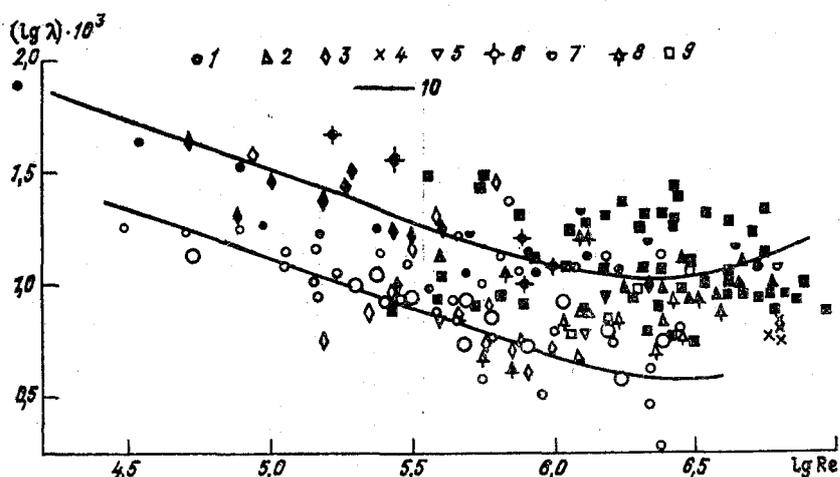


Рис. 2.9. Связь коэффициента сопротивлений λ с числом Re .

1 — по С. Х. Абальянцу и Е. А. Замарину; 2 — Каракумский канал; 3 — каналы в низовьях Амударьи (по А. Д. Саваренскому и Л. Б. Левановскому); 4 — по М. М. Дидковскому и И. А. Родионову; 5 — Большой Ставропольский и Невинномысский каналы; 6 — по М. А. Андриюшину; 7 — по С. Марчи; 8 — по А. Н. Проскурину; 9 — реки; 10 — осредняющие кривые; малые значки обозначают одно-два наблюдения, средние — два-три, большие — более пяти; залитые значки соответствуют значениям $n > 0,024$, незалитые — $n \leq 0,024$.

Выдвинуто положение о недопустимости расчета средних скоростей потока по формулам Шези—Маннинга в каналах с очень малым уклоном [141].

На те же факты указал С. Х. Абальянц [1], анализируя данные наблюдений на каналах Средней Азии.

На рис. 2.9 приведен график $\lambda(Re)$ на фоне результатов натурных наблюдений. Общее положение точек явно не соответствует «классическому» графику А. П. Зегжды [48]: на графике отсутствует область квадратических сопротивлений. Вместе с тем диапазон, где есть связь $\lambda(Re)$, нельзя отнести к гладкой области, так как результаты измерений образуют две ветви $\lambda(Re)$, каждая из которых аппроксимируется степенной функцией

$$\lambda = m/Re^{0,3} \quad (2.27)$$

с различными значениями m : для более шероховатых русел ($n > 0,024$) $m_1 = 1$, а для менее шероховатых ($n \leq 0,024$) $m_2 = 0,5$.

Объяснение заключается в неявном, но определяющем влиянии все той же средней глубины потока, которую можно представить через Re :

$$h = \nu^{1/3} Re / (10^4 \nu), \quad (2.28)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, $см^2/с$; ν — скорость, $м/с$.

Сравнительно малый диапазон изменения ν в природных условиях позволяет принимать его постоянное значение $\nu = 0,01 см^2/с$. Что касается средних скоростей потока, то для объектов наблюдений, данные которых приведены на рис. 2.9, средние скорости изменялись мало и в среднем составили 0,5 м/с. В формулу (2.23) подставим h по (2.28) с фиксированными значениями ν и ν :

$$\lambda = 50^{1/3} \cdot 10^{4/3} (2gn^2/Re^{1/3}) = 157gn^2/Re^{1/3},$$

откуда найдем $m_1 = 1,12$ (при $n = 0,027$) и $m_2 = 0,63$ (при $n = 0,020$). Иными словами, аппроксимация (2.27) практически тождественна зависимости (2.24), установленной исходя из предположений квадратического закона гидравлических сопротивлений.

2.4. Связь коэффициента Шези с глубиной и относительной шириной русла

Итак, многие достаточно противоречивые факты можно объяснить определяющим влиянием глубины потока на режим его движения. Но сама связь гидравлических сопротивлений и глубины имеет неоднозначный характер, и чтобы эту связь уточнить, надо привлечь дополнительные факторы. К ним прежде всего принадлежит относительная ширина русла \tilde{b} . Для оценки ее роли использован один из интегральных законов гидродинамики — теорема количества движения, обычно применяемая к потоку с основными размерами R и смоченным периметром χ . Чтобы освободиться от гипотетических аспектов характеристик R и χ , уравнение количества движения отнесено к отсеку единичной длины с поперечными размерами b и h (рис. 2.10).

$$2(\gamma/g) \alpha_\delta h v^2 = (\gamma h l - \gamma v^2 / C_0^2) (B - 2a) P, \quad (2.29)$$

где α_δ — коэффициент, учитывающий сплошность формирования возмущений масштаба δ и относительную потерю их продольной скорости при массообмене на боковых границах потока; C_0 — коэффициент Шези для плоского потока, определяемый по известным формулам в зависимости от характеристики шероховатости русла и гидравлического радиуса.

В уравнении (2.29) учтены два важных условия.

Силы трения, выраженные членом $\gamma v^2 / C_0^2$, действуют лишь на части ширины потока, за вычетом поперечных размеров пристенных (прибрежных) зон a . На основе соотношений, установленных

В. М. Маккавеевым [91], можно принять

$$a = 28 \cdot 10^4 g^2 h / C_0^4. \quad (2.30)$$

Секундное изменение количества движения, представляемое левой частью уравнения (2.29), компенсируется его правой частью с вероятностью P , которая по своему смыслу близка к характеристике, использованной Маккавеевым при изучении обмена количеством движения между основной и придонной зонами потока. Вероятность P тем меньше, чем меньше выражены поперечные градиенты скоростей течения, т. е., чем более однородна кинема-

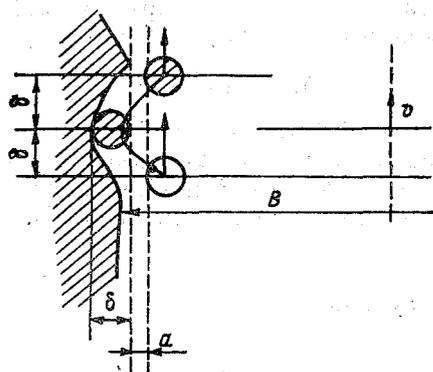


Рис. 2.10. Схема торможения потока боковой границей.

Заштрихованы возмущения, продольная скорость которых уменьшилась.

тическая структура потока. Использование критерия квазиоднородности (2.21) позволяет принять для P выражение

$$P = 0,03 + 0,97 \exp(-\theta). \quad (2.31)$$

Для квазиоднородного течения при $\theta \gg 1$ сохраняется лишь весьма малое значение $P = 0,03$.

При решении уравнения (2.29) относительно средней скорости потока получено соотношение для коэффициента Шези

$$C = C_0 \left\{ \frac{g(b - 2\tilde{a})[0,03 + 0,97 \exp(-\theta)]}{2\alpha_\delta C_0^2 + g(b - 2\tilde{a})[0,03 + 0,97 \exp(-\theta)]} \right\}^{1/2}. \quad (2.32)$$

Таким образом, значение C зависит не только от основных сопротивлений, учитываемых в традиционных формулах, но и от дополнительных вероятностно-морфометрических факторов P , \tilde{b} и $\tilde{a} = a/h$.

Значения коэффициента α_δ в первом приближении ранее оценены по условиям общего соответствия вычисленных значений C натурным данным Е. А. Замарина, С. Х. Абальянца и др., а также наблюдениям автора работы [57]. Для уточнения значения α_δ можно использовать те же материалы—всего 350 измерений на 50 каналах при $Q = 0,3 \dots 512 \text{ м}^3/\text{с}$; $R = 0,2 \dots 6,5 \text{ м}$; $\tilde{b} = 6,0 \dots 75,6$; $I = (3 \dots 38) 10^{-5}$. Коэффициент Шези для плоского потока вычислен по формуле Маннинга: $C_0 = R^{1/6}/n_0$.

При статистической обработке материалов наблюдений каналы разделены на две категории, которым соответствуют минимальные значения коэффициента шероховатости для условий плоского потока (n_0):

- 1) каналы в заиленных песках, супесях и легких суглинках при благоприятных условиях содержания, $n_0 = 0,016$;
- 2) каналы в супесчано-суглинистых и глинистых грунтах, $n_0 = 0,021$.

Расчетная зависимость для C получена из (2.32) методом наименьших квадратов. Предварительно иррациональный множитель правой части (2.32) разложен в биномиальный ряд из двух членов, составивших факторные переменные уравнения линейной регрессии для C . После вычисления его параметров на ЭВМ определено значение $\alpha_6 = 0,000628$, а из уравнения (2.32) получена следующая расчетная зависимость:

$$C = C_0 \left\{ 1 - \frac{0,000628 C_0^2}{g(\bar{b} - 2\bar{a})[0,03 + 0,97 \exp(-\theta)]} \right\}^{1/2}. \quad (2.33)$$

Теснота этой связи достаточно высокая; коэффициент множественной корреляции $r_0 = 0,96$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma_p = 2,5 \%$.

Из структуры формулы (2.33) следует, что первым приближением для коэффициента C при неограниченной ширине русла является значение C_0 для плоского потока. Корректив, выражаемый отрицательным членом правой части, учитывает влияние формы русла (\bar{b}) и кинематической структуры потока (θ).

Исследователи М. А. Мостков, М. Ф. Срибный, А. Д. Альтшуль и др. устанавливали зависимость коэффициента Шези от гидравлического уклона. Последнюю из подобных формул предложил О. М. Айвазян [2]. Нет сомнения, что для какой-либо конкретной совокупности данных величина I может быть весьма информативной, поскольку она интегрально отражает влияние всего многообразия гидравлико-морфологических факторов, в том числе и относительной ширины русла. Впрочем, по данным В. В. Голубцова [34], относящимся к рекам, зависимость C от I практически исчезает при $I < 0,001$, т. е. в области, характерной для земляных каналов.

С гидравлической точки зрения, функции $\lambda(I)$, $n(I)$ и соответственно $C(I)$ нецелесообразны. С их принятием основное уравнение равномерного движения $RI = \lambda[v^2/(2g)]$ приобрело бы характер тождества. Это означало бы не что иное, как ревизию квадратического закона сопротивлений и деструктуризацию формулы Шези, которая пока для гидравлики незаменима.

Вероятностно-морфометрическая зависимость (2.33) отражает некоторые принципиально важные закономерности изменения C . На рис. 2.11 приведены графики для относительных значений коэффициента Шези $K_C = C/C_0$, где C вычислен по формуле (2.33), при переменных \bar{b} и фиксированных $C_0(n_0, R)$. Функция $K_C = f(\bar{b}, C_0)$ образует максимум в оптимальном или гидравлически

наивыгоднейшем интервале $b_{\text{опт}} = 15-30$ при $R > 3$ м, с увеличением \bar{b} отмечено увеличение гидравлических сопротивлений и K_C принимает минимальное значение при $\bar{b} > 50$. Появление зоны уменьшения K_C можно объяснить внутренним расчленением по-

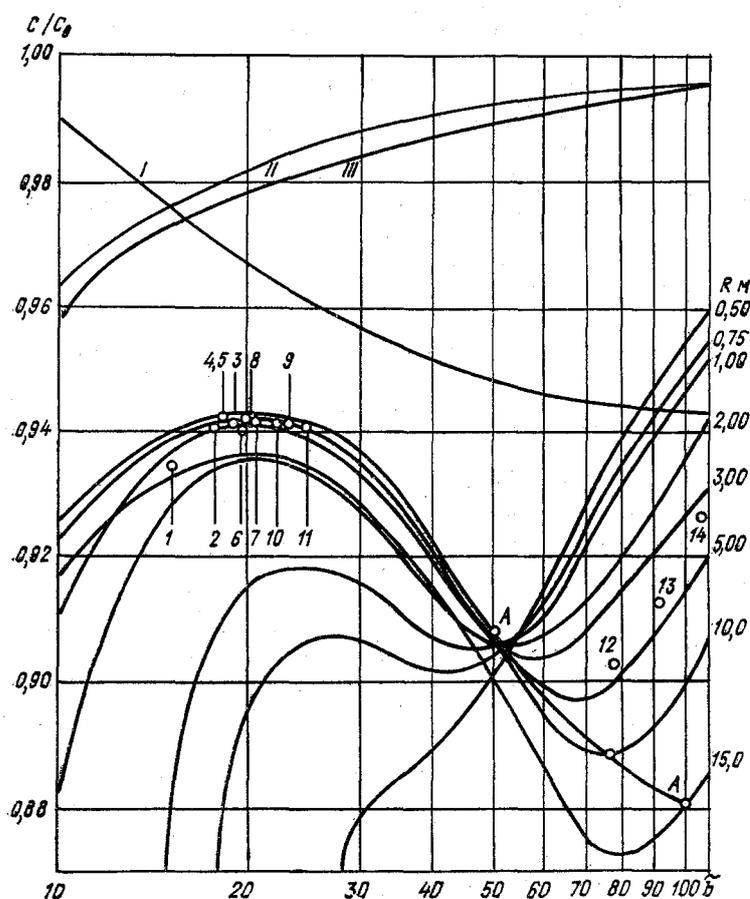


Рис. 2.11. Зависимость коэффициента Шези от параметра формы русла в супесчаных и суглинистых грунтах ($n = 0,021$).

1 — Г. Н. Скребков; 2 — И. Ф. Карасев; 3 — П. А. Шатберашвили; 4 — Союзгипроводхоз; 5 — Ю. А. Ибад-Заде; 6 — С. Х. Абальянц; 7 — В. А. Скрыльников; 8 — В. П. Троицкий, А. И. Лаксбер; 9 — Ю. Г. Иваненко; 10 — М. А. Михалев; 11 — Р. И. Самедов; 12 — Е. К. Рабкова; 13 — К. В. Гришанин; 14 — Х. Ш. Шапиро; I — Х. Вагнер; II — Г. Гарбрехт; III — И. Ф. Карасев (первое приближение).

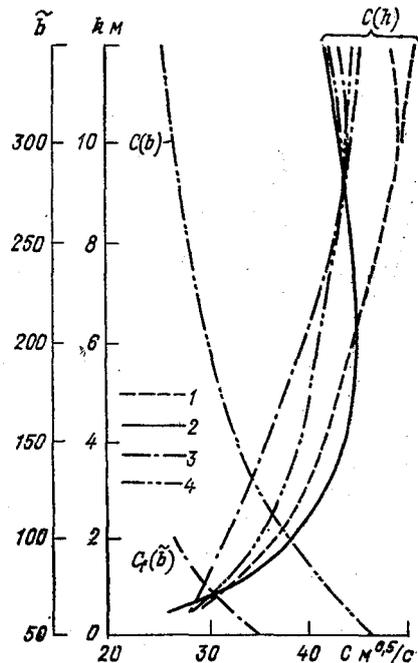
тока на две кинематически обособленные ветви при еще сохранившемся влиянии берегов. С ослаблением этого влияния, по мере того как $\bar{b} \rightarrow \infty$, коэффициент C асимптотически приближается к значениям C_0 ($K_C \rightarrow 1$), характерным для плоского потока.

На том же рис. 2.11 приведены кривые $K_C(\bar{b}, R)$, рассчитанные при $R = 3$ м по зависимостям Гарбрехта [148], Х. Вагнера [166]

и по формуле (2.33) при $P = 1$ и без выделения кинематически обособленных береговых зон ($\tilde{a} = 0$). Формулу (2.33) можно рассматривать как зависимость общего вида, отражающую сложный характер связи C с шероховатостью и относительными размерами русла — именно теми факторами, которые определяют его пропускную способность. Существует точка зрения [90], согласно которой коэффициент сопротивления отражает потери импульса, связанные не только с микрошероховатостью дна, но и с макроскопическими формами дна и берегов. В нашем случае характеристикой микрошероховатости следует считать C_0 , а \tilde{b} отнести к разряду макроскопических параметров.

Формула (2.33) по условиям ее вывода применима при несомкнутых пристенных слоях, т. е. при $\tilde{b} > 2\tilde{a}$. Как показали проверочные расчеты, это

Рис. 2.12. Зависимости $C = f(h)$ и $C = f(\tilde{b})$, рассчитанные по формулам Маннинга (1), Н. Н. Павловского (2) и (2.34) (3 — для каналов, 4 — для рек).



ограничение выражается неравенством:

$$2\tilde{a} \leq 0,333\tilde{b}.$$

Исследовано изменение C как функции одной переменной — средней глубины h или относительной ширины \tilde{b} . Если принять параболическую форму русла и его параметры при максимальном расходе воды \tilde{b}_0 и h_0 , то при любом более низком наполнении для параболы второго порядка

$$\tilde{b} = \tilde{b}_0 \sqrt{h_0/h}.$$

После подстановки этого выражения формула (2.33) становится функцией одной переменной:

$$C = C_0 \left\{ 1 - \frac{0,000628C_0^2}{g [\tilde{b}_0 (h_0/h)^{0,5} - 54 \cdot 10^4 g^2 / C_0^4] [0,03 + 0,97 \exp(-\theta)]} \right\}. \quad (2.34)$$

На рис. 2.12 приведены результаты расчета C при параметрах $\tilde{b}_0 = 50$ для рек и $\tilde{b}_0 = 20$ для каналов, одинаковых максималь-

ных глубинах $h_0 = 12$ м и коэффициентах шероховатости $n = 0,03$. На том же рисунке приведены кривые, рассчитанные по формулам Павловского и Маннинга. По Маннингу, C изменяется монотонно и принимает явно завышенные значения при $h \rightarrow h_0$. Зависимость (2.34) и формула Павловского приводят к стабилизации C при $h \geq 5$ м. Иными словами, при больших наполнениях русла глубина перестает играть определяющую роль в гидравлических сопротивлениях и уступает ее другим факторам, среди которых прежде всего следует выделить относительную ширину русла. Те же значения C представлены в функции \bar{b} (левые кривые на рис. 2.12). Как и следовало ожидать, эти две величины находятся в обратной зависимости. Действительно, в отдельно взятом сечении увеличение \bar{b} сопровождается уменьшением средней глубины потока, что оказывается превалирующим эффектом, приводящим к уменьшению C . Лишь в каналах, в узкой области больших наполнений, отмечена прямая зависимость C от \bar{b} .

В. С. Алтунин и Л. В. Ларионова [4] предложили формулу для больших каналов:

$$C = [g(0,2\bar{b}^2 + 43)]^{0,5}. \quad (2.35)$$

Хотя авторы и ограничивают общность этой зависимости, рекомендуя принять ее лишь в диапазоне $\bar{b} = 20 \dots 40$, ее нужно дополнительно обосновать, поскольку в ней не учтено то обстоятельство, что в отдельно взятом сечении изменение \bar{b} функционально связано с глубиной h , в силу чего зависимость C от \bar{b} не может оставаться однозначной. Недостаток формулы (2.35) можно видеть и в том, что она не содержит характеристики шероховатости русла.

В числе факторов, усложняющих зависимости для C , можно также указать неоднородность шероховатости смоченной поверхности русла, инерционные эффекты нестационарности и неравномерности потока, проявления режима стоковых течений и т. п. Так, увеличение шероховатости смоченного периметра от 0,03 до 0,04 в диапазоне глубин 10—12 м, приводит к уменьшению C с увеличением глубины, что и отражают ветви спада зависимости $C(h)$ (см. рис. 2.12).

При очень малых уклонах свободной поверхности движение потока принимает характер, близкий к стоковым течениям, что, в конечном счете, отражается в значительном увеличении коэффициента сопротивлений (шероховатости), по крайней мере в несколько раз по сравнению с табличными данными, соответствующими характеру грунтов. В первом приближении коэффициент сопротивления в рассматриваемом случае можно определить по результатам лабораторных экспериментов [141]:

$$\lambda = 2g/C^2 = 126/Re \quad \text{при } I = (1,26 \dots 2,00) \cdot 10^{-5}, \quad Re \leq 7000.$$

Отсюда следует, что условия применения (2.33) характеризуют неравенства

$$I > (1,26 \dots 2,00) \cdot 10^{-5}, \quad Re > 7000.$$

Что касается вопроса о надежности расчета пропускной способности каналов и речных русел при глубинах $h > 3$ м, то зависимость (2.33) можно рекомендовать без каких-либо масштабных ограничений, так как она получена на основе достаточно общего уравнения количества движения.

2.5. Гидравлические сопротивления в руслах с поймой

Вообще говоря, при достаточном затоплении поймы, когда глубина на ней $h_{п}$ соизмерима с глубиной русла в пойменных бровках $h_{р}$ (при $h_{п} > 0,8 h_{р}$), то, как показывают наблюдения, поток остается целостным (компактным) и к нему применимы расчетные зависимости, полученные для беспойменных русел. При меньшем значении $h_{п}$ поток расчленяется на русловой и пойменные

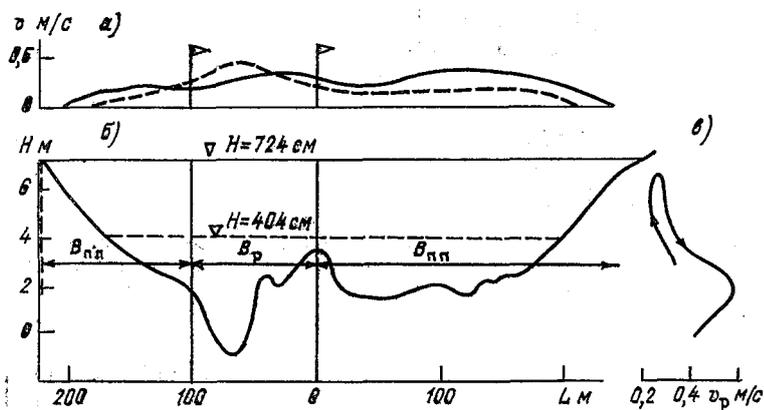


Рис. 2.13. Распределение средних на вертикали скоростей течения по ширине потока (а), поперечное сечение русла и поймы (б) и изменение средних скоростей руслового потока в зависимости от уровня воды (в) по наблюдениям ГТИ на р. Луге у п. Толмачево в 1966 г.

фрагменты. На пойме отмечено затухание скоростей течения, а в русле они, напротив, существенно увеличиваются (рис. 2.13). Отсюда возникает необходимость в отдельном расчете пропускной способности основного русла и поймы. В этом случае становится ощутимым увеличение гидравлических сопротивлений в результате турбулентного массообмена на границе руслового и пойменного потоков, создающего кинематический эффект Г. В. Железнякова [46]. Между тем, в обычно применяемых методах расчета он не отражен: формулу Шези записывают отдельно для основного русла и для пойменных отсеков, предполагая, что они изолированы стенками той же шероховатости, что и шероховатость дна.

Взаимодействие руслового и пойменного потоков также можно оценить с помощью уравнения количества движения [57]. Получены выражения, корректирующие коэффициенты Шези C_0 :

$$K_C = [gB_n / (gB_n \pm 2\varphi\alpha_v C_{0n}^2 \delta_v h_{бр})]^{1/2}, \quad (2.36)$$

где B_p и B_n — ширина русла и поймы; $h_{бр}$ — глубина на бровке русла (гребень прируслового вала), когда последний отсутствует $h_{бр} = h_p$ (рис. 2.14).

Формула (2.36) содержит эмпирический коэффициент φ и две кинематические характеристики:

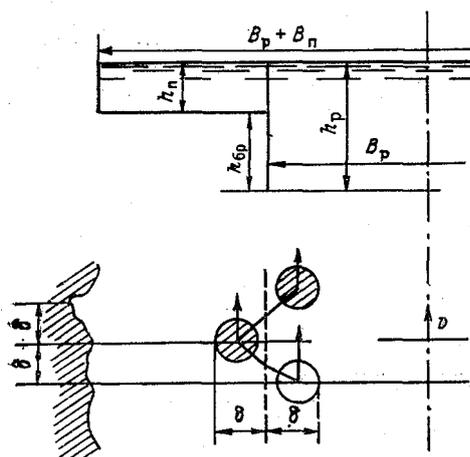


Рис. 2.14. Механизм массообмена жидкости на границе русла и поймы.

1) относительный градиент средних скоростей в русле и пойме

$$\delta_v = (v_p - v_n) / v_p,$$

2) отношение средних скоростей руслового и пойменного потоков

$$\alpha_v = v_p / v_n = 1 / (1 - \delta_v).$$

Зависимость (2.36) применяют отдельно для расчета средних скоростей течения в русле (при этом принимают $\alpha_v = 1$ и знак «плюс» в знаменателе) и на пойме (в знаменателе знак «минус»; если пойма односторонняя, опускают множитель 2).

Значения φ , δ_v и α_v отражают особенности взаимодействия руслового и пойменного потоков. Известна детальная типизация форм этого взаимодействия [17], основанная на достаточно полных данных о структуре течений и положении их динамических осей. Для рассматриваемой задачи структуру течений можно разделить на два основных вида:

1) А — параллельное или близкое к нему положение динамических осей руслового и пойменного потоков,

2) Б — сложное взаимодействие разнонаправленных течений в русле и на пойме.

По данным наблюдений в 35 пойменных створах равнинных рек удалось оценить значения φ и δ_v для взаимодействия:

по схеме А

$$\delta_v = 1 - 0,86 (h_n/h_p)^{2/3} (n_p/n_n), \quad \varphi = 0,05;$$

по схеме Б

$$\delta_v = 1 - 1,32 (h_n/h_p)^{2/3} (n_p/n_n), \quad \varphi = 0,5.$$

Из физических соображений ясно, что при достаточно больших значениях h_n/h_p значение $\delta_v \rightarrow 0$, т. е. исчезает внутреннее расчленение руслового и пойменного потоков.

Точность расчетов по формуле (2.36) оценена среднеквадратическим значением погрешности в пределах 15... 30 %. Эта формула получена при $n_p \leq n_n$ — наиболее часто встречающемся явлении торможения руслового и ускорения пойменного потоков. При $n_p > n_n$ возможно увеличение скоростей течения в русле по сравнению с условием отсутствия поймы. В общем случае реальная картина течения в пойме и русле значительно сложнее существующих схем. Так, наряду с закономерностями кинематического эффекта — уменьшением, а затем увеличением скорости потока в основном русле, при некоторых условиях затопления поймы средняя скорость руслового потока может необратимо затухать (см. рис. 2.13).

2.6. Колебательные решения модельных уравнений гидравлики

Возможности появления периодических решений можно также выявить на основе анализа некоторых модельных уравнений гидравлики, например уравнения (1.7). Путем ряда преобразований его можно свести к линейному уравнению второго порядка, относительно свойств решений которого можно сделать некоторые выводы, опираясь на теорию Штурма [73].

С учетом подстановки $Q = -\{u + 0,5 [f_2(t) + f_1'(t)/f_1(t)]\}/f_1(t)$ получаем

$$du/dt = -u^2 + R_1(t),$$

где

$$R_1(t) = 0,25 [f_2(t) + f_1'(t)/f_1(t)]^2 - \\ - 0,5 [f_2'(t) + f_1''(t)/f_1(t)] - f_1'(t)/f_1^2(t) - f_3(t) f_1(t).$$

Введя новую переменную по формуле $u = y'/y$, получаем

$$y'' - R_1(t) y = 0. \quad (2.37)$$

Колебательный характер решения этого уравнения определяется знаком $R_1(t)$. Чтобы оно не колебалось, необходимо выполнение на рассматриваемом интервале времени условия $R_1(t) \geq 0$. Так как

$$R_1(t) = 0,25 \left(\frac{2\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{[-g/(FC^2R)]'}{-g/(FC^2R)} \right)^2 - 0,5 \left[\left(\frac{2\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial t} \right)' \right] + \\ + \frac{[-g/(FC^2R)]''}{-g/(FC^2R)} - \left(\frac{[-g/(FC^2R)]'}{-g/(FC^2R)} \right)^2 + IgF [g/(FC^2R)],$$

то указанное неравенство для $R_1(t)$ практически всегда выполняется (основным слагаемым в формуле для $R_1(t)$ является последнее), т. е. решение не имеет общих точек с осью $0t$.

Однако если рассматривать характер поведения отклонений расхода воды q от некоторого квазиустановившегося значения Q_0 , то может быть колебание. При условии, что $i_0 \approx Q^2/K^2$, $\partial Q_0/\partial t \ll \partial q/\partial t$, и при аналогичных подстановках получаем идентичное однородное уравнение второго порядка, основное слагаемое коэффициента R_1^* которого $(I - i_0)g^2/(C^2R)$, однако, допускает колеблющиеся решения. Можно указать конкретные числовые значения оценок расстояний между последовательными нулями решений $(\pi/\sqrt{R_1^*})$, если известны наибольшее и наименьшее значения R_1^* в интервале $[0, T]$. Если принять во внимание формулу (2.4), то при аналогичном рассмотрении поведения малых отклонений расхода воды в уравнениях получим члены с «отрицательным» трением, обеспечивающие существование колебаний при $I > i_0$. Но так как рассматриваемая система не ограничена линейной трактовкой, то при заметных отклонениях q решающее действие оказывает нелинейность (в противном случае был бы нарастающий осцилляционный процесс).

Проиллюстрируем возможность появления отрицательного трения. Если записать (2.4) в виде

$$\lambda_{\text{неуст}} \approx \lambda_{\text{уст}} - 2,5\lambda_{\text{уст}}\bar{N}$$

и умножить $\lambda_{\text{неуст}}$ на $(U_0 + U)^2/(2Rg)$, где U — отклонение скорости от квазиустановившегося значения U_0 , то появляется отрицательный член

$$-2,5U_0^2\lambda_{\text{уст}}\bar{N}/(2Rg) \sim -(dU/dt)/(gz),$$

где $z \approx k/(U_0\lambda_{\text{уст}})$.

Таким образом, на квазистационарный расход воды $Q_0(t)$ наложатся высокочастотные по сравнению с частотой изменения $Q_0(t)$ колебания. Если продолжительность измерения расхода воды меньше периода этих волн, что может быть при ускоренных, например, ультразвуковых способах измерения, то погрешность измерений из-за ее случайного характера (последнее связано с тем, что заранее неизвестно, какую часть периода занимает интервал измерения) следует рассматривать как аддитивную составляющую

щую, расширяющую полосу погрешностей определения расхода воды. Известно, что продолжительность измерения должна быть меньше времени существенного изменения расхода воды в створе, но, как следует из изложенного, она должна быть больше периода T_K рассматриваемых колебаний, т. е. $T_{из} > 2\pi CR^{0,5}/[g(I - i_0)^{0,5}]$.

На самом деле, переходя от переменной y к u , а затем к Q , точнее, к q , T_K надо несколько изменить. Если $y \sim \sin(\omega t)$, то

$$u \sim \omega \cos(\omega t) / \sin(\omega t) = \omega \operatorname{ctg}(\omega t),$$

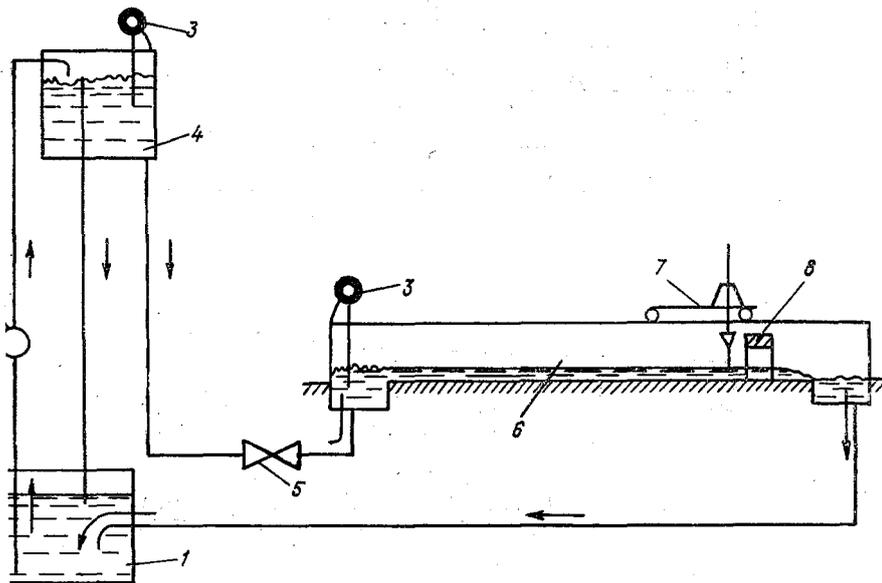


Рис. 2.15. Экспериментальная установка.

— водосборный резервуар; 2 — насос; 3 — емкостный уровнемер; 4 — напорный резервуар;
— задвижка; 6 — русловая площадка; 7 — тензометрический преобразователь; 8 — подпорная стенка.

. е. T_K уменьшается в 2 раза. Легко проверить, что для обычных ечных условий $T_K \approx 10$ мин. При $I \rightarrow i_0$ режим движения становится равномерным, т. е. период колебаний формально стремится к бесконечности.

Многочисленные данные натурных наблюдений, приведенные в работе [73], убеждают в реальности подобного явления (хотя идет дискуссия о его природе [37]). Эти данные указывают на то, что характер рассматриваемых колебательных процессов устойчив только в условиях $I > i_0$. Об этом свидетельствуют также результаты измерений на экспериментальной установке (рис. 2.15) лаборатории водных исследований ЛГМИ со специально разработанным тензометрическим преобразователем с последующей обработкой их на микроЭВМ [78]. Так как установка представляет собой механическую систему, в которой возможны низкочастот-

ные колебания совершенно другого происхождения, то одновременно обработаны данные измерений колебания уровня воды в напорном резервуаре и у входа на русловую площадку. Вычис-

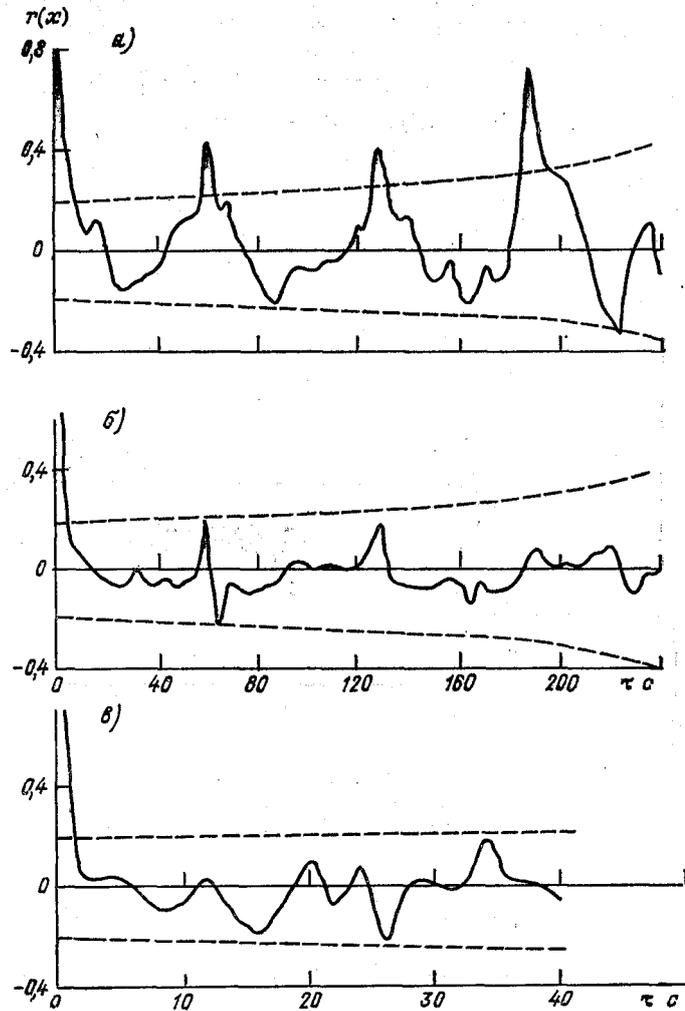


Рис. 2.16. Типичные нормированные автокорреляционные функции.

a — кривая спада (правое отверстие, поверхность), *б* — местный подпор у подпорной стенки, *в* — измерения уровня воды в напорном резервуаре.

ленные автокорреляционные функции приведены на рис. 2.16, и котором видно, что на 10 %-м уровне значимости периодичность отмечена только в условиях кривой спада свободной поверхности. В условиях подпора также выявлены периоды, но на порядо

меньше и соответствующие, кстати, периодам колебаний уровней воды в резервуаре и у входа на русловую площадку. В этих случаях ординаты автокорреляционных функций незначимые.

Аналогично можно проанализировать «колебания» по продольной координате. Запишем уравнение неравномерного движения

$$I = U^2/(C^2R) + [\alpha/(2g)](dU^2/dx). \quad (2.38)$$

Представим скорость в виде суммы

$$U = U_0 + u, \quad (2.39)$$

где U_0 — значение скорости, соответствующее квазиравномерному режиму; u — отклонение скорости от этого значения.

При подстановке (2.39) в (2.38) получим

$$I = \frac{U_0^2}{C^2R} + \frac{2U_0u}{C^2R} + \frac{u^2}{C^2R} + \frac{\alpha}{2g} \frac{dU_0^2}{dx} + \frac{\alpha}{2g} \frac{2U_0 du}{dx} + \frac{\alpha}{2g} \frac{du^2}{dx}. \quad (2.40)$$

Так как U_0 соответствует квазиравномерному режиму, то $dU_0^2/dx \approx 0$. Поэтому четвертое слагаемое в (2.40) равно нулю. (Это допущение несущественно и в дальнейшем его можно даже снять, так как этим членом можно учитывать влияние морфологических расширений и сужений русла на периодические образования). Считая, что $U_0 \gg u$, можно пренебречь и шестым слагаемым, как величиной более высокого порядка малости по сравнению с другими слагаемыми (2.40). Первое слагаемое можно считать равным уклону дна (или уклону поверхности потока в квазиравномерном режиме), т. е. $U_0^2/(C^2R) \approx i_0$.

С учетом изложенного уравнение (2.40) примет вид

$$du/dx = f_1 u^2 + f_2 u + f_3, \quad (2.41)$$

где

$$f_1 = -\frac{g}{\alpha U_0 C^2 R}, \quad f_2 = -\frac{2U_0}{C^2 R} \frac{g}{\alpha U_0}, \quad f_3 = (I - i_0) \frac{g}{\alpha U_0}.$$

В уравнении (2.41) неизвестная функция — скорость u , независимый аргумент — продольная координата x , остальные параметры предположены известными из измерений. По аналогии с изложенным уравнение (2.41) путем подстановок приведем к уравнению

$$d^2y/dx^2 - k(x)y = 0. \quad (2.42)$$

Колебательный характер решения (2.42) определяется знаком коэффициента $k(x)$. Основное слагаемое, входящее в выражение для $k(x)$, имеет вид

$$k(x) \approx -(I - i_0) \frac{g}{\alpha U_0} \left(-\frac{g}{\alpha U_0} \frac{1}{C^2 R} \right) = (I - i_0) \left(\frac{g}{\alpha U_0} \right)^2 \left(\frac{1}{C^2 R} \right).$$

Расстояние между нулями решений, т. е. полупериод $L/2$, определяется выражением

$$L/2 = \pi/\sqrt{k} = \pi CR^{0.5} \alpha U_0 / (g \sqrt{I - i_0}).$$

Это полупериод для переменной y . Переходя к u , получаем, что это фактически и есть период для u . Пусть $C=50 \text{ м}^{0.5}/\text{с}$, $R=9 \text{ м}$, $\alpha=1$, $U_0=1 \text{ м/с}$, $I - i_0=0,001$, тогда $L \approx 3 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 33 / 20 = 693 \text{ м}$.

Таким образом,

$$U = U_0 + \sin(\omega x),$$

но точнее было бы принять не $\sin(\omega x)$, а $\omega \text{ctg}(\omega x)$. Так как из уравнения неразрывности следует, что $\partial Q / \partial x = 0$, т. е. $Q = \text{const} = UT$, то для периодических расширений и сужений площади поперечного сечения русел получаем формулу

$$F = \text{const} / [U_0 + \sin(\omega x)].$$

2.7. Статистическое обобщение, появление квазипериодичности пульсационных изменений расходов воды

Так как колебания образуются в реальном турбулентном потоке, где гидравлические сопротивления и морфометрические характеристики флюктуируют, например, из-за размывов или переноса донных отложений, то влияние неучтенных случайных членов может быть заметным. Стохастическим аналогом уравнения для y будет система

$$\dot{y} = x, \quad \dot{x} = -\omega_0^2 y - \omega_0^2 z(t) y, \quad (2.43)$$

где $\omega_0 = \sqrt{R_1^*}$, $z(t)$ — случайная функция времени; с такими, например, начальными условиями $y(0) = 0$, $x(0) = 1$.

При отсутствии флюктуаций для средних значений $y(t)$ и $x(t)$ существует решение:

$$\langle y(t) \rangle = \sin(\omega_0 t) / \omega_0, \quad \langle x(t) \rangle = \cos(\omega_0 t).$$

Для моментов второго порядка (если ограничиться рассмотрением только уравнений для моментов, то не надо задавать полностью распределение вероятности для случайного процесса) система имеет вид [70]:

$$\begin{aligned} d \langle y^2 \rangle / dt &= 2 \langle xy \rangle, \\ d \langle yx \rangle / dt &= \langle x^2 \rangle - \omega_0^2 \langle y^2 \rangle, \\ d \langle x^2 \rangle / dt &= -2\omega_0^2 \langle xy \rangle + 2\mu^2 \omega_0^4 \langle y^2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.44)$$

с условием $\langle y^2 \rangle = \langle yx \rangle = 0$ и $\langle x^2 \rangle = 1$ при $t=0$.

Если не выполнено соотношение $\mu^2 \omega_0^2 \tau_0 \ll 1$, где μ^2 — интенсивность флюктуации, τ_0 — радиус корреляции для корреляцион-

ной функции $\langle z(t)z(t+\tau) \rangle$, то система за время τ_0 может параметрически возбудиться. При слабых флуктуациях система (2.44) содержит члены, растущие с инкрементом $\sigma = \omega_0^2 \mu^2$, что ведет к увеличению погрешности δ , которую можно уменьшить, выбирая $T_{\text{н}} > T_{\text{к}}$, однако из-за наличия процесса $z(t)$ полностью избавиться от δ нельзя.

Введем новые переменные — амплитуду A и фазу колебания φ [70] — по формулам:

$$y(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad x(t) = \omega_0 A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (2.45)$$

Введя для амплитуды выражение $A = \exp\{u\}$ и подставив (2.45) в (2.43), получим

$$\dot{\varphi} = \omega_0 z(t) \sin^2 \Psi, \quad \dot{u} = -0,5 \omega_0 z(t) \sin 2\Psi,$$

где $\Psi = \omega_0 t + \varphi$.

Для совместной плотности вероятности $p_t(u, \varphi) = \langle \delta[u(t) - u] \delta[\varphi(t) - \varphi] \rangle$ после осреднения по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ [70] получим

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{\mu^2 \omega_0^2}{8} \frac{\partial^2 p_t}{\partial u^2} - \frac{\mu^2 \omega_0^2}{4} \frac{\partial p_t}{\partial u} + \frac{3}{8} \mu^2 \omega_0^2 \frac{\partial^2 p_t}{\partial \varphi^2}. \quad (2.46)$$

Решение уравнения (2.46) при начальных условиях $p_0(u, \varphi) = \delta(\varphi) \delta(u - u_0)$ и $u_0 = \ln(1/\omega_0)$ имеет вид [70]:

$$p_t(\varphi) = \left(1 / \sqrt{\frac{3}{2} \pi \mu^2 \omega_0^2 t} \right) \exp \left[-\varphi^2 / \left(\frac{3}{2} \mu^2 \omega_0^2 t \right) \right],$$

$$p_t(u) = \left(1 / \sqrt{\frac{\pi}{2} \mu^2 \omega_0^2 t} \right) \exp \left[-\left(u - u_0 - \frac{1}{4} \mu \omega_0^2 t \right)^2 / \left(\frac{1}{2} \mu^2 \omega_0^4 t \right) \right].$$

Таким образом, осреднение по периоду не исключает погрешности, связанные с наличием $z(t)$. Так как решение системы (2.44) является функционалом от случайного процесса $z(t)$ при $0 \leq \tau \leq t$, а $z(t)$ из-за деформируемости дна меняется в соответствии с характером изменения расхода воды, то между некоторыми видами периодических деформаций русла и рассмотренными колебаниями расхода воды существует взаимосвязь.

В данном варианте стохастическое обобщение связано с искусственным введением в математическую модель случайного процесса $z(t)$. Однако можно показать, что стохастичность внутренне присуща речному потоку, что связано с неустойчивостью движения. Если возмущение равномерного течения со временем затухает, то поток будет устойчив. Но если при определенных ситуациях возмущение нарастает, равномерное движение неустойчиво. Бывают различные типы неустойчивости. Возмущение U может, возрастая, перемещаться вниз по течению ($\lim_{\tau \rightarrow \infty} U(x_0, \tau) \rightarrow 0$), уходя из рассматриваемой области (конвективная неустойчивость). Но может быть ситуация, когда возмущения во всех

точках x_i рассматриваемой области растут ($\lim_{\tau \rightarrow \infty} U(x_i, \tau) \rightarrow \infty$) (абсолютная неустойчивость). Теоретический анализ позволил установить критерий устойчивости

$$1/Fr > [(h/K)(\partial K/\partial h)]^2 - 2\alpha(h/K)(\partial K/\partial h) + \alpha, \quad (2.47)$$

который определяется числом Фруда. При относительно малых его значениях поток устойчив. Однако этот вывод справедлив, если допустить правомерность классических формул для сопротивлений. К чему (в отношении устойчивости равномерного режима) приведет учет влияния инерционности на гидравлические сопротивления? Ответ на этот вопрос достаточно удивителен и противоречит существующим представлениям об устойчивости равномерного режима движения.

Обычный путь исследования устойчивости состоит в следующем [28, 66]. Уравнения Сен-Венана линеаризуют относительно характеристик равномерного режима, члены высшего порядка малости отбрасывают и исследуют периодическое возмущение полученного линейного уравнения, для чего применяют соответствующий алгебраический аппарат, в частности теорему Гурвица. Не останавливаясь на этом подробно, заметим, что задача в конечном итоге сводится к исследованию перемен знака в рядах чисел: $1, \nabla_2, \nabla_4, \dots, \nabla_i$, где ∇_i — определители, составленные из некоторого алгебраического многочлена. Если не учитывать влияния N на C , т. е. принять обычные для гидравлики зависимости вида $C = hv/n$, то

$$\nabla_2 = 2i/\sqrt{Fr},$$

$$\nabla_4 = 4i^2\omega^2(1/Fr - \mu^2 + 2\alpha\mu - \alpha),$$

где i — уклон потока в равномерном режиме, ω — частота, $\mu = (h/K)(\partial K/\partial h)$.

Так как всегда $\nabla_2 > 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы $\nabla_4 > 0$, что приводит к критерию (2.47). Однако если принять в соответствии с (2.4), например, $C_{неуст} = C_{уст}(1 + \gamma N)$, где γ — коэффициент, то [62, 71]

$$\nabla_2 = (2i/\sqrt{Fr}) \left(1 - \frac{i\gamma}{Fr}\right),$$

$$\nabla_4 = 4i^2\omega^2(1 - i\gamma/Fr)[1/Fr - \mu^2 + 2\alpha\mu - \alpha - i\gamma/Fr - (i\gamma/Fr)\mu - (i\gamma/Fr)\mu^2].$$

При $\gamma = 0$ получаем (2.47). Если, например, $\gamma = 60$ (это подтверждается данными по р. Тверце и соответствует 10 %-му изменению $C_{неуст}$ по сравнению с $C_{уст}$), то при $i = 0,001$ и $Fr \approx 0,05$ получаем $i\gamma/Fr > 1$, $\nabla_2 < 0$, $\nabla_4 < 0$. Но так как в ряду $1, \nabla_2, \nabla_4$ все-таки есть одна переменна знака при переходе от 1 к ∇_2 , то оказывается, что поток всегда конвективно неустойчив по отношению к возмущению начальных условий. Получается, что равно-

мерный режим всегда неустойчив, и любое возмущение в любой ситуации возрастает по длине потока, что противоречит опыту.

Из этого вывода следуют две вещи. Либо нет никакой зависимости $C=f(N)$, т. е. $\partial C/\partial N=0$ (что, в свою очередь, противоречит экспериментальным данным), либо в природе вообще не существует никакого равномерного режима. Что же тогда наблюдают в потоке реально? Чтобы ответить на этот вопрос, надо обращаться к нелинейным уравнениям гидравлики. (Забегая вперед, можно

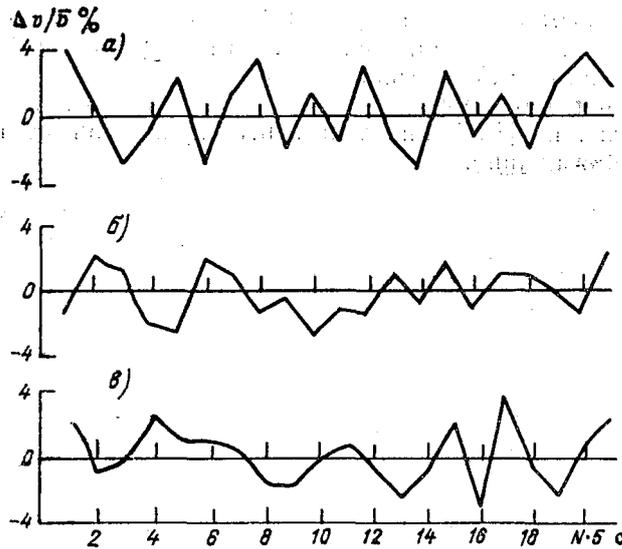


Рис. 2.17. Пульсации скорости.

$a - \bar{v} = 2,4$ м/с, $\sigma/\bar{v} = 3,3\%$, $h = 0,22H$; $б - \bar{v} = 2,2$ м/с, $\sigma/\bar{v} = 3,2\%$, $h = 0,6H$; $в - \bar{v} = 1,98$ м/с, $\sigma/\bar{v} = 3,6\%$, $h = 0,78H$.

сказать, что река «дрожит» и понятие равномерного режима есть лишь грубая идеализация.)

Ранее установлено, что одним из возможных условий возникновения низкочастотных пульсаций расхода воды является выполнение равенства

$$dC/dh + [i/(2U^2)]C^3 = 0. \quad (2.48)$$

Так как $iC^3/(2U^2) > 0$, то ясно, что необходимо, чтобы $dC/dh < 0$, т. е. нужно отклонение от классических закономерностей (это часто имеет место). Однако при стохастической трактовке соотношения (2.48) (точнее — его линейного приближения) получим (выкладки опускаем), что для математического ожидания коэффициента Шези C это соотношение может, в принципе, существовать и при $dC/dh > 0$ в случае высокой интенсивности шума, т. е. вариаций величины, пропорциональной $i/(2U^2)$. Последнее возможно, когда сопротивление или скорость сильно

меняются при незначительном изменении глубины. При вероятностной интерпретации уравнения (2.48) от глубины зависит не сам коэффициент Шези, а плотность вероятности его распределения. Так как это уравнение нелинейное, то возможны двухмодальные распределения, при которых равновероятны разные значения сопротивлений при одной и той же глубине (вероятностная трактовка сопротивлений описана в работе [73]).

Конечно, «дрожание» реки экспериментально установить сложно. Однако появление точных ультразвуковых расходомеров делает это возможным. На рис. 2.17, взятом из работы [135], видны случайные колебания скорости амплитудой 1,5 % в открытом канале при относительной погрешности измерений 0,5 %. Так как измерения проведены в условиях, близких к «равномерному» движению [135], низкочастотные пульсации не выделены, но осцилляция налицо.

ГЛАВА 3

КРИТЕРИАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РУСЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Руслоформирующий эффект половодий и паводков

Переформирование речных русел, сложенных из размываемых грунтов, происходит непрерывно в условиях изменяющихся расходов воды. В практическом отношении важно выделить процессы, определяющие морфологический облик русла. Так появилось понятие о руслоформирующих или доминирующих расходах воды. Естественно установить критериальные характеристики для оценки руслоформирующих расходов воды (РФР). Одна из первых попыток решения задачи принадлежит А. Шаффернаку, но наиболее распространена методика расчета руслоформирующих расходов воды, предложенная Маккавеевым [93]. В ней в качестве критерия для выделения диапазона руслоформирующих расходов воды использован комплекс, эквивалентный объему стока наносов:

$$D = Q^n P I, \quad (3.1)$$

где Q — средний ежедневный расход воды в интервале; P — вероятность его наступления за многолетний период; n — показатель степени, уточняемый по данным наблюдений; I — уклон свободной поверхности, соответствующий данному интервалу расходов воды.

К руслоформирующим относят расходы воды, которым соответствует максимум D по (3.1). В зависимости от морфологии русла и особенностей водного режима кривые (3.1) приобретают различные очертания: с одним максимумом — для беспойменных русел, многомодальные — при наличии пойм и сложных гидрографов стока. Показатель степени колеблется от 2 для рек с песчаным ложем до 3 — с галечно-валунным.

При правильном подборе и обработке данных применение комплекса (3.1) достаточно эффективно, о чем свидетельствует опыт проектирования выправительных сооружений и дноуглубительных работ на судоходных реках [43, 93]. Вместе с тем нельзя не видеть методологические недостатки изложенного подхода к определению РФР. Прежде всего существует статистическая некорректность интерпретации комплекса D , основанная на группировке ежедневных расходов воды по интервалам вне зависимости от их принадлежности к различным фазам водного режима. Между тем, руслоформирующий эффект одних и тех же расходов воды существенно различен на подъеме и спаде волны половодья или на его пике, а при достаточно малых расходах воды, при которых средние скорости течения v меньше размывающих v_p , русло

вообще не деформируется. Иными словами, следует соблюдать условие фазовой однородности изучаемой статистической совокупности.

Другой недостаток методики обнаружен при оценке руслоформирующей способности максимумов-максимумов или близких к ним расходов воды. В многолетнем разрезе им соответствуют исчезающе малые повторяемости $P \rightarrow 0$ и, следовательно, $D \rightarrow 0$. Но в природе именно высокие паводки и половодья наиболее трансформируют речные русла.

И, наконец, представляется неправомерным объединять в одном комплексе D гидрологические характеристики Q и P , подчиненные законам географической зональности, и локальные факторы, к которым относятся параметры n и I . Последнее обстоятельство ставит под сомнение саму целесообразность каких-либо территориально-географических обобщений данных по РФР.

В работе [59] намечен иной подход к определению РФР, который развит в данной работе на основе преемственного использования принятых в гидрологии суши моделей гидрографа стока, а также характеристик элементов водного и руслового режима.

Первостепенное значение имеет выделение фаз транспорта наносов как исходной предпосылки для определения РФР. Эти фазы соответствуют условиям размыва дна и грядобразования в малоизвилистом параболическом русле, сложенном несвязными тунтами. Интенсивность и формы транспорта влекомых наносов зависят от отношения $\beta = v/v_n$, где v — средняя, а v_n — неразмывающая скорости потока. Если представить v по формуле Шези с коэффициентом C , согласно предложению Доу Го-Женя, как

$$C = 4,75 \sqrt{g} (h/d)^{1/4},$$

а неразмывающую скорость — по зависимости Б. И. Студеничкикова

$$v_n = 1,15 \sqrt{g} (hd)^{1/4},$$

то

$$\beta = 4,12 (h/d)^{3/4} \sqrt{I}, \quad (3.2)$$

где d — средний диаметр частиц грунта.

Из соотношения, предложенного Б. А. Бахметевым, можно получить связь максимальных за время паводка расходов воды Q_{\max} и текущих значений Q с соответствующими средними глубинами потока h_{\max} и h :

$$Q/Q_{\max} = (h/h_{\max})^x. \quad (3.3)$$

Для параболического русла $x=2$. Введем относительный расход воды $q = Q/Q_{\max}$ и непосредственно из (3.3) найдем

$$h = h_{\max} q^{0,5}.$$

В дальнейшем примем во внимание, что движение речного потока приближенно следует закономерностям кинематической

волны, при которой сохраняется относительное постоянство уклона свободной поверхности I . Тогда для отношения β_{\max}/β соответственно при максимальном и промежуточном наполнениях русла, согласно (3.2), будем иметь

$$\beta/\beta_{\max} = q^{3/16}. \quad (3.4)$$

В качестве нормирующей величины назначим средний многолетний максимальный расход воды Q_{\max} и установим критериальные характеристики для выделения фаз транспорта наносов.

Естественно предположить, что при Q_{\max} ($q=1$) существуют условия для наибольшего развития гряд, что, по опытным данным, соответствует значению $\beta_{\max} \approx 2$. Массовое движение влекомых наносов начинается при средней скорости потока, равной размывающей, которой соответствует $\beta = 1,4$. Следовательно, согласно (3.4), критериальное (пороговое) значение относительного расхода воды

$$q_k = (1,4/2)^{16/3} = 0,15. \quad (3.5)$$

Пороговый критерий (3.5) позволяет выделить активную фазу среднего многолетнего паводка или половодья на основе неравенства

$$0,15 \leq q_{\phi} \leq 1.$$

Соотношение (3.5) — основная предпосылка, характеризующая руслоформирующую способность потока. Процедура определения РФР обычно сводят к ряду графоаналитических приемов [43, 93]. Аналитическое решение можно получить, если использовать математические модели гидрографа стока. Одна из них предложена Г. А. Алексеевым и входит в СНиП 2.01.14-83:

$$Y = Q/Q_{\max} = 10^{[-a(1-\tau)^2]/1}, \quad (3.6)$$

где $\tau = t/T_{\Pi}$; T_{Π} — продолжительность подъема паводка; t — текущее время; a — параметр формы гидрографа, генетически связанный с условиями формирования стока.

Уравнение (3.6) описывает собственно паводочную волну и не учитывает начального Q_n и конечного Q_k расходов воды. Их можно учесть с помощью среднего значения, выраженного в долях Q_{\max} :

$$q_0 = 0,5 (Q_n + Q_k)/Q_{\max}.$$

В этом случае ордината гидрографа, описываемого уравнением (3.6), связана с q и q_0 соотношением

$$Y = (q - q_0)/(1 - q_0), \quad (3.7)$$

где $q = Q/Q_{\max}$.

Гидрограф, построенный по уравнению (3.6) с учетом (3.7) при $a=0,8$, приведен на рис. 3.1 б.

Уравнение (3.6) позволяет определить относительную продолжительность τ_δ какого-либо интервала δ_Y . Для этого достаточно прологарифмировать (3.6), решить его относительно τ и найти дифференциал полученной функции $\tau(y)$:

$$\tau_{\delta_s} = \left[-0,217 \pm \frac{0,094 \ln Y_s - 0,434a}{\sqrt{0,189 (\ln Y_s)^2 - 1,73a \ln Y_s}} \right] \frac{\delta Y_s}{a Y_s}. \quad (3.8)$$

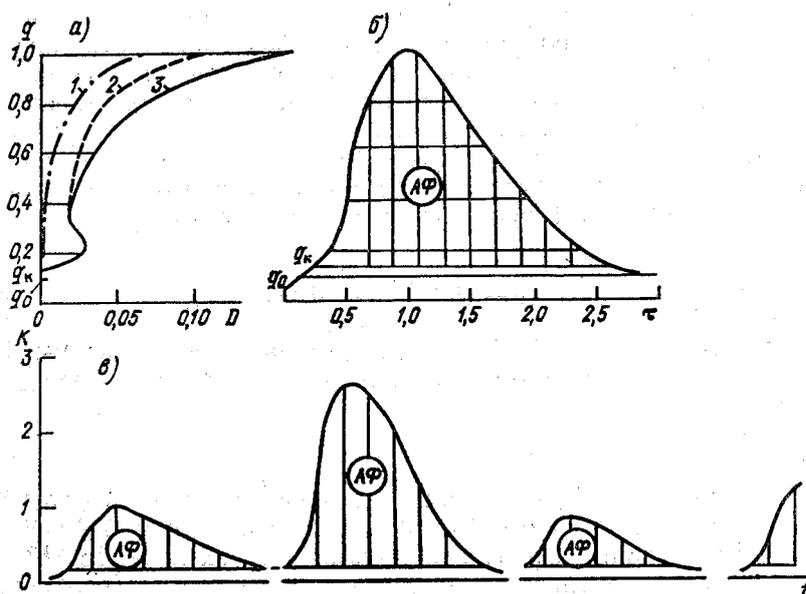


Рис. 3.1. Характеристики руслоформирующей деятельности отдельного половодья (паводка).

a — значение комплекса D в условных единицах (1 — для ветви подъема, 2 — для спада, 3 — суммарные значения), б — средний многолетний гидрограф (АФ — активная фаза); в — многолетний гидрограф паводков и половодий.

В расчетах принят модуль выражения (3.8), причем второй член учитывают дважды: со знаком минус для ветви подъема и со знаком плюс — для спада.

Относительная продолжительность τ_δ определена по интервалам q_δ для всех

$$Y \geq Y_k = (0,15 - q_0)/(1 - q_0).$$

С учетом введенных характеристик и условия $I = \text{const}$ комплекс (3.1) имеет следующий безразмерный вид:

$$D_s = Y_s^2 \tau_{\delta_s}. \quad (3.9)$$

В отличие от (3.1), комплекс D_s не содержит локальные характеристики и на него можно распространить методы гидролого-географического анализа.

Рассмотрим характерную реализацию гидрографа стока при $a=0,80$ и значении расхода воды на пике $Q_{\text{макс}}$. Дискретность разбиения ординаты q_s установлена из того условия, что она не должна перекрывать порогового значения $q_{\text{кр}}=0,15$. Чтобы это требование было выполнено, достаточно положить $q_s=0,05$.

Значения комплекса D_s вычислены по формулам (3.8) и (3.9). График $D(Y_s)$ приведен на рис. 3.1 а. Обращает на себя внимание наличие слабо выраженного максимума в нижней части и отсутствие экстремумов $D(Y_s)$ в средней части амплитуды изменения Y_s . Этот результат, по-видимому, не выражает общей закономерности и соответствует лишь упрощенной форме математической модели гидрографа стока. В реальных условиях может существовать ряд экстремумов $D(Y_s)$, отражающих сложный характер изменения расходов воды в конкретных физико-географических условиях. Но как бы то ни было, надо считать непреложным факт наибольшего воздействия потока на русло при $q_s \rightarrow 1$. Хотя на рис. 3.1 а приведены значения D по фазам паводка (паводка) и суммарное, в общем случае представляется неправомерным суммировать значения комплекса D на подъеме и спаде паводочной волны в силу различной направленности русловых деформаций. Как известно, на подъеме паводка размывается дно плесов и намываются гребни гряд (перекатов), на спаде происходят обратные деформации.

Отдельно взятый средний многолетний гидрограф стока характеризует некоторую типичную ситуацию, но не отражает руслоформирующего эффекта всего спектра паводочных волн за многолетие. Каждая из волн воздействует на русло в течение активной фазы, характеризующейся осредненным расходом воды $Q_{\text{аф}}$. Критерий $q_{\text{кр}} = 0,15$, при котором наступает эта фаза, определен для среднего многолетнего значения $Q_{\text{макс}}$, имеющего модульный коэффициент $K = 1$. Для любого $Q_{\text{макс}}$ за многолетие при $1 \leq K_i \leq 1$, очевидно,

$$q_{\text{кр}i} = 0,15/K_i. \quad (3.10)$$

Осредненный за активную фазу модульный коэффициент равен

$$K_{\text{аф}i} = 0,5(K_i + 0,15). \quad (3.11)$$

Длительность активной фазы $\tau_{\text{аф}i}$ устанавливаются по зависимости (3.9) при

$$Y_{K_i} = (0,15 - q_0)/(K_i - q_0), \quad \delta_{Y_i} = (K_i - 0,15)/(K_i - q_0). \quad (3.12)$$

Руслоформирующий эффект паводков различной мощности можно учесть, если комплекс D отнести к модульным коэффициентам расхода воды $K_{\text{аф}i}$ по (3.11) и продолжительности активной фазы за многолетний период $\tau_{\text{аф}i\text{м}}$ (см. рис. 3.1 в).

Определение характеристики $\tau_{\text{аф},\text{м}}$ в сущности, можно рассматривать как задачу о длительности выброса случайного процесса за пороговый уровень; для ее решения необходимо располагать корреляционными и спектральными функциями гидрографа, что относится к еще мало разработанным разделам гидрологии. Используем другую, более простую, возможность.

Если исходить из того, что длительность половодий и паводков мало зависит от их водности (это условие принято в СНиП 2.01.14-83), то общую за многолетие относительную длительность активных фаз для каждого K_i устанавливают из очевидной зависимости

$$\tau_{\text{аф},\text{м}} = \tau_{\text{аф},i} p(K_i), \quad (3.13)$$

где $p(K_i)$ — плотность вероятности наступления максимальных расходов, соответствующих K_i .

Эти предпосылки позволяют интерпретировать комплекс D для многолетнего периода в следующем виде:

$$D(K_i) = K_{\text{аф},i}^2 \tau_{\text{аф},i} p(K_i). \quad (3.14)$$

Особенность выражения (3.14) состоит в том, что эффект руслоформирования представлен в виде функции основных гидрологических характеристик, чего ранее не удавалось осуществить.

Для определения $D_{\text{макс}}$ целесообразно использовать графоаналитический прием: вычислить $\tau_{\text{аф},i}$ по (3.13) с учетом (3.8) и (3.12); плотность вероятности $p(K_i)$ установить непосредственно по данным наблюдений, представленным в виде гистограммы K_i , и, наконец, по графику функции (3.14) определить экстремум K_0 и Q_0 , которому соответствует $D_{\text{макс}}$.

На рис. 3.2 приведены кривые $D(K_i)$ для двух створов, различающихся значениями и показателями изменчивости максимальных расходов воды:

- 1) р. Дон — г. Калач: $\bar{Q}_{\text{макс}} = 5483 \text{ м}^3/\text{с}$, $C_v = 0,53$;
- 2) р. Волга — г. Нижний Новгород, $Q_{\text{макс}} = 19500 \text{ м}^3/\text{с}$, $C_v = 0,31$.

По рис. 3.2 установлено, что $D_{\text{макс}}$ наблюдается при $K_0 = 2$ для Дона и при $K_0 = 1,5$ — для Волги. Этим значениям соответствует обеспеченность около 1 %.

Критерий $D_{\text{макс}}$ относится не к отдельно взятым расходам воды Q_0 , а в целом к активной фазе паводочной волны и, следовательно, он характеризует так называемые доминирующие паводки или половодья (ДП), превосходящие все другие по объему транспорта наносов.

Что касается осредненных по активной фазе модульных коэффициентов расходов воды, то, согласно (3.11), $K_{\text{аф}} = 1,07$ для Дона и $K_{\text{аф}} = 0,9$ для Волги. Иными словами, они близки к средним многолетним максимумам. Руслоформирующий эффект ДП создается совокупным воздействием расходов воды во всей активной

фазе, и, следовательно, его прежде всего надо отнести к расходам воды $\bar{Q}_{аф}$. В беспойменных руслах им соответствуют уровни переломов уклона берега и нижней кромки постоянной растительности [167]. В пойменных створах при расходах воды $\bar{Q}_{аф}$ уровни воды достигают бровок главного русла. По данным Н. Б. Барышникова [17], гребни прирусловых валов на равнинных реках зата-

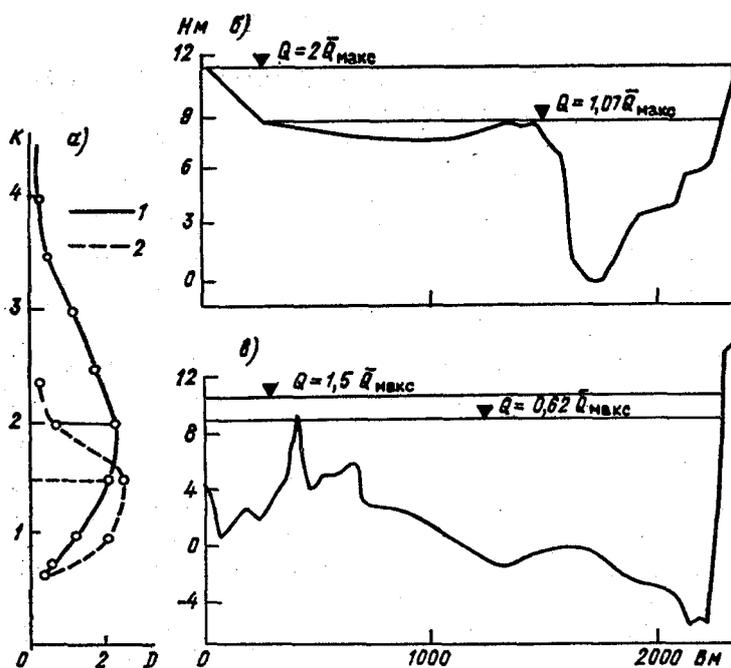


Рис. 3.2. Характеристики руслоформирующей деятельности паводков за многолетие.

а — изменение комплекса D за многолетие и определение его критерильных значений (в условных единицах) для Дона (1) и Волги (2); б, в — поперечные сечения русла и поймы Дона выше г. Калач и Волги около г. Нижнего Новгорода соответственно.

пливаются с повторяемостью 36—42 %, что как раз соответствует обеспеченности расходов воды $\bar{Q}_{аф}$. Таким образом, собственно руслоформирующими являются руслонаполняющие расходы воды.

Что происходит в диапазоне наибольших расходов воды, близких к $Q_а$?

Согласно наиболее распространенной гипотезе руслоформирования, речное русло представляет собой результат многовековой разработки первоначального эрозионного вреза. Часть долины за его пределами образует прирусловую пойму, затопляемую при максимальных расходах воды, близких к $Q_а$. Таким представляется типичный для равнинных и предгорных рек профиль русла с прирусловой поймой. Его очертания соответствуют уравнению

кривой, обеспечивающей минимум диссипации энергии при движении потока [86].

Таким образом, расход воды Q_0 надо отнести к поймоформирующим $Q_{пф}$.

Оценим ориентировочно относительное превышение уровней при расходах воды $Q_{пф}$ над бровками главного русла:

$$\delta h = (K_{пф}/K_{аф})^{0,5} - 1.$$

При значениях $K_0 = 1,5$ и $K_0 = 2$ значение $\delta h = 0,30 \dots 0,36$. Именно при таком затоплении поймы проявляется кинематический эффект взаимодействия пойменного и руслового потоков [46]: средние скорости течения в русле существенно уменьшаются, а в пойме — увеличиваются. Иными словами, в диапазоне $Q_{аф} < Q < Q_0$ поток активно воздействует на пойму. Верхний предел этого диапазона, максимальные расходы воды ДП, правомерно отнести к поймоформирующим.

Итак, критерий $D_{макс}$ позволил выделить ДП, руслоформирующие $Q_{аф}$ и поймоформирующие $Q_{пф}$ расходы воды как его фазы. А какова роль других, более высоких, в частности исторических, паводков и половодий? Несмотря на редкую повторяемость максимумов-максимумов $Q_{м макс}$ или близких к ним расходов воды именно они определяют общие формы русла и значительно долины реки: положение пойменных массивов и русловых емкостей, шаг плесов—перекатов и т. п. Живучесть морфологических последствий редких, но высоких паводков и половодий следует объяснить кумулятивным эффектом их воздействия на русло, при котором при каждом повторении исторической ситуации поддерживаются выработанные ранее макроформы русла, которые мало изменялись под действием других, более низких, паводков и половодий. В то же время при расходах воды, близких к максимумам-максимумам, происходит коренная перестройка мезоформ русла и поймы (размыв берегов и побочней, спрямление меандров, образование пойменных проток и т. п.). Отсюда следует, что максимумы-максимумы $Q_{м макс}$ правомерно считать долиноформирующими или руслотрансформирующими расходами воды.

Применение комплекса D позволяет получить качественную дифференциацию расходов воды по руслоформирующей способности потока. Однако необходима непосредственная количественная оценка руслоформирующего эффекта половодья или паводка и прежде всего — деформаций дна. Как известно, их знак изменяется по фазам водности: при подъеме на перекатах дно намывается, а на плесах — размывается, при спаде знак деформаций изменяется на противоположный. Для практики, в частности, при подготовке водных путей к межени, особенно важна оценка состояния русла: прогноз изменения отметок дна в процессе снижения уровней. Известно, что чем продолжительней их спад, тем благоприятней состояние водного пути (больше транзитные глубины).

Этот фактор особенно проявляется тогда, когда в русло поступает избыточное количество наносов из притоков или от размыва берегов.

Так, р. Обь в верховье на одном из участков протекает вдоль высоких подмываемых обрывов Степного плато; на сравнительно коротком протяжении мутность потока изменяется от 100—200 до 400—500 г/м³ [43]. Аналогичный участок находится в нижнем течении р. Зей, где в 150 км от устья расположены Белые горы —

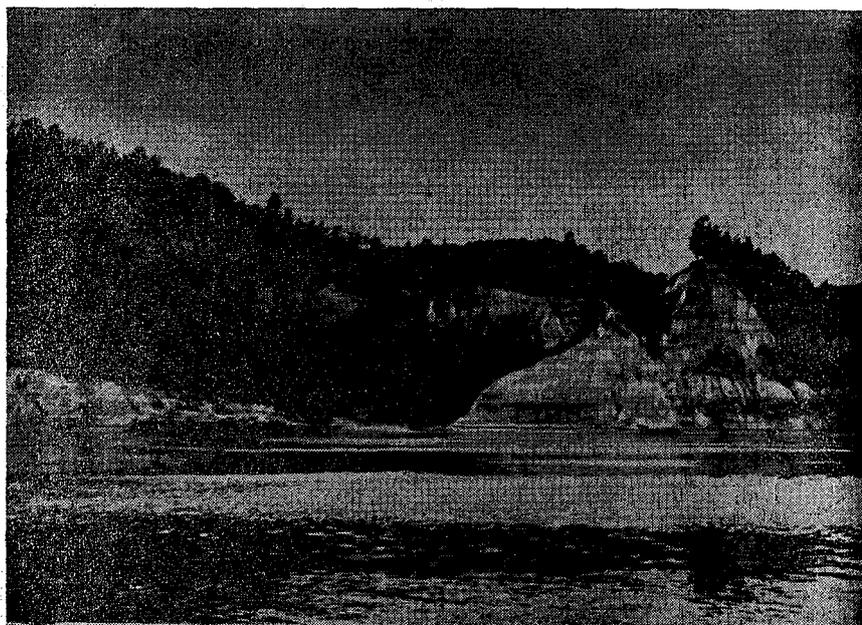


Рис. 3.3. Правый берег р. Зей на участке Белых гор.

обрывистый правый берег высотой более 100 м, сложенный из мелкозернистого песка. При подъеме уровня (а он по времени совпадает с выпадением обильных осадков) происходит подмыв подошвы береговых откосов, оползание и суффозия песчаных масс (рис. 3.3). По данным наблюдений, выполненных в 1955 г. изыскательской партией Амурского Бассейнового управления (начальник партии Б. М. Калинин), с откосов Белых гор площадью 43 га за навигацию в реку поступило более 0,5 млн м³ грунта, составившего основную часть влекомых наносов. Из них образуется цепь перекатов-россыпей, затрудняющих судоходство при спаде уровней¹. Наименьшие глубины при этом прямо зависят от

¹ В последнее время Ленгипроречтранс предлагает отвести речное русло от Белых гор для предотвращения поступления наносов на перекаты в нижнем течении р. Зей.

относительной продолжительности спада $\tau_c = t_c/t_n$ (рис. 3.4). Следует отметить, что увеличение глубин при продолжительном спаде ($\tau_c > 6$) по сравнению с кратковременным ($\tau_c < 1$) составляет около 0,25 м, что соизмеримо с увеличением глубин в среднем на 0,35—0,60 м, достигнутым в результате дноуглубительных работ в объеме до 2 млн м³ грунта в год.

Руслоформирующий эффект паводка можно оценить величиной z — средним повышением дна на перекатах или понижением на плесах по сравнению с исходным его положением в момент времени t_c от начала спада t_0 . Каждому значению z естественно

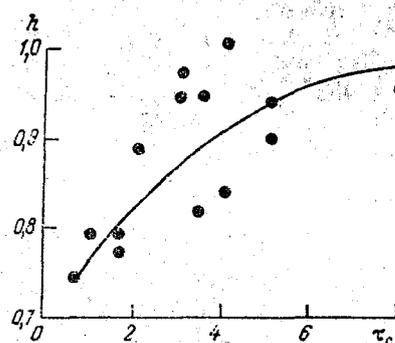


Рис. 3.4. Зависимость транзитной глубины от относительной продолжительности спада уровней в нижнем течении р. Зеи.

сопоставить разность суммарных значений комплекса D за время подъема и прошедшую часть спада:

$$z \sim [D_n(t_0) - D_c(t_c)].$$

Для установления этой связи привлечены данные по 13 створам на деформирующихся участках рек Дона, Волги, Кафирнигана, Куры и др. — всего 100 значений z и соответствующих им комплексов D_n и D_c . Все величины приведены к безразмерной форме посредством нормирования:

$$\tilde{z} = z/h_0,$$

$$\tilde{D}_n = 0,5 (q_n^2 + q_{\text{макс}}^2)/(1 + \tau_c), \quad \tilde{D}_c = 0,5 (q_{\text{макс}}^2 + q_k^2) \tau_c/(1 + \tau_c),$$

$$\tau_c = t_c/T_n, \quad q_{n, k, \text{макс}} = Q_{n, k, \text{макс}}/\bar{Q},$$

где $Q_{n, k, \text{макс}}$ — соответственно начальный, конечный и максимальный расходы воды, характеризующие волну паводка (половодья), \bar{Q} — средний многолетний расход воды; h_0 — глубина на перекате перед началом подъема уровня.

Конец фазы спада половодья (паводка) фиксируют при достижении конечной глубины $h_k = 1,25 h_0$.

В качестве определяющей гидрологической характеристики, от которой зависят деформации дна, принят разностный комплекс

$$x = D_n - D_c, \quad (3.15)$$

который при продолжительном спаде может принимать отрицательные значения. В результате обработки совокупности данных методом наименьших квадратов получено следующее уравнение регрессии:

$$\bar{z} = 0,264 + 0,011x. \quad (3.16)$$

Теснота этой связи характеризуется коэффициентом корреляции $z=0,67$ и среднеквадратической погрешностью $\tilde{\sigma}_p=75\%$. Хотя полученная зависимость не вполне точная, она пригодна для ориентировочной оценки фоновых деформаций дна на спаде половодий и паводков в размываемых руслах равнинных и предгорных рек.

Изложенные результаты существенно отличаются от результатов существующих подходов, и их можно свести к следующим основным положениям.

1. Областью определения РФР является активная фаза волны половодья (паводка), выделяемая посредством порогового критерия q_k .

2. Предлагаемая форма критерия D основана исключительно на гидрологических характеристиках, не содержит локальных элементов и в связи с этим допускает географическое обобщение и картирование.

3. РФР можно определить двумя способами:

1) по характеристикам отдельно взятого половодья (паводка), в частности, на основе типового среднего многолетнего гидрографа стока по критерию D_{\max} ;

2) в результате анализа многолетнего гидрографа максимальных расходов воды и их повторяемости, при этом устанавливаются доминирующий паводок (половодье) и как элементы его активной фазы — многолетние руслоформирующий и поймоформирующий расходы воды.

4. Соответственно максимумам-максимумам расходов воды половодья и паводков определяют руслотрансформирующий расход воды.

5. Интегрально-разностную форму критерия D можно использовать для количественной оценки руслоформирующего эффекта паводков и половодий на основе регрессионных зависимостей, примером которых служит уравнение (3.16).

3.2. Общие формы и статистические характеристики речных русел

«Реки — продукт климата», — утверждал А. И. Воейков, но следовало бы добавить: и тектоники земной коры. Эти факторы как бы задают первоначальное русло развивающейся реки [92, 123]. Водность речного бассейна определяет геометрические размеры русла, а условия рельефа местности и расположение пород с большей или меньшей размываемостью определяют его продольный профиль. Речное русло — конечное звено преобразований

ложбин стока на поверхности земли, ее эрозии, аккумуляции и последующих переотложений продуктов размыва.

Первоначально выпуклый продольный профиль русла эволюционирует так, что при активной глубинной эрозии в низовьях он становится вогнуто-выпуклым по мере продвижения зоны эрозии к водоразделу и, наконец, при его достижении образуется вогнутый профиль на всем протяжении реки. Первоначальное русло после его полного врезания образует террасу хордового типа, «стягивающую» кривую современного продольного профиля [85]. Его фиксированными точками служат исток реки на водоразделе и уровень воды в приемном бассейне — общий базис эрозии. Форму продольного профиля создают вертикальные деформации русла, знак которых изменяется. Врезание русла вызывает понижение уровня и уменьшение уклонов водной поверхности, а значит, и предпосылки к прекращению эрозии на одном отдельно взятом участке. Но на других участках уклоны начинают увеличиваться и развивается эрозия. Ранее существовало понятие о так называемом профиле равновесия, при котором предполагалось полное прекращение эрозии, транспорта и аккумуляции наносов. Такое финальное состояние речного русла в настоящее время считают нереальным [92]. При литологической неоднородности пород, в которые врезается река, вскрываются трудноразмываемые структуры, образующие местные базисы эрозии. В области их влияния глубинная эрозия затухает и усиливаются плановые деформации русла (начинается боковая эрозия). Если продольный профиль развивается в толще аллювиальных отложений, врез реки происходит в виде волн регрессионной глубинной эрозии и сопровождается горизонтальными смещениями русла [52].

Продольный профиль речных долин и русел состоит из блоков пород, сравнительно устойчивых против размыва, и аккумулятивных образований. Такие наиболее общие формы русла в последнее время получили название мегаформ [134]. Они занимают наивысший структурный уровень в иерархии элементов структуры руслового рельефа (табл. 3.1). Мегаформы — наследие предшест-

Таблица 3.1

Структурные уровни и характеристики русловых форм

Структурный уровень	Русловые формы и морфологические элементы	Шаг форм при $Q=1\ 000\ \text{м}^3/\text{с}$ по [134], м
Мегаформа	Сложные излучины, группы перекатов, плесы большого протяжения	20 000—30 000
Макроформа	Излучины, пары плес—перекат, многорукавные русла и поймы	4 000—6 000
Мезоформа	Побочни, ленточные гряды, осередки, меандры	1 000—2 000
Микроформа	Песчаные волны (дюны) Рифели	80—150 10—20

вующих геологических эпох, их контуры значительно предопределены динамикой тектонических движений земной коры и руслоформирующими процессами в прареках. Мегаформы имеют сложную структуру, в которой выделяются серии однопорядковых русловых образований — макроформ, в свою очередь расчленяющихся на мезоформы. Вообще, каждое структурное образование меньшего масштаба вложено или наложено на русловую форму более высокого иерархического уровня.

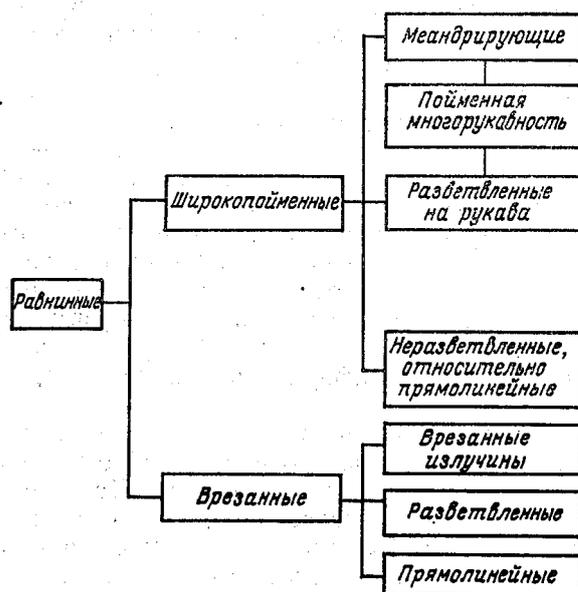


Рис. 3.5. Схема верхних уровней классификации русел равнинных рек по Р. С. Чалову.

Существуют различные классификации форм русла [80, 93, 123], достаточно сложные и противоречивые. В некоторых случаях типизацию общих форм русла отождествляют с типизацией русловых процессов. Так, одна и та же графическая схема различных морфологических образований (рис. 3.5) в книге Н. И. Макавеева и Р. С. Чалова [80] названа схемой типизации речных русел, а в монографии Н. Е. Кондратьева, И. В. Попова и Б. Ф. Снисченко [93] — типизацией руслового процесса. Н. А. Ржаницын рассматривает совокупность русловых процессов в качестве элементов режима русел [123]. По мнению авторов настоящей работы, морфологические типы русел не тождественны русловым процессам, протекающим в них. Следовательно, классификация общих форм русла должна соответствовать более высокому, чем для русловых процессов, структурному уровню морфологических обобщений. Такие классификации в разное время

предложены многими исследователями, особенно детальную разработал Чалов. На рис. 3.5 приведены две верхние классификационные ступени этой классификации, учитывающей наличие или отсутствие пойм, очертания в плане, характер меандрирования и разветвлений.

Во многих источниках приведен комплекс морфометрических показателей, относящихся к различным типам русел [8, 93, 127]. В настоящей работе рассмотрены характеристики только наиболее крупных образований — мега- и макроформ, определяющих общий морфологический облик речных долин и русел. Предположим, что при высоких уровнях движется гидравлически целостный поток в русле, пойме и затопленной части долины, что позволяет рассматривать их как единый русловой комплекс. Разумеется, это не исключает задачи морфологических исследований пойм и гидравлического режима течений в их пределах [17, 56].

Мегаформы образуются на литогенной основе. Они состоят из относительно устойчивых к размыву пород, прорезаемых речным потоком или обнажаемых им из толщи более рыхлых отложений. К мегаформам относятся четкообразные сужения—расширения речных долин и переломные точки продольного профиля. В естественных условиях эволюция мегаформ совершается в геологических масштабах времени. На трассах каналов скрытые в толще грунтов мегаформы обнажаются при строительстве.

Естественно предположить, что распределение мегаформ по длине реки или трассы канала отражает общие закономерности распространения ландшафтных комплексов. Чаще всего их распределение следует логарифмически нормальному закону или закону Пуассона [26]. Чтобы проверить, насколько оправдана эта гипотеза для мегаформ, выполнен статистический анализ продольного профиля Волги от г. Ульяновска до г. Волгограда (длина участка 1200 км), Дона от ст. Казанской до г. Калача (длина участка 450 км) и по проектной трассе канала Сибирь — Средняя Азия на протяжении 1380 км. Шаг мегаформ на реках определен как расстояние между центрами групп перекатов или вершинами одиночных повышений дна (рис. 3.6). По трассе канала литологические структуры мегаформ выделены на фоне более мягких грунтов: суглинки как структурные включения в толще более мягких супесей; в свою очередь сами суглинки на соответствующих участках рассмотрены как «мягкий» фон для глин и других более тяжелых грунтов.

Вариационные ряды составлены из относительных шагов изучаемых форм: $l=L/L_{cp}$. Соответствие точек фактического и теоретического распределения Пуассона оценено по критерию Колмогорова. Для всех трех совокупностей оно вполне приемлемо и соответствует доверительным вероятностям $P=0,96$.

Характеристики макроформ установлены как масштабы вторичных образований на гребнях мегаформ. На рис. 3.7 показано общее согласие фактического распределения относительных шагов

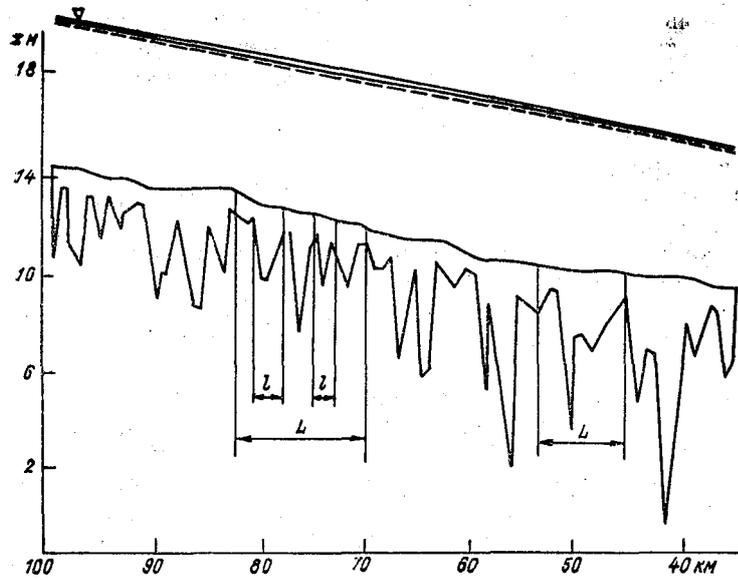


Рис. 3.6. Фрагмент продольного профиля русла в среднем течении р. Дон.
l — шаг макроформ, *L* — шаг мегаформ.

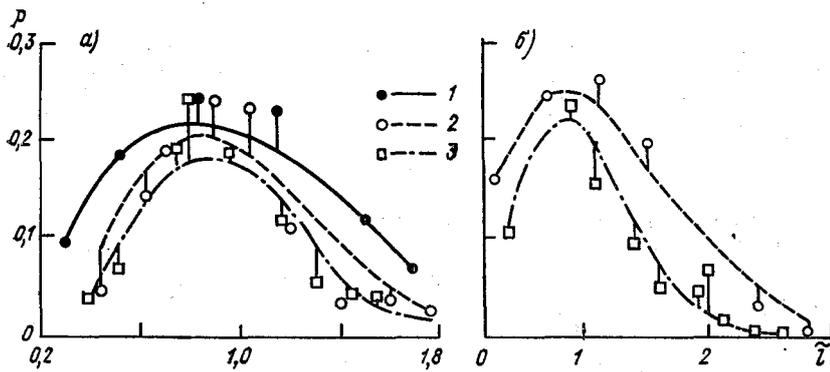


Рис. 3.7. Распределение мега- (а) и макроформ (б) (сопоставление фактических данных и кривых Пуассона).
 1 — трасса канала Сибирь—Средняя Азия, 2 — р. Волга, 3 — р. Дон.

l с законом Пуассона. Правда, для макроформ Дона доверительная вероятность $P \approx 0,60$ уступает значению $P = 0,98$, полученному по продольному профилю р. Волги. Средние значения шагов макроформ одного порядка с масштабами, которые можно установить по эмпирической зависимости В. В. Ромашина:

$$L = 19,6 \bar{Q}_m^{0,67},$$

где L в метрах.

Для Волги $L_{\text{ср}} = 14$ км, по расчету 22,5 км; для Дона $L_{\text{ср}} = 4$ км, по расчету 5,9 км.

По данным Ромашина, шаг макроформ в среднем вдвое превышает шаг мезоформ. Более того, удвоение шагов элементов донного рельефа рассмотрено как некая закономерность масштабных превращений русловых форм и распространено на мезоформы различных порядков [50].

Поперечные размеры мегаформ соизмеримы с шириной дна долины B_0 , именно той ее части, где заметны следы руслоформирующей деятельности [167]. Очевидна связь B_0 с водностью и размерами всей реки, которые в конечном счете можно охарактеризовать максимальными историческими расходами воды $Q_{\text{м макс}}$. Что касается поперечных размеров макроформ, то им следует поставить в соответствие ширину пояса руслоформирования $B_{\text{пр}}$ — расстояние между вершинами противоположно направленных излучин или ширину реки, в пределах которой смещаются русловые формы.

Размеры B_0 и $B_{\text{пр}}$ Б. Ф. Снисченко связывает с шириной русла в пойменных бровках B , уклоном дна долины по оси пояса руслоформирования I_0 и уклоном руслового потока по тальвегу:

$$I_0/I = 0,05 B_0/B + 0,95 = 0,04 (B_{\text{пр}}/B)^{1,4} + 0,96.$$

Важнейшим фактором, определяющим кинематическую структуру потока и режим гидравлических сопротивлений, служит относительная ширина русла $\delta = B/h_{\text{ср}}$. Ржаницын [123] характеризует δ в зависимости от порядка реки:

$$\delta = N/a, \quad (3.17)$$

где для плесов $a = 0,16$, для перекатов $a = 0,07$.

А. В. Серебряков и Л. В. Калинина [133] выполнили статистическую обработку данных более 500 измерений по перекатам рек Северной Двины, Вятки, Дона и Десны (реки 12—14-го порядков в системе Н. А. Ржаницына). Фактическое распределение вероятностей δ близко к распределению Пуассона (рис. 3.8). Преобладающие значения $\delta = 80 \dots 100$. Поскольку каждый перекат сопряжен с плесом, распределения δ для перекатов и плесов должны подчиняться одному закону. Если использовать зависимость (3.17), то $\delta_{\text{пл}}/\delta_{\text{пер}} = 0,44$, и, следовательно, из шкалы δ для перекатов можно получить шкалу δ для плесов. Для них преобладающими значениями оказываются $\delta = 35 \dots 45$. При такой отно-

ительной ширине русла, в соответствии с критерием θ поток находится в переходном состоянии, при котором утрачено влияние радиентов скоростей на боковых границах и кинематическая структура течений приближается к однородной.

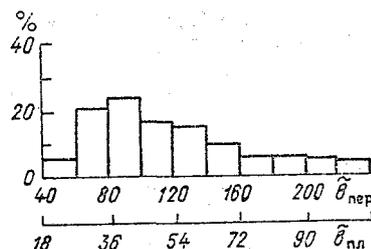
Существуют зависимости \bar{b} от расходов воды:

$$\bar{b} = a [Q / (d^2 \sqrt{gd})]^m,$$

где $m=1/8$ по В. С. Алтунину [3], $m=1/6$ по Инглису—Ласею.

Значение \bar{b} увеличивается с увеличением Q . Но, по В. А. Вавони [163], для рек чаще всего отмечают другую закономерность: уменьшение \bar{b} при увеличении расходов воды. Об этом же свидетельствуют данные работы [133], указывающие на законо-

рис. 3.8. Распределение значений относительной ширины русла на перекатах ($\bar{b}_{\text{пер}}$) и плесах ($\bar{b}_{\text{пл}}$) по [123, 133].



мерное приближение \bar{b} к 60 при увеличении удельных расходов воды Q/V (в беспойменных руслах это соответствует увеличению Q).

Связь Q и \bar{b} неоднозначна и нуждается в дальнейшем раскрытии.

Есть прецеденты получения оценок \bar{b} вообще без связи с гравитационными и гидрологическими факторами. Так, Шумм [163] для диапазона $\bar{b}=2 \dots 300$ обнаружил связь

$$\bar{b} = 255\mu^{-1,08},$$

где μ — доля массы ила или глины в грунтах русла, %.

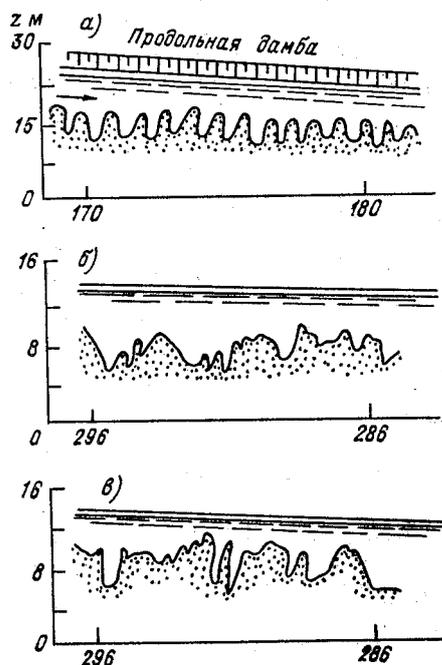
Авторы данной работы при максимальных расходах воды обеспеченностью от 3 до 5 % в 45 гидрометрических створах получили диапазон $\bar{b}=44 \pm 22$.

Особенно интересны закономерности развития перекатов. Как препятствия для судоходства они привлекали внимание исследователей и служили объектом промеров и русловых съемок.

Перекаты относят к макроформам грядового рельефа русла. Их образование приурочено к местам, где по различным причинам уменьшается транспортирующая способность потока: из-за опоры выше сужений долины, излучин и островов или при впадении больших притоков, перегрузки потока наносами и т. п. Повлечению перекатов способствует также определенная структура горичных течений, существующая, например, в сужениях и расширениях русла [93]. В сужении уровень поднимается у берегов, вдоль стрежня на водной поверхности возникает ложбина. Прионные течения, следуя градиенту уровней, отклоняются

к стрежню, и здесь образуется осередок. На расширяющемся участке в стрежневой зоне водная поверхность выше, чем в береговой — донные течения расходятся от стрежня к берегам, что ведет к отложению наносов и образованию своеобразной русловой формы — бара.

Но перекаты — это не только скопление наносов, но и форма твердого стока, поскольку в природе существует постоянное, хотя и медленное, перемещение этих отложений в виде мезоформ: по



бочней, кос и осередков. Более того, есть объективные основания считать, что чередование плесов — перекатов и связанная с ним неравномерность движения потока представляют собой естественный оптимум обеспечивающий минимум потерь энергии. В этом смысле становится оправданным убеждение гидротехников прежних времен о «неустранимости перекатов» [47]. Действительно перекаты, как крупномасштабные элементы продольного

Рис. 3.9. Продольные профили Рейна на участке сплошного выправления, 170—180 км от Базеля (а), и нижнего Дона, 286—296 км от устья, после зарегулирования расходов (б) и в естественном состоянии (в).

профиля русла, имманентно присущи рекам и в этом смысле неустранимы. Они могут исчезнуть только при искусственной планировке и защите дна от размыва (впрочем, и в этом случае при движении взвешенного потока возможно образование гряд «дефицитной» формы [42]). Перекаты же, образованные скоплением наносов, можно устранить, как только исчезнет или будет искусственно предотвращено влияние порождающих их внешних факторов.

На рис. 3.9 показаны продольные профили Рейна на участке сплошного выправления и Дона в зарегулированном и естественном состоянии. Двухстороннее закрепление трассы потока системой выправительных сооружений на Рейне (рис. 3.9 а) не привело к ожидавшемуся уничтожению волн продольного профиля. По сравнению с естественным состоянием реки они лишь приобрели более правильную периодичность и сравнительную стабильность глубин на гребнях, характерные для ленточных гряд. Т

ке тенденция отмечена на реках после искусственной стабилизации расходов воды и выравнивания внутригодового распределения стока. По данным А. В. Серебрякова, на нижнем Дону в результате регулирования расходов воды Цимлянским водохранилищем отмечено увеличение объема русла и сглаживание неравномерности распределения глубин по длине реки (рис. 3.9 б, в), т. е. сравнительно неупорядоченный рельеф русла преобразовался в относительно регулярно-волнистый продольный профиль дна.

Шаг перекатов в порядке первого приближения можно оценить по выражению [57]

$$L_{\pi} = (1,22Fr/I_0)h, \quad (3.18)$$

где $Fr = v^2/gh$ — число Фруда.

Далее L_{π} оценен на динамической основе — из уравнения, описывающего режим квазипериодических расширений и сужений потока.

Обратимся от портретно-морфологических характеристик к динамике русловых форм во времени. Очевидно, что мегаформы эволюционируют в ритме геологических процессов и вековых колебаний климата, а значит, и водности рек. Чем меньше размеры русловых форм, тем динамичнее их поведение во времени. Если макроформы могут менять свое положение по длине реки соответственно периодам гидрологического цикла за многолетие и отчасти взятые годы, то динамика мезоформ следует сезонным фазам гидрологического режима. Микроформы способны изменяться в течение периода времени, соизмеримого с периодами крупномасштабных турбулентных образований.

Эмпирическая зависимость, выражающая скорость перемещения побочной перекатов [93] в метрах за год, имеет вид

$$v_{\pi} = 0,05Q_m/L,$$

где $L = d_{cp}/\Delta z$ — число Лохтина; d — средний диаметр частиц на, мм; Δz — уклон водной поверхности, ‰.

Такая же зависимость для скорости перемещения гряд в метрах в секунду [80] имеет вид

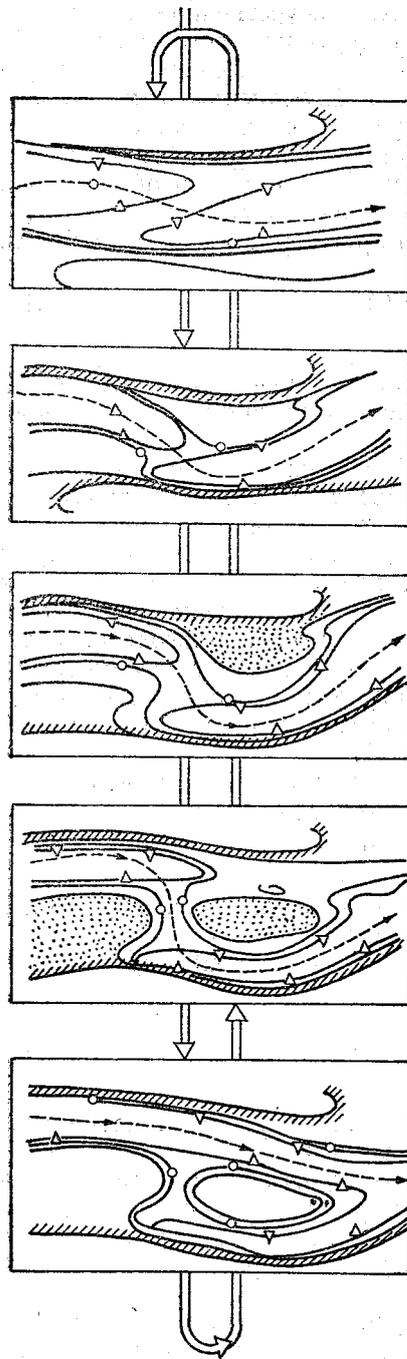
$$v_r = 0,019vFr^{2,9},$$

где v — средняя скорость потока, Fr — число Фруда.

В первом случае скорость перемещения составляет сотни метров в год, во втором — сотни метров в сутки.

Смещение русловых форм непрерывно изменяет морфологический облик речного ложа. Его метаморфозы издавна привлекали внимание исследователей, о них многое можно почерпнуть в трудах отечественных гидротехников-путейцев разных поколений [29].

При историческом подходе к изучению русловых переформирований обращает на себя внимание цикличность (повторяемость) макро- и мезоформ в их эволюции во времени. По этому поводу



в прошлом возникали отдававшие схоластикой споры — насколько объективна и диалектична гипотеза о циклическом развитии русловых переформирований. На этот счет в конце сороковых годов состоялась дискуссия между известными гидротехниками Г. Л. Садовским и Л. И. Кустовым, с одной стороны, и Н. И. Макавеевым — с другой. С современной точки зрения, этот вопрос тривиален. Если неоспорима цикличность речного стока, под которой понимают календарные группировки многоводных и маловодных лет [68, 126], то следует признать и циклический характер русловых переформирований, отражающих (пусть опосредованно, но с неизбежностью) колебания жидкого и твердого стока.

Садовский [128] проследил, как один и тот же перекат в разные периоды своего существования представлял собой морфологически различные состояния русла и возвращается к исходной форме на новом уровне спирали развития (рис. 3.10).

Циклические изменения русла отчетливы на участках сопряженных систем рукавов. Эти прецеденты описаны еще Н. Н. Жуковским и широко изучены в последние десятилетия [43, 93]. Своеобразие рассматриваемого явления состоит в том, что динамическая ось потока при огибании острова или группы островов

Рис. 3.10. Цикл переформирования переката по Садовскому.

располагается последовательно то у одного, то у другого берега и за многолетие описывает в плане фигуры в виде «восьмерок». Подобные примеры отмечены на всех реках с двух- или многорукавным руслом. Типичный пример на р. Оби описал В. В. Дегтярев [43].

В сопряженных разветвлениях перераспределение расхода воды в верхнем звене системы вызывает «цепное» перемещение главного течения реки в рукав у противоположного берега в пределах каждого из островов. Эти плановые колебания динамической оси характеризуются некоторой регулярностью во времени. Так, на

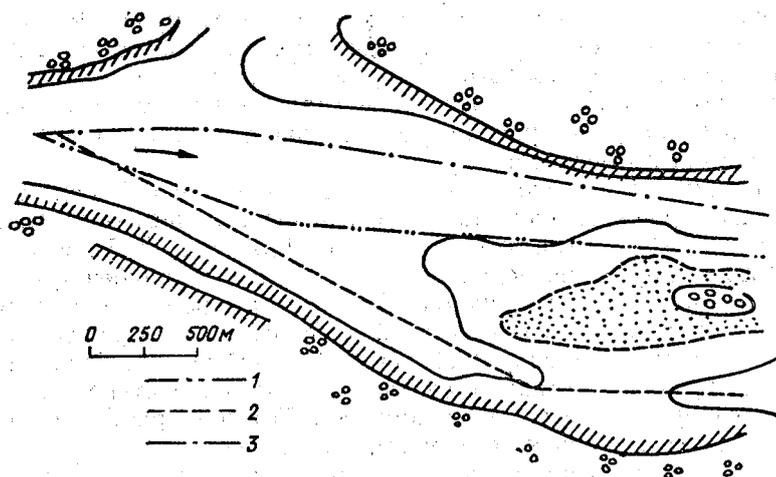


Рис. 3.11. Узел разветвления русла и положение фарватера р. Зее на Петровском перекате, 110 км от устья, в 1934—1940 (1), 1941—1947 (2) и 1948—1960 гг. (3).

примере верхней части Петровских перекатов на р. Зее удалось проследить 6—8-летнюю периодичность поперечного блуждания эрозионного фарватера вокруг обширной отмели-осередка и островка посередине русла (рис. 3.11).

Первопричина обмена рукавов своими ролями ясна: движение боковых, закупоривающих то один, то другой рукав. Но в этом можно усмотреть и следствие гидравлично-стохастических закономерностей, так как аналогичные явления отмечены и в неразмываемых руслах. По результатам теоретических и экспериментальных исследований [81], при обтекании береговых выступов поток приобретает свойства турбулентной струи. Его динамическая ось, первоначально отклонившись к противоположному берегу, ниже по течению попеременно сваливается то к одному, то к другому берегу, создавая зоны ускорения и замедления течений. Поле скоростей потока при этом служит как бы отражением побочного русла, в котором роль жидких боковых (по Маккавеву) выполняют зоны затухания скоростей.

Колебательные смещения стрежня потока отмечены и в одноканальных руслах рек и каналов. Вот характерный пример. После переустройства канала Таш-Сана в его правильном русле, на участке 1,4 км от начала, динамическая ось отклонилась к правому берегу под влиянием линзы суглинистого грунта, расположенной у левого берега. Далее на участке 2,6—2,8 км стрежень потока, наоборот, прижимался к левому берегу, затем на участке 2,8—3,8 км — вновь к правому. Возмущение потока, возникшее в верхнем створе, передавалось на значительное расстояние вниз по течению в виде периодически повторяющихся свалов потока то к одному, то к другому берегу.

Поперечные смещения потока можно рассматривать как русловую аналогию стоячих волн, имеющих, как известно, практически неподвижные узловые точки и прямолинейные траектории средних точек, смещающихся по нормали к продольной оси. Узловые точки на реках расположены в узкостях или у неразрываемых береговых выступов.

Тенденцию к образованию изгибов динамической оси потока одним из первых описал Маккавеев, в последующем — К. В. Гришанин и В. И. Замышляев [40], Н. Р. Грачев и О. К. Карлыханов [36] и другие исследователи, в том числе зарубежные [145, 146]. Очевидно, для возникновения русловых волн должен существовать очаг возмущений. В гл. 2 описаны колебательные увеличения и ослабления скоростей течений в пойменных фрагментах, которые предположительно связаны с взаимодействием потока основного русла р. Сож и ее притока. Тот же прецедент можно указать и для Петровского переката на р. Зее.

Несмотря на существование физических предпосылок явления поперечных колебаний динамической оси руслового потока не отличается строгой регулярностью во времени и пространстве. Ее закономерности можно установить лишь на гидравлично-стохастической основе.

3.3. Морфологическая типизация русловых процессов

Известны два определения русловых процессов. Более широкое: по Маккавееву и Чалову [93], русловые процессы — совокупность явлений, возникающих при взаимодействии потока и грунтов, слагающих ложе реки, определяющих развитие различных форм рельефа русел и режим их сезонных, многолетних и вековых изменений, влияющих на размыв дна и берегов рек, транспорт и аккумуляцию наносов. Более узкое: по Кондратьеву, Попову и Смищенко [50], русловым процессом называют изменения в морфологическом строении речного русла и поймы, постоянно происходящие под действием текущей воды; по Ржаницыну [123], под русловым процессом понимается процесс образования и развития локальных русловых форм и их сложных комплексов.

По мнению авторов настоящей работы, правомерно более широкое определение русловых процессов, отражающее многообразие их проявлений, которые состоят не только в морфологических изменениях, но и во всех формах воздействия потока на русло и его берега, а также включают в себя гидрохимическую эрозию, выщелачивание водорастворимых соединений из грунтов, транспорт и аккумуляцию наносов. В этом смысле для столь сложного комплекса неправомерно даже употреблять термин «русловой процесс» в единственном числе.

Литература по речной гидравлике, геоморфологии и гидрологии поражает обилием различных типизаций русел и русловых процессов. Большинство авторов, несмотря на различие точек зрения на самый предмет исследований, сходятся в одном — признании противоречивости, а иногда и непоследовательности существующих концепций. Создание непротиворечивой синтетической теории русловых процессов — дело будущего. На современном этапе наиболее развиты морфологические подходы к их изучению. Широко применяют в инженерной практике типизацию русловых процессов, разработанную в ГГИ Кондратьевым и Поповым (рис. 3.12). Необходимо более точно назвать классификационную схему с учетом сделанных ранее замечаний: морфологическая типизация русловых процессов. Типы II—VIII выделены Кондратьевым и Поповым и относятся к участкам динамического равновесия, где поступление и удаление наносов практически сбалансированы, а коренные породы русла прикрыты чехлом руслоформирующих отложений. Типы I и IX ввели авторы применительно к направленным деформациям русла — соответственно глинному врезанию и аккумуляции наносов (их в числе других элементов руслового режима рассматривает и Ржаницын). Тип X соотносится с такими аккумулятивными образованиями, как дельтовые и внутренние бары на реках [21]. Собственно русло и пойма, с одной стороны, представляют собой граничные условия для русловых процессов, а с другой, по выражению Н. Н. Жуковского, сами являются результатом их «скульптурной работы».

В природе различные типы русловых процессов развиваются одновременно и повсеместно как звенья различной формы в цепи размыв—аккумуляция. В связи с этим трудно и, пожалуй, не вполне правомерно выделять так называемые морфологически однородные участки, в пределах которых существовала бы одна разновидность русловых процессов. Представляется более приемлемой точка зрения [93], в соответствии с которой морфологически однородный участок выделяют на основании неизменности его длины расходов воды и наносов, уклонов русла и долины, считывая в первую очередь общие формы русла.

Одной из основных проблем речной гидравлики остается установление количественных соотношений между факторами, определяющими тот или иной тип русловых процессов. Предложено несколько критериальных комплексов, каждый из которых может содержать несколько характеристик потока и русла. В сущности,

критериальное значение имеют все достаточно обоснованные морфометрические зависимости [8, 24]. Однако они не всегда увязаны с характером русловых процессов. В последнее время с

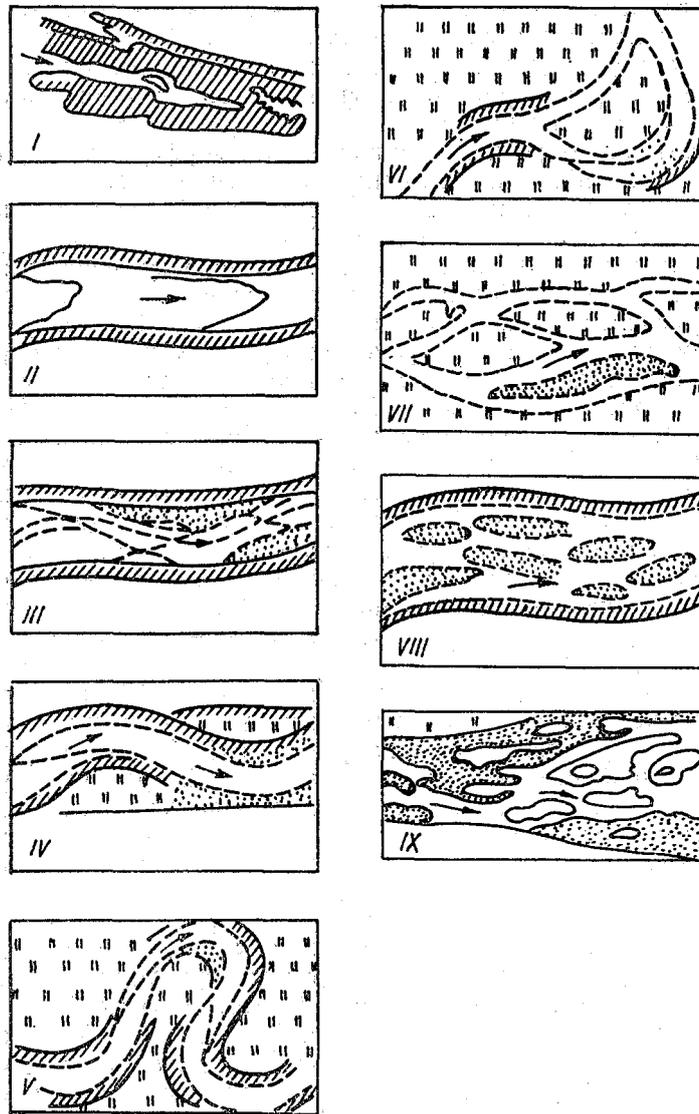


Рис. 3.12. Морфологическая типизация русловых процессов.

стему критериев разработал Снисенко [80], располагавший большой исходной информацией по 183 участкам 35 рек. На основе для каждого типа русловых процессов установлены к

критериальные соотношения следующих морфометрических параметров:

1) B_0 — ширина дна долины, в пределах которой заметны следы русловой деятельности современного потока;

2) $B_{пр}$ — ширина пояса руслоформирования, расстояние между вершинами противоположно направленных излучин, а при других типах русел — ширина реки между бровками пойменных берегов, в пределах которой перемещаются русловые формы;

3) B — ширина русла на уровне бровок пойменных берегов;

4) I_0 — уклон дна долины по оси пояса руслоформирования;

5) I — уклон руслового потока по тальвегу.

Соответственно основным типам русловых процессов определены значения относительных величин B_0/B , $B_{пр}/B$ и I_0/I , из которых составлены комплексы:

$$A_1 = I_0 B_0 / (IB), \quad A_2 = I_0 B_{пр} / (IB). \quad (3.19)$$

Средние значения A_1 и A_2 , установленные Сниценко, приведены в табл. 3.2. В результате специального анализа обнаружена независимость типов русловых процессов от абсолютных значений средних максимальных расходов Q_{\max} , что «представляется са-

Таблица 3.2

Морфологическая типизация и критериальные характеристики русловых процессов

Класс русла	Тип руслового процесса	Средние значения			Интервал и среднее значение θ (в скобках)
		A_1	A_2	G	
Русла с поймой	Свободное меандрирование	36,6	17,72	0,5	—
	Незавершенное меандрирование	14,65	8,00	—	—
	Пойменная многоруканность	7,93	6,81	—	—
	Ограниченное меандрирование	5,28	3,95	0,5	—
Беспойменные прямолинейные или слабо изогнутые русла	Русловая многоруканность	1,96	1,04	10,7	$>9,5$
	Побочный	2,60	1,26	2,5	4,5—9,5 (7,0)
	Грядовой	—	—	—	1,0—4,5 (2,75)

моочевидным, — пишет Б. Ф. Сниценко, — так как в одинаковой степени можно наблюдать, например, свободное меандрирование и у малых ручьев и у р. Миссисипи». Многие исследователи признают объективность закона ограниченности морфологических комплексов [24, 93, 163]. Вопрос об автомодельности русловых процессов (их независимость от масштабов потока) требует

специального изучения. Русловые процессы в природной обстановке развиваются не только как активное проявление потока и соответствующих реакций подвижного ложа, но испытывают действие ограничивающих факторов, прежде всего характера грунтов и вскрываемых течением литологических структур. Аллювий же, как среда и порождение русловых процессов, появляется лишь при достаточно высоком порядке реки — выше VI [57]. Отсюда следует неизбежность влияния мощности потока на его русловый режим. А вот другой факт, указанный В. Ванони: ни в одном из известных экспериментов Фридкина продолжительностью более 100 ч не отмечена тенденция к отсечению меандров и образованию стариц, наблюдающихся в естественных условиях. Значит ли это, что в экспериментальных руслах, т. е. в тех самых ручьях, которые упомянуты наряду с Миссисипи, не существует такой тип русловых процессов, как незавершенное меандрирование? Бряд ли можно настаивать на идентичности процессов руслоформирования в лабораторных и натуральных условиях, если учесть невозможность полного воспроизведения на моделях всех особенностей литологии русла и водного режима. В п. 3.1 при анализе руслоформирующего эффекта половодий и паводков установлена роль характерных расходов воды — исторических (руслотрансформирующих) $Q_{\text{м макс}}$ и доминирующих $Q_{\text{пф}}$. Соотношение между ними зависит от вероятностно-генетических характеристик гидрографа и, естественно, оно неодинаково для различных рек и условий формирования стока.

В структуру критериев A_1 и A_2 непосредственно не входит водный фактор, а между тем в работе [80] он охарактеризован как «единственный активный». В то же время возникают практические трудности использования критериев A_1 и A_2 , вызванные некоторой неопределенностью параметров B_0 и $B_{\text{пр}}$, на что, в частности, указывает Ржаницын [123].

Существует возможность усовершенствования структуры критериальных комплексов с учетом гидрологических факторов руслоформирования. С этой целью сопоставим B_0 и исторический максимум $Q_{\text{м макс}}$, $B_{\text{пр}}$ и максимальный расход воды доминирующего паводка (половодья) $Q_{\text{пф}}$, B и руслонаполняющий расход воды $Q_{\text{рф}}$.

Для естественных условий формирования речных русел в нескальных грунтах морфометрическими исследованиями последних лет [167] установлена достаточно тесная корреляционная зависимость расхода воды от ширины потока по урезу:

$$Q = aB^m,$$

где показатель степени колеблется в пределах 1,25—1,65 и в среднем равен 1,45 (рассеяние связи в пределах 40—80 %). Отсюда получим пропорциональную зависимость

$$B \sim Q^{2/3}.$$

И, наконец, отношение уклонов I_0/I можно заменить коэффициентом извилистости русла, легко определяемым по топографическим картам:

$$K_{\text{изв}} = L_p/L_0,$$

где L_p и L_0 — соответственно длина русла и протяженность участка по оси пояса руслоформирования.

Критериальные комплексы русловых процессов получают гидрологическое «наполнение» и приобретают вид

$$A_1 = (Q_{\text{м макс}}/Q_p)^{2/3} K_{\text{изв}}, \quad A_2 = (Q_{\text{пф}}/Q_p)^{2/3} K_{\text{изв}}. \quad (3.20)$$

Значения A_1 и A_2 теряют свое различие при побочном типе и русловой многорукавности, т. е. оба критерия практически вырождаются (см. табл. 3.2).

Для надежной индикации характерных диапазонов изменения какого-либо критерия X необходимо соблюсти по крайней мере одно условие: шаг показателя ΔX должен превосходить доверительный интервал его вариации:

$$\Delta X \geq K_p \sigma_X, \quad (3.21)$$

где σ_X — среднеквадратическое отклонение X .

Значения коэффициента K_p зависят от закона распределения X . Этот закон для всей области определения A_1 и A_2 неизвестен. В работе [80] проверена достоверность гипотезы распределения по Джонсону лишь для значений внутри каждой области A . В нашем случае допустимо принять равномерное распределение A в интервале от $A_{\text{мин}}$ до $A_{\text{макс}}$. Что касается σ_A , то, согласно работе [80], по всей совокупности данных можно принять $\sigma_A = 0,3$. При этих условиях для доверительной вероятности $P = 95\%$ получены неравенства:

на границе русловой многорукавности и побочного типа:

$$\Delta A = 2,60 - 1,97 = 0,63 < 0,3 \cdot 1,97 \cdot \sqrt{3} = 1,02,$$

на границе побочного типа и ограниченного меандрирования:

$$\Delta A = 5,93 - 2,60 = 3,33 > 0,3 \cdot 2,60 \cdot \sqrt{3} = 1,35.$$

Отсюда можно сделать вывод: разграничение русловой многорукавности и побочного процесса не всегда обеспечено, в то время как переход к режиму меандрирования определен вполне надежно.

Многие исследователи [8, 127] в качестве определяющего фактора принимают мощность потока QI . К этому критерию недавно вновь обратились Г. А. Куколевский [84] и М. А. Карсон [146], но пришли к различным результатам.

Карсон отрицает критериальный характер функции QI , считая, что она зависит от крупности аллювия d . В связи с этим предложено в критерии, характеризующие условия формирования,

вводить этот параметр. Так, Гендерсон, обращаясь к известному уравнению Леопольда и Вольмана

$$I = 0,011Q_{\text{макс}}^{-0,44},$$

уточняет его следующим образом:

$$I = 0,0002d^{1,14}Q^{-0,44}.$$

В этом есть своя логика, но применение морфометрических зависимостей, не содержащих крупности частиц, давно уже обосновал В. Г. Глушков [33]: «Морфометрические соотношения существуют при таких состояниях потока, когда он активно вырабатывает свое русло; внешним признаком такого состояния является усиленное движение наносов».

Куколевский в качестве критерия для типизации русловых процессов принял нормированную (безразмерную) форму:

$$G = (QI)_{\text{рф}}/(QI)_N,$$

где числитель отнесен к руслоформирующим расходам воды, а знаменатель — к характеристике реки порядка N , при котором заведомо обеспечена стабильность однорукавного русла и приняты условия гидравлической устойчивости потока: $Q = 50 \text{ м}^3/\text{с}$; $I = 0,001$.

Значения критерия G приведены в табл. 3.2. В области побочного процесса и меандрирования среднеквадратическое отклонение $\tilde{\sigma}_A = 0,3$. Легко проверить, что условия надежного разграничения этих типов удовлетворены. Недостаток критерия G можно видеть в некоторой неопределенности выбора нормирующего комплекса $(QI)_N$.

Критерии A_1 , A_2 и G не указаны для случаев устойчивого русла и ленточно-грядовых процессов, а между тем эта область особенно важна при обосновании оптимальных размеров каналов и русел зарегулированных рек (рис. 3.13).

Русловая многорукавность, побочный и ленточно-грядовый процессы, как типы мезоформ, свойственны малоизвилистым беспойменным руслам или руслам с относительно узкой (прирусловой) поймой. Характер руслоформирования при наличии и отсутствии поймы качественно различен. В этом смысле представляется физически обоснованным предложенное Чаловым (см. рис. 3.5) деление речных русел на два больших класса — широкопойменные и врезанные, отражающих качественное различие в их морфологической структуре и механизмах формирования. Вместе с тем, для уточнения классификации следует вместо формулировки «врезанные русла» принять «беспойменные», и тогда этот класс наряду с побочным и грядовым типами руслового процесса охватит русловую многорукавность, которая для чисто врезанных русел нехарактерна.

Многие считают, что ленточно-грядовый тип русловых процессов мало распространен в природе, и его выделяют по методоло-

гическим соображениям [80]. В том же случае, если, следуя Н. С. Знаменской [50], считать, что появление гряд предшествует и свойственно всем другим русловым процессам, то естественно выделить грядовый тип для состояния русла, когда в нем еще не образовались другие мезоформы. При этом грядовый тип нельзя связывать только с одной формой ленточных гряд.

Возникновение гряд в размываемом русле — неизбежное явление. В начальной стадии их развития решающую роль играет кинематическая структура потока, а русловые формы служат ее отпечатком. При определенных условиях грядовые образования

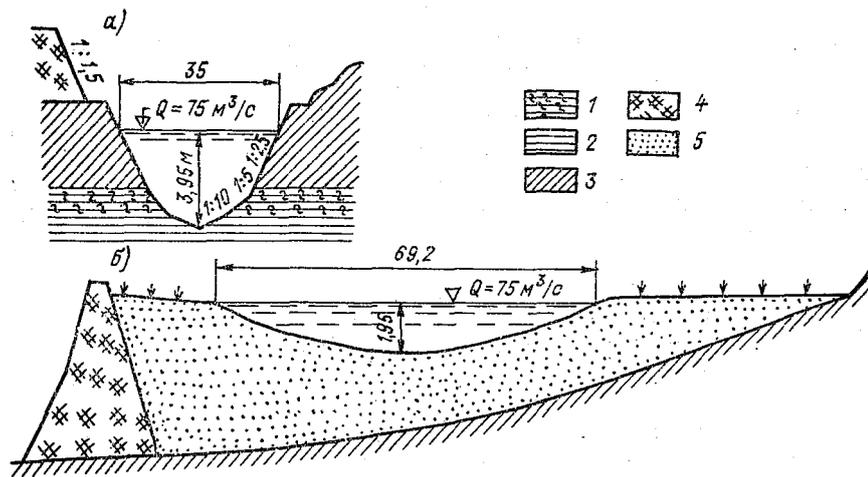


Рис. 3.13. Невинномысский канал.

а — типовое поперечное сечение (инженерный профиль); б — сечение русла, сформировавшееся в зоне отложения наносов на участке 17,5—20,3 км от головного сооружения; 1 — элювий майкопской глины, 2 — майкопская глина, 3 — делювиальный суглинок, 4 — насыпной грунт, 5 — отложения наносов.

принимают форму побочней, побуждающих русло к меандрированию. Смещение динамической оси создает зоны «прижима» течения к берегам и очаги их размыва, питающие поток наносами, что еще более активизирует возникшую боковую эрозию. Возникает гидравлическая неустойчивость относительно неглубоких сечений, и типы русловых образований сменяются с переходом от гряд или близких к ним форм к побочням и меандрам. Появление побочней и развитие меандров — прямое следствие гидравлической неустойчивости потока.

Таким образом, в однорукавном русле развитие его форм зависит от того, насколько компактна кинематическая структура потока и не происходит ли его внутреннее расчленение на макроструи. В связи с этим критерий квазиоднородности потока θ становится характеристикой русловых процессов. По этим соображениям введем в структуру критерия θ гидрологическую характеристику — руслоформирующий расход воды $Q_{рф}$, определяемый по (3.14) как осредненный расход воды за активную фазу домини-

рующего паводка (половодья). После несложных преобразований получим

$$\theta = 1,42b^2/Q_{рф} \sqrt{gh^3l}. \quad (3.22)$$

Критериальные значения θ указаны в табл. 3.2. Чтобы убедиться в том, насколько они удовлетворяют условию (3.21), надо взять полный дифференциал от (3.22) по переменным \tilde{b} , \tilde{h} и $Q_{рф}$. В результате получим выражение для относительного среднеквадратического отклонения определения θ :

$$\tilde{\sigma}_\theta = [4\tilde{\sigma}_b^2 + (5/2)\tilde{\sigma}_h^2 + \tilde{\sigma}_Q^2]^{1/2}.$$

Для входящих в это выражение частных погрешностей приняты обычные для морфометрических и гидрометрических данных оценки: $\tilde{\sigma}_b=5\%$, $\tilde{\sigma}_h=4\%$, $\tilde{\sigma}_Q=10\%$, что позволяет получить $\tilde{\sigma}_\theta=15\%$ и доверительный интервал предельной погрешности $m_\theta=31\%$. Относительный шаг средних значений θ и m оказывается в следующем соответствии на границах областей определения:

грядово-побочный тип: $\delta\theta=154\%$;

побочный тип — русловая многорукавность $\delta\theta > 35\%$.

В обоих случаях значения $\delta\theta$ превышают $m_\theta=31\%$.

Критериальные значения θ установлены из условий соответствия морфологии русла и кинематической структуры потока. Примечательно, что они находятся в поразительном соответствии с результатами исключительно морфометрической индикации, выполненной Куколевским для 40 створов:

побочный тип: $\theta_{ср}=6,9$;

русловая многорукавность: $\theta_{ср}=9,9$.

Если для критериев A_1 и A_2 принять значения, вычисленные по выражению (3.20) и приведенные в табл. 3.2, то классификационная система русловых процессов приобретает унифицированный характер: все входящие в нее критерии содержат общегидрологические элементы — характерные расходы воды и локальные факторы — уклоны свободной поверхности. Можно ли видеть недостаток предлагаемой системы в том, что каждый из входящих в нее критериев имеет свою область определения и не распространяется на все разновидности русловых процессов? Отнюдь нет, ибо смена критериев вполне согласована с многофакторной природой русловых процессов, а наличие нескольких критериальных соотношений для одного и того же их типа позволяет оценивать тенденции руслоформирования на вариантной основе.

3.4. Критерии некоторых типов русловых процессов и их вероятностная интерпретация

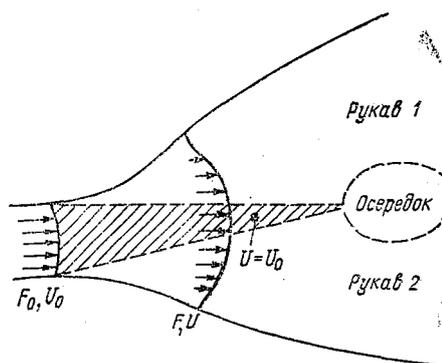
Путем обработки данных многолетних натуральных измерений и с использованием статистической теории турбулентности получен так называемый критерий квазиоднородности $\theta = \tilde{b}\sqrt{\lambda}$, где

$\bar{b} = B/h$. При этом экспериментально установлено существование критического значения $\theta \approx 4,5$, при котором начинается внутреннее разветвление потока на две обособленные ветви. Аналогичный критерий можно получить исходя из уравнений одномерной гидравлической идеализации в рамках теории гидродинамической устойчивости [28].

Запишем динамическое уравнение одномерной гидравлической идеализации для неравномерного потока в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (\alpha U^2 F) - g i_0 F + g F \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g U^2 F}{C^2 h} = 0. \quad (3.23)$$

Рис. 3.14. К объяснению многоуровневности.



При резком увеличении ширины потока в зоне растекания струи можно в первом приближении считать, что $\partial H / \partial x \approx 0$. Тогда, интегрируя уравнение (3.23) по координате x и заменяя переменные значения C и h средними значениями на участке интегрирования, получим

$$U^2 F = U_0 F_0 \exp \left[-gx / (\alpha \bar{C}^2 \bar{h}) \right], \quad (3.24)$$

где U_0 и F_0 — значения скорости и площади до расширения (рис. 3.1.4).

Зависимость (3.24) можно уточнить, считая, что $h = f(x)$ и $C = f(h)$, но общий характер решения не изменится. Можно придать различные интерпретации решению (3.24). Для авторов важна следующая версия. Вызывает интерес клин постоянных скоростей — ядро струи (см. рис. 3.14). В этом случае $U = U_0$ и (3.24) приобретает вид соотношения

$$F = F_0 \exp \left[-gx / (\alpha \bar{C}^2 \bar{h}) \right], \quad (3.25)$$

показывающего, что площадь ядра экспоненциально убывает по длине. Из теории турбулентных струй хорошо известно, что длина клина равна 4—5-кратной начальной ширине. Поэтому можно принять $x \approx 4,5 B$. Так как при обычных условиях ($C \approx 50$,

$h \approx 10, B \approx 200, \alpha \approx 1$ $5gB/(\alpha C^2 h) = 0,4 < 1$, можно допустить в первом приближении, что

$$\exp[-5gB/(\alpha C^2 h)] \approx 1 - 5gB/(\alpha C^2 h),$$

т. е. аппроксимировать экспоненту прямой линией. На конце клина $F \rightarrow 0$, что имеет место при $5gB/(\alpha C^2 h) \rightarrow 1$. Обозначая $B/h = \bar{b}$, получаем

$$\bar{b} = \alpha C^2 / (5g). \quad (3.26)$$

С другой стороны, критерий квазиоднородности дает

$$\bar{b} = 4,8C\sqrt{2g}. \quad (3.27)$$

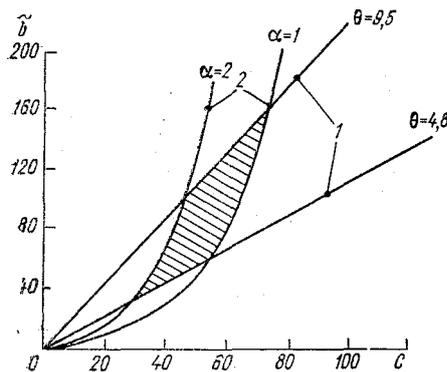


Рис. 3.15. Вероятная область бифуркации потока (заштрихована) по критерию квазиоднородности (1) и по теории гидравлической устойчивости (2).

Пусть, например, $C = 50$. Тогда по формуле (3.26) $\bar{b} = 55$ (при $\alpha = 1$), а по формуле (3.27) $\bar{b} = 54$. При других значениях C различие более существенно, но надо иметь в виду, что $\alpha \neq 1$, а кроме того, бифуркация происходит не мгновенно, так как эмпирические данные указывают на «размытость» значений $\theta = 4,5 \dots 9,5$ (рис. 3.15).

Для того чтобы однозначно ответить на вопрос о том, при каких условиях (соотношениях параметров потока) происходит необратимая бифуркация, необходимо исследовать устойчивость процесса разделения потока на рукава. Иначе говоря, необходимо исследовать устойчивость решения для струи (3.24). Если при определенном соотношении параметров решение будет неустойчивым, то процесс бифуркации нереализуем.

Стационарное распространение клина описывает система уравнений невозмущенного движения:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\alpha U^2 F) - g i_0 F + g F \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g U^2 F}{C^2 h} = 0,$$

$$dQ/dx = q,$$

где q — интенсивность изменения расхода струи вдоль потока.

Возмущенное движение описывает система Сен-Венана. Однако так как она нелинейна, ограничиваются линейным приближе-

нием. Это позволяет стандартным способом, принятым в гидродинамике, получить критерий устойчивости.

Пусть $v = U - U_x$ и $f = F - F_x$, где U_x и F_x — скорость и площадь струи, соответствующие невозмущенному движению; v и f — вариации площади сечения и скоростей речной струи из-за возмущений. Для периметра χ речной струи использована показательная аппроксимация:

$$\chi/\chi_0 = (F/F_0)^y,$$

где χ_0 — периметр струи в начальном створе.

Считаем для простоты, что $\partial\alpha/\partial x = 0$. Тогда стандартным путем [28] получаем линеаризованную форму уравнений Сен-Венана:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + P_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + P_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + P_3 \frac{\partial f}{\partial t} + P_4 \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

где

$$P_1 = 2\alpha U_x,$$

$$P_2 = \alpha U_x^2 - gF_x/B,$$

$$P_3 = \lambda\chi_0 U_x/F_x + 4\alpha g/F_x - (4\alpha U_x/F_x)(dF_x/dx),$$

$$P_4 = (2 - y) \frac{\lambda\chi_0 U_x}{2F_x} + \frac{1}{F_x} \frac{dF_x}{dx} \left(4\alpha U_x^2 - \frac{gF_x}{B} \right) + 4\alpha q \frac{U_x}{F_x}.$$

Так как возмущение f в этом уравнении зависит от времени только через производные, то оно должно иметь решения вида $\exp(rt)$. Если $\text{Re} r > 0$, то возмущения нарастают, т. е. возникает неустойчивость. Представляя решение в виде

$$f = f_0 \exp(\beta x + rt)$$

и считая $\text{Re} \beta = 0$, $\text{Im} \beta = 2\pi/\lambda = k$, получаем характеристическое уравнение

$$r^2 + (P_3 + jkP_1)r + (jkP_4 - k^2P_2) = 0.$$

Использование обобщенного критерия Ляпунова—Гурвица приводит к критериальным условиям устойчивости:

$$P_3 > 0, \quad (3.28)$$

$$-P_1P_3P_4 + P_2P_3^2 + P_4^2 < 0. \quad (3.29)$$

Можно показать [28], что условие (3.28) выполняется всегда, а условие (3.29) при $\alpha=1$ и $y=1$ приводит к неравенству

$$(6\chi + \chi_0)^2 + \chi^2/\text{Fr} < 24\chi_0\chi + 2[3\chi_0\chi + 2(\chi_0^2 + 3\chi^2)]/\text{Fr},$$

где χ_0 — начальный периметр клина струи, а χ — конечный.

Для приближенной оценки примем, что $\chi_0 \approx B + 2h \approx B$, $\chi \approx h$. Тогда

$$\text{Fr}^2 [36 - 12(B/h) + (B/h)^2] + 1 < \text{Fr} [6(B/h) + 4(B/h)^2 + 12]. \quad (3.30)$$

Согласно предшествующим результатам, при бифуркации $B/h \approx 50$, поэтому неравенство (3.30) выглядит существенно проще:

$$Fr^2 (B/h)^2 - 4Fr (B/h)^2 + 1 < 0.$$

Из этого неравенства видно, что процесс бифуркации при значениях B/h , указанных в работе [57], устойчив при любых значениях числа Фруда, это и объясняет тот факт, что этот параметр не вошел в критерий квазиоднородности.

Для общего случая граница устойчивости показана на рис. 3.16, из которого видно, что даже в таком экзотическом случае, когда

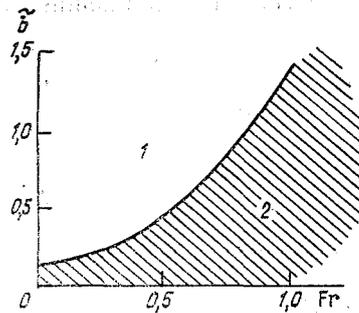


Рис. 3.16. Область устойчивой бифуркации потока на рукава (1) и область неустойчивости (2).

$b=1$, число Фруда должно быть больше 0,8. Таким образом, для обычных речных условий процесс разбиения на рукава (если он осуществляется по критерию квазистационарности) всегда устойчив, т. е. реализуем в действительности.

Точка «исчезновения» ядра, где градиент скорости по ширине меняет свой знак, а поток достигает предельного расширения и теряет связность как целое, в каждом конкретном случае занимает вполне фиксированное положение. Предельное расширение потока, непосредственно предшествующее его делению на рукава, отмечено в некоторой области значений $\theta = 4,5 \dots 9,5$, и, следовательно, каждая конкретная реализация $F_{пр}$, которой соответствует фиксированное $\theta_{пр}$, может существовать лишь с некоторой вероятностью P . Но отсюда следует, что детерминированное решение (3.23) не вполне адекватно всему многообразию описываемых явлений. В этом отношении более содержателен стохастический аналог динамического уравнения (3.23), имеющий вид

$$\partial p(F, x) / \partial x = -\partial A p(F, x) / \partial F + 0,5 \partial^2 B p(F, x) / \partial F^2, \quad (3.31)$$

где $p(F, x)$ — плотность вероятности распределения площади струи вдоль оси x ; $A = -g / (\alpha C^2 h) + G_1$, $B = G_2$ — коэффициенты сноса и диффузии соответственно, где G_1 — интенсивность параметрического шума, т. е. вариации пропускной способности по координате.

При $\langle g / (\alpha C^2 h) \rangle > 0,5 G_1$ результат аналогичен динамическому варианту, хотя критерий получен вероятностным, т. е. «размытым», что подтверждено натурными данными. Однако при

$\langle g/(\alpha C^2 h) \rangle < 2G_1$ (сильные шумы) у плотности вероятности площади сечения струи нет «стационарного» (по x) распределения, бифуркации потока нет, многорукавность не развивается, имеет место другой тип руслового процесса. В этом случае может развиваться режим квазипериодических расширений и сужений русла без его разделения на рукава.

Представим среднюю скорость потока в виде $U = U_0 + u$, где U_0 — фиксированное значение скорости, u — отклонение скорости от значения U_0 . После ряда преобразований и допущений (см. гл. 2) получим

$$\frac{du}{dx} = \left(-\frac{2g}{\alpha U_0} \frac{1}{C^2 h} \right) u^2 + \left(-\frac{2U_0}{C^2 h} \frac{2g}{\alpha U_0} \right) u + (I - i_0) \frac{2g}{\alpha U_0},$$

где I — уклон водной поверхности.

Это обобщенное уравнение Риккати после ряда подстановок приведено к виду

$$y'' - R(x)y = 0, \quad \text{где } y \sim u, \quad (3.32)$$

$$R(x) \approx (I - i_0) [2g/(\alpha U_0)]^2 [1/(C^2 R)].$$

При определенных условиях допустимы «колеблющиеся» решения уравнения (3.32) с периодом макроформ

$$L = \pi C h^{0.5} \alpha U_0 / (2g \sqrt{I - i_0}). \quad (3.33)$$

Если пренебречь величиной i_0 , а гидравлическим элементам h и C дать осредненные по длине потока значения, то выражение (3.33) приобретает следующий вид

$$L = (1,57 Fr/I) h, \quad (3.34)$$

где $Fr = U_0^2/gh$.

Эта зависимость почти не отличается от формулы (3.18) для шага ленточных гряд [57], полученной ранее и проверенной по многочисленным натурным данным.

3.5. Надежность гидротехнических сооружений на реках и каналах

Несмотря на разнообразие гидротехнических сооружений на реках и каналах гидрологические аспекты их надежности очень схожи. Поэтому далее этот вопрос рассмотрен на примере водопропускных сооружений [73, 75].

В повышении эффективности работы железнодорожного транспорта важную роль играет инженерное обеспечение пути и, в частности, водопропускных сооружений (мостов и труб). Опыт показывает [73], что применение стандартной методики гидравлических расчетов для малых мостовых переходов не всегда обеспечивает требуемую полноту и физическую обоснованность получаемых результатов.

Гидравлические расчеты сводят в основном к нахождению глубины h перед сооружением с учетом аккумуляции воды, например, по уравнению [73]

$$[3 \cdot 10^3 k_0 / (i_x i_c)] h^2 (dh/dt) = - \sum_{i=1}^N a_i h^{(i)} + \varphi(t), \quad (3.35)$$

где $\sum_{i=1}^N a_i h^{(i)}$ — полином, аппроксимирующий кривую пропускной способности сооружения; k_0 — коэффициент, зависящий от морфометрии лога; i_x и i_c — уклоны лога и склонов перед сооружением, ‰; $\varphi(t)$ — расход воды Q , формирующийся на водосборе; t — время.

В частных случаях, например при аппроксимации пропускной способности выражением $Q = ah^3$, уравнение (3.35) приводят к линейному виду

$$\frac{du}{dt} = -3mau + 3m\varphi(t), \quad (3.36)$$

где $m = 10^{-3} i_x i_c / (3k_0)$, $u = h^3$.

Расчеты по уравнению (3.35) показали, что учет динамики процесса приводит к уменьшению (по сравнению со стандартной методикой) максимальных глубин, иногда на несколько десятков процентов, и к снижению затрат на реконструкцию сооружений.

В случае рассмотрения системы взаимодействующих сооружений

$$m_i^{-1} h_i^2 \frac{dh_i}{dt} = - \sum_{i=1}^N a_i h_i^{(i)} + f(h_i - h_{i-1}) \text{sign}(h_i - h_{i-1}) + f(h_{i+1} - h_i) \text{sign}(h_{i+1} - h_i) + \varphi_i(t), \quad (3.37)$$

где f — функция, характеризующая пропускную способность профиля водораздела между соседними сооружениями (определяют морфометрически); $\text{sign}(h_i - h_{i-1})$ — знаковая функция, $i = 1, k$, k — общее число взаимодействующих сооружений.

Возможны различные варианты применения системы (3.37). Первый («оптимистичный») состоит в том, что приток $\varphi_i(t)$ учитывают только для одного сооружения. Результаты расчетов для этого случая приведены в табл. 3.3. Из нее видно, что в большинстве случаев категория сооружений улучшается.

Второй («реальный») подход состоит в том, что учитывают все притоки $\varphi_i(t)$ одновременно или с определенной временной сдвижкой. На рис. 3.17 приведен характерный пример результата расчета

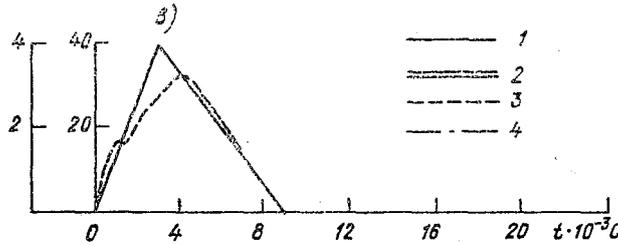
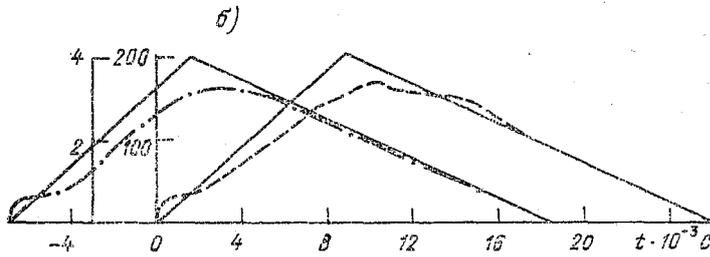
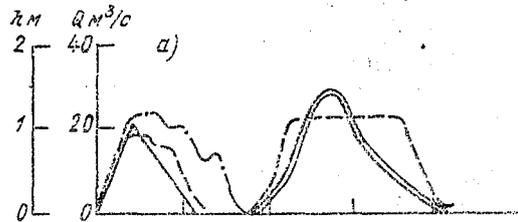
Рис. 3.17. Результат расчета гидравлического взаимодействия трех (а—в) водопропускных сооружений.

1 — гидрограф притока воды к сооружениям, схематизированный по треугольнику; 2 — расход воды, поступающей в аккумуляющую призму первого (а) сооружения за счет перелива; 3, 4 — глубина при отсутствии и при наличии временного сдвига притока воды к сооружениям соответственно.

Таблица 3.3

Результаты расчетов глубин и расходов воды
в сооружениях без учета (числитель) и с учетом
(знаменатель) перелива на участках
Восточно-Сибирской железной дороги

Относительные отклонения		Категория сооружения
глубин	расходов воды	
1,26	0,68	3/2 а
4,02	1,89	3/2 б
4,78	5,20	3/1
0,79	0,58	3/3
2,76	3,00	3/1
5,26	3,42	3/1
16,60	7,45	3/1
14,07	2,16	3/2 б
1,39	0,81	3/3
5,40	3,22	3/1
8,67	5,17	3/3
1,29	0,96	3/3
5,40	3,89	3/3
6,04	1,37	3/1
29,27	15,60	3/1
1,64	0,56	3/1



методом Эйлера гидравлического взаимодействия системы из трех рядом расположенных сооружений на участке Восточно-Сибирской железной дороги. Третье сооружение никак гидравлически не взаимодействует с соседними, а первое, справляясь со своим собственным притоком, «переливает» воду через насыпь вследствие притока воды из аккумулирующей призмы второго сооружения в случае, если задать определенную временную сдвигку между притоками воды с водосборов (см. рис. 3.17).

Из изложенного понятно, что переход к динамическому описанию взаимодействующих сооружений дает более обоснованную физическую картину работы сооружений, но, тем не менее, остается открытым ряд важных вопросов.

Во-первых, в динамическом режиме кривая пропускной способности $Q = f(h)$ перестает быть однозначной, так как расход воды в сооружении (на водосливе) зависит не только от глубины, но и от ее производных по времени и координате, т. е. $Q = f(h, \partial h/\partial t, \partial h/\partial x, \dots)$. Корни подобной неоднозначности уходят в проблему гидравлических сопротивлений при нестационарном режиме, которая пока окончательно не решена. Имеющиеся результаты [73] указывают на зависимость сопротивлений и от случайных факторов, например от стохастичности воздействия $\varphi_i(t)$. Приближенная оценка различий в значениях глубин, подсчитанных с учетом и без учета влияния нестационарности на положение кривой $Q = f(h)$, показывает, что они могут иногда достигать 50 % [73]. Следовательно, имеем не однозначную кривую $Q = f(h)$, а полосу $Q = f(h + \Delta h)$, оценить ширину которой можно только в статистическом смысле, например, задавая интервалы неопределенности $\pm a_j$ для коэффициентов a_j , т. е. вводя в уравнение (3.35) случайные параметры.

Во-вторых, коэффициент $m = 10^{-3} i_{\text{д}} i_c / (3k_0)$ также можно задать лишь в статистическом смысле, так как значения входящих в него параметров определяют весьма приближенно по топографическим картам.

В-третьих, расчет надо вести не на детерминированное входное воздействие $\varphi(t)$ с максимальным расходом воды заданной обеспеченности, а на случайный процесс. Как показывают вычисления по системе (3.37), в зависимости от значений сдвижек гидрографов расходы воды, даже меньшие, чем расход воды обеспеченностью 1 %, могут вызвать нарушения в работе сооружений.

Таким образом, уравнение (3.35), а тем более система (3.37) «пропитаны» статистическим духом. Переход к стохастическому описанию в случае непрерывного марковского процесса заключен в составлении дифференциального уравнения для плотности вероятности глубины $p(h, t)$ — уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial h} A(h, t) p(h, t) + 0,5 \frac{\partial^2 B(h, t) p(h, t)}{\partial h^2},$$

где A и B — коэффициенты сноса и диффузии соответственно.

Для уравнения (3.36), с параметрическим шумом V при нулевом среднем и интенсивности G_V , коэффициенты A и B соответственно равны:

$$A = -(3ma - 0,5G_V)u + 3m\varphi, \quad B = G_V u^2.$$

Для простоты реализацию случайного воздействия в виде схематизированного гидрографа с максимальным расходом воды требуемой обеспеченности обозначим φ .

При таком подходе уравнения для моментов (математического ожидания $\langle u \rangle$ и дисперсии D) примут вид:

$$\begin{aligned} \langle \dot{u} \rangle &= -(3ma - 0,5G_V) \langle u \rangle + 3m\varphi, \\ \dot{D} &= -2(3ma - G_V)D + G_V \langle u \rangle^2. \end{aligned}$$

Ограничиваясь даже только первыми двумя моментами статистического решения, можно оценить влияние шумов на интервал неопределенности для кривой $h = f(t)$, введя, например, энтропийное значение погрешности $\Delta h = k\sqrt{D}$, где k — энтропийный коэффициент, значения которого изменяются в зависимости от закона распределения $p(h, t)$ (например, для нормального $k = 2,066$). При стохастической оценке гидравлического режима можно указать доверительный интервал, в котором значения глубин опасны по существующим критериям надежности сооружений.

В общем случае в качестве входного воздействия должен выступать не детерминированный (схематизированный) гидрограф с максимальным значением расхода воды заданной обеспеченности, а случайный процесс (точнее — случайное поле), влияющий одновременно на несколько сооружений. Так как ливни, вызывающие экстремальные расходы воды, выпадают на площадь порядка 10 км², а средняя площадь водосборов малых водопропускных сооружений составляет для Восточно-Сибирской железной дороги $4,08 \pm 1,21$ км² (с доверительной вероятностью $P_{\text{дов}} = 0,99$), для Свердловской железной дороги $1,30 \pm 0,45$ км² ($P_{\text{дов}} = 0,99$), то наиболее вероятно одновременное воздействие поля осадков на два-три водосбора. Из-за того, что ливни, как правило, имеют фронтальное происхождение, важное значение приобретает угол между направлениями перемещения ливневого фронта и железнодорожной или автомобильной магистрали, так как при их совпадении в работу последовательно включаются соседние сооружения. Особенно опасная ситуация может возникнуть для сооружений, находящихся в местах резкого изменения уклона пути.

Разумеется, подобный стохастический подход можно распространить на русловые и фильтрационные расчеты. В критерии надежности водопропускных сооружений в этом случае должны входить как конструктивные параметры (размеры отверстия и насыпи, характеристика укреплений дна и др.), так и региональные особенности рассматриваемого участка дороги (наиболее вероятное перемещение ливневых фронтов, связанное с характерной синоптической ситуацией в данном регионе, и др.) и должны быть

«завязаны» в стохастический функционал, имеющий временной тренд, например, из-за повышения устойчивости насыпи к фильтрации с течением времени или из-за одностороннего антропогенного воздействия на рассматриваемый участок дороги.

В самом общем случае задача о надежности сооружения состоит в определении вероятности того, что случайная функция $h(t)$, имеющая в момент времени t значение \tilde{h} , в будущий момент времени τ будет иметь значение \tilde{h} , ни разу не заходя в течение интервала времени (t, τ) в запретную область больше заданного значения h_1 , т. е. надо найти вероятность того, что в интервале времени $(t, t+T)$ выполняется неравенство

$$h_0 < h(t) < h_1,$$

где значение h_0 может отличаться от нуля (например, если надо обеспечить минимальную водоподачу каким-либо объектам).

Искомая вероятность недостижения границ к моменту времени $\tau = t+T$

$$P(\tau) = \int_{h_0}^{h_1} p(\tau, \tilde{h}) d\tilde{h}, \quad (3.38)$$

где $p(\tau, \tilde{h})$ удовлетворяет уравнению ФПК.

При пересечении случайным процессом $h = h(t)$ любой из границ плотность вероятности $p(\tau, \tilde{h})$ обратится в нуль, т. е. в качестве граничных условий выступают соотношения

$$p(\tau, h_0) = p(\tau, h_1) = 0 \quad \text{при } \tau > t.$$

Начальное условие при известной ординате случайного процесса \tilde{h} имеет вид

$$p(\tau, \tilde{h})|_{\tau=t} = \delta(\tilde{h} - \tilde{h}),$$

а при вероятностной начальной информации

$$p(\tau, \tilde{h})|_{\tau=t} = p_0(\tilde{h}).$$

Таким образом, для получения искомой вероятности, определяющей надежность, необходимо проинтегрировать уравнение ФПК при соответствующих начальных и граничных условиях, а затем подставить найденное решение в формулу (3.38).

ГЛАВА 4

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕЧНОЙ ГИДРОМЕТРИИ

4.1. Уравнение гидрометрической вертушки и оценка точности ее показания

Общая теория гидрометрических вертушек позволяет глубже изучить их метрологические свойства, в том числе такой важный вопрос, как поведение вертушек в турбулентном потоке. Однако для изучения последнего вопроса в самом общем случае надо привлечь специальные характеристики турбулентности (корреляционные и структурные функции). Поэтому авторы ограничились только частными случаями [143]. Вначале по результатам И. А. Арбузова исследована динамическая модель вертушки [72].

Для вывода дифференциального уравнения гидрометрической вертушки необходимо использовать основной закон динамики вращательного движения: производная по времени от момента количества движения L механической системы равна главному моменту M относительно той же точки всех внешних сил, приложенных к системе, т. е.

$$dL/dt = M. \quad (4.1)$$

Главный момент внешних сил состоит из ряда следующих моментов.

1. Вращающийся (полезный) момент, создаваемый набегающим на лопасти потоком жидкости. Для квадратичного закона сил сопротивления его определяют по следующей эмпирической формуле:

$$M_1 = A(u - k_r\omega)^2 \operatorname{sign}(u - k_r\omega), \quad (4.2)$$

где M_1 — вращающий (полезный) момент, $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$; A — коэффициент, зависящий от размеров и конфигурации ротора вертушки и параметров жидкости, кг ; u — скорость потока жидкости, $\text{м}/\text{с}$; k_r — геометрический шаг ротора вертушки, $\text{м}/\text{рад}$; ω — угловая скорость вращения ротора, $\text{рад}/\text{с}$; $\operatorname{sign}(u - k_r\omega)$ равен 1, если $u - k_r\omega > 0$, и -1 , если $u - k_r\omega < 0$.

2. Момент вязкого трения. Возникает от скольжения жидкости по поверхностям ходовой части вертушки. При работе вертушки создается осевое усилие, уравновешиваемое реакцией шарикоподшипников ходовой части. Экспериментально установлено, что тормозящий момент пропорционален квадрату угловой скорости:

$$M_2 = -B\omega^2 \operatorname{sign} \omega, \quad (4.3)$$

где B — коэффициент, зависящий от размеров ротора вертушки и вязкости жидкости и смазки, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

3. Момент сухого трения для подшипников качения. Его значение можно принять постоянным и не зависящим от нагрузки:

$$M_3 = -C \operatorname{sign} \omega, \quad (4.4)$$

где C — момент сухого трения, н·м.

В коэффициент C входит также момент сухого трения, создаваемый контактным устройством.

4. Момент количества движения для вращения с угловой скоростью ω . Его определяют по формуле

$$L = J\omega, \quad (4.5)$$

где J — момент инерции ротора вертушки ($\text{кг}\cdot\text{м}^2$), равный сумме собственного момента инерции ротора J_0 и момента инерции жидкости, увлекаемой ротором $J_{ж}$, т. е.

$$J = J_0 + J_{ж},$$

причем экспериментально установлено, что $J_0 \gg J_{ж}$.

Так как при обычной работе вертушки направление вращения ее ротора не меняется, то оно принято за положительное ($\omega > 0$). В этом случае уравнение (4.1) с учетом (4.2) — (4.5) имеет вид

$$2\pi(J_0 - J_{ж}) \frac{d\omega}{dt} + B\omega^2 + C = A(u - k_r\omega)^2 \operatorname{sign}(u - k_r\omega), \quad (4.6)$$

т. е. поведение гидрометрической вертушки в движущемся потоке жидкости описывают нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами.

Рассмотрим только два частных, но достаточно важных случая, связанных с использованием полученного уравнения.

1. Установившийся режим движения при $u = \text{const}$. При этом $\omega = \text{const} = n$, $u - k_r\omega > 0$, поэтому

$$Bn^2 + C = A(u - k_r n)^2.$$

Разделим обе части на A и обозначим

$$\frac{A}{B} = b, \quad C/A = c, \quad k_r = a.$$

Тогда после преобразований

$$bn^2 + C = u^2 - 2uan + a^2n^2,$$

или

$$u^2 - 2uan + a^2n^2 - bn^2 - c = 0,$$

т. е. получено квадратное уравнение вида $x^2 - px + q = 0$, решение которого

$$u = an \pm \sqrt{bn^2 + c} \quad (4.7)$$

представляет собой характеристическое уравнение вертушки.

Выясним физический смысл коэффициентов a , b и c . При $n = 0$ $u_0 = \sqrt{c}$, следовательно, $c = u_0^2$, где u_0 — порог чувствительности (начальная скорость). Продифференцируем (4.7) по n :

$$du/dn = a + bn/\sqrt{bn^2 + c}.$$

При $n = 0$

$$a = k_r = \left. \frac{du}{dn} \right|_{n=0}.$$

Следовательно, коэффициент a , равный геометрическому шагу вертушки, пропорционален тангенсу угла наклона кривой оси абсцисс в точке $n = 0$:

$$a = \operatorname{tg} \alpha.$$

при $n \rightarrow \infty$

$$du/dn \rightarrow a + \sqrt{b} = k_r + \sqrt{b} = k,$$

где k — гидравлический шаг вертушки (тангенс угла наклона линейной части градуированной кривой).

Из-за наличия момента вязкого трения жидкости всегда $k > k_r$.

Если $u_0 \ll (k - k_r)n$, что бывает при достаточно большом n , то $u = k_n$. В общем случае

$$u = k_r n + \sqrt{(k - k_r)^2 n^2 + u_0^2}.$$

Параметры характеристического уравнения k , k_r , u_0 можно найти для любой вертушки из ее свидетельства о градуировке.

2. Реакция вертушки на ступенчатое изменение скорости потока ($u = \text{const}$). Пусть при $t \leq 0$ $u = 0$ и $\omega = 0$, а при $t > 0$ u имеет постоянное значение больше нуля (в такой идеализированной ситуации легко найти аналитическое решение уравнения (4.6) и можно получить некоторые результаты по поведению гидromетрической вертушки при неустановившемся режиме).

Пусть $J = J_0 + J_{ж}$ является функцией только скорости u . Поэтому $J = \text{const}$ для всех $t > 0$. Разделив обе части уравнения (4.6) на A и обозначив

$$2\pi(J_0 - J_{ж})/A = \tilde{J},$$

получим

$$\tilde{J} d\omega/dt + b\omega^2 + u_0^2 = (u - k_r\omega)^2 \operatorname{sign}(u - k_r\omega).$$

Разделяя переменные

$$d\omega/[(k_r^2 - b)\omega^2 - 2uk_r\omega + (u^2 - u_0^2)] = (1/\tilde{J}) dt$$

и интегрируя, можно получить решение в виде

$$\omega = n [1 - \exp(-t/\tau)]/[1 - \eta \exp(-t/\tau)],$$

где n — угловая скорость ротора вертушки в установившемся режиме, определяемая из характеристического уравнения;

$$\eta = (uk_r - \sqrt{bu^2 + (k_r^2 - b)u_0^2}) / (uk_r + \sqrt{bu^2 + (k_r^2 - b)u_0^2});$$

$$\tau = \tilde{T} / (2 \sqrt{bu^2 + (k_r^2 - b)u_0^2}).$$

Величина τ имеет размерность времени, характеризует скорость изменения числа оборотов вертушки и условно может быть названа ее «постоянной времени». Постоянная времени зависит от скорости потока так, что с увеличением скорости u значение τ уменьшается, поэтому в пульсирующем потоке всегда будет превышать среднее значение скорости, измеряемое вертушкой, поскольку ротор ее раскручивается быстрее, чем замедляется.

В реальном турбулентном потоке дело обстоит несколько сложнее, так как на поведение вертушки начинают влиять форма пульсаций скорости, косоустройность и другие факторы. Поэтому представляется разумным стохастическое обобщение уравнения вертушки.

Ясно, что таким обобщением является уравнение ФПК, коэффициенты сноса и диффузии которого определяет динамическая модель (4.6) в зависимости от интенсивности и взаимной интенсивности шумов, происхождение которых связано с турбулентностью потока и вариациями технологических характеристик ходовой части. Авторы, однако, рассмотрели работу вертушки только на линейном участке градуированной кривой в установившемся режиме. В этом случае, применяя процедуру, изложенную в гл. 1, можно получить систему уравнений для моментов распределения плотности вероятности величины n . Из уравнения для первого начального момента (при условии, что интенсивностью внутренних шумов можно пренебречь) $b - a = -n_1$, где $a = (bk + 2u_{cp}) / (2k)$ — мода распределения, следует выражение для средней скорости потока, измеряемой вертушкой:

$$u_{cp} = kn_1 + kb/2.$$

В этом соотношении коэффициент b , определяющий расстояние от моды до центра распределения, вычисляют по формуле $b = -n_3 / (2n_2)$, где n_2 и n_3 — второй и третий центральные моменты.

Таким образом, окончательно получим искомое выражение

$$u_{cp} = \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m n_i -$$

$$- \frac{k}{4} \left[\sum_{i=1}^m \left(n_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m n_i \right)^3 / \sum_{i=1}^m \left(n_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m n_i \right)^2 \right],$$

где n_i — число оборотов ротора в единицу времени за i -й отсчет, об/с; m — число отсчетов за весь период измерения.

В соответствии с этой формулой средняя скорость отличается от скоростей, измеряемых обычным гидрометрическим способом. В связи с ее практическим применением возникают следующие вопросы: 1) какова асимметрия распределения числа оборотов ротора в единицу времени, т. е. какой знак имеет третий центральный момент, а, следовательно, занижает или завышает фактическую скорость стандартный гидрометрический способ ее измерения? 2) насколько существенны эти отклонения, следовательно, какова практическая необходимость их учета? 3) если все-таки их учитывать, то какова оптимальная продолжительность выдержки вертушки в точке для устойчивости статистической оценки второго и третьего центральных моментов, т. е. каково значение m ?

Имеющиеся данные натурных измерений, выполненных в ГГИ В. Г. Максимовым, показывают, что отклонения (они бывают и положительные и отрицательные, хотя первые чаще) колеблются для разных опытов в пределах нескольких процентов, хотя иногда превышают 10 %. Отклонение стабилизируется после нескольких десятков отсчетов, т. е. применение такого способа на практике требует довольно длительной выдержки вертушки в точке.

4.2. Методы приближенного представления случайных функций в задачах гидрометрии

При изучении природной среды возникает необходимость аналитически описать поля и процессы как случайные функции времени и координат вида

$$x = \bar{x}(l, t) + f(l, t), \quad (4.8)$$

где первый член правой части представляет собой фоновые изменения, второй — случайные вариации элемента x .

В общем случае для расчетной интерпретации уравнения (4.8) необходим значительный объем исходной информации, достаточный для получения соответствующих физических констант и корреляционно-статистических характеристик x .

В некоторых физических задачах достаточно воспроизвести лишь наиболее общие черты типичных реализаций функции (4.8). Именно в этом смысле изложены далее методы приближенной аппроксимации случайных функций.

Многие осредненные характеристики гидрологических элементов получают по данным измерений в отдельные сроки или в фиксированных точках пространства. Если бы функции, описывающие поле или процесс, имели детерминированный характер, то для определения осредненных значений элемента было бы достаточно выбрать репрезентативную реализацию из ансамбля этих функций и использовать формулы приближенного интегрирования. Например, если значения элемента зафиксированы в N моментов времени в интервале T_0 , то

$$\bar{x} = (1/T_0) \int_0^{T_0} P(t) dt,$$

где $P(t)$ — интерполяционная функция, на основе которой восстановлен процесс $x(t)$ в промежутках между дискретными измерениями его значений.

На самом же деле реализации $x(t)$ и $x(l)$ не сохраняют постоянства в фиксированных точках t_i или l_i , отражая лишь общие особенности пространственно-временных вариаций элемента. При этих условиях вместо точной аппроксимации одной реализации правомерно перейти к представлению ансамбля реализаций в виде уравнения регрессии \bar{x} по N дискретным измерениям x_i .

$$\bar{x} = a_0 + \sum_1^N a_i x_i. \quad (4.9)$$

Величина \bar{x} представляет собой средние значения элемента по отдельно взятым реализациям, отнесенным к интервалу времени или к области поля. Для определения \bar{x} используют данные непрерывной регистрации элемента или результаты дискретных измерений, число которых существенно превышает число точек или стандартных сроков наблюдений N . Выбор весовых коэффициентов a_i должен обеспечивать наилучшее приближение к средним значениям в интервале T_0 или L_0 , что достигают, применяя метод наименьших квадратов и вариационное исчисление.

Рассмотрим примеры таких аппроксимаций.

Общее число постов на реках СССР, где отмечается суточный ход в диапазоне уровней 0,5—1,0 м, достигает 3200, или более половины числа всех уровенных постов. Самописцами уровня воды оснащены далеко не все уровенные посты. В СССР действует 1880 установок самописцев уровня воды. На остальных постах, которых более 4000, ведут дискретные (срочные) наблюдения за уровнем: основные в 8 и 20 ч и дополнительные — через 2—6 ч в зависимости от частоты наблюдений, необходимой для регистрации волны паводка.

В современных исследованиях суточный ход уровня рассматривают как одну из характеристик гидрологического режима рек и прежде всего особенностей их питания. Примером такого исследования служит анализ наблюдений за уровнями на реках Закавказья, выполненный Г. Н. Хмаладзе [140]. Он типизировал графики колебания уровней и для каждого типа рекомендовал необходимые сроки наблюдений и зависимости для определения среднесуточного уровня. При этом веса двухсрочных наблюдений (в 8 и 20 ч) определены по сумме отклонений уровня от среднесуточного значения H_c за первую и вторую половину суток. Вместо рекомендуемой Наставлением расчетной формулы

$$H_c = 0,5(H_8 + H_{20})$$

получены другие зависимости с учетом того, в какой половине суток отмечены более высокие уровни. Для первой половины наилучшие результаты получены при

$$H_c = (H_8 + 2H_{20})/3.$$

Когда же подъем более значителен во второй половине, то рекомендовано использовать выражение

$$H_c = (2H_8 + H_{20})/3.$$

Но сам Хмаладзе отмечал, что в одном и том же пункте в зависимости от метеорологических условий, времени выпадения дождя, интенсивности снеготаяния и других факторов пик паводочной волны может проходить в разные часы суток. Отсюда вытекает прямая целесообразность определять веса срочных уровней на статистической основе. Иными словами, для вывода расчетных формул необходимо иметь достаточно репрезентативную выборку из ряда графиков колебания уровней за характерные фазы режима. В этом случае весовые коэффициенты определяют методом наименьших квадратов применительно к уравнению множественной линейной регрессии среднесуточного уровня по данным срочных наблюдений, записанным в форме (4.9), в которой значения x_i соответствуют срокам наблюдений в хронологическом порядке. Например, при двухсрочных наблюдениях x_1 соответствует уровням в 8 ч, x_2 — уровням в 20 ч.

Именно такой статистический анализ выполнили И. Ф. Карсев и Т. И. Яковлева на примере ряда рек Киргизии, Грузии и северо-запада европейской части СССР. Обработаны данные наблюдений за 30 сут паводочного периода. Суточный ход уровней на исследуемых постах различен: I — с пиками в первой и второй половине суток, II — с двумя или несколькими пиками и III — в виде монотонного спада или подъема. Действительный среднесуточный уровень определен как среднее арифметическое из 24 значений, снятых с ленты самописца через каждый час, а уравнения регрессии рассчитаны по отметкам уровня в стандартные сроки наблюдений.

Характерные графики хода уровня и соответствующие им параметры уравнения регрессии приведены на рис. 4.1 и в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Параметры уравнений для расчета среднесуточных значений уровня
(числитель — р. Джарылган — ст. Советское, 1969 г.,
максимальная амплитуда суточного хода 36 см;
знаменатель — р. Цхенискали — п. Хиди, 1977 г.,
максимальная амплитуда суточного хода 60 см)

Параметр уравнения регрессии	Вариант среднесуточных уровней воды		
	I	II	III
a_0	0,345/—0,294	—0,980/0,206	—0,467/—0,388
a_1	0,599/0,486	0,125/0,147	0,321/0,192
a_2	0,397/0,443	0,307/0,252	—0,057/0,230
a_3		0,227/0,295	0,251/0,121
a_4		0,348/0,276	0,182/0,198
a_5			0,210/0,184
a_6			0,088/0,072
σ см	1,20/1,69	0,96/0,77	0,91/0,72
r	0,99/0,99	0,99/0,99	0,99/0,99

В ней же указаны погрешности вычисления отметки среднесуточного уровня по статистическим зависимостям. Даже при весьма сложном изменении уровней в естественных условиях, например на горных и полугорных реках, в большинстве случаев достаточно четырехсрочных наблюдений за уровнем, но взятых с различными весовыми коэффициентами. Случайная погрешность определения H_c при этом составит 0,5—2,0 % амплитуды суточных колебаний уровня.

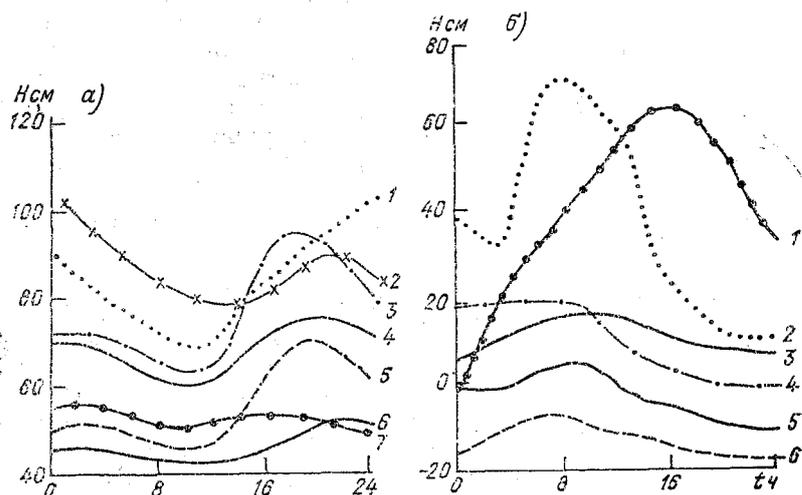


Рис. 4.1. Типовые графики суточного хода уровней р. Джарылган—ст. Советское в 1969 г., максимальная амплитуда суточного хода 36 см (а), и р. Цхенискали—п. Хиди в 1977 г., максимальная амплитуда суточного хода 60 см (б).

а: 1—29.05, 2—05.05, 3—30.05, 4—среднее, 5—02.05, 6—13.05, 7—12.05;
б: 1—31.05, 2—15.05, 3—среднее, 4—01.05, 5—29.05, 6—10.05.

В тех же условиях определена погрешность стандартного способа вычисления H_c как среднеарифметического из срочных значений. При сложном суточном ходе уровня погрешность вычисления его среднесуточных значений увеличивалась по сравнению с оптимальным вариантом в 1,5—2,0 раза. Использование вечерних и утренних уровней за смежные сутки в дополнение к двух- и четырехсрочным наблюдениям расчетных суток практически не увеличило точности определения H_c .

В гидрометрии, как и в речной гидравлике, традиционно рассматривают устойчивые эпюры скоростей по глубине потока, а для определения средней скорости на вертикали применяют различные методы приближенного интегрирования (Ньютона—Котеса, Чебышева, Гаусса и др.). Таковы формулы, рекомендуемые Наставлением. Однако приближенное интегрирование профиля скоростей было бы исчерпывающим решением только при условии,

если бы скоростное поле не изменялось во времени и не зависело от локальных факторов. В действительности же скорость в каждой точке потока непрерывно изменяется по абсолютному значению и направлению даже при неизменном расходе воды. Отсюда следует, что адекватность аналитических представлений скоростей их действительным значениям надо изучать по совокупности реализаций кинематической структуры потока в характерных условиях.

Рассмотрим два варианта задачи.

1. В качестве основы принято уравнение (4.9), которое интерпретировано для действительных значений средней скорости на вертикали, определяемых при полном числе точечных измерений скорости ($\bar{x} = v$). Этим значениям соответствуют различные варианты сокращенных измерений скоростей $\bar{x}_i = u_i$ в 1—3 и 5 точках вертикали (табл. 4.2). Параметры уравнений регрессии рассчитаны методом наименьших квадратов на ЭВМ. Тесноту регрессионной связи (4.9) характеризуют среднеквадратическое отклонение σ_p и коэффициент множественной корреляции r_p . Наряду с этим определена относительная погрешность вычисления средней скорости на вертикали δ_v с использованием формул для скоростей в точках, осредненных по всей совокупности данных, приведенных в Наставлении.

2. Если не удается получить необходимый объем детальных наблюдений, то можно использовать гидрометрические зависимости

Таблица 4.2

Результаты регрессионного анализа распределения осредненных скоростей по глубине русловых потоков и оценка погрешностей определения средних скоростей на вертикалях, %

Параметр уравнения регрессии						r_p	σ_p	δ_v
a_0	$a_{\text{пов}}$	$a_{0,2h}$	$a_{0,6h}$	$a_{0,8h}$	$a_{\text{дно}}$			

р. Луга — п. Толмачево, 1976 г. $\bar{v} = 0,47$ м/с
(43 измерения)

0,0197		0,324	0,347	0,294		0,99	1,4	-1,1
0,0181		0,571		0,372		0,99	2,9	-1,7

р. Колумбия (США), 1961—1963 гг. $\bar{v} = 2,01$ м/с
(105 измерений)

0,0838	-0,006	0,323	0,445	0,131	0,104	0,99	3,3	-0,8
0,0748		0,325	0,454	0,187		0,99	3,6	0,1
0,1412		0,539		0,402		0,98	5,2	1,8

Большой Ставропольский канал — головной шлюз-регулятор, 1973 г.
 $\bar{v} = 1,59$ м/с (30 измерений)

0,1339		0,266	0,0691	0,5638		0,99	1,06	7,26
0,0830		0,467		0,4650		0,99	1,69	1,63

для распределения скорости течения по глубине. При решении методических задач гидрометрии наиболее приемлема формула Базена — парабола второй степени с видоизменением [58]: в ней введена дополнительная степень свободы для точки максимума скорости $u_{\text{макс}}$, где $du/dz = 0$, которая может располагаться не обязательно на поверхности потока, а на высоте z_m , отсчитываемой от вершин выступов шероховатости дна. Предполагая заданной поверхностную скорость u_n , определяют скорость в любой точке вертикали:

$$u = u_n + (m/\sqrt{g}) v_* (\alpha_m^2 - 2\alpha_m \tilde{z} + 2\alpha_m \tilde{z} - \alpha_m^2 \tilde{z}^2), \quad (4.10)$$

где $m = 24 \text{ м}^{0,5}/\text{с}$ — эмпирический коэффициент Базена, $v_* = \sqrt{ghI}$ — динамическая скорость; $\tilde{z} = z/h$ — относительная высота точки над дном.

Параметр $\alpha_m = 1/\tilde{z}_m$ выражает дополнительную степень свободы формирования скоростного профиля и указывает на положение точки математического максимума скорости. Этим создается стимул для изучения кинематической структуры потока на основе измерений, так как, не зная характерных для данных условий значений α_m , нельзя использовать гидравлическую формулу (4.10).

Итак, если предполагать известными форму скоростного профиля $u(\tilde{z})$ и, соответственно, точное значение средней скорости на вертикали

$$v = \int_0^1 u(\tilde{z}) d\tilde{z}, \quad (4.11)$$

то весовые коэффициенты a_i для определения ее приближенного значения \bar{v} по данным измерений в точках можно установить на вариационной основе, в частности, методом Ритца [142].

Пусть

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^m a_i u(\tilde{z}_i).$$

Тогда в вариационной задаче отыскивают такие коэффициенты a_i , которые в диапазоне возможных значений $\alpha_{m1} - \alpha_{m2}$ обеспечивают минимум среднего значения функционала:

$$R = \frac{1}{\alpha_{m2} - \alpha_{m1}} \int_{\alpha_{m1}}^{\alpha_{m2}} \left[v - \sum_{i=1}^m a_i u(\tilde{z}_i) \right]^2 d\alpha_m \rightarrow \min. \quad (4.12)$$

Веса a_i определены при условии, что для всех $m > 1$

$$\sum_{i=1}^m a_i = 1.$$

Представив величины $u(\tilde{z}_i)$ согласно выражению (4.10), с учетом условия (4.11) получим функционал (4.12) в виде

$$R = \frac{1}{\alpha_{M_2} - \alpha_{M_1}} \int_{\alpha_{M_1}}^{\alpha_{M_2}} \left\{ \left[v - \sum_{i=1}^m a_i \left(u_{\Pi} + \frac{m}{\sqrt{g}} v_* (\alpha_M^2 - 2\alpha_M + 2\alpha_M \tilde{z}_i - \alpha_M^2 \tilde{z}_i) \right) \right]^2 + \lambda \sum_{i=2}^m a_i - 1 \right\} d\alpha_M,$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Отсюда после интегрирования получим многочлен $R(\alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}, a_i, \lambda)$. Его минимальное значение достижимо при

$$\partial R / \partial a_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

что позволяет получить систему уравнений

$$\varphi_i(\alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}, a_i, \lambda) = 0,$$

откуда и определим весовые коэффициенты a_i .

Наиболее интересно решение вариационной задачи применительно к основному способу измерения расходов воды, когда скорости течения определяют в двух точках: $0,2h$ ($\tilde{z} = 0,8$) и $0,8h$ ($\tilde{z} = 0,2$), а также при измерении скорости в одной точке $0,6h$ ($\tilde{z} = 0,4$), в диапазоне наиболее часто встречающихся значений $\alpha_M = 0,75 \dots 1,5$. Такое решение выполнил В. А. Ременюк [120]. Получены следующие формулы:

$$\bar{v} = 0,51u_{0,2h} + 0,49u_{0,8h},$$

$$\bar{v} = 0,96u_{0,6h}.$$

Хотя весовые коэффициенты близки к принятым в стандартных формулах (0,5 для $u_{0,2h}$ и $u_{0,8h}$, 1 для $u_{0,6h}$), их принципиально нельзя считать совпадающими. При измерении скорости в одной точке это различие составляет 4 %.

Определение средней скорости на вертикали тем точнее, чем больше точек измерения. Этот вывод, казалось бы, достаточно тривиален и его не следует специально подчеркивать. Однако еще нередко только по расхождению в значениях v , вычисленных различными способами для ограниченного числа реализаций, утверждают, например, что при измерениях в двух точках определение средней скорости v точнее, чем при измерениях в трех и даже пяти точках. Этот эффект объясняется вовсе не избыточностью измерительной информации, а только несоответствием расчетных формул конкретным особенностям объектов. Подобное явление установлено в результате исследований, выполненных отделом гидрометрии ГГИ на Большом Ставропольском канале, где средние скорости на вертикали измерены трехточечным способом, а при вычислении расхода воды использована формула Хойта—Гровера, в которой измерениям в точке $0,6h$ придан двойной вес:

$$v = 0,25(u_{0,2h} + 2u_{0,6h} + u_{0,8h}).$$

Эту формулу считают устаревшей. Она особенно неприменима при нарушенном распределении скоростей на вертикали, когда максимум расположен на значительной глубине от поверхности воды. Именно такие профили скоростей чаще всего отмечались в головном створе канала (рис. 4.2), что привело к систематическому завышению расходов воды на 3—4 %. В то же время формула

$$v = 0,5 (u_{0,2h} + u_{0,8h})$$

дала более правильные результаты, свободные от систематической погрешности. Таким образом, повышение дискретности измерений

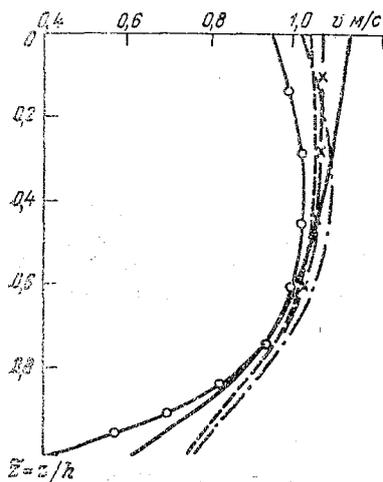


Рис. 4.2. Типичные эпюры распределения скоростей по вертикали в главном створе Большого Ставропольского канала.

приводит к возрастанию точности их результатов лишь при статистически обоснованных весовых коэффициентах a_i .

Существуют задачи геометризации пространственных форм характерные для геологии и гидрогеологии. В 30-х годах академик Н. Н. Павловский [111] предложил простой способ приведения неправильных сечений потока грунтовых вод к правильным на основе зависимости

$$B = B_1 h^m, \quad (4.13)$$

где B — ширина русла поверху при глубине h ; B_1 — ширина русла, соответствующая единичной глубине $h_1 = 1$.

Ясно, что кривая (4.13) не описывает действительную форму русла, а лишь отражает соотношение его основных размеров.

Идеи Павловского в дальнейшем развиты в работах В. Н. Гончарова [35], использовавшего более выразительную форму аппроксимации поперечных сечений русла в виде

$$h = h_{\max} (\xi/B)^m, \quad (4.14)$$

где ξ — расстояние от одного из уезов реки, $h_{\text{макс}}$ — максимальная глубина потока.

Выражение (4.14) Гончаров трактовал в статистическом смысле, считая, что оно адекватно характеризует обеспеченность глубин в реальных руслах.

Таким образом, реализации элемента во времени или пространстве (рис. 4.3) можно сопоставить с монотонными кривыми обеспеченных значений в виде степенных функций. Их аналитические достоинства общеизвестны и привлекают внимание современных исследователей [84, 158]. Такие функции, если представить их

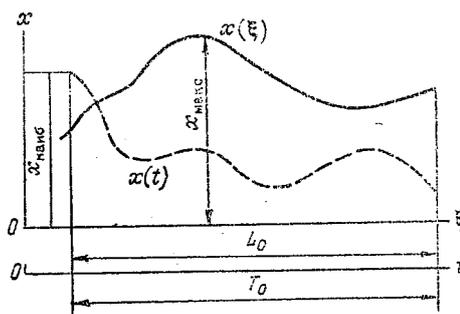


Рис. 4.3. Схема пространственных и временных реализаций случайных функций.

в обобщенном виде, выражают статистическую обеспеченность значений элемента x :

в пределах фиксированной длины L_0

$$x(\xi) = x_{\text{макс}} (\xi/L_0)^m, \quad (4.15)$$

в пределах фиксированного интервала времени T_0

$$x(\tau) = x_{\text{макс}} (\tau/T_0)^m, \quad (4.16)$$

где $x_{\text{макс}}$ — наибольшее значение элемента в интервале L_0 или T_0 .

Аргументы функций (4.15) и (4.16) представляют собой не что иное, как вероятности непревышения соответствующих значений x . Эти вероятности выражены здесь в геометрической форме, и мерой их служат относительные координаты $\eta = \xi/L_0$ или $\eta = \tau/T_0$. Точно решить эту задачу методами теории вероятности можно тогда, когда известен вид монотонной неслучайной функции случайного аргумента. Вероятностная аппроксимация позволяет по известным средним и наибольшим значениям аргумента достаточно точно найти соответствующее среднее значение нелинейной функции $f(x)$. При этом показатель степени m , характеризующий статистическую структуру поля, определяется на основе простых интегральных форм.

В качестве примера рассмотрим порядок вероятностной аппроксимации профиля поперечного сечения русла (рис. 4.4).

Пусть глубина потока изменяется от нуля на урезах до h_{\max} на некотором расстоянии от одного из них. Тогда при аргументе $\eta = \xi/B$ функция (4.15) приобретает вид

$$h = h_{\max} \eta^m. \quad (4.17)$$

После интегрирования получим выражение для площади водного сечения:

$$F = \int_0^1 h_{\max} \eta^m d\eta = h_{\max} B / (m + 1).$$

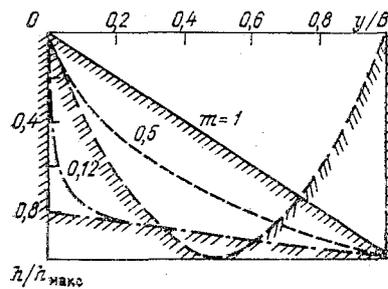


Рис. 4.4. Вероятностная аппроксимация поперечных сечений русла.

Геометрические профили обозначены штриховкой.

Отсюда

$$m = h_{\max} B / F - 1 = \varphi - 1.$$

Здесь величина $\varphi = Bh_{\max}/F$ служит характеристикой полноты сечения, ее значения колеблются от 1 до 2 соответственно для прямоугольных и треугольных профилей. При сложных формах естественных русел $\varphi > 2$.

На рис. 4.4 видно, что вероятностная аппроксимация (4.17) близка к геометрической форме, когда h_{\max} совпадает с граничным значением $h_{\xi=B}$. При треугольном русле это совпадение полное, а при трапециевидальном — лишь начиная с некоторого значения η . В прямоугольном русле граничное условие при $\eta = 0$ соблюдается в предельном случае, так как $\lim(\eta^m) = 1$ при $\eta \rightarrow 0$ и $m \rightarrow 0$. Зависимости (4.15) и (4.16) близки к реальной функции распределения, если $m \leq 2$. При значительной неравномерности распределения величины x ($m > 2$) необходимо использовать более сложные аппроксимации, например кривые Пирсона.

Геометризация водного сечения русла и его отсеков в форме (4.17) положена в основу интерполяционно-гидравлических моделей расхода воды, описанных далее. Зависимости (4.15) и (4.16) позволяют получить сравнительно простые выражения для оценки точности вычисления средних значений случайной функции по данным ее дискретных измерений.

В самом деле, если не делать никаких предположений о наиболее вероятных значениях элемента x в промежутке $\delta\xi$ между дискретными измерениями, то отклонение $|\delta_x|$ от ближайшего

измеренного x_i равно среднему значению корня квадратного из структурной функции:

$$|\delta_x| = 0,5 \sqrt{D_x(\xi)}. \quad (4.18)$$

Величина $D_x(\xi)$ содержит две составляющие:

1) дисперсию погрешности дискретизации, которую можно представить в виде среднего значения дифференциала функции (4.15) на интервале $\delta\xi = L_0/N$:

$$\begin{aligned} D_{x_n}(\xi) &= [(dx/d\xi)_{\text{ср}} \delta\xi]^2 = (mx_{\text{макс}}/L_0^m)(0,5L_0)^{m-1} \delta\xi^2 = \\ &= m^2 x_{\text{макс}}^2 / (2^{2m-2} N^2); \end{aligned}$$

2) дисперсию суммарной погрешности измерения элемента по концам интервала $\delta\xi$:

$$\delta_{x_{\text{с.л}}}^2 = 2\sigma_n^2.$$

Таким образом, среднюю суммарную погрешность определения среднего $\bar{x}_{\text{инт}}$ в интервале дискретизации $\delta\xi$ можно представить в виде

$$(\sigma_x)_{\text{инт}} = 0,5 [m^2 x_{\text{макс}}^2 / (2^{2m-2} N^2) + 2\sigma_n^2]^{0,5} \quad (4.19)$$

или в относительной форме

$$(\tilde{\sigma}_x)_{\text{инт}} = \{ [m^2 (m+1)^2 / (2^{2m} N^2)] (\bar{x}_L / \bar{x}_{\text{инт}}) + \tilde{\sigma}_n^2 / 2 \}^{0,5}, \quad (4.20)$$

где

$$\tilde{\sigma} = \sigma_n / \bar{x}_{\text{инт}}, \quad \bar{x}_L = x_m / (m+1).$$

Если среднее значение элемента по всей области его определения, содержащей N интервалов (дискретов), представить в виде

$$\bar{x}_L = \sum_1^N \bar{x}_{\text{инт}} / N,$$

то среднеквадратическое отклонение вычисления \bar{x}_L

$$\sigma_{\bar{x}_L} = (\sigma)_{\text{инт}} / \sqrt{N} = [m^2 \bar{x}_L^2 (m+1) / (2^{2m} N^3) + \sigma_n^2 / (2N)]^{0,5}. \quad (4.21)$$

Относительное значение этой погрешности

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}_L} = [m^2 (m+1)^2 / (2^{2m} N^3) + \tilde{\sigma}_n^2 / (2N)]^{0,5}, \quad (4.22)$$

где $\tilde{\sigma}_n = \sigma_n / \bar{x}_L$.

Выражение (4.22) может служить также оценкой погрешности определения площади фигур, образованной кривой $x(l)$ и осью l при условии, что длина отрезка L_0 измерена практически без погрешностей. В отличие от ранее предложенных формул [58], в структуру (4.22) в явном виде входят дисперсии составляющих систематических погрешностей (первый член в квадратных скобках) и случайных (второй член). Чем ближе форма сечения

к прямоугольнику ($m \rightarrow 0$), тем меньше систематическая погрешность. В пределе для прямоугольника сохраняется лишь случайная составляющая

$$\bar{\sigma}_F = 0,7\bar{\sigma}/\sqrt{N}$$

Сопоставим результаты расчета погрешности по формуле (4.22) с натурными данными по оценке точности измерения водных сечений для их различных форм при $m = 1$ и 2. С учетом морфометрической составляющей относительная погрешность измерения глубин $\sigma_h = 4\%$. На рис. 4.5 нанесены кривые, рассчитанные по

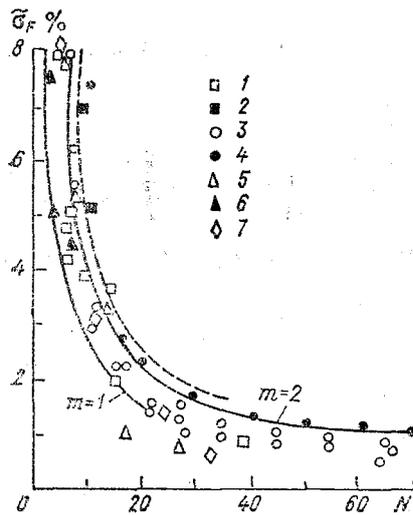


Рис. 4.5. Зависимость среднеквадратической погрешности определения площади водного сечения от числа промерных вертикалей по данным В. Н. Гончарова соответственно для поперечных и продольных профилей русла (1, 2), О. Н. Борсука (3), Н. К. Сибиряковой (4), В. А. Кудышкина (5), Г. Н. Хмаладзе (6), В. А. Акатова и А. В. Савельевой (7).

Пунктиром обозначены погрешности определения площади продольного сечения русла.

формуле (4.22), и данные наблюдений. Основная масса натуральных данных расположена в окрестности теоретических кривых, что указывает на их достоверность.

Формула (4.22) пригодна также для оценки точности определения площади продольных сечений (объем воды на участке рассчитывают при изучении деформации речных русел). В этом случае показатель степени m определяют по соотношению

$$m = Lh_{\max}/F_{\text{пр}} - 1,$$

где h_{\max} — наибольшая глубина, $F_{\text{пр}}$ — площадь водного сечения по продольному профилю длиной L .

Кривая, относящаяся к продольным профилям, на рис. 4.5 нанесена по данным В. Н. Гончарова, производившего наблюдения на Гусевском перекате р. Кубани.

Методика вероятностной аппроксимации имеет достаточную общность для использования при оценке точности определения осредненных характеристик элементов по данным дискретных измерений временных и пространственных реализаций. Так, формулу

(4.16) при соответствующей интерпретации ее параметров можно использовать при оценке погрешностей среднедекадного и среднемесячного стока воды, вычисляемых непосредственно на основе измеренных расходов воды. (Подобную методику не распространяют на случай использования кривых расходов воды, так как практическая непрерывность наблюдений за уровнями снимает вопрос о влиянии дискретизации измерений на точность получаемых данных.)

Вариативную часть выражения (4.8) — значения отклонений $f(l, t)$ в промежутке между измерениями можно получить методами случайных функций [106, 130]. Для простоты далее рассмотрена интерполяция измеренных значений стационарного случайного процесса, имеющего нулевое математическое ожидание $x = 0$, дисперсию $D_x = \sigma_x^2$ при дисперсии погрешностей измерения $D_{\text{и}} = \sigma_{\text{и}}^2$. Соответственно введены характеристики:

1) мера погрешности интерполяции

$$\varepsilon = \sigma_{\text{ин}}^2 / D_x, \quad (4.23)$$

2) мера погрешности измерения

$$\eta = \sigma_{\text{и}}^2 / D_x. \quad (4.24)$$

Если дисперсия D_x получена по данным измерений, то очевидно, что она содержит и их дисперсию $D_{\text{и}}$. Поэтому точные значения дисперсии при использовании формул (4.23) и (4.24) следует определять по разности

$$D_x = D_{x_s} - D_{\text{и}}, \quad (4.25)$$

где D_{x_s} — эмпирическая дисперсия элемента x , полученная непосредственно по данным измерений.

Значения элемента в промежутке между его измерениями x_i представлены линейной комбинацией

$$x_s = \sum_{i=1}^N P_i x_i, \quad (4.26)$$

где P_i — весовые коэффициенты i -х членов, разные для различных способов интерполяции.

Если x_0 — истинное значение интерполируемого элемента, то дисперсия осредненной погрешности интерполяции, очевидно, равна

$$\sigma_s^2 = \overline{\left(x_0 - \sum_{i=1}^N P_i x_i \right)^2} \quad (4.27)$$

(черта сверху служит знаком осреднения).

В зависимости от способа определения весовых коэффициентов P_i выражение (4.27) преобразуется в различные расчетные формулы. К числу наиболее простых относится линейная интер-

полюция (рис. 4.6). Если измерения сделаны в моменты t и $t + \tau_d$, где τ_d — интервал дискретности, то линейная интерполяция дает следующие значения элемента в промежутке между измерениями:

$$x(t + \tau) = (1 - \tau/\tau_d)x(t) + (\tau/\tau_d)x(t + \tau_d). \quad (4.28)$$

Весовые коэффициенты в этой формуле обратно пропорциональны промежуткам времени, отделяющим моменты t и $t + \tau_d$ от момента $t + \tau$, для которого выполнена интерполяция элемента.

Расчетную зависимость для меры погрешности линейной интерполяции в одном измерении получили О. А. Дроздов и А. А. Шепельский [58]. В нашей интерпретации выведенная ими формула имеет вид:

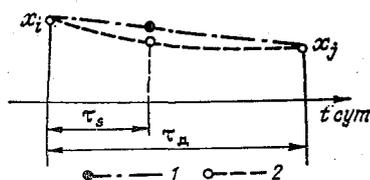


Рис. 4.6. Схема линейной (1) и оптимальной (2) интерполяции случайного процесса.

имеет вид:

$$\varepsilon_{\text{л}} = (\tau/\tau_d)b_x(\tau_d - \tau) + (1 - \tau/\tau_d)b_x(\tau) - (\tau/\tau_d)(1 - \tau/\tau_d) \times \\ \times b_x(\tau_d) + (1 + 2\tau^2/\tau_d^2 - 2\tau/\tau_d)\eta. \quad (4.29)$$

Выражение (4.29) содержит нормированную структурную функцию

$$b_x(\tau) = \overline{[x(t) - x(t + \tau)]^2}/D_x = 2[\tau_x(0) - r_x(\tau)]. \quad (4.30)$$

Лучшее приближение к действительной реализации $x(t)$ дает так называемая оптимальная интерполяция измеренных значений, широко применяемая для пространственной интерполяции метеорологических элементов [31].

Оптимальная интерполяция (см. рис. 4.6) выполнена на основе той же зависимости (4.26), но веса P_i выбраны так, чтобы мера погрешностей ε_0 имела минимальное значение: этот минимум обеспечен при условии

$$\sum_{j=1}^N r_{ij}P_j + P_i\eta = r_{s_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4.31)$$

где r_{ij} и r_{s_i} — значения нормированных автокорреляционных функций при времени запаздывания τ , равном интервалу между моментами измерения t_i и t_j или между моментом t_i и расчетным сроком t_s , для которого произведена интерполяция.

Расчетные формулы оптимальной интерполяции имеют вид:

$$x(t + \tau) = P(t) x(t) + P(t + \tau_d) x(t + \tau_d), \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_0 = 1 - \sum_{i=1}^N r_{s_i} P_i. \quad (4.33)$$

Весовые множители здесь представлены зависимостями:

$$P(t) = \frac{(1 + \eta) r(\tau) - r(\tau_d) r(\tau_d - \tau)}{(1 + \eta)^2 - [r(\tau_d)]^2},$$

$$P(t + \tau_d) = \frac{(1 + \eta) r(\tau_d - \tau) - r(\tau_d) r(\tau)}{(1 + \eta)^2 - [r(\tau_d)]^2}, \quad (4.34)$$

где $r(\tau)$, $r(\tau_d)$ и $r(\tau_d - \tau)$ — автокорреляционные функции процесса $x(t)$, взятые для его парных значений, разделенных временем запаздывания соответственно τ , τ_d и $(\tau - \tau_d)$.

Среднее время корреляции выражает параметр τ_k . Его вводят в аналитические выражения автокорреляционной функции как постоянную времени, например, при экспоненциальной аппроксимации

$$r(\tau) = \exp(-\tau/\tau_k). \quad (4.35)$$

Параметр τ_k служит одной из характеристик инерционных свойств процесса.

Особенность интерполяционных формул такова, что наибольшая мера погрешности бывает при расчете значений элемента по двум его измеренным значениям для середины интервала τ_d . Формулы (4.28) и (4.32) при подстановке в них соотношений (4.34) и $\tau = 0,5 \tau_d$ дают:

для линейной интерполяции

$$\max \varepsilon_L = 1,5 - 2r_x(0,5\tau_d) + 0,5r_x(\tau_d) + 0,5\eta, \quad (4.36)$$

для оптимальной интерполяции

$$\max \varepsilon_0 = 1 - 2[r_x(0,5\tau_d)]^2/[1 + \eta + r_x(\tau_d)]. \quad (4.37)$$

Сопоставим эффективности линейной и оптимальной интерполяций в случае сравнительно редких измерений при интервале дискретности $\tau_d \geq 2\tau_0$, когда $r_x(\tau_d) \approx 0$. Из формулы (4.22) $\max \varepsilon_L = 1,5 + 0,5\eta$, в то время как, согласно (4.37), $\max \varepsilon_0 = 1$.

Преимущество линейной интерполяции заключается в простоте вычислений, чем и объясняется ее широкое распространение в практике расчетов. Однако линейная интерполяция допустима лишь при достаточно высокой частоте наблюдений или, иначе говоря, при ограниченном интервале дискретности τ_d . Определим его допустимое значение $\tau_{доп}$, исходя из условия

$$\max \sigma_L \leq \sigma_x. \quad (4.38)$$

Для того чтобы получить приближенное решение, подставим в формулу (4.29) линейную аппроксимацию автокорреляционной функции

$$r(\tau) = 1 - \tau/\tau_0. \quad (4.39)$$

Тогда условие (4.38) примет вид

$$(\tau_{\text{доп}}/2\tau_0 + 0,5\eta)^{1/2} \leq 1,$$

откуда получим критерий допустимости линейной интерполяции

$$\tau_{\text{доп}} \leq 2(1 - 0,5\eta)\tau_0. \quad (4.40)$$

Допустимый интервал дискретности зависит от предельного времени корреляции τ_0 и меры погрешностей наблюдений η . Для абсолютно точных значений элемента $\tau_{\text{доп}} = 2\tau_0$.

Оптимальная интерполяция имеет свойства статистического сглаживания погрешностей наблюдений. Поэтому интерполированное значение элемента принципиально точнее измеренного. В самом деле, из формулы (4.37) при $\tau = 0$ получим

$$\varepsilon_0/\eta = 1/[1 + \eta + r(\tau_d)] < 1.$$

Формула (4.29) для линейной интерполяции при $\tau = 0$ дает $\varepsilon_d = \eta$, что означает сохранение погрешности измерений.

Для практики интересны погрешности интерполяции, осредненные по интервалу τ_d . Эта задача решена на основе уравнений (4.29) и (4.33) при использовании экспоненциальной аппроксимации автокорреляционной функции (4.35), а для меры погрешности ε_d , кроме того, связи (4.30)

В качестве одного из определяющих аргументов корреляционно-статистических зависимостей выступает соотношение τ_k и τ_d , характеристик связанности отдельных значений случайного процесса и дискретности измерений. С учетом важности этого соотношения для дальнейшего анализа введем параметр дискретности (частоты) измерений

$$\eta = \tau_k/\tau_d.$$

На рис. 4.7 сопоставлены меры погрешностей по вариантам интерполяции. В диапазоне значений параметра дискретности $\theta \leq 4$ зависимости для ε можно представить в виде следующих простых выражений:

$$\varepsilon_d = (5/3) \exp(-1,4\tau_k/\tau_d) + 0,5\eta, \quad (4.41)$$

$$\varepsilon_0 = \exp(-1,4\tau_k/\tau_d) + 0,5\eta. \quad (4.42)$$

Линейная комбинация (4.26) пригодна и для экстраполяции данных наблюдений (рис. 4.8). Хотя теоретически для предсказания значения x_s можно привлечь ряд из N предшествующих измерений, практически при экстраполяции опираются лишь на последнее. В наиболее простом варианте это последнее измеренное значение принимают для всего интервала до следующего измерения.

В этом случае меру погрешности экстраполяции оценивают выражением, непосредственно вытекающим из формулы (4.29) в предположении, что $\tau \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_{э1} = 2[1 - r(\tau_s)] + \eta. \quad (4.43)$$

На основе оптимальной экстраполяции результата последнего

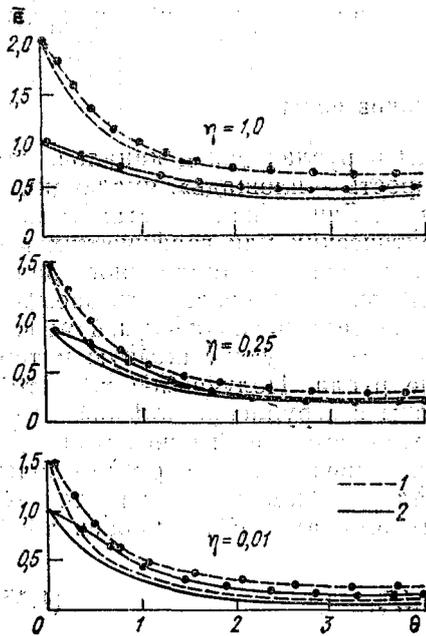
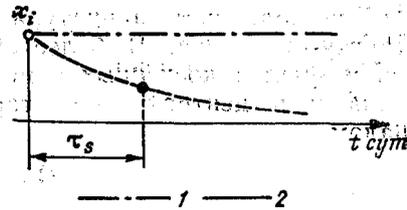


Рис. 4.7. Зависимость меры погрешностей линейной (1) и оптимальной (2) интерполяции от параметра дискретности.

Линии с точкой — интерполяция элемента на середину интервала между измерениями.

Рис. 4.8. Схема экстраполяции случайного процесса $x(t)$.

1 — экстраполяция постоянного значения, 2 — оптимальная экстраполяция.



измерения x_i на интервал τ_s после него получим следующее значение элемента

$$x_{эs} = x_i r(\tau_s) / (1 + \eta), \quad (4.44)$$

а соответствующая ему мера погрешности, согласно (4.33), равна

$$\varepsilon_{э2} = 1 - r^2(\tau_s) / (1 + \eta).$$

Для полноты изложения надо указать еще одну возможность аналитического представления гидрологических полей и процессов — посредством разложения их в ряды Фурье [117, 130]. При этом вопрос о необходимом интервале дискретности решают на основании теоремы В. А. Котельникова, согласно которой любую функцию времени, имеющую ограниченный спектр частот от 0 до f_s , можно представить последовательностью дискретных значений, следующих через интервал $0,5 f_s$. Что касается гидрологических процессов, то нет особых оснований распространять на них предположение об ограниченности спектра частот; напротив, поскольку составляющим спектра сопоставляют физические факторы, есте-

ственно не ограничивать диапазон частот при воспроизведении гидрологических процессов, носящих многофакторный характер. Этим объясняется та осторожность, которую проявляют гидрологи в использовании рядов Фурье. К тому же, при гармоническом анализе погрешность представления $x(t)$ не выражается в форме, сравнимой с зависимостями для погрешностей интерполяции. Подобное сравнение можно произвести только в численной форме после трудоемкой обработки конкретных реализаций случайных процессов и полей:

4.3. Гидрометрические модели расходов воды

Массовые измерения расходов воды в руслах рек и каналов, как известно, производят методом «скорость — площадь», являющимся разновидностью косвенных измерений. Синтез измеряемых элементов осуществляют на основе аналитических или графических моделей. Хотя понятие о модели расхода воды возникло много раньше других гидрологических моделей, она и до последнего времени весьма несовершенна. Так, при вычислении расхода воды, измеренного методом «скорость — площадь», используют линейную интерполяцию его элементов по ширине русла. Получаемое при этом так называемое «тело расхода» воды с огрубленно-плоскими гранями не более чем карикатура сложно-изменчивой кинематической структуры потока. В более строгом представлении расход воды, как результат косвенных измерений его элементов, скоростей течения u в центрах элементарных площадок dF , выражен интегралом

$$Q = \int_F u dF. \quad (4.45)$$

Однако в гидрометрии со времен А. Р. Гарляхера (XIX век) модель расхода воды дискретизируют не по элементарным площадям, а по элементарным расходам $q = vh$; их интеграл имеет вид

$$Q = \int_0^B vh db, \quad (4.46)$$

где v — средняя скорость на вертикали глубиной h .

Интегральная форма модели расхода воды предполагает непрерывную регистрацию его элементов. Между тем, в практике гидрометрии применяют дискретно-многоточечные способы измерения скоростей и глубин потока. Для этих способов и развивали гидрометрические модели расхода воды.

В последнее время в гидрометрии наблюдается стремление усовершенствовать существующие модели расхода воды как аналитическую основу синтеза данных измерений скоростей потока и площадей живых сечений [58, 121]. В частности, для реализации интеграционных методов измерения расхода воды (вертушкой с движущегося судна или при помощи ультразвукового зондирова-

ния) непосредственно используется модель (4.46) в той или иной ее расчетной форме [60].

Основным элементом применяемых в практике моделей служат так называемые частичные расходы воды q_s , при этом общий расход воды представляют в виде суммы

$$Q = \sum_{s=1}^N q_s. \quad (4.47)$$

Частичные расходы приурочены к отсекам живого сечения между скоростными вертикалями, на которых тем или

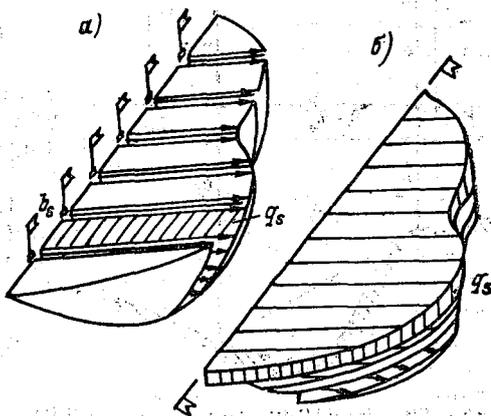


Рис. 4.9. Модели расходов воды: вертикальная (а) и горизонтальная дискретизация поля скоростей потока (б).

иным способом измерены средние по глубине скорости потока (на рис. 4.9 а вертикали обозначены флажками). Модель, построенная на вертикальном расчленении ее секундного объема, служит для вычисления расхода воды по данным точечных измерений скоростей или их интеграции по вертикали. Для интеграции скоростей вертушкой или их ультразвукового зондирования по ширине потока математическая модель расхода представлена как совокупность элементов q_s , образованных в результате расчленения ее скоростными горизонталями (см. рис. 4.9 б).

Выражение расхода воды (4.47) — общее для всех наиболее распространенных разновидностей метода «скорость — площадь». Своеобразие каждой модели проявляется в формах пространственной интерполяции элементов расхода воды. Эту операцию обычно производят на основе детерминированных представлений, не учитывая, что измеренные значения скоростей и глубин включают в себя случайные составляющие. Из числа детерминированных моделей известны:

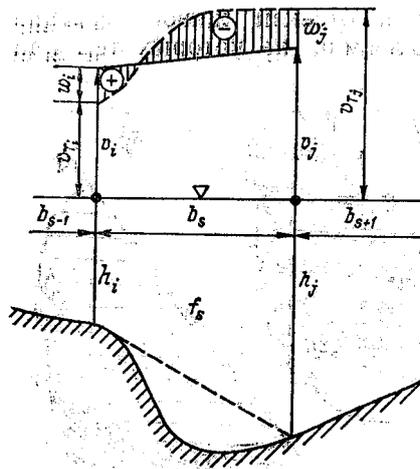
1. Среднесекиционная модель (стандарт ИСО 1100-73):

$$Q = \sum_{s=1}^N 0,25 (v_i + v_j) (h_i + h_j) b_s.$$

III. Модель Гарляхера:

$$Q = \sum_{s=1}^N 0,5 (q_i + q_j) b_s,$$

где q_i и q_j — элементарные расходы; b_s — ширина отсека (рис. 4.10).



В зарубежной литературе [159] рассмотрена так называемая центрально-секционная модель

$$Q = \sum_{s=1}^N 0,5 v_i h_i (b_s + b_{s+1}),$$

которая, как в этом нетрудно убедиться, тождественна модели Гарляхера.

При использовании моделей I и II не учтено распределение глубин между скоростными вертикалями. Этот недостаток в прак-

Рис. 4.10. Элементы расхода воды.

тике гидрометрии преодолен переходом к графическому и графоаналитическому способам обработки расхода воды. Но очевидно, что при недостаточном числе скоростных вертикалей построение эпюра элементарных расходов по ширине потока нельзя считать гидравлически обоснованным. А. П. Браславский (ГГИ) в 1959 г. разработал аналитическую форму интерполяции средних скоростей на вертикалях с учетом линейного изменения глубин по ширине отсека b_s . Ясно, что такое предположение правомерно лишь при достаточно большом числе скоростных вертикалей. В общем же случае очертание дна по ширине отсека надо считать далеким от прямой. Вот почему до настоящего времени широко применяют раздельное определение двух основных элементов расхода воды: средней скорости в отсеке между скоростными вертикалями v_s и площади его сечения f_s (модель III):

$$q_s = \sum_{s=1}^N 0,5 (v_i + v_j) f_s.$$

Эту модель называют линейно-детерминированной, поскольку измеренные средние скорости на вертикалях в ней приняты в качестве неслучайных величин, изменяющихся линейно по ширине отсека b_s . Достоинство модели III в том, что в ней допустима разная степень дискретизации поля скоростей и глубин: промерных вертикалей, как правило, в 2—3 раза больше, чем скоростных. При

применении эхолота площади отсеков f_s определяют непосредственно по батиграмме, т. е. на основе непрерывной регистрации глубин (в моделях I и II такая возможность исключена и непрерывная запись глубин становится ненужным избытком информации).

Вместе с тем, принятую в модели III форму линейной интерполяции скоростей нельзя считать совершенной. В самом деле, измеренное значение средних скоростей на вертикалях можно представить, по крайней мере, в виде двух составляющих:

$$v_i = v_{r_i} + w_i, \quad (4.48)$$

где v_{r_i} — детерминированная величина, гидравлически обусловленная глубиной, уклоном свободной поверхности и шероховатостью русла; w_i — случайная составляющая, включающая в себя отклонения скорости, вызванные их турбулентной пульсацией и погрешностями измерения.

Еще на заре развития современной гидрометрии Глушков призывал «отказаться от гипотезы о правильности течения и распределения глубин, от упрощенных схем».

Каждая составляющая в (4.48) должна предполагать различные способы пространственной интерполяции по ширине потока. Детерминированная величина v_{r_i} следует изменениям глубины на вертикалях в соответствии с формулой Шези—Маннинга:

$$v_{r_i} = a_s h^{2/3},$$

где параметр $a_s = 10,5/n$ принят постоянным в отсеке (аналогичный параметр, отнесенный к потоку в целом, использовал М. А. Великанов при построении плана течений), n — коэффициент шероховатости.

Случайная составляющая w представляется как отклонение измеренной средней скорости на вертикали от ее гидравлически обусловленного значения

$$w_i = v_i - v_{r_i}.$$

Но значения w на промежуточных вертикалях являются случайными функциями поперечной координаты, и, следовательно, для осредненного по ширине отсека значения w_s правомерно принять

$$w_s = K_s (w_i + w_j), \quad (4.49)$$

где K_s — весовой коэффициент, зависящий от корреляции значений w_i , что можно учесть методами оптимальной интерполяции.

В простейшем случае допустима линейная интерполяция, при которой $K_s = 0,5$.

С использованием отдельного представления составляющих v_r и w создана линейная интерполяционно-гидравлическая модель IV:

$$Q = \sum_{s=1}^N [a_s h_s^{2/3} + 0,5 (v_i + v_j - a_s h_i - a_s h_j)] f_s.$$

При всех достоинствах модели IV необходимо также отметить неполное соблюдение ее предпосылки — согласованного распределения глубин и средних скоростей на вертикалях (в подобных случаях более предпочтительна модель III). В связи с этим правомерно построить комбинированную модель (V), в которой расходы воды представлены долями значений, полученных на основе моделей III и IV:

$$Q = KQ_{III} + (1 - K)Q_{IV},$$

где K — весовой коэффициент, отражающий степень согласованности распределения скоростей и глубин на вертикалях.

Представим K в виде осредненных модулей разности обеспеченностей скоростей P_v и глубин P_h на скоростных вертикалях общим числом N_B :

$$K = (1/N_B) \sum_1^{N_B} |P_v - P_h|_i.$$

Функции распределения P_v и P_h представлены по методу геометрических вероятностей, согласно (4.15):

$$P_{v_i} = (v_i/v_{\max})^{1/m_v}, \quad (4.50)$$

$$P_{h_i} = (h_i/h_{\max})^{1/m_h}, \quad (4.51)$$

где v_{\max} и h_{\max} — максимальные скорости и глубины на вертикалях, зафиксированные при измерении данного расхода воды, m_v и m_h — параметры функции распределения.

Для оценки m_v и m_h можно использовать метод максимального правдоподобия Фишера, в соответствии с которым на примере m_v эта оценка имеет вид

$$m_v = \arg(\max L) = \arg\{(\partial L/\partial m_v) = 0\}, \quad (4.52)$$

где L — функция максимального правдоподобия:

$$L = \ln(P_1, P_2, \dots, P_{N_B}). \quad (4.53)$$

Вероятности P_i реализации значений v_i выражены производной функций распределения (4.50):

$$P_i = (1/m_v) (v_i/v_{\max})^{(1-m_v)/m_v}. \quad (4.54)$$

Тогда при выполнении процедуры (4.53) с подстановкой (4.54) получаем для распределения скоростей и глубин:

$$m_v = (1/N_B) \sum_1^{N_B} \ln(v_{\max}/v_i). \quad (4.55)$$

$$m_h = (1/N_B) \sum_1^{N_B} \ln(h_{\max}/h_i). \quad (4.56)$$

Таким образом, данные измерений элементов каждого расхода воды позволяют определить параметры функций распределения P_v и P_h , а следовательно, и весовой коэффициент K . Тем самым модель V становится расчетной зависимостью, которую можно использовать при обработке расхода воды.

Характеристики точности моделей расхода воды исследованы по специальной программе с использованием ЭВМ ЕС-1045 на примере гидрологических постов, находящихся на реках с различными размерами, режимами и условиями наблюдений: р. Кура — с. Ликани, р. Ока — г. Муром, р. Москва — д. Нестерово и г. Звенигород [121, 129]. По каждому створу составлены совокупности из 15—20 надежных измерений, относящихся к разным фазам водного режима и выполненных с разной детальностью (при $N_v = 7 \dots 15$ и при двух- и пятиточечном способе измерения скорости на вертикали). Расчеты проведены для вариантов сокращения числа скоростных вертикалей до $N_v = 5$ и $N_v = 3$ независимо от их полного числа при измеренных расходах воды. Каждый расход воды вычислен по одной из шести моделей при разном расположении сокращенного числа скоростных вертикалей по ширине потока. Полученные по каждой модели значения сопоставлены с «эталонным» значением $Q_{лд}$, определяемым по модели III при полном числе скоростных вертикалей. По ряду относительных отклонений

$$\delta Q = (Q - Q_{лд})/Q_{лд},$$

полученному отдельно для каждого поста, варианта сокращения N_v и модели, подсчитаны средние статистические характеристики: математическое ожидание погрешностей \bar{m}_{Q_k} и суммарное среднеквадратическое отклонение \bar{s}_{Q_k} , выражающие точность модели для конкретного створа. Затем найдены обобщенные характеристики точности моделей для всех постов: \bar{m}_Q , \bar{s}_Q и среднеквадратическое значение относительной случайной погрешности

$$\bar{\sigma}_Q = \sqrt{\bar{s}_Q^2 - \bar{m}_Q^2}.$$

Результаты численных экспериментов (рис. 4.11) указывают на явное преимущество вероятностно-гидравлической модели V и полную непригодность среднесекционной модели I. Естественно, что с повышением дискретности измерения различие в погрешностях моделей снижается и, вообще говоря, при достаточно большом числе скоростных вертикалей N_v все модели теоретически должны приводить к выравниванию погрешностей. В этом можно убедиться, сопоставив значения \bar{s}_Q для $N_v = 3$ и $N_v = 5$ (исключение составляет модель I). Главное достоинство вероятностно-гидравлической модели состоит в том, что она по сравнению с другими многократно снижает систематическую погрешность $\bar{m}_{Q, в 3-6}$ раз по сравнению с моделями II—IV и почти на два порядка по сравнению с I. Поразительно, что именно эта среднесекционная

модель I положена в основу международного стандарта ИСО 1100-73 «Измерение расходов жидкости в открытых руслах». К счастью, в системе гидрологических наблюдений в СССР применяют модели III и IV, свободные от недостатков модели I. Вероятностно-гидравлическая модель обладает широкой возможностью адаптации к разнообразным гидравлико-морфологическим условиям измерений. Ее использование позволит практически исключить систематические погрешности измерения расходов воды,

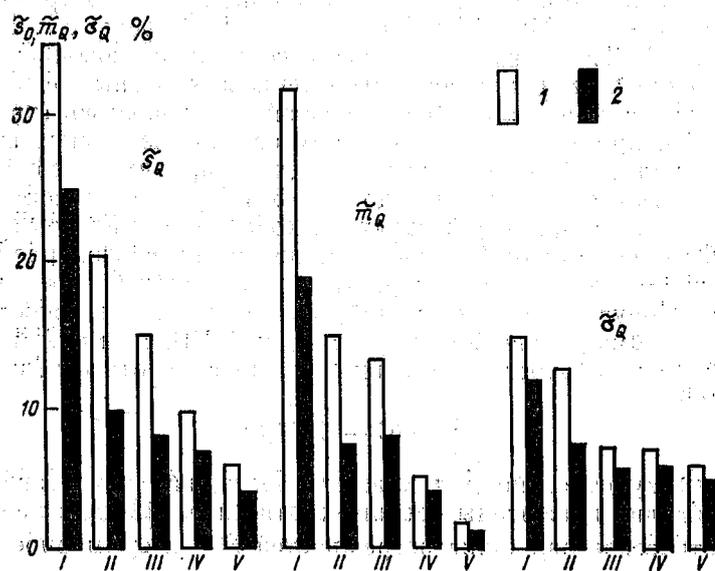


Рис. 4.11. Сравнительная диаграмма погрешностей сокращенных измерений по вариантам моделей расходов воды при трех (1) и пяти (2) скоростных вертикалях.

что приведет к дальнейшему повышению надежности гидрометрических данных о стоке рек.

В построении моделей расхода воды, основанных на горизонтальной дискретизации поля скорости потока, важную роль играет аппроксимация (4.15), позволяющая выразить среднюю скорость на вертикали в функции геометрической вероятности ξ/B . В самом деле, согласно формуле Шези — Маннинга,

$$v = ah^{2/3}, \quad (4.57)$$

где $a = \sqrt{I}/n$. Подставляя в (4.57) значения h по (4.14), получим

$$v = ah_{\max}^{2/3} (\xi/B)^{2(\varphi-1)/3}. \quad (4.58)$$

Функция (4.58) выражает закон распределения средних скоростей v по ширине потока B . Что касается распределения местных

скоростей u по вертикали, то в методическом отношении целесообразно использовать для описания их распределения параболу Базена с введенным авторами параметром α_m (4.10).

На основании изложенных предпосылок и при условии, что для данного сечения параметры a , α_m и уклон I сохраняют постоянные значения на всех вертикалях, создана следующая модель расхода воды:

$$Q = \int_{z=0}^h \int_{\xi=0}^B \left[ah_{\text{макс}}^{2/3} (\xi/B)^{\frac{2(\varphi-1)}{3}} + m\sqrt{I} h_{\text{макс}}^{1/2} (\xi/B)^{\frac{\varphi-1}{2}} \right] \times \\ \times \left[0,33\alpha_m^2 - \alpha_m + 2\alpha_m \frac{z}{h_{\text{макс}} (\xi/B)^{\varphi-1}} - \alpha_m^2 \frac{z^2}{h_{\text{макс}}^2 (\xi/B)^{2(\varphi-1)}} \right] d\xi dz. \quad (4.59)$$

Если интерполяционно-гидравлические варианты определения расходов воды требуют многоточечных измерений скорости, то выражение (4.59) предполагает регистрацию лишь ограниченного числа интегрально-осредненных параметров. В этом состоит особое достоинство модели (4.59), обеспечивающее возможность ее эффективного применения при ускоренных (сокращенных) измерениях расхода воды.

Для измерения расходов воды с движущегося судна в последнее время разработан специальный комплект приборов «Створ», состоящий из вертушки на гидрофлюгере, эхолота и регистрирующих и вычислительных блоков. При движении судна непрерывно регистрируют угол отклонения гидрофлюгера α , результирующую скорость течения u_p и глубину h (рис. 4.12 и 4.13).

Одновременно вычислительный блок выполняет операцию интегрирования элементарных расходов воды $hu_p \sin \alpha$ за время t от начала движения судна. После завершения перехода от одного берега к другому с затратой времени T получают результат измерения — так называемый фиктивный расход воды, соответствующий осредненной по сечению поверхностной скорости:

$$Q_{\text{п}} = 0,5 \int_0^T u_p^2 h \sin 2\alpha dt, \quad (4.60)$$

где u_p — результирующая скорость, измеренная вертушкой гидрофлюгера.

В общем случае вертушечный узел опускают на некоторую глубину от поверхности s , чтобы исключить влияние волнения и качки судна на показания приборов. Но тогда интеграция элементарных расходов возможна на меньшей, чем по урезам, ширине русла (см. рис. 4.12)

$$B_s = B - (b_{\text{л}} - b_{\text{п}}) = B(1 - \beta),$$

где $\beta = (b_{\text{л}} + b_{\text{п}})/B$.

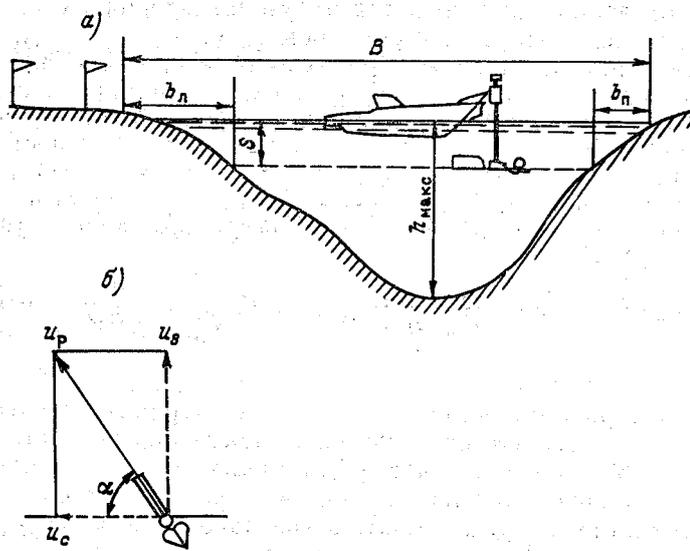


Рис. 4.12. Общая схема интеграционных измерений расходов воды с движущегося судна (а), и разложение вектора результирующей скорости на составляющие (б).

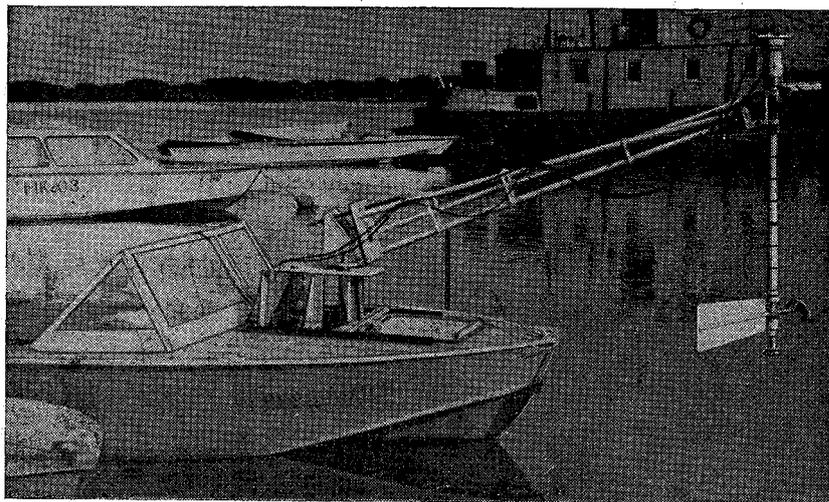


Рис. 4.13. Общий вид гидрометрической установки «Створ».

Скорость течения на глубине s в соответствии с уравнением скоростного профиля на вертикали (4.10) имеет вид

$$u_s = ah^{2/3} + m\sqrt{I}h^{1/2}[0,33\alpha_m^2 - \alpha_m + 2\alpha_ms/h - (\alpha_ms/h)^2].$$

Обратимся к интегралу (4.59) и введем в него элементарное перемещение $d\xi = u_p \cos \alpha dt$. Далее, используя вероятностную аппроксимацию распределения глубин и средних скоростей на вертикалях, получим геометризованную модель фиктивного расхода в пределах фактической ширины его интеграции b ($1-\beta$):

$$Q_s = \int_{\beta B}^B \left[\bar{a}h_{\max}^{5/3} (\xi/B)^{5(\varphi-1)/3} + \alpha_m m \sqrt{I} h_{\max}^{3/2} (\xi/B)^{3(\varphi-1)/2} - 0,67\alpha_m^2 m \sqrt{I} h_{\max}^{3/2} (\xi/B)^{3(\varphi-1)/2} - 2\alpha_m m \sqrt{I} sh_{\max}^{1/2} (\xi/B)^{(\varphi-1)/2} + 2\alpha_m^2 m \sqrt{I} sh_{\max}^{1/2} (\xi/B)^{(\varphi-1)/2} - \frac{\alpha_m^2 s^2 m \sqrt{I}}{h_{\max}^{1/2} (\xi/B)^{(\varphi-1)/2}} \right] d\xi. \quad (4.61)$$

Важнейшая методическая задача — установление зависимости для перехода от фиктивных значений Q_s к действительному расходу воды Q . В гидрометрии достаточно изучен так называемый поплавоочный коэффициент

$$K_F = Q/Q_{\Pi},$$

где Q_{Π} — фиктивный расход воды, определенный по значениям поверхностной скорости u_{Π} , осредненной по площади поперечного сечения F ; $Q_{\Pi} = \bar{u}_{\Pi} F$.

Чтобы использовать накопленные данные о коэффициенте K_F , необходимо результаты измерения фиктивного расхода воды Q_s преобразовать в значения Q_{Π} .

После интегрирования (4.61) получим

$$Q_s = \frac{3\bar{a}h_{\max}^{5/3}}{5\varphi-2} B \left(1 - \beta^{\frac{5\varphi-2}{3}}\right) + \frac{2\alpha_m m h_{\max}^{3/2} \sqrt{I}}{3\varphi-1} B \left(1 - \beta^{\frac{3\varphi+1}{2}}\right) - \frac{1,34\alpha_m^2 m h_{\max}^{3/2} \sqrt{I}}{3\varphi-1} B \left(1 - \beta^{\frac{3\varphi-1}{2}}\right) - \frac{4\alpha_m m h_{\max}^{1/2} s \sqrt{I}}{\varphi+1} B \left(1 - \beta^{\frac{\varphi+1}{2}}\right) + \frac{4\alpha_m^2 m h_{\max}^{1/2} s \sqrt{I}}{\varphi+1} B \left(1 - \beta^{\frac{\varphi+1}{2}}\right) - \frac{2\alpha_m^2 m s^2 \sqrt{I}}{h_{\max}^{1/2} (3-\varphi)} B \left(1 - \beta^{\frac{3-\varphi}{2}}\right). \quad (4.62)$$

Соответственно при $s=0$ и $\beta=0$ определим фиктивный расход, соответствующий интеграции поверхностных скоростей течения:

$$Q_{\Pi} = \frac{3\bar{a}h_{\max}^{5/3}}{5\varphi-2} B + \frac{2\alpha_m m h_{\max}^{3/2} \sqrt{I}}{3\varphi-1} B - \frac{1,34\alpha_m^2 m h_{\max}^{3/2} \sqrt{I}}{3\varphi-1} B. \quad (4.63)$$

В зависимости (4.62) и (4.63) входят осредненные значения двух параметров — гидравлического \bar{a} и кинематического α_m . Из них наиболее неопределенным является параметр \bar{a} , так как он зависит от коэффициента шероховатости русла n , который, как известно, изменяется в широких пределах и не поддается надежной независимой оценке. Поэтому основной результат интеграционных измерений — значение Q_s целесообразно использовать для определения именно \bar{a} и на этой основе идентифицировать модель расхода воды:

$$\begin{aligned}
 Q_{\Pi} = & \frac{Q_s}{(1 - \beta^{(5\varphi - 2)/3})} - \frac{2\alpha_m h_{\max}^{3/2} m \sqrt{I} (1 - \beta^{(3\varphi - 1)/2})}{(3\varphi - 1) (1 - \beta^{(5\varphi - 2)/3})} B + \\
 & + \frac{1,34\alpha_m^2 h_{\max}^{3/2} m \sqrt{I} (1 - \beta^{(3\varphi - 1)/2})}{(3\varphi - 1) (1 - \beta^{(5\varphi - 2)/3})} B + \\
 & + \frac{4\alpha_m h_{\max}^{1/2} s m \sqrt{I} (1 - \beta^{(\varphi + 1)/2})}{(\varphi + 1) (1 - \beta^{(5\varphi - 2)/3})} B - \frac{4\alpha_m^2 h_{\max}^{1/2} s m \sqrt{I} (1 - \beta^{(\varphi + 1)/2})}{(\varphi + 1) (1 - \beta^{(5\varphi - 2)/3})} \times \\
 & \times B + \frac{2\alpha_m^2 s^2 m \sqrt{I} (1 - \beta^{(3 - \varphi)/2})}{h_{\max}^{1/2} (3 - \varphi) (1 - \beta^{(5\varphi - 2)/3})} B + \frac{2\alpha_m m \sqrt{I} h_{\max}^{3/2} B}{3\varphi - 1} - \\
 & - \frac{1,34\alpha_m^2 m \sqrt{I} h_{\max}^{3/2} B}{3\varphi - 1}, \tag{4.64}
 \end{aligned}$$

Действительное значение расхода воды

$$Q = K_F Q_{\Pi}. \tag{4.65}$$

Приближенное значение K_F можно вычислить по гидравлическим формулам. Важно иметь в виду, что эта величина не тождественна отношению средней скорости на вертикали к поверхностной (различие может достигать 50%). Поэтому для определения K_F равномерно применять формулы, полученные из уравнений эпюры скоростей на вертикалях. К сожалению, так поступают немногие методисты. Зависимости для K_F надо устанавливать с учетом характеристик кинематической структуры потока в поперечном сечении русла. Одну из таких формул получили авторы [56]. Для относительно широких русел, при $B/h_{\text{ср}} \geq 50$, можно рекомендовать упрощенное выражение

$$K_F = 0,77 + \sqrt{\tilde{C} - 3,8}, \tag{4.66}$$

где $\tilde{C} = c/\sqrt{2g} = 3,8$.

Один из наиболее простых вариантов акустического метода измерения расходов воды основан на ультразвуковом зондировании скоростей течения по горизонтам в прямом и обратном направлении под углом α к динамической оси потока, когда в качестве ре-

зультата измерения получают скорость, осредненную по горизонтали — лучу зондирования на глубине s (рис. 4.14). Гидравлическая зависимость для этой скорости имеет вид

$$\bar{u}_{sL} = \frac{1}{L - (l_n + l_d)} \int_{l_n + l_d}^L \{ \bar{a}h^{2/3} + m\sqrt{l}h^{1/2} [\alpha_m - 0,67\alpha_m^2 - 2\alpha_m s/h + 2\alpha_m^2 s/h - (\alpha_m s/h)^2] \} d\xi. \quad (4.67)$$

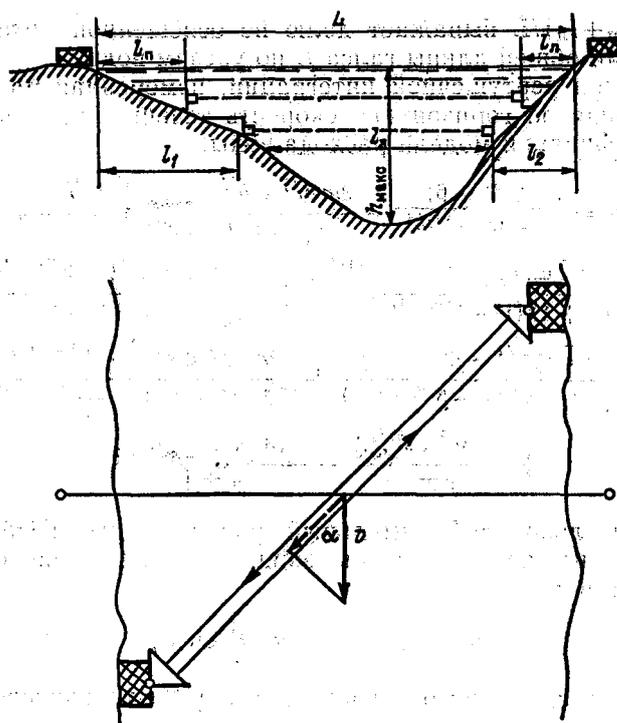


Рис. 4.14. Схема ультразвуковых измерений скоростей речного потока.
 a — поперечное сечение, b — план русла.

Все геометрические элементы здесь относятся к поперечному сечению потока по косому галсу зондирования скоростей.

Как и при вертушечных измерениях, скоростную горизонталь практически приходится располагать на глубине s ниже уровня воды, чтобы исключить помехи для распространения ультразвукового луча, вызванные аэрацией поверхностного слоя и волнением. Выражение для осредненной по длине L ($1 - \beta$) скорости течения

на глубине s имеет вид

$$u_{sL} = \frac{1}{1-\beta} \left[\frac{3ah^{2/3}}{2\varphi+1} \left(1-\beta^{\frac{2\varphi+1}{3}}\right) + \frac{2m\sqrt{I}\alpha_m h^{1/2}}{\varphi+1} \left(1-\beta^{\frac{\varphi+1}{2}}\right) - \frac{1,34m\sqrt{I}\alpha_m^2 h^{1/2}}{\varphi+1} \left(1-\beta^{\frac{\varphi+1}{2}}\right) - \frac{4m\sqrt{I}\alpha_m s}{(3-\varphi)h^{1/2}} \left(1-\beta^{\frac{3-\varphi}{2}}\right) + \frac{4m\sqrt{I}\alpha_m^2 s}{(3-\varphi)h^{1/2}} \left(1-\beta^{\frac{3-\varphi}{2}}\right) - \frac{2m\sqrt{I}\alpha_m^2 s^2}{(5-3\varphi)h^{3/2}} \left(1-\beta^{\frac{5-3\varphi}{2}}\right) \right], \quad (4.68)$$

где $\beta = (l_{\pi} + l_{\pi})/L$ выражает долю не освещенной акустическими измерениями общей длины галса L по урезам воды.

Как и при вертушечной интеграции, измеренная на глубине s и осредненная по горизонтали скорость течения u_{sL} использована для идентификации модели расхода воды:

$$u_{\pi} = \frac{u_s(1-\beta)}{1-\beta^{(2\varphi+1)/3}} - \frac{3m\sqrt{I}\alpha_m h_{\max}^{1/2} (1-\beta^{(\varphi+1)/2})}{(\varphi+1)(1-\beta^{(2\varphi+1)/3})} + \frac{1,34m\sqrt{I}\alpha_m^2 h_{\max}^{1/2} (1-\beta^{(\varphi-1)/2})}{(\varphi+1)(1-\beta^{(2\varphi+1)/3})} + \frac{4m\sqrt{I}\alpha_m s (1-\beta^{(3-\varphi)/2})}{h_{\max}^{1/2} (3-\varphi)(1-\beta^{(2\varphi+1)/3})} - \frac{4m\sqrt{I}\alpha_m^2 s (1-\beta^{(3-\varphi)/2})}{h_{\max}^{1/2} (3-\varphi)(1-\beta^{(2\varphi+1)/3})} + \frac{2m\sqrt{I}\alpha_m^2 s^2 (1-\beta^{(5-3\varphi)/2})}{h_{\max}^{3/2} (5-3\varphi)(1-\beta^{(2\varphi+1)/3})} + \frac{2m\sqrt{I}\alpha_m h_{\max}^{1/2}}{\varphi+1} - \frac{1,34m\sqrt{I}\alpha_m^2 h_{\max}^{1/2}}{\varphi+1}. \quad (4.69)$$

Следовательно, действительный расход воды, независимо от глубины s , на которой поток зондируют ультразвуком, можно представить в виде

$$Q = K_L Q_L^{\Phi} = K_L u_{\pi L} F_{\Gamma} \sin \alpha, \quad (4.70)$$

где F_{Γ} — площадь живого сечения по галсу ультразвукового зондирования.

Входящий в (4.70) коэффициент K_L представляет собой отношение средней скорости течения v_L в сечении к осредненной по длине L поверхностной скорости:

$$K_L = v_L / u_{\pi L}. \quad (4.71)$$

На участках квазиравномерного движения, где обычно располагаются гидрометрические створы, коэффициент K_L , относящийся к осредненным скоростям течения по косому галсу L , можно считать совпадающим с величиной

$$K_B = v / u_{\pi B},$$

где v — средняя скорость в поперечном сечении потока, нормаль-

ном к его направлению; $u_{пв}$ — поверхностная скорость, осредненная по ширине русла B .

О коэффициенте K_B в гидрометрической литературе мало сведений, однако он связан с поплавочным коэффициентом K_F , который достаточно изучен [58]:

$$K_B = [(2\varphi^2 + \varphi)/(5\varphi - 2)] K_F. \quad (4.72)$$

Рассмотрим вариант ультразвукового зондирования скоростей потока на нескольких горизонтах. Из приведенных гидравлико-морфометрических соотношений можно получить выражение для расхода воды в ложбине — нижней части русла, отсеченной горизонтально ультразвукового зондирования по лучу $L_л$:

$$Q_л = \sin \alpha \int_{l_л}^L u_{h-s} (h-s) dy = L \left[\frac{3\bar{a}h_{\max}^{5/3}}{5\varphi-2} \left(1 - \beta_л \frac{5\varphi-2}{3}\right) - \frac{2\alpha_m m \sqrt{I} sh_{\max}^{1/2}}{\varphi+1} \left(1 - \beta_л \frac{\varphi+1}{2}\right) + \frac{1,34\alpha_m^2 m \sqrt{I} sh_{\max}^{1/2}}{\varphi+1} \left(1 - \beta_л \frac{\varphi+1}{2}\right) - \frac{2\alpha_m^2 m \sqrt{I} s^2}{3h_{\max}^{1/2} (3-\varphi)} \left(1 - \beta_л \frac{3-\varphi}{2}\right) - \frac{3\bar{a}sh_{\max}^{2/3}}{2\varphi+1} \left(1 - \beta_л \frac{2\varphi+1}{3}\right) + \frac{2\alpha_m m \sqrt{I} s^2}{h_{\max}^{1/2} (3-\varphi)} \left(1 - \beta_л \frac{3-\varphi}{2}\right) - \frac{4\alpha_m^2 m \sqrt{I} s^2}{3h_{\max}^{1/2} (3-\varphi)} \left(1 - \beta_л \frac{3-\varphi}{2}\right) + \frac{2\alpha_m m \sqrt{I} s^3}{3h_{\max}^{3/2} (5-3\varphi)} \left(1 - \beta_л \frac{5-3\varphi}{2}\right) \right] \sin \alpha, \quad (4.73)$$

где $\beta_л = (l_1 + l_2)/L$.

Полный расход воды равен сумме

$$Q = Q_0 + Q_л, \quad (4.74)$$

где Q_0 — расход воды в верхней части сечения, освещенный измерениями скоростей; $Q_л$ вычисляют по формулам приближенного интегрирования (см. рис. 4.14).

Случайные среднеквадратические погрешности интеграционных измерений с движущегося судна и ультразвукового метода равны 6—8%. Что касается систематических, то они во многом зависят от выбора значений переходных коэффициентов и гидравлических параметров и могут достигать 10—15%. Раскрыть генезис и устранить систематические погрешности — одна из тех сложностей, которую надо преодолеть при дальнейшем внедрении интеграционных измерений расхода воды.

Основу массовых измерений расходов воды на реках и каналах до сих пор составляют различные варианты метода скорость — площадь.

Существуют противоречивые представления о возможной точности этого метода. Так, гидротехник Д. Д. Гнусин писал: «Как бы не были тщательно сделаны измерения, даже при самых благоприятных обстоятельствах никак нельзя поручиться за точность

результата, большую чем 5—10 и даже 15 %». Наряду с этим некоторые исследователи погрешность измерений расходов воды вертушками оценивают долями процента. Эти крайности можно объяснить различием как применяемых средств и способов измерения расходов воды, так и методических подходов к оценке их точности.

К настоящему времени сложился эффективный приборно-методический комплекс, который значительно устраняет неопределенность получаемых результатов и отвечает требованиям, предъявляемым государственной системой обеспечения единства измерений. Именно эти предпосылки позволили подготовить в ГГИ руководящий документ Госстандарта СССР «МИ 1759-87. Методика выполнения измерений расходов воды методом скорости—площади на реках и каналах», изданный в 1988 г. В документе определены требования к участкам и оборудованию гидростворов, правила выполнения измерений и принципы их оптимизации. Что касается точности получаемых результатов, то в этот вопрос документ внес достаточную определенность. Соблюдение положений МИ 1759-87 гарантирует не превышение следующих пределов суммарной относительной погрешности измерения расходов воды: 6 % — при детальном способе измерений; 10 % — при основном и 12 % — при ускоренно-сокращенном.

Наиболее распространен в гидрометрической практике так называемый основной способ измерения расходов воды, при котором скорости течения измеряют вертушкой в двух точках вертикали — $(0,2; 0,8)h$ (при детальном способе измерения приурочены к точкам у поверхности), $(0,2; 0,6; 0,8)h$ и у дна. Согласно Наставлению, вып. 6, ч. I, применять основной способ можно при условии, что среднеквадратические отклонения его результатов от результатов, получаемых детальным, не более 3 %. Легко понять, что это условие необходимо, но не достаточно, так как в нем не указан закон распределения отклонений $q_0 = (Q_0 - Q_d)/Q_d$, который позволил бы определить доверительный интервал m_q .

Для случайных погрешностей в метрологии в большинстве случаев принят нормальный закон Гаусса. Впрочем, известно замечание Липмана, цитируемое Пуанкаре: «каждый уверен в справедливости закона погрешностей: экспериментаторы — потому, что они думают, что это математическая теорема, математики — потому, что они думают, что это экспериментальный факт» [82].

В лаборатории гидрометрии ГГИ выполнен статистический анализ отклонений q_0 для более чем 700 измерений расходов воды на реках. Систематическая составляющая отклонений

$$\Delta q = (1/N) \sum_1^N q_{0i} = 0,25s_q,$$

где s_q — среднеквадратическое значение суммарных отклонений, определяемое по формуле

$$s_q = \sqrt{\sigma_{q_0}^2 + \Delta q^2}.$$

Что касается случайных составляющих отклонений q_0 , то при статистической проверке их распределений по критериям Колмогорова, Пирсона, Ястремского и некоторым другим установлено, что они следуют закону Шарлье (рис. 4.15). Этот закон — видоизменение нормального распределения, учитывающее некоторые искажения, которые оно испытывает в реальных условиях [118]. По закону Шарлье, по сравнению с нормальным, уменьшается вероятность неперевышения модуля достаточно больших слу-

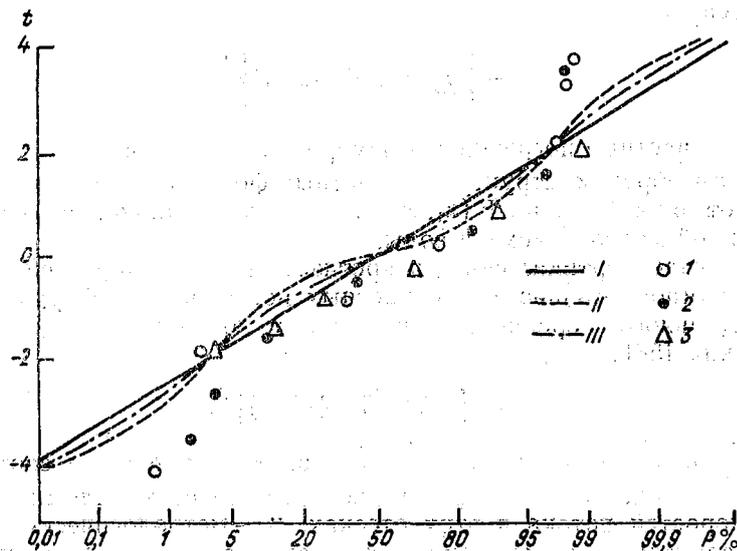


Рис. 4.15. Кривые обеспеченности относительных отклонений расходов воды, измеренных основным способом, от результатов измерений детальным способом на реках Луге у п. Толмачево (1) и Пьяне у с. Камкина (2, 3).

I — нормальное распределение; II и III — распределение Шарлье при $E = 2,05$, $C_s = 0,33$ и $E = 1,14$, $C_s = 0,04$ соответственно.

чайных отклонений $q_{сл}$: $P(|q_{сл}| \leq m_p)$. В частности, для исследованной совокупности $q_{сл}$, характеризуемой коэффициентом асимметрии $C_s = -0,33$ и эксцессом $E = 2,05$, вероятности неперевышения значений $|q_{сл}| = 2\tilde{\sigma}_{q_0}$ и $|q_{сл}| = 3\tilde{\sigma}_{q_0}$ соответственно равны:

- 1) по закону Шарлье 93,6 и 98,6 %;
- 2) по нормальному закону 95,4 и 99,8 %.

Нормативные характеристики погрешностей надо рассматривать как оценки сверху, подлежащие уточнению с учетом конкретных условий измерения. Эту задачу можно решить на основе: 1) проведения специальных наблюдений повышенной дискретности, позволяющих получить эталонные данные для оценки точности результатов измерения по другим менее детальным вариантам; 2) исследования частных погрешностей элементов расхода воды и

расчета совокупной погрешности измерения по гидравлико-статистическим зависимостям.

Пример интерпретации серий детальных измерений описан при анализе различных моделей расходов воды, а результаты приведены на рис. 4.11. Рассмотрим использование метода частных погрешностей.

Как известно, совокупное среднеквадратическое отклонение результата косвенных измерений элементов — независимых переменных x_i оцениваемой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ рассчитывают по выражению:

$$\sigma_F = \left\{ \sum_1^N [(\partial F / \partial x_i) \sigma_{x_i}]^2 \right\}^{0,5},$$

где σ_{x_i} — частные погрешности измерения элементов.

Таким образом, структура расчетных формул для оценки σ_F зависит от вида функции $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ или в данном случае — от выбранной модели расхода воды.

В случае вертикальной дискретизации поля скоростей потока при взаимной независимости частных погрешностей формула для относительного среднеквадратического отклонения измерения имеет вид [58]:

$$\tilde{\sigma}_Q = [(\beta/N) (\tilde{\sigma}_{f_s}^2 + \tilde{\sigma}_{v_s}^2)]^{0,5}, \quad (4.75)$$

где $\tilde{\sigma}_{f_s}$ и $\tilde{\sigma}_{v_s}$ — относительные погрешности измерения соответственно площадей отсеков между скоростными вертикалями и средних скоростей потока в этих отсеках; β — метрологический параметр, зависящий от гидравлической структуры потока и степени дискретизации измерений:

$$\beta = N \sum_{s=1}^N q_s^2 / Q^2.$$

При равномерном размещении скоростных вертикалей по ширине потока в прямоугольном русле $\beta = 1$, в речном беспойменном $\beta = 1,2 \dots 1,8$, при наличии пойм $1,8 < \beta < 3,0$.

Если отсеки между скоростными вертикалями пропускают равные частичные расходы воды q_s , то из (4.75) устанавливают наименьшее значение $\beta = 1$, соответствующее и наименьшему $\tilde{\sigma}_Q$. Вот почему рекомендуется размещать скоростные вертикали так, чтобы отсеки между ними пропускали приблизительно равные доли расхода воды.

Среднеквадратическое отклонение определения площади отсеков зависит от инструментальных погрешностей применяемых для промеров приборов (наметок, лотов, эхолотов) и надежности геодезической основы гидрометрических работ. Основной же фактор, определяющий точность измерения площади поперечного сечения русла, — число промерных вертикалей. Это отклонение оценено

выше формулой (4.22) на основе представления глубин в функции их обеспеченности (геометрической вероятности).

Решающее влияние на точность определения расхода воды оказывают погрешности измерения средних скоростей на вертикалях ($\tilde{\sigma}_v$) и осреднения их по отсеку (σ_{v_s}).

Погрешность σ_v оценивают в зависимости от числа точек измерения скорости на вертикали с учетом пульсационной и инструментальной составляющих:

$$\tilde{\sigma}_v = [\tilde{\sigma}_u^2(1,67 - 0,2N + 0,02N^2 + \tau_k/T) + 0,5\tilde{\sigma}_u]^{0,5}/\sqrt{N},$$

где N — число точек измерения скоростей на вертикали; T — продолжительность измерения скорости в точке, с; τ_k — время корреляции, с.

Погрешность $\tilde{\sigma}_v$ тем меньше, чем больше скоростных точек и продолжительней измерения скорости в них. Так, для равнинных рек ($\tilde{\sigma}_u = 0,05$, $\tau_k = 10$ с, $\tilde{\sigma}_u = 2\%$) при двух точках $\tilde{\sigma}_u = 4,2\%$, при пяти точках $\tilde{\sigma}_u = 2,5\%$.

Суммарное среднеквадратическое отклонение определения средней скорости в отсеке рассчитывают по формуле

$$\tilde{\sigma}_{v_s} = \{(5/3)\tilde{\sigma}_{w_s}^2 [1 - 10(h_s/b_s) + 50(h_s^2/b_s^2)] + 0,5\tilde{\sigma}_v^2\}^{1/2}, \quad (4.76)$$

где w_s определяется согласно (4.49).

Приведенные оценки частных погрешностей позволяют оценить погрешность измерения расхода воды по формуле (4.75).

При измерениях редко удается избежать систематических погрешностей. Их источники известны: сложность распределения скоростей течения по ширине и глубине, косоструйность и турбулентность потока, деформации и сложная морфология русла, зарастание и зашугованность живого сечения. Давно известно, что даже при благоприятных условиях измерения систематические погрешности Δ_Q могут достигать тех же значений, что и случайные, а совокупная погрешность

$$\tilde{\sigma}_{Q_{сов}} = 1,4\sigma_Q.$$

Именно из этой характеристики следует исходить во всех случаях, когда важно не переоценить точность измерений расхода воды. Имея набор моделей расходов воды и характеристики их точности, можно ставить задачу оптимизации измерительно-методического комплекса. Крайне важно достигнуть заданной точности измерения при сокращении времени на их выполнение, особенно когда измерения связаны с пребыванием персонала на воде в сложных условиях паводков и паводков. В подобной обстановке число скоростных и промерных вертикалей становится не только метрологической категорией, но и фактором безопасности.

Таким образом, задачу выбора оптимальной модели расхода воды сводят к минимизации затрат времени на измерение, соблюдая заданную точность получаемых данных. Естественно, при этом следует провести серию детальных измерений в характерные фазы режима и выполнить комплекс численных экспериментов по ва-

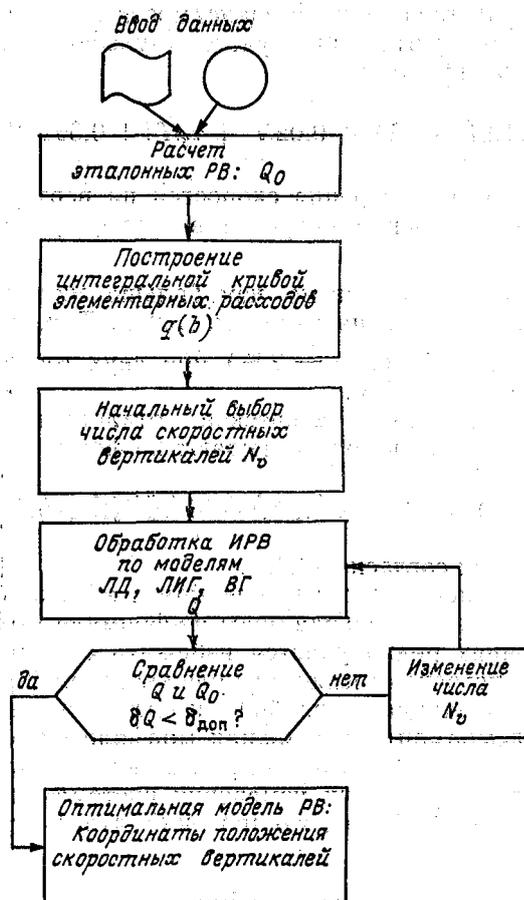


Рис. 4.16. Блок-схема выбора оптимальной модели расхода воды.

риантам моделей и числа скоростных вертикалей. На рис. 4.16 приведена одна из возможных блок-схем операций по выбору оптимальной модели расхода, разработанная Ф. Ф. Ивановым (ВНИИ-ГМИМЦД).

Существенно, что предложенная схема входит в автоматизированную систему обработки гидрологических данных государственного водного кадастра.

4.4. Экспериментальное обоснование решений стохастических уравнений для расхода воды

В последнее время предложены динамико-статистические измерительные модели речной гидрометрии в виде стохастических дифференциальных уравнений. Таким уравнением, в частности, описывают процесс изменения расхода воды в фиксированном створе при неустановившемся движении. Вероятностный подход дает значительно больше информации, чем традиционный динамический, так как в каждый момент времени можно оценить вероятность появления того или иного значения расхода воды.

Одной из наиболее простых гидрометрических моделей, для которых возможно стохастическое обобщение, является дифференциальное уравнение, получаемое из системы уравнений одномерной гидравлической идеализации Сен-Венана:

$$dQ/dt = (-gF/K^2) Q^2 + (2\alpha/F) (\partial F/\partial t) Q + gIF, \quad (4.77)$$

где Q — расход воды в фиксированном гидрометрическом створе, g — ускорение свободного падения, F — площадь живого сечения, K — модульный коэффициент расхода воды, α — коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению, I — уклон свободной поверхности водотока, t — время.

Пусть в уравнении (4.77) информация об уровне воды, уклоне, морфометрии и пропускной способности русла известна из непосредственных измерений, а искомой величиной является расход воды как функция времени. Так как измерения производят с погрешностями, то значения коэффициентов и свободного члена в уравнении (4.77) известны только в статистическом смысле. Поэтому и расход воды надо рассматривать как случайную функцию времени. Так как уравнение (4.77) является уравнением первого порядка, то переход к стохастическому его обобщению сравнительно просто осуществить в рамках марковских случайных процессов путем перехода к уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК):

$$\partial p(Q, t)/\partial t = -\partial [a(Q, t) p(Q, t)]/\partial Q + 0,5 \partial^2 [b(Q, t) p(Q, t)]/\partial Q^2, \quad (4.78)$$

где $p(Q, t)$ — плотность вероятности расхода, $a(Q, t)$ и $b(Q, t)$ — коэффициенты сноса и диффузии, определяемые структурой модели (4.77).

В отличие от динамической модели (4.77), описывающей изменение во времени непосредственно расхода воды, динамико-статистическая модель (4.78) описывает изменение во времени распределения плотности вероятности расхода воды. Здесь употреблен термин «динамико-статистическая», чтобы подчеркнуть, что такая модель описывает и гидравлически закономерные и случайные вариации расхода воды.

Дифференциальное уравнение в частных производных (4.78) относится к параболическому типу, и для его решения можно использовать различные методы, в общем случае — численные. Конечно-разностная аппроксимация по явной схеме имеет вид

$$(p_j^{i+1} - p_j^i)/\Delta t = -(a_j^i p_j^i - a_{j-1}^i p_{j-1}^i)/\Delta Q + \\ + 0,5(b_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2b_j^i p_j^i + b_{j-1}^i p_{j-1}^i)/\Delta Q^2,$$

где Δt — шаг по времени, ΔQ — шаг по расходу, i — номер шага по времени, j — номер шага по расходу.

Эта аппроксимация приводит к следующему алгоритму расчета:

$$p_j^{i+1} = p_j^i + F(j-1; j; j+1) \Delta t. \quad (4.79)$$

Так как стохастические уравнения можно сравнительно легко решить только при определенных предположениях о характере шумов входящих в них коэффициентов и свободного члена (предполагается, что это «белые шумы»), то естественна задача экспериментальной проверки их решений. В отличие от обычных задач экспериментальной гидравлики неустановившихся потоков (сложных самих по себе), в данном случае практически не обойтись без элементов автоматизации экспериментов. Действительно, для проверки решения динамического уравнения достаточно в лаборатории или в натуральных условиях создать одну волну неустановившегося режима и произвести непрерывные измерения необходимых гидравлических параметров. В данном же случае необходимо иметь набор одинаковых реализаций случайного процесса (обычно не менее 50), чтобы для любого сечения случайного процесса построить гистограмму распределения плотности вероятности и сравнить ее с гистограммой, вычисленной теоретически, например, в соответствии со схемой (4.79).

Для решения подобной задачи на кафедре гидрометрии ЛГМИ разработан информационно-измерительный комплекс, состоящий из измерительных преобразователей (емкостные уровнемеры, уклономер-дифманометр, батарея микровертушек), которые можно подключить как к многоканальным самопишущим приборам серии Н-338, так и с помощью соответствующего интерфейса к микроЭВМ «Электроника ДЗ-28». Экспериментальная установка, представляющая собой гидравлический лоток длиной 10 м, снабжена устройством, позволяющим формировать (как автономно, так и с помощью микроЭВМ) волны попусков различной интенсивности.

Рассматриваемый экспериментальный комплекс позволяет, с одной стороны, с помощью микроЭВМ численно решить дифференциальное уравнение для плотности вероятности расхода воды, а с другой — экспериментально проверить эти решения. Это открывает широкие возможности для создания основ экспериментального направления в стохастической гидравлике [77].

Информационно-измерительный комплекс построен по схеме последовательного сбора и обработки информации, поступающей

с измерительных преобразователей уровня, уклона и скорости (рис. 4.17).

Уровнемер H состоит из емкостного преобразователя, представляющего собой коаксиальный конденсатор, внешним подвижным электродом которого служит вода, и операционного преобразователя емкости в постоянное напряжение. При подъеме или спаде уровня емкость датчика и соответственно напряжение на выходе вторичного измерительного преобразователя изменяются.

Принцип действия уклономера I основан на измерении перепада гидростатического давления в измерительных створах, распо-

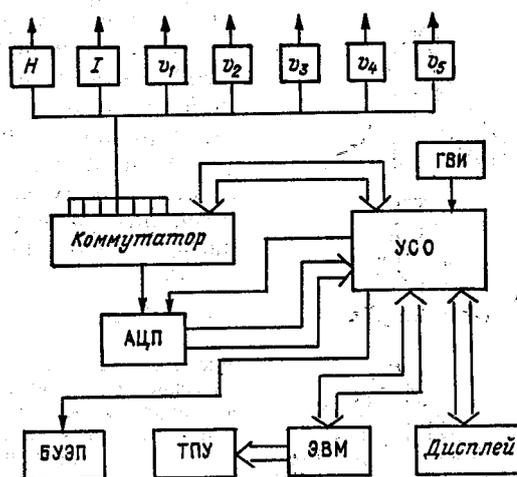


Рис. 4.17. Блок-схема информационно-измерительного комплекса.

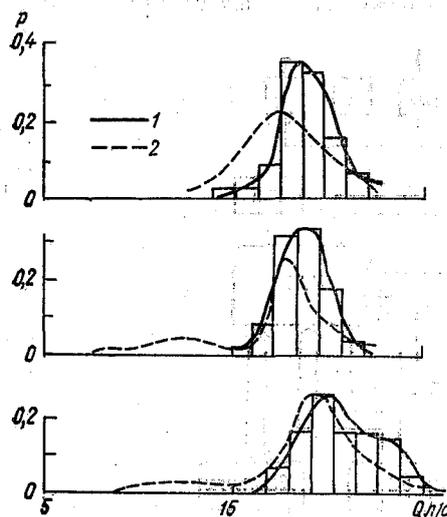
ложенных на некотором расстоянии друг от друга. Поскольку плотность воды в верхнем и нижнем створах одинакова, то измеренный перепад давления эквивалентен падению уровня. Приемники давления имеют вид трубок внутренним диаметром 5 мм, снабженных кожухом специальной конструкции, защищающим их от воздействия динамического давления. Дифференциальный манометр состоит из герметичной камеры, разделенной гибкой мембраной на два отсека, к которым подключены приемники давления. Под действием перепада давления мембрана прогибается. Линейное перемещение ее центра с помощью индуктивного преобразователя и вторичного измерительного преобразователя преобразуется в постоянное напряжение, пропорциональное уклону водной поверхности.

Блок измерения скорости v состоит из пяти микровертушек, укрепленных на штанге, и пяти вторичных измерительных преобразователей частоты вращения лопасти вертушки в аналоговый сигнал. Конструкция первичного измерительного преобразователя

скорости (микровертушки) представляет собой модернизированный вариант вертушки Херхеулидзе Х-6.

Все описанные измерительные преобразователи снабжены устройствами масштабирования выходного сигнала и смещения нуля. Это позволяет легко получить измерительный сигнал, сопряженный по уровню с входами АЦП и самописцев.

Сбор и обработка измерительной информации происходят следующим образом. При поступлении в УСО сигнала с генератора временных интервалов (ГВИ) запускается подпрограмма управления



коммутатором и АЦП, реализующая последовательный опрос измерительных каналов и размещение в памяти ЭВМ информации, поступающей с выхода АЦП. После выполнения подпрограммы управления вплоть до поступления следующего сигнала с генератора временных интервалов хранящаяся в памяти

Рис. 4.18. Эмпирические (1) и теоретические (2) кривые распределения плотности вероятности расхода воды для трех произвольных моментов времени.

ЭВМ на данный момент времени информация обрабатывается по заданной программе. Далее процесс повторяется. Точность получаемых результатов зависит в основном от погрешностей первичных измерительных преобразователей.

Устройство формирования волн попусков представляет собой вентиль-регулятор подачи воды, снабженный реверсивным автоматизированным электроприводом (блок управления электроприводом — БУЭП).

С использованием элементов описанного информационно-измерительного комплекса в лаборатории ЛГМИ проведен эксперимент, заключающийся в создании 50 одинаковых волн попусков продолжительностью 300 с. Каждую волну рассматривали как реализацию случайного процесса. Это позволило на каждый интересующий момент времени построить эмпирическую гистограмму распределения плотности вероятности расхода воды. Теоретические расчеты вели по уравнению ФПК (4.78), по алгоритму (4.79), коэффициенты которого соответствовали линеаризованной модели (4.77), предварительно параметризованной по ряду установившихся режимов при различных наполнениях лотка. На рис. 4.18 приведены эмпирические и теоретические кривые распределения

плотности вероятности расхода воды для трех моментов времени. Анализ результатов показал, что при разумном задании интенсивности шума можно получить довольно хорошее совпадение расчетных и эмпирических плотностей распределения вероятности.

В дальнейшем стоит задача проведения разнообразных экспериментов по описанной методике в целях апробации не только линейных модификаций (4.77), но и полной динамической модели и ее стохастических аналогов.

4.5. Экстраполяция расходов воды за пределы их измерения

Традиционный способ определения расходов воды за пределами диапазона их измерения сводится к экстраполяции кривой расходов $Q(H)$. Однако изменения расходов воды непосредственно связаны с изменениями уровней только при равномерном установившемся движении. В общем случае неустановившегося движения и расход воды, и уровень являются функциями независимых аргументов: времени t и продольной координаты x . Поэтому понятно, что основой экстраполяционных моделей должны быть уравнения неустановившегося движения, по крайней мере, в одномерной гидравлической схематизации. В разное время такие попытки предпринимались [58, 61]. Особую важность имеет общая задача экстраполяции и оперативного учета стока с установлением областей наиболее эффективного применения для этих целей различных математических моделей неустановившегося движения.

Наиболее известными и широко применяемыми моделями неустановившегося движения являются дифференциальные уравнения Сен-Венана и так называемая модель кинематической волны, справедливая в условиях преобладающего влияния сил трения на движение потока. Хотя предпосылки кинематической волны распространялись лишь в последнее время, их еще в 30-е годы использовал Н. М. Бернадский в разработанном им методе мгновенных режимов.

Применительно к задачам гидрометрии дифференциальные уравнения неустановившегося движения потока рассмотрены для фиксированных гидрометрических створов. Авторы предложили две формулы этих уравнений.

Одна из них — аналог уравнения Сен-Венана в линейном приближении:

$$dq/dt + L(x_0, t)q = S(x_0, t), \quad (4.80)$$

где q — приращение расхода относительно его исходного значения Q_0 , x_0 — координата гидроствора,

$$L(x_0, t) = 2gQ_0n^2/(h^{(2y+1)}F) - 2(\partial F/\partial t)/F,$$

$$S(x_0, t) = (i - \partial h/\partial x)|_{x_0} gF + 2Q_0(\partial F/\partial t)/F - gQ_0n^2/(h^{(2y+1)}F),$$

где n — коэффициент шероховатости, h — средняя глубина, F —

площадь живого сечения, i — уклон дна, y — показатель степени в формуле Павловского для коэффициента Шези.

При $L(x_0, t) \equiv L(x_0)$ и $S(x_0, t) \equiv S(x_0)$ решение уравнения (4.80) имеет вид

$$q = [S(x_0)/L(x_0)](1 - \exp[-L(x_0)t]). \quad (4.81)$$

В случае кинематической волны при некоторых предположениях имеет место уравнение

$$(1/Q)(\partial Q/\partial t) - [(2 + \xi)/F](\partial F/\partial t) = 0, \quad (4.82)$$

где ξ — корректирующий коэффициент, вводимый для компенсации члена, отбрасываемого при локализации исходного дифференциального уравнения; значение ξ предполагают постоянным в ограниченном диапазоне изменения расходов воды.

Уравнение (4.82) можно записать как дифференциальное уравнение в полных производных, если предположить, что значение $F(t)$ известно из непосредственных измерений:

$$dQ/dt - f(t)Q = 0, \quad (4.83)$$

где

$$f(t) = [(2 + \xi)/F](\partial F/\partial t).$$

Кроме того, имея в виду, что конечной целью является экстраполяция расхода воды для оперативного учета стока, т. е. функции $Q(t)$, а не $Q(H)$, можно считать, что ξ представляет собой явную функцию времени. Такое предположение вполне правомерно, если учитывать, что величина ξ введена в уравнение (4.82) для компенсации изъятой производной $\partial F/\partial x$, изменяющейся по фазам паводка.

Из уравнений (4.82) и (4.83) следуют два варианта экстраполяции расходов воды:

1) без использования явных функций времени:

$$Q = Q_i \left(\frac{F}{F_i} \right)^{m_i}, \quad (4.84)$$

где $m_i = 2 + \xi$ — показатель степени, определяемый в интервале между двумя состоявшимися измерениями расходов воды и принятый для определения экстраполируемой величины Q (если площадь живого сечения F известна); Q_i — последний из числа измеренных расходов; F_i — соответствующая ему площадь живого сечения;

2) на основе уравнения (4.83) в форме Коши

$$Q = Q_0 \exp \left[\int_{t_0}^t f(t) dt \right], \quad (4.85)$$

где $[t_0, t]$ — интервал (шаг) экстраполяции; Q_0 — расход воды в момент времени t_0 , т. е. последний измеренный расход.

Полученное соотношение можно упростить по аналогии с выражением (4.81), если подынтегральное выражение в момент времени t_0 считать постоянным.

Уравнение (4.80) физически более полно описывает процесс движения воды в гидростворе, так как оно получено из уравнений Сен-Венана без каких-либо дополнительных допущений, если не считать линеаризации. Уравнение (4.82) основано на более широком круге допущений, что исключает его применение в общих случаях неустановившегося движения. С другой стороны, уравнение (4.83) значительно проще, чем (4.80), а главное, требует меньшего числа исходных данных, в частности, не содержит уклона дна. Для практического применения особенно удобен интеграл (4.83) в форме (4.84). Предположение о $m_i = \text{const}$ оправдывается в сравнительно широком диапазоне изменения расходов воды половодья и паводков на реках. Во всяком случае, этот диапазон превышает шаг экстраполяции измеренных расходов воды в практике учета речного стока. При этом, конечно, существуют определенные ограничения для области, на которую распространяются зависимости кинематической волны. Важно указать численный критерий применимости уравнений (4.83) и (4.84).

При анализе уравнений Сен-Венана можно получить параметр

$$K = giL_0/U_0^2,$$

где U_0 и L_0 — характерные значения скорости и пространственных размеров соответственно.

По оценкам Л. С. Кучмента [86], условием применимости теории кинематической волны является неравенство

$$K > 10.$$

Однако данный параметр трудно интерпретировать гидрометрически из-за неопределенности характеристик U_0 и L_0 . Поэтому используем критерий, получаемый из уравнения Джонса

$$Q = Q_0 \sqrt{1 + \alpha_n}, \quad (4.86)$$

в котором параметром, учитывающим нестационарность движения, служит модуль величины $|\alpha_n| = [1/(I_0 v)] (\partial z / \partial t)$, где v — скорость распространения расхода воды по Седдону, I_0 — уклон свободной поверхности стационарного потока. Хотя параметр $|\alpha_n|$ менее строг, чем, например, используемый в работах по гидравлике, его легко интерпретировать по гидрометрическим данным (в дальнейшем при обозначении модуля прямые скобки опущены).

Критериальное значение $\alpha_{нкр}$, ограничивающее область применения уравнения (4.32), установлено непосредственно по результатам натуральных наблюдений на реках (рис. 4.19). Данные измерений на р. Яне у г. Верхоянска характеризуют естественный режим половодья. Особенно интересны материалы специальных исследований неустановившегося движения воды на р. Тверце в нижнем бьефе Новотверецкой ГЭС, выполненные экспедицией ГГИ в 1959 г.

Створы измерений были удалены от ГЭС на 1,4—27,8 км, что позволило зафиксировать характеристики нестационарности потока в широком диапазоне их изменения.

Погрешность экстраполяции оценена как отклонение расходов воды, вычисленных по соответствующим уравнениям ($Q_э$), от измеренных ($Q_и$):

$$\delta Q = (Q_э - Q_и) / Q_и.$$

Шаг экстраполяции принят в долях амплитуды изменения расходов воды \bar{a} и колебался от 10 до 60 %.

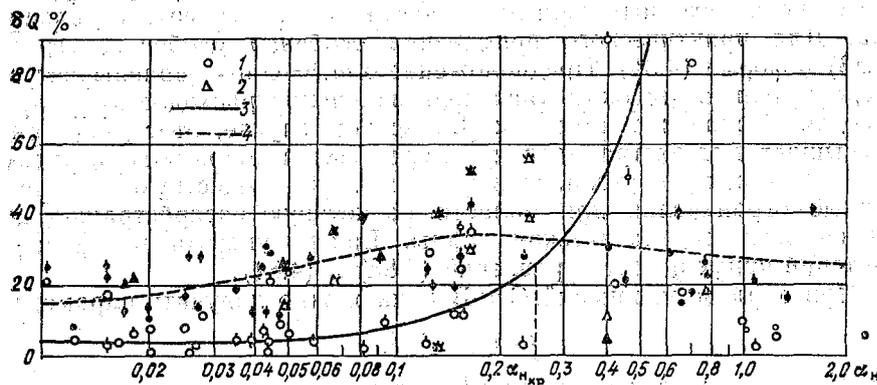


Рис. 4.19. Погрешности экстраполяции расходов воды рек Тверцы в нижнем бьефе Новотвердской ГЭС (1) и Яны у г. Верхоянска (2).

Кривые зависимости погрешностей экстраполяции: 3 — на основе уравнений кинематической волны (незалитые точки), 4 — по Сен-Венану (залитые точки); по Сен-Венану; шаг экстраполяции в долях амплитуды измеренных расходов воды: до 20 % — точки без штрихов, 21—40 % — с одним штрихом, 41—60 % — с двумя штрихами.

Из рисунка видно, что отклонения δQ тем меньше, чем короче шаг \bar{a} , но для установления функциональной связи использованных данных не вполне достаточно.

Значительно отчетливей связь отклонений δQ с параметром нестационарности α_n . Погрешность экстраполяции на основе зависимостей кинематической волны резко возрастает, начиная от значения $\alpha_{н,кр} = 0,25$. Таким образом, модель кинематической волны действительна в области сравнительно малых значений $\alpha_n \leq \alpha_{н,кр}$. Вместе с тем, в этой области применять ее, по-видимому, наиболее целесообразно, так как при меньшем числе исходных данных экстраполяция может быть даже точнее. Это связано с тем, что привлечение дополнительной информации, необходимой для применения уравнения (4.80), при современной точности измерений и неизбежных вычислительных погрешностях не улучшает, а ухудшает результаты вычислений. Тем же обстоятельством объясняется и существование области экстремума δQ при $\alpha_n \approx 0,15$. Значения $\alpha_n \leq \alpha_{н,кр} = 0,25$ характерны для большинства равнинных и горных рек в естественном состоянии, и, следовательно, зависимости кинематической волны.

матической волны имеют достаточно широкую область применения. В то же время уравнение Сен-Венана незаменимо при расчетах волн попусков на зарегулированных реках в нижних бьефах ГЭС и гидроузлов, при сгонно-нагонных явлениях, в случае сильной изменчивости морфометрии русла на участке гидрологического створа и при подпорных явлениях.

Возможно также стохастическое обобщение. Пусть

$$L = L(t_0) + \tilde{L}(t) = L(t_0) + M\tilde{L}(t) + \tilde{l}(t) = \\ = 2gQ_0 n^2 / (h_0^3 F_0) - [2(\partial F / \partial t) |_{t_0}] / F_0 + \tilde{l}(t),$$

$$S = \tilde{S}(t) = M\tilde{S}(t) + \tilde{s}(t) = gI_0 F_0 + [2Q_0 (\partial F / \partial t) |_{t_0}] / F_0 - \\ - gQ_0^2 n^2 / (h_0^3 F_0) + \tilde{s}(t).$$

Тогда уравнение (4.80) примет вид

$$\dot{q} = [L(t_0) + \tilde{L}(t)]q + \tilde{s}(t),$$

где $L(t_0)$ — фиксированный параметр; $L(t)$ — параметрический шум с известным математическим ожиданием $M\tilde{L}$ и интенсивностью $G_{\tilde{L}}$; $\tilde{s}(t)$ — аддитивный шум с математическим ожиданием, равным значению s на начало экстраполяции, и интенсивностью $G_{\tilde{s}}$.

Из формул для L и S видно, что $L(t)$ и $\tilde{s}(t)$ коррелированы между собой (с определенной интенсивностью $G_{\tilde{L}\tilde{s}}$). Коэффициенты сноса и диффузии в данном линейном случае легко найти, и уравнение для плотности вероятности примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \left[(L + M\tilde{L} - 0,5G_{\tilde{L}})q - 0,5G_{\tilde{L}\tilde{s}} - M\tilde{s} \right] p \right\} + \\ + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left\{ \left[G_{\tilde{L}}q^2 - 2G_{\tilde{L}\tilde{s}}q + G_{\tilde{s}} \right] p \right\}.$$

Применение обеих моделей в расчетах предполагает предварительное определение параметров уравнений движения по данным измерений. Разработка принципов гидрометрической идентификации моделей экстраполяции расходов воды и учета стока потребует дальнейших усилий, но уже выполненный этап исследований позволяет сделать по крайней мере два вывода:

1) установлен числовой критерий нестационарности потока, характеризующий эффективность моделей кинематической волны и уравнения Сен-Венана при экстраполяции расходов воды;

2) для практического применения можно рекомендовать обе рассматриваемые модели. Однако когда по критерию нестационарности допустимо применение зависимостей кинематической волны, они предпочтительней, так как при их реализации не нужны данные об уклонах водной поверхности.

ГЛАВА 5

ГИДРОМЕТРИЧЕСКИЙ УЧЕТ РЕЧНОГО СТОКА

5.1. Принципы размещения и оптимальная густота пунктов гидрологических наблюдений на реках

Сеть пунктов гидрологических наблюдений на реках существует для наблюдения прежде всего за уровнями и расходами воды. Эффективность сети применительно к другим гидрологическим элементам надо проверять особо, учитывая соответствующие приоритеты. Среди них предпочтение отдано определению нормы среднегодового стока и его значений в отдельно взятые годы. Оптимизация размещения сети состоит в том, чтобы обеспечить густоту (плотность) пунктов наблюдений, достаточную для получения достоверных данных о стоке и в то же время не требующую открытия чрезмерного числа постов. Хотя характеристики речного стока всегда относятся к дискретной области — площади речного бассейна, при рассмотрении территории достаточно больших размеров (области, зоны) можно исходить из непрерывного распределения этих элементов. В пределах какой-либо квазиоднородной области среднегодовой сток, отнесенный к площади водосбора достаточных зонально репрезентативных размеров $A_{зр}$, можно представить в виде наиболее простой функции одной координаты l :

$$Q(l) = \bar{Q}(l) + f(l), \quad (5.1)$$

где $f(l)$ — случайные отклонения стока от его нормы $\bar{Q}(l)$, зафиксированные для отдельно взятого года.

Отсюда вытекают два критерия, определяющие плотность размещения пунктов наблюдений [55]: градиентный и корреляционный.

Градиентный критерий устанавливают на основе первого члена выражения (5.1) как минимально необходимое расстояние $\xi_{гр}$ между центрами бассейнов, позволяющее выявить изменение нормы стока:

$$\xi_{гр} \geq 2,82\sigma_0\bar{Q}_0/[\text{grad}_0(\bar{Q}_0)], \quad (5.2)$$

где \bar{Q}_0 — осредненное по площади значение нормы стока в данном гидрологическом районе, $\text{grad}_0(\bar{Q}_0)$ — средний относительный градиент изменения нормы стока в пределах гидрологического района, σ_0 — погрешность определения годового стока по гидрометрическим данным.

Значению $\xi_{гр}$ соответствует критериальная площадь водосбора $A_{кр}$. Она не должна быть меньше зонально репрезентативной площади $A_{зр}$, характерной для малых рек.

Таким образом, чем больше расстояние между постами, тем точнее определяют изменение нормы стока. Но безграничное увеличение этого расстояния привело бы к потере корреляции годового стока, измеряемого на смежных постах. Чтобы этого не было, необходимо установить верхний предел расстояния между ними. Это ограничение и создает корреляционный критерий, выведенный из второго члена формулы (5.1) так, чтобы погрешность линейной интерполяции годового стока на середину расстояния между центрами бассейнов не превосходила σ_0 :

$$\xi_k \leq (\sigma_0^2/c_v^2) \xi_0, \quad (5.3)$$

где c_v — коэффициент вариации годового стока; ξ_0 — радиус корреляции, при котором автокорреляционная функция годового стока принимает нулевое значение (в среднем для СССР $\xi_0 = 1600$ км).

Корреляционному критерию соответствует площадь A_k .

Оптимальная площадь водосбора A_0 должна быть в диапазоне

$$A_{зр} < A_{гр} \leq A_0 \leq A_k. \quad (5.4)$$

Критериальные значения площадей водосбора в работе [55] определены для всех гидрологических зон СССР, некоторые из них приведены в табл. 5.1. Подобный опыт осуществлен также в Канаде для территории провинции Квебек [152].

Таблица 5.1

Критериальная площадь для планирования опорной гидрологической сети, км²

Природная зона	$A_{зр}$	$A_{гр}$	A_k	Оптимум A_0
Тундра	200	—	32 000	15 000
Тайга	500	4 000	7 000	5 000
Степь	1 500	2 000	2 000	2 000
Канада	—	8 950	20 590	15 600

Критерий оптимальной густоты гидрологической сети можно получить также из условия достаточной регрессионной связанности рядов среднегодовых расходов воды в смежных пунктах наблюдений [63]:

$$\xi_p \leq [1 - (1 - \sigma_0^2/c_v^2)]/a. \quad (5.5)$$

В работе [63] рассмотрено применение комплекса градиентно-корреляционных (5.2) и (5.3) и регрессионного (5.5) критериев для оптимизации гидрологической сети Госкомгидромета СССР. Существенно, что оптимальная густота сети зависит от требуемой точности определения среднегодового стока σ_0 . В результате специального исследования [153], выполненного на примере рек США, установлено, что наименьшее, но вполне допустимое число постов соответствует погрешности $\sigma_0 = 10 \dots 12$ %.

Приведенные в табл. 5.1. оптимальные значения A_0 соответствуют водосборам средних рек, для которых характерны зональные закономерности формирования стока. Что касается малых аazonальных рек, с площадями водосборов $A \leq A_{ар}$, больших (полизональных) рек, для которых $A > A_0$ и рек с антропогенными изменениями стока, то для них правиомерен пообъектныи принцип размещения пунктов наблюдений в зависимости от структуры речных систем. В соответствии с этим надо иметь по меньшей мере по одному пункту наблюдений на каждой большой реке и выборочно на малых реках для контроля их стока и

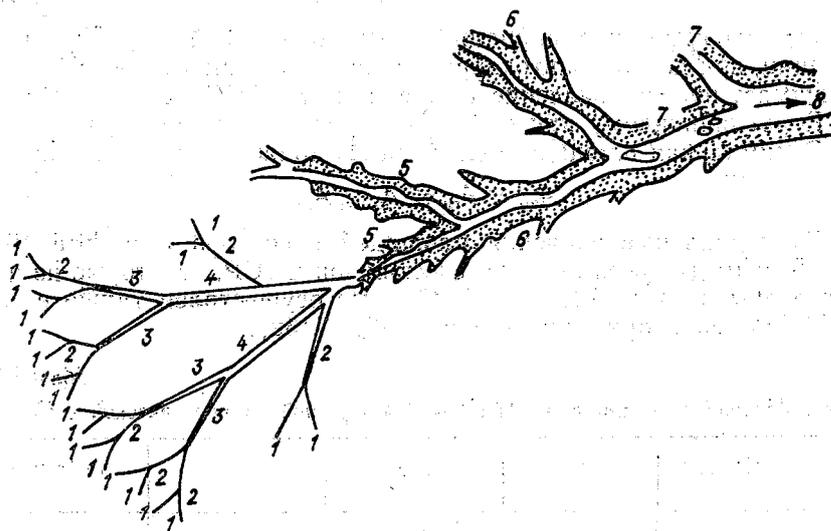


Рис. 5.1. Структура речной системы.

уровня. Их число ориентировочно можно установить на основе представления речной сети в виде графа типа дерева, в котором внешние вершины отображают истоки, а внутренние — точки слияния водотоков (рис. 5.1). Параметры речных систем обладают индикативными свойствами в отношении гидрологических процессов. Многие характеристики режима рек, такие как средняя водность, максимальные расходы воды, толщина льда и др., можно представить в функции различных структурных мер, в частности, в зависимости от порядка речных потоков K , например, по Хортону—Штралеру, с применением аппарата теории графов. Следовательно, показатели строения речной сети — один из новых источников гидрологической информации. При однородности климатических и орографических условий характеристики, полученные в одном районе, где производились наблюдения, можно перенести на другие реки того же порядка, где таких наблюдений нет.

Характеристики гидрологического режима одних объектов наблюдений переносят на другие в подмножестве однопорядковых

элементов. Отсюда непосредственно вытекает один из принципов размещения пунктов наблюдений (рис. 5.2): в общем случае их надо располагать во всех звеньях иерархической цепи потоков различных порядков или, как минимум, на наиболее значимых для потребителей гидрологической информации. В каждом звене надо создать по крайней мере одну цепь постов $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$, пронизывающую насквозь граф гидрологической сети. Во всех случаях надо открыть определенное число постов (N_m) на малых

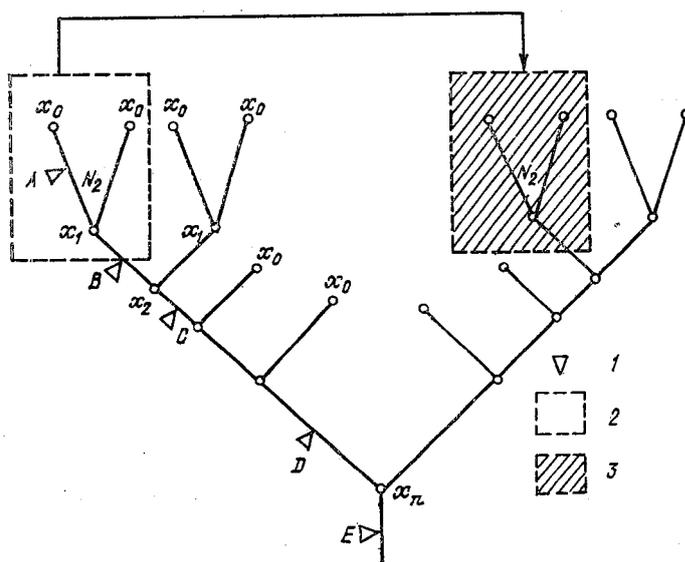


Рис. 5.2. Схема размещения гидрологических постов (I) на графе речной системы.

2, 3 — бассейны-аналоги одного порядка.

реках, порядок которых (K_m) меньше порядка рек с оптимальным водосбором (K_0). Из большого числа малых рек для изучения выбирают водосборы, имеющие разную расчлененность рельефа, зеленность, озерность, заболоченность и др. На горных реках, кроме того, расположение постов должно учитывать закономерности изменения стока с высотой.

По мере роста использования водных ресурсов и хозяйственного освоения территории необходимо изучать отдельные водные объекты: участки рек с площадью бассейна, превышающих оптимальную A_0 . Основной задачей при этом следует считать получение характеристик режима — экстремальных расходов воды, данных о колебаниях уровня и температуры воды, твердого стока и т. п. Из этого следует, что необходимо иметь по меньшей мере один пост на каждой реке с порядком $K > K_0$. Число постов на

таких реках установлено на основе соотношения Хортона

$$N_{\delta} = \sum_{i=K_0+1}^K r^{K-i}, \quad (5.6)$$

где r — показатель разветвленности реки, в среднем $r = 3$; K — порядок речной системы (потока в ее замыкающем звене).

Общее число гидрологических постов окончательно равно

$$N = N_m + N_0 + N_{\delta} \approx (N_0 + N_{\delta})(1 + \alpha),$$

где α — доля постов на малых реках (обычно принимают $\alpha = 0,15 \dots 0,30$).

Таким образом, наряду с традиционными принципами относительно равномерного размещения постов, которые соблюдают при развертывании сети для изучения зональных характеристик, во многих случаях целесообразен новый подход — сгущение пунктов наблюдений в ключевых звеньях речных систем.

Наряду с режимными характеристиками для обслуживания народного хозяйства необходима текущая информация о водных объектах, используемая в гидрологических прогнозах. Как известно, для этой цели прежде всего необходимы данные о расходах и уровнях воды на малых (частных) водосборах. Естественно, что при их достаточном числе и равномерном расположении по бассейну учет неравномерности поступления талых или дождевых вод на поверхность водосбора наиболее полон. В то же время нежелательная и излишняя информация, так как с ее получением связаны дополнительные затраты. Поэтому важно установить оптимальное число и площадь A_i малых водосборов, по которым можно с допустимой точностью давать прогнозы стока основной реки в створе, замыкающем бассейн площадью A .

Информационную ценность частного водосбора A_i независимо от прогностической модели в конечном счете можно оценить мерой корреляции стока с этого водосбора со стоком в замыкающем створе. Коэффициенты корреляции этих величин увеличиваются по мере роста отношения $\alpha = A_i/A$. Однако, как установлено специальным анализом [55], при больших α коэффициент корреляции увеличивается мало, а заблаговременность прогноза уменьшается. Оптимальный интервал относительных площадей для частных водосборов лежит в пределах $\alpha = 0,01 \dots 0,02$.

Особое значение имеет размещение гидрологических постов в зоне комплексного использования водных ресурсов. Структура сети в этом случае predetermined не только гидрогеологическими и морфологическими условиями бассейна, но и административным делением территории и схемами ее расчленения на водохозяйственные районы.

Пункты учета стока необходимо назначать:

1) в нижней части притоков и коллекторных (сбросных) каналов;

- 2) на головных сооружениях оросительно-обводнительных и других каналов, забирающих воду из рек-источников;
- 3) в начале конуса выноса, перед зоной инфильтрации, и в конце его, где выклиниваются грунтовые воды;
- 4) на границах базисов (орошаемых массивов) и зон значительных промышленных водозаборов (городов);
- 5) в створах ГЭС и гидроузлов.

В большинстве этих пунктов не надо оборудовать гидрологические створы, так как в качестве расходомеров можно использовать шлюзы-регуляторы, гидроагрегаты ГЭС и другие водопускные сооружения.

В зонах использования стока данные наблюдений служат частью информационного обеспечения автоматизированных систем управления водохозяйственными комплексами, которое осуществляют на гидравлической и воднобалансовой основе. В этих условиях нужны специальные подходы к развертыванию пунктов наблюдений, описанные в п. 5.5.

Изложенные научно-методические принципы реализованы при разработке планов развития и рационализации гидрологической сети СССР. Оптимальное число постов гидрологической сети составляет 7800 при средней плотности размещения около 3000 км² на один пост, что близко к плотности гидрологической сети Канады, но в 3,0—3,5 раза меньше, чем в США, и на порядок меньше плотности пунктов наблюдений в странах Западной Европы. Этот факт свидетельствует о большой роли конкретных экономико-географических условий, которые надо учитывать при проектировании оптимальной гидрологической сети.

5.2. Стохастический подход в задачах гидрометрического учета речного стока

Для оперативного управления водохозяйственной системой (см. рис. 1.1) надо знать вектор $W(x, t)$, компонентами которого являются запасы воды (W) взвешенные наносы (W_n), растворенные вещества и тепло (W_T) на любой момент времени t в любой точке x системы. В общем случае изменение вектора $W(x, t)$ определяют дифференциалом [74]

$$dW(x, t) = (\partial W / \partial x) dx + (\partial W / \partial t) dt.$$

Первое слагаемое учитывает изменение по объему соответствующих компонентов W (осадки, испарение, инфильтрация, сброс загрязняющих веществ в реки, водозабор, взаимодействие поверхностных и подземных вод и др.) по объему, занимаемому системой; второе характеризует динамические изменения, т. е. расход запасов, имеющих в бассейне.

Ограничимся рассмотрением изменений, происходящих только в русловой сети, по двум причинам: 1) наиболее важные динамические процессы, связанные с задачей управления, происходят именно в русле; 2) для потоков в руслах существуют более или

менее обоснованные математические модели в отличие, например, от процессов, связанных с инфильтрацией и взаимодействием речных и грунтовых вод, а тем более с их химическим или тепловым взаимодействием. В этом случае запас W является функцией измеримого подмножества (x, t) , представляющего собой направленный граф речной системы

$$W(A) = \int_A (dW/d\mu) d\mu(A),$$

где $\mu(A)$ — мера графа A .

На основе диалектического принципа единства единичного, особенного и общего используют гидрометрический, гидравлический и гидрологический подходы к определению W . Это можно осуществить с помощью различных операторов, отображающих множество известных элементов (получаемых по-разному в указанных дисциплинах) в множество градиентов $dW/d\mu$. В гидрометрии основной упор сделан на непосредственное измерение. В гидравлике использован расчет по математическим моделям, построенным априори на известных общих законах механики. В гидрологии опираются на научно-методические основы гидрологического районирования в целях распространения характеристик режима на неизученные объекты по методу аналогий.

В общем случае проблема оценивания состоит из двух задач: 1) выбора пространственно-временных узлов наблюдений; 2) выбора измерительных или расчетных моделей для оценки $dW/d\mu$ в закрепленных узлах. Таким образом, речь может идти о приближенном вычислении запаса W путем минимизации погрешности ρ :

$$\rho [(dW/d\mu)_{\text{изм}}, \mu_{i,k}] = \int_A (dW/d\mu) d\mu - \sum_{i,k=1}^{m,n} (dW/d\mu)_{\text{изм}} \mu_{i,k}$$

где

$$\mu(A) = \sum_{x_i, t_k \in A} \mu_{i,k}$$

Этого можно добиться, варьируя узлы (i, k) и способы $(dW/d\mu)_{\text{изм}}$ измерений (расчетов) в этих узлах при различных ограничениях (например, экономического или коммуникационного характера). При этом надо иметь в виду, что в отличие от оптимизации режимной сети модели в данном случае следует обеспечивать экстраполирование градиентов запаса W для прогноза состояния системы. Последнее обстоятельство требует динамических и стохастических моделей в виде дифференциальных уравнений.

В гидрометрическом учете речного стока важно изменение расхода воды не только в отдельных створах, но и по длине потока, т. е. так называемые русловые водные балансы. В гидрологии широко применяют балансовый метод, позволяющий определить расчетным путем не измеряемые непосредственно составля-

ющие водного баланса (например, испарение можно оценить по измеренным осадкам и стоку). Аналогичный подход используют для речных систем или отдельных участков рек. Уравнение руслового водного баланса (РВБ) от верхнего до нижнего створа для заданного интервала времени можно записать в виде

$$Q_0 = Q_{\text{в}} - Q_{\text{н}} - \sum_{i=1}^N Q_i,$$

где $\sum_{i=1}^N Q_i$ — отъемы и сбросы воды на рассматриваемом участке; $Q_{\text{в}}$ и $Q_{\text{н}}$ — расходы воды в верхнем и нижнем створах соответственно; Q_0 — остаточный член, появляющийся либо за счет систематических погрешностей измерения отдельных составляющих РВБ, либо за счет неучтенных, но значительных его составляющих.

Уравнение РВБ можно решить относительно любого члена.

Если речь идет о неравномерном режиме (расход воды либо не меняется во времени, либо осреднен за какой-либо интервал), то справедливо выражение

$$I = Q^2/(C^2RF^2) = [2\alpha Q/(gF^2)] dQ/dx + qQ/(F^2g),$$

где q — боковая приточность на единицу длины.

После простых преобразований, считая, что $I_0 \approx Q^2/(C^2RF^2)$, получаем

$$dQ/dx = [(I - I_0) gF^2/2] (1/Q) - q/2,$$

где значения I_0 , I и F известны из непосредственных измерений.

В стохастическом случае в коэффициент при первом члене правой части надо ввести параметрический шум $V(x)$, связанный с погрешностями задания (измерения) величин I_0 , I и F и с тем, что коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению отличен от единицы и изменяется по координате x . Боковую приточность q можно задать в виде детерминированной известной функции от x , либо она может содержать случайную составляющую, в том числе и коррелированную с $V(x)$. Таким образом, для плотности вероятности $p(Q, x)$ получаем уравнение ФПК с коэффициентами сноса A и диффузии B :

$$A = [(I - I_0) gF^2/2 - G_V/2] (1/Q) - (q/2), \quad B = G_V/Q^2.$$

В определенном диапазоне изменения расходов воды возможна линеаризация функции $f = 1/Q$ прямой $f = a - bQ$. Тогда задача состоит в определении математического ожидания $\langle Q \rangle$ и дисперсии D по уравнениям:

$$\begin{aligned} \langle \dot{Q} \rangle &= - [b(I - I_0) gF^2/2 - G_V/2] \langle Q \rangle + a(I - I_0) gF^2/2 - q/2, \\ \dot{D} &= -2 [b(I - I_0) gF^2/2 - G_V/2] D + G_V \langle Q \rangle^2, \end{aligned}$$

где точки означают производную по координате x .

На рис. 5.3 показаны участок р. Тверцы, результаты расчета по данным уравнениям и 90 %-й доверительный интервал для расхода воды.

Возвращаясь к более общей ситуации, речную систему можно схематизировать направленным графом, в узлах которого выполняются определенные балансовые соотношения (например, $\sum_{i=1}^N Q_i = 0$), а движение

среды (воды или наносов) на дугах описано уравнениями гидравлики. Оперативно управлять подобной речной системой можно, если на любой момент времени знать информацию об изменении функции $W(x_i, t)$, где x_i — координатная ось i -й дуги. Уравнение для определения $W(x_i, t)$ получают из системы Сен-Венана. Оно имеет особенно простой вид, если не учитывать боковую приточность и ограничиться квазиравномерным режимом:

$$\partial W / \partial x_i = \sqrt{1/(K^2 I)} \partial W / \partial t. \quad (5.7)$$

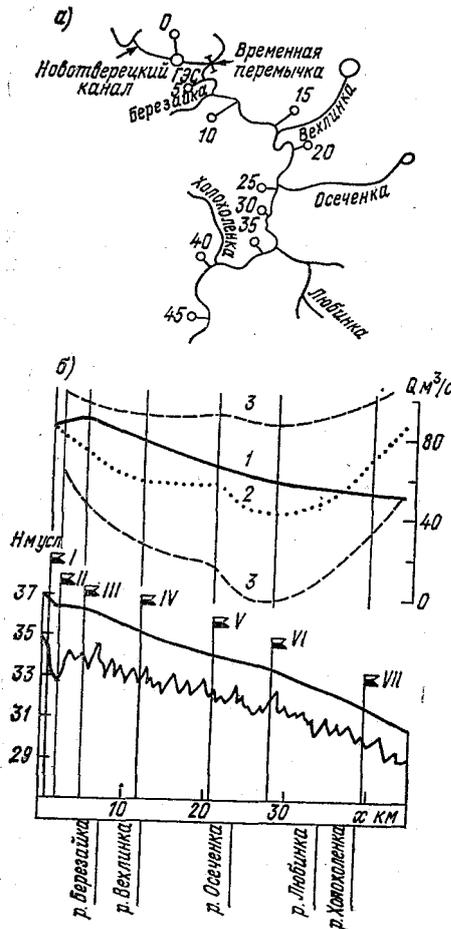


Рис. 5.3. Участок р. Тверцы (а) и результаты расчетов расходов воды (б).

1 — измеренные расходы воды, 2 — математическое ожидание расхода воды, 3 — 90 %-й интервал.

Соотношение (5.7) эквивалентно аналогичному уравнению, полученному из формулы «скорость—площадь»

$$\partial W / \partial x_i = (1/U) \partial W / \partial t. \quad (5.8)$$

Различие между использованием (5.7) и (5.8) состоит в том, что в первом случае значения K и I можно не только измерить, но и приблизительно задать расчетным путем, а для (5.8) скорость надо измерять непосредственно в каждой точке области (x_i, t) . Для (5.7) и (5.8) должны быть известны начальные распределения $W(x_i, t_0)$ и условия на границах.

Естественно, напрашивается идея о получении совместного уравнения для плотности вероятности $p(Q, x, t)$, решение которого даст вероятностное описание РВБ. Более того, подобное уравнение позволило бы стохастически оценить состояние объектов, связанных с задачами управления.

Учитывая стохастический характер поля скорости и то, что (5.8) содержит производные по пространственной переменной только первого порядка, можно ввести одноточечную плотность вероятностей $p_{t,x}(W) = \langle \delta(W(x, t) - W) \rangle$, параметрически зависящую от t и x , и получить стохастическое уравнение для изменения запасов воды в русловой сети бассейна

$$\partial p_{t,x} / \partial t = \frac{\partial}{\partial W} \langle U(x, t) (\partial W / \partial x) \delta(W(x, t) - W) \rangle. \quad (5.9)$$

Решение этого уравнения дает вероятностную картину изменений запасов воды. Для этого необходимо оценить общее число узлов наблюдений за величиной $U(x, t)$ (или узлов задания K и I при использовании (5.7)).

На каждой дуге графа A речной системы выполняется уравнение (5.9) (или в первом приближении — уравнение типа (1.18) только для W) относительно $p_{t,x}(W)$. Для оценки его решения нужна гидрометрическая сетка (i, k) , общее число узлов которой можно оценить сверху из условий устойчивости принятой вычислительной схемы. В случае явной схемы дискретности по времени Δt и координате Δx связаны условием Куранта $\Delta t \leq (\Delta x)^2 / 2\Phi$. Отсюда следует ограничение на интервал прогнозирования состояния системы. Зная длину дуги и период наблюдений, например гидрологический год, и задавая требуемую точность, определяют общее число узлов на k -й дуге графа. Общее же число учитываемых дуг можно определить, отсекая притоки низкого порядка, имеющие минимальный по условиям требуемой точности запас воды.¹ При этом надо иметь в виду, что если рассматривать не абсолютные, а относительные погрешности определения W , то в процессе оценки граф изменится в соответствии с изменением общего запаса воды, так как при его уменьшении надо включать в рассмотрение все большее число притоков низкого порядка, вплоть до временных водотоков и ручьев. Все это значительно усложняет весь процесс организации наблюдений, делая гидрометрическую сетку подвижной, а весь процесс оценки динамичным.

При выполнении конкретных расчетов встает вопрос о мере $\mu(A)$ для графа речной системы. Самые общие соображения о способе ее построения можно привести по аналогии с мерой Лебега—Стилтьеса с помощью производящей функции, определяемой в данном случае на основании известных законов Хортонa, в которых в качестве топологических параметров речной системы выступают отношения между метрическими параметрами ее

¹ Речь может идти и о других компонентах W .

элементов

$$n = 2,2 \lg Q_n + 6,35, \quad S_k = \sigma_0^{K-k-1} (\sigma_0 - 1),$$

где n — порядок речной системы, Q_n — расход воды, σ_0 — бифуркационное отношение, S_k — число притоков в речной системе порядка K .

Пусть число дуг графа, пропускающих объем стока, превышающий заданную погрешность определения W , есть N_1 (знание расходов воды этих потоков позволяет увязывать балансы в местах слияния рек). Через N_2 обозначим степень полинома, аппроксимирующего $W(x, t)$ на транзитном участке. Значение N_2 можно определить следующим образом. Известна оценка нижней границы числа узлов кубатурной формулы, точной для многочлена степени m . Узлы ее не могут лежать на алгебраической гиперповерхности порядка $[0,5m]$ (целая часть числа $0,5m$) и, следовательно, число

$$M = (n + [0,5m])! / (n! [0,5m]!) \quad (5.10)$$

можно взять в качестве нижней границы для числа узлов (n — число координат, по которым ведут измерения; в данном случае $n = 2$).

Соотношение (5.10) дает число измерений на i -м транзитном участке в области (x_i, t) . Поскольку сток на транзитных участках, как правило, меняется незначительно, во всяком случае слабо нелинейно по длине, узлы надо располагать редко по переменной x_i и часто по переменной t . Если m связать с рекомендуемой частотой измерений для различных типовых гидрографов, то $N_2 \approx M/m$, а общее число пространственно-временных узлов измерений для речной системы составит $(N_1 + N_2 S_k) m$.

Расчеты, выполненные в работе [73], показывают, что в среднем по основным бассейнам рек СССР получено отношение расчетного числа постов к реальному, по состоянию на 1968 г., равное 2,6. Отношение, полученное из общей фоновой оценки по корреляционной методике (см. п. 5.1), равно 1,5. Посты, расположенные в узлах речной системы, являются опорными, и характеристики режима в этих створах желательнее оценивать путем непосредственных измерений (в перспективе, по-видимому, подобные посты будут оборудованы ультразвуковыми расходомерными установками). На транзитных участках имеет смысл оценивать режим расчетно-измерительным путем, используя, например, приведенные уравнения, в которые вводят измерительную информацию о морфометрии створа и уровне воды, и лишь эпизодически градуировать створы (модели).

5.3. Пропускная способность русла и модели гидрометрического учета стока

Сток воды — одно из основных и наиболее широких понятий гидрологии суши. В общем случае под стоком понимают движение воды по поверхности земли, в речных руслах и песчано-грунтовой

толще. Если же имеют в виду одну из характеристик водных ресурсов, стоком воды называют ее количество, протекающее в створе за некоторый период времени — сутки, декаду, месяц или год. Сток выражают в осредненных за эти периоды значениях расходов воды в метрах кубических в секунду или кубических километрах.

Расходы воды на гидрологических постах измеряют лишь дискретно — в отдельные моменты времени. Однако для характеристики водных ресурсов необходимы ежедневные, а иногда и ежечасные значения расходов воды. Задача гидрометрии состоит в том, чтобы воспроизвести гидрограф — последовательность ежедневных (среднесуточных) расходов воды (ЕРВ) как непрерывную функцию времени по данным дискретных измерений. Выполняемые при этом графические и аналитические операции в совокупности составляют методы учета стока. Они достаточно многообразны и в определенной степени отражают историю развития речной гидрометрии.

По назначению получаемых данных различают два варианта учета стока:

- 1) режимный — для изучения водных ресурсов и гидрологического режима рек;
- 2) оперативный — для текущего контроля водности рек при гидролого-прогностическом обслуживании народного хозяйства.

В том и другом случае сток учитывают по гидрометрическим данным, но их интерпретация имеет разные формы. Режимные характеристики стока вычисляют по истечении годового цикла, имея в распоряжении всю совокупность выполненных измерений и сведений о характере совершившихся гидрологических процессов. Оперативный учет стока ведут в условиях изменяющейся гидрологической обстановки и пропускной способности русла, что приводит к необходимости прогнозировать (экстраполировать) эти изменения на интервал времени от состоявшегося до очередного измерения расходов воды.

Расход воды в реке или канале при фиксированном уровне в конечном счете зависит от пропускной способности русла. В условиях равномерного движения потока основные факторы, определяющие пропускную способность русла, можно учесть на основе формулы Шези—Маннинга. Вместе с тем, если рассматривать отдельно взятый гидрометрический створ, то его гидравлические и геометрические элементы определяют уровень воды H , который, следовательно, можно сопоставить с расходом воды Q . Так, в речной гидрометрии получена важнейшая зависимость в графическом виде, названная кривой расходов (КР). В настоящее время разработаны объективно-гидравлические методы интерпретации связи расходов воды с уровнями, которые должны заменить устаревшие геометрические схемы, субъективные (даже «эстетические») соображения, еще недавно служившие для построения КР.

Одно из первых выражений для функции $Q(H)$ предложил Глушков в 1915 г.:

$$Q = a(H - H_0)^m,$$

где H_0 — уровень нулевого расхода воды, установление которого требует специального изучения участка гидроствора.

Если же исходить только из совокупности измеренных расходов воды, то зависимость $Q(H)$ целесообразно представить на статистической основе в виде уравнения регрессии (УР) расходов воды по уровням:

$$Q = a_0 + a_1H + a_2H^2 + \dots + a_nH^n. \quad (5.11)$$

Нецелесообразно заранее фиксировать порядок этого многочлена, его надо определять в результате численных экспериментов по критерию минимального отклонения от аппроксимирующей функции. Чаще всего оптимальное значение показателя степени $n = 2 \dots 3$. Для вычисления ЕРВ в выражение (5.11) подставляют значение среднесуточного уровня H_c . При немонотонном суточном ходе уровня в уравнение (5.11) вводят соответствующие дополнительные коэффициенты, учитывающие форму гидрографа:

$$Q = a_0 + a_1H_c + \frac{(m+1)^2}{2m+1} a_2H_c^2 + \dots + \frac{(m+1)^n}{nm+1} a_nH_c^n, \quad (5.12)$$

где $m = H_{\text{макс}}/H_c - 1$.

Как известно, УР дают наиболее точные результаты при значениях аргументов, находящихся в средней части общего диапазона их измерения. Поэтому для повышения точности этих уравнений важно охватить измерениями экстремальные расходы воды и основные фазы колебания уровней. Считают, что для каждой фазы практически нужно не менее пяти измерений.

По физическим соображениям зависимость (5.11) должна удовлетворять условиям выпуклости:

$$dQ/dH \geq 0; \quad d^2Q/dH^2 \geq 0. \quad (5.13)$$

Часто эти условия не выполняются, особенно в диапазоне низких уровней (иногда кривая расходов воды получает обратную кривизну, при которой начинается физически не объяснимое увеличение Q по мере снижения H). В таком случае на аппроксимирующую функцию $Q(H)$ правомерно наложить ограничения в области наименьших наблюдаемых уровней воды. Для этого совокупность измеренных расходов воды и уровней в нижней части их диапазона ($1/5 \dots 1/3$ амплитуды колебания уровня) аппроксимируют отдельно. Соответствующая процедура в математической статистике достаточно разработана [131].

Аппроксимирующая зависимость, удовлетворяющая условиям (5.13), предложенная сотрудницей лаборатории гидрометрии ГГИ Т. И. Яковлевой, имеет вид

$$Q(H) = \mu(H) + \nu(H)g(H),$$

где $\mu(H)$ — полином, удовлетворяющий заданным ограничениям;
 $\nu(H)$ — полином, гарантирующий выполнение заданных условий,
 $g(H)$ — полином, подбираемый методом наименьших квадратов.

В порядке первого приближения первые два полинома имеют вид

$$\mu(H) = Q(H_n) = \text{const};$$

$$\nu(H) = H - H_n.$$

Что касается полинома $g(H)$, то его аналитическую форму подбирают на основе метода наименьших квадратов с применением ЭВМ, предварительно следующим образом преобразовав исходные данные об измеренных расходах воды:

$$\hat{Q} = [Q_i - Q(H_n)] / (H_i - H_n),$$

где Q_i — измеренный расход воды, H_i — соответствующий ему уровень; H_n — наименьший наблюдаемый уровень воды.

По данным численных экспериментов установлено, что наилучшие результаты аппроксимации получены при задании $g(H)$ в виде того же алгебраического многочлена (5.11), когда его степень n совпадает со степенью уравнения регрессии, выбранного в качестве наилучшего на этапе предварительной аппроксимации.

После подбора полинома $g(H)$ окончательное уравнение регрессии для всего диапазона уровней воды имеет вид:

$$Q(H) = Q(H_n) + (H - H_n)(a'_0 + a'_1 H + a'_2 H^2 + \dots + a'_n H^n). \quad (5.14)$$

Если и это уравнение не удовлетворяет условиям (5.13), аппроксимируют второе приближение (процедура аппроксимации описана в курсах математической статистики).

Известно, что по различным объективным причинам не всегда можно измерить расходы воды при наивысших, а часто и при наинизших уровнях. При этом возникает необходимость использовать КР и УР за пределами диапазона измерения расходов воды — экстраполировать их до максимальных и минимальных значений. Простейший прием экстраполяции: КР продлевают до высшего уровня соответственно направлению освещенной измеренными части. Экстраполяция по тенденции достаточно произвольна. Более объективным является способ Стивенса (1907 г.), основанный на линейной или почти линейной связи расхода воды с морфометрическим комплексом, вытекающим из формулы Шези:

$$Q = f(F \sqrt{h_{cp}}),$$

при $C\sqrt{I} = \text{const}$.

Известны различные модификации метода Стивенса и другие приемы графоаналитической интерпретации формулы Шези, предложенные М. А. Великновым, Д. Е. Скородумовым и др. В условиях широкого применения ЭВМ для обработки гидрологических

данных следует ориентироваться на гидравлические методы экстраполяции непосредственно расходов воды на последовательной аналитической основе, изложенные в п. 4.5.

Для надежного учета стока в каждом случае необходимо проверить однозначность КР.

Рассеяние связи $Q(H)$ создают прежде всего погрешности измерения расходов воды. Если эти погрешности носят случайный характер, то кривую $Q(H)$, осредняющую поле точек ИРВ, можно считать практически однозначной. Когда пропускная способность русла изменяется под влиянием различных гидравлических и морфологических факторов, осреднять поле точек ИРВ неправомерно, а зависимость $Q(H)$ надо считать неоднозначной.

Каковы же количественные критерии однозначной КР?

Рассеяние связи $Q(H)$ характеризуется среднеквадратическим относительным отклонением \tilde{q} измеренных расходов воды Q_i от значения \bar{Q}_i , вычисленных по связи $Q(H)$ при одном и том же уровне H_i :

$$\tilde{\sigma}_q = \left\{ [1/(N - K)] \sum_{i=1}^N [(Q_i - \bar{Q}_i)/\bar{Q}_i]^2 \right\}^{0,5},$$

где N — число измеренных расходов воды; K — число параметров уравнений регрессии (5.14).

В рассеянии связи $Q(H)$ выделяют две составляющие:

- 1) разброс, обусловленный погрешностями измерения расходов и соответствующих им уровней $\tilde{\sigma}_Q$;
- 2) результат влияния гидравлико-морфологических факторов $\tilde{\sigma}_{гм}$.

Погрешность $\tilde{\sigma}_Q$ определяют на независимой статистической основе — по формулам из п. 4.3.

Связь $Q(H)$ можно считать практически однозначной, если

$$\tilde{\sigma}_Q \geq \tilde{\sigma}_q. \quad (5.15)$$

Однозначная зависимость $Q(H)$ сглаживает погрешности измерений. Получаемые по ней значения противопоставляют измеренным расходам воды как более точные. Когда имеет место неравенство

$$\tilde{\sigma}_Q < \tilde{\sigma}_q, \quad (5.16)$$

кривая расходов изменяет свое положение под влиянием физических факторов, и поэтому ее надо рассматривать как неоднозначную. При этом отклонения \tilde{q} кроме погрешностей измерения содержат «остаток» регрессии, а уравнение (5.11) дает лишь первое приближение для расхода воды. Далее уточнить вычисляемые величины можно, если тем или иным способом учесть влияние факторов, не отражаемых зависимостью (5.11).

Многочисленность методов вычисления ЕРВ обусловлена прежде всего неоднозначностью зависимостей расходов воды от

уровней. Среди них укажем две основные разновидности учета стока:

1) методы временных кривых расходов (ВКР), позволяющие учесть изменения пропускной способности русла в отдельные фазы гидрологического режима;

2) интерполяционные методы.

При ограниченной частоте наблюдений временные кривые проводят по точкам измеренных расходов, что практически дает те же результаты вычисления стока, что и при использовании метода линейной интерполяции характеристик пропускной способности.

Совершенство и физическая обоснованность моделей учета стока определяются возможностью их использования как для режимных, так и для оперативных целей. Такие модели созданы в лаборатории гидрометрии ГГИ. Они основаны на корреляционно-гидравлических характеристиках пропускной способности русла, зафиксированных измерениями расходов воды. Аналитическая форма этих моделей зависит от состава учитываемых факторов и имеет вид уравнения множественной линейной регрессии, независимо от характера и сложности исходных гидравлических зависимостей:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^N x_i, \quad (5.17)$$

где x_i представляет собой как непосредственно измеренные величины z_i , так и различные нелинейные функции от них $\varphi_i(z_i)$.

Одна из наиболее распространенных причин изменения пропускной способности (и неоднозначности КР) состоит в деформациях русла. При этом одному и тому же уровню в разные моменты времени могут соответствовать разные площади водного сечения. Эффект русловых деформаций до последнего времени учитывали по способу О. Стаута, появившемуся в 1898 г. Способ основан на интерполяции поправок к уровням ΔH_i , которые определяют при каждом измерении расходов воды, а затем используют для определения расходов воды по так называемой стандартной КР. Предложен вариант, который формально связан со способом Стаута, но отличается от него последовательно гидравлично-статистической основой [58]. Вопреки предпосылке Стаута о том, что стандартная кривая не выражает какой-либо реальный смысл связи между расходом и уровнем воды и носит вспомогательный характер, в статистическом смысле эта кривая рассмотрена как осредненная характеристика пропускной способности русла. На рис. 5.4 стандартная кривая проведена так, чтобы осреднить поле точек (Q, H) . Ей соответствует УР

$$Q = -253 + 15,94H - 0,1114H^2 + 0,000415H^3,$$

где Q — расход воды, м³/с; H — уровень, см.

Стандартная (опорная) КР и соответствующие УР дают первое приближение к значению расхода воды при фиксированном уровне. Его можно существенно уточнить, если учесть изменения

пропускной способности русла, нарушающие однозначность связи $Q(H)$. Эти изменения характеризуются относительными отклонениями q_i расходов воды Q_{i_i} , измеренных при уров-

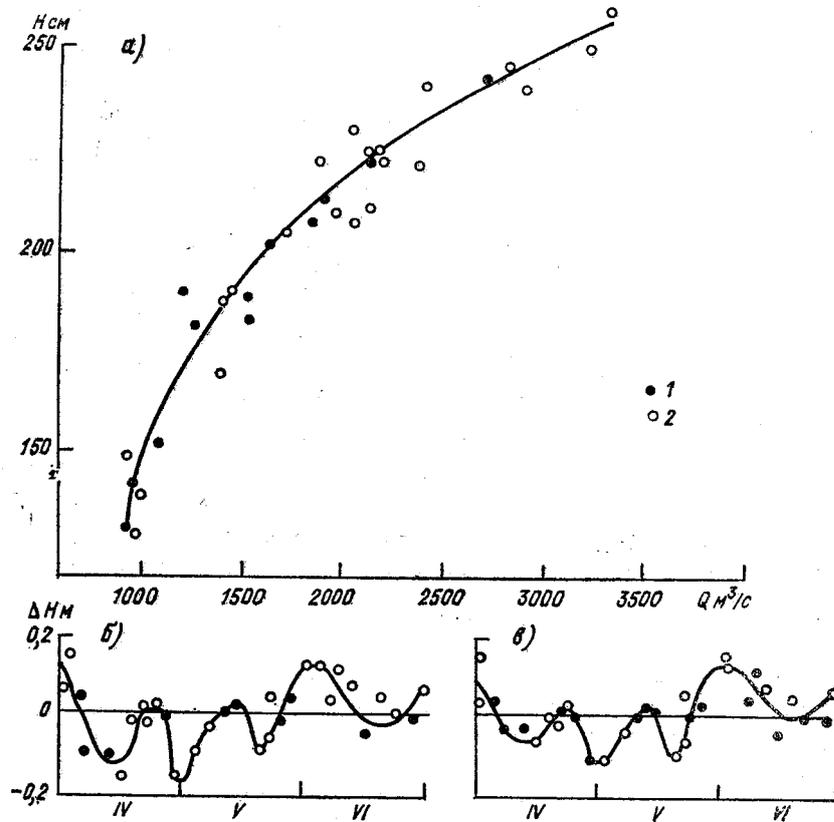


Рис. 5.4. Кривая расходов воды р. Амударья у г. Керки, 1981 г. (а), и графики поправок к уровню по Стауту (б) и относительных отклонений измеренных расходов воды (в).

1 и 2 — измеренные расходы воды на подъеме и спаде паводка соответственно.

нях H_i , от значений \bar{Q}_i , определяемых для тех же уровней на основе КР или УР:

$$\tilde{q}_i = (Q_{i_i} - \bar{Q}_i) / \bar{Q}_i. \quad (5.18)$$

Ряд ИРВ позволяет получить хронологическую последовательность отклонений \tilde{q}_i (рис. 5.5), которые тем или иным способом надо интерполировать в интервале между измерениями, чтобы получить значения \tilde{q}_i на каждую дату. Одновременно, используя значения ЕУВ, находят ежедневные расходы Q по КР или УР

и после этого вычисляют значения ЕРВ на дату t :

$$Q_t = \bar{Q}(1 + \tilde{q}_t). \quad (5.19)$$

Для определения \tilde{q}_t в простейшем случае применяют линейную интерполяцию отклонений \tilde{q}_i и \tilde{q}_j , получаемых по данным смежных измерений расходов воды, разделенных промежутком времени τ_{ij} :

$$\tilde{q}_t = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{ij}}\right) \tilde{q}_i + (\tau/\tau_{ij}) \tilde{q}_j, \quad (5.20)$$

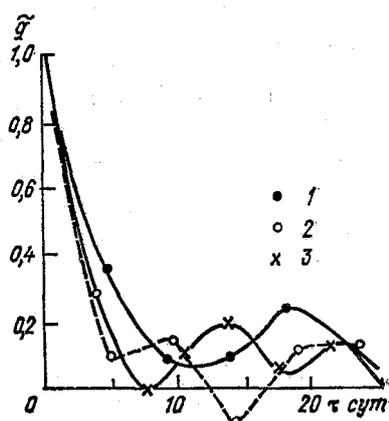


Рис. 5.5. Автокорреляционные функции отклонений \tilde{q} в гидростворе р. Амударья у г. Керки в весенний период (1), зимнюю межень (2) и летние паводки (3).

где τ — время от даты последнего измерения до расчетной даты, сут.

Более эффективны модели учета стока, основанные на оптимальной интерполяции отклонений \tilde{q}_i . Их особенность состоит в том, что весовые коэффициенты для значений \tilde{q}_i зависят от характеристик корреляционной связанности $r_{\tilde{q}}(\tau)$, причем интерполяция опирается по меньшей мере на четыре значения \tilde{q}_i , соответствующие двум предшествующим и двум последующим измерениям расходов воды. Модели и алгоритмы вычислений описаны в методических изданиях ГГИ.

На реках с интенсивно деформирующимся и блуждающим руслом связь расходов воды с уровнями утрачена, и единственно возможным способ учета их стока — интерполяция между измеренными расходами воды. Разумеется, число этих измерений должно быть достаточным, чтобы зафиксировать все изменения водности реки.

Не менее распространенной причиной неоднозначности КР служит переменный подпор. Зоны переменного подпора формируются в хвостовых частях водохранилищ и выше узлов слияния рек. В зависимости от наполнения водохранилищ и фаз водного режима на притоке и главной реке верхняя граница зоны подпора

меняет свое положение и, более того, при определенных условиях можно отметить кривую спада водной поверхности. Причинами переменного подпора могут быть намывы гребней нижележащих перекатов, нагонные подъемы уровня, скопления (заломы) сплавляемого леса, заторы и зажоры льда.

В традиционных руководствах по речной гидрометрии описаны способы учета стока в условиях переменного подпора: с использованием временных КР, модулей расходов воды $K = Q/\sqrt{I}$ или непосредственно зависимости $Q(H, I)$. Чтобы получить такие связи, необходимо большое число измерений расходов воды для разных интервалов изменения I , что не всегда осуществимо на практике. Вообще надежность вычисления стока с учетом зависимостей $Q(H, I)$ мала из-за невозможности достаточно точной регистрации малых падений уровня в зоне переменных подпоров. В этих условиях более целесообразно учесть влияние переменного подпора как одного из факторов, входящих в уравнения регрессии.

В самом деле, пропускную способность русла можно поставить в зависимость от положения уровня в верхнем ($H_в$) и нижнем ($H_н$) смежных створах. Уровни $H_в$ и $H_н$ принимают в качестве аргументов функции, которую можно представить в виде семейства кривых $Q(H_в, H_н)$ или в аналитической форме

$$Q = a_0 + a_1 H_в + a_2 H_в^2 + a_3 H_н. \quad (5.21)$$

Уравнение (5.21) целесообразно использовать прежде всего для учета стока во входных створах водохранилищ и в устьях рек.

Надежность уравнения регрессии (5.21) во многом зависит от положения входного створа и пунктов наблюдений за уровнями воды. С точки зрения полноты охвата измерениями притока воды в водохранилища входные створы предпочтительно располагать возможно ниже по течению, но при этом надо соблюдать два условия: 1) отсутствие обратных течений; 2) достаточные скорости потока, превышающие по крайней мере в 2 раза начальную скорость вертушки, т. е. скорость течения должна быть не менее 0,1 м/с. Что касается нижнего (сопряженного) створа, то он по возможности должен находиться вне зоны влияния сгонов и нагонов, волн перемещения при увеличении и уменьшении попусков ГЭС и др.

При неустановившемся движении потока необходим учет инерционных эффектов течения, существенно влияющих на пропускную способность русла. Одна из наиболее простых и удобных для практического применения формула Джонса

$$Q = Q_0 \sqrt{1 + \Delta I/I_0} = Q_0 \sqrt{1 + \alpha_n} = K_n Q_0, \quad (5.22)$$

где Q_0 и I_0 — расход воды и уклон водной поверхности в условиях установившегося режима; Q — расход воды при нестационарном режиме и фиксированном уровне; ΔI — инерционный член формулы (дополнительный уклон), вызванный прохождением волны паводка (попуска); $K_n \sqrt{1 + \alpha_n}$ — коэффициент нестационарности.

По смыслу α_n , как локальную характеристику неустановившегося движения, надо определять на основе мгновенных приращений гидравлических элементов. Практически же для вычисления α_n используют данные о приращении уровней (ΔH), площадей живого сечения (ΔF) и расходов воды (ΔQ) за конечный интервал времени (Δt) по опорной КР (рис. 5.6):

$$\alpha_n = [I_0 (\Delta Q / \Delta F)]^{-1} (\Delta H / \Delta t). \quad (5.23)$$

Формула Джонса, как и другие приближенные расчетные зависимости, не совсем адекватно описывает движение потока в кон-

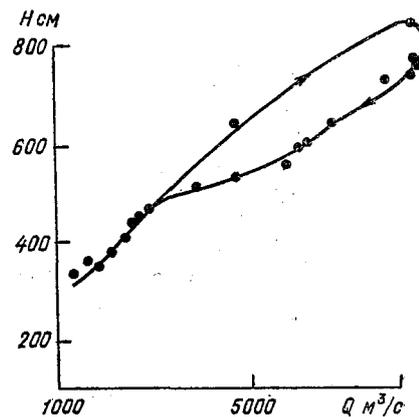


Рис. 5.6. Кривая расходов воды р. Камы в зоне переменного подпора у г. Набережные Челны.

кретных условиях, и надо корректировать ее параметры на основе контрольных измерений. Следовательно, зависимость (5.12), предложенная для расчета осредненных расходов воды, в общем случае приобретает следующий вид:

$$\bar{Q} = \varepsilon \bar{K}_n \{ a_0 + a_1 H_c + [(m+1)/(2m+1)] a_2 H_c^2 + \dots + [(m+1)^n / (nm+1)] a_n H_c^n \}, \quad (5.24)$$

где ε — измерительный корректив, определяемый в соответствии с выражениями (5.22) и (5.23):

$$\varepsilon = Q_n / (Q_0 \sqrt{1 + \alpha_n}), \quad (5.25)$$

где Q_n — последний измеренный расход воды; \bar{K}_n — осредненный коэффициент нестационарности для периода τ_p , охватывающего N фаз паводков, каждая продолжительность T_i :

$$\bar{K}_n = (1/\tau_p) \sum_{i=1}^N (K_n)_i T_i. \quad (5.26)$$

Модель проверена на основе материалов исследований неустановившегося движения воды на трех створах р. Тверцы [64].

Получены уравнения регрессии вида (5.24), соответствующие условиям квазистационарного потока:

$$\text{створ II: } Q_0 = -3945,8 + 1823,8 H - 238,3 H^2 + 14,82 H^3,$$

$$\text{створ III: } Q_0 = -1714,8 + 817,7 H - 132,8 H^2 + 7,424 H^3,$$

$$\text{створ IV: } Q_0 = -1413,4 + 702,0 H - 117,6 H^2 + 6,824 H^3.$$

В зависимости от фазы, к которой приурочен расход воды, используемый для определения корректива ϵ , выполнены три варианта расчетов осредненного расхода воды \bar{Q} (рис. 5.7): I—II ва-

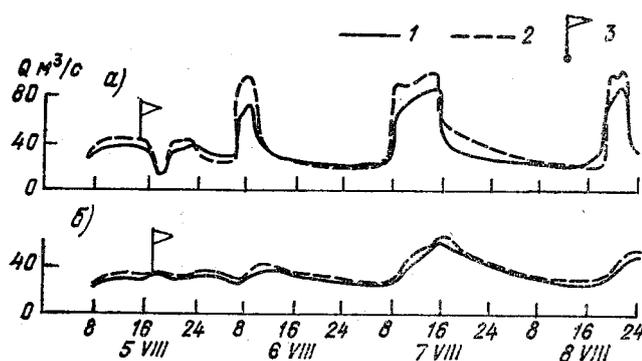


Рис. 5.7. Сопоставление измеренных (1) и рассчитанных (2) гидрографов стока р. Тверцы в III (а) и IV (б) створах по данным наблюдений 1959 г.

3 — измеренные расходы воды, принятые для идентификации уравнения движения.

рианты — расходы воды измерены на подъеме, пике и спаде первого попуска соответственно.

Наилучший результат достигнут при II варианте расчета. Как и следовало ожидать, во всех вариантах соответствие осредненных расходов воды \bar{Q} их фактическим значениям $Q_{из}$ увеличивается по мере удаления нижнего створа измерений от ГЭС, осуществляющей попуски. При этом для данного створа измерительный корректив $\epsilon \rightarrow 1$, а для верхнего створа $\epsilon \approx 2$. Отмеченный факт означает, что уравнение Джонса соответствует условиям умеренной нестационарности потока, характерным для створа IV ($\alpha_n = 0,01 \dots 0,04$) и не соответствует резко выраженному неустановившемуся движению в створе II ($\alpha_n > 1$).

Следует заметить, что осреднение расхода воды за период прохождения полной волны попуска существенно точнее осреднения за сутки. Это можно объяснить более высокими погрешностями определения коэффициента нестационарности (K_n) в последнем случае.

В естественных условиях часто можно наблюдать появление петель КР, обусловленное деформациями дна и различием гидрав-

лических сопротивлений для движения потока на подъеме и спаде паводка. Подобную неоднозначность КР надо учитывать методами, изложенными ранее.

Остается рассмотреть случай стеснения живых сечений при ледообразовании и зарастании русла.

Появление льда и ледяных образований на реках всегда сопровождается уменьшением пропускной способности русла (рис. 5.8). При построении зимних КР, а тем более при интерполяции измеренных расходов воды надо иметь достаточно много этих измерений, но выполнить их в холодное время года трудно. Поэтому в практике учета зимнего стока всегда стремились опираться не только на измерения расходов воды, но и на некоторые дополнительные физические предпосылки. Так, для учета изменений пропускной способности

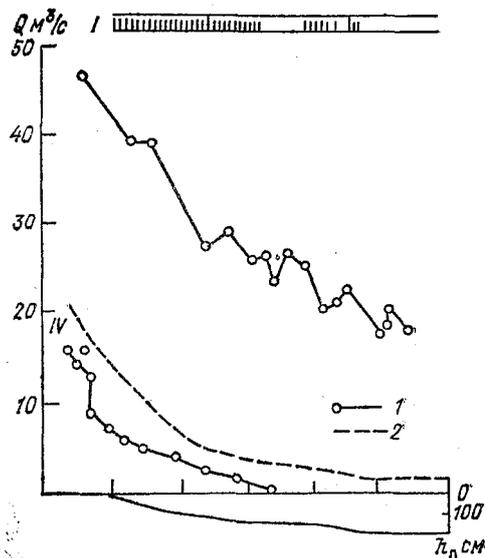
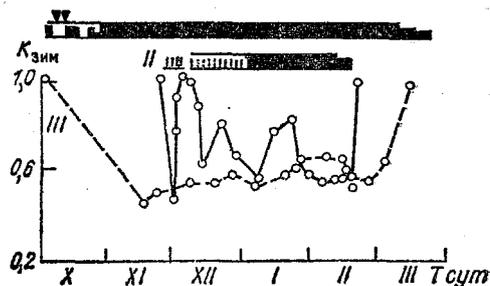


Рис. 5.8. Хронологический график изменения расходов воды и характеристик пропускной способности русла.

I — р. Нарын — г. Нарын, 1969—70 гг. (зашугованное русло); II — р. Миния — с. Каргена, 1964—65 гг. (неустойчивый ледостав); III — р. Ока — г. Горбатов, 1975—76 гг. (устойчивый ледостав); IV — р. Ток — пр. Николаевский, 1968—69 гг. (перемерзание и наледи); 1 — измеренные расходы воды и $K_{зим}$ в дни измерений, 2 — кривая истощения.



русла в зимний период С. Колупайла предложил переходный коэффициент

$$K_{зим} = Q_{и} / Q_{св}, \quad (5.27)$$

где $Q_{и}$ — измеренный расход воды при уровне $H_{и}$, $Q_{св}$ — расход воды по КР для свободного русла при том же уровне.

Таким образом, чтобы вычислить ЕРВ, достаточно знать значение $K_{зим}$ на расчетную дату t :

$$Q_t = K_{зим} Q_{св,t}$$

Гидравлическая зависимость для $K_{\text{зим}}$ представлена формулой Шези—Маннинга

$$K_{\text{зим}} = m_1 (1 - F_{\text{л}}/F_0)^{2/3} (n_0/n_{\text{зим}}) (I_{\text{зим}}/I_0)^{1/2}, \quad (5.28)$$

где $F_{\text{л}}$ — площадь погруженного льда; F_0 и n_0 — соответственно площадь живого сечения и коэффициент шероховатости открытого русла; $n_{\text{зим}}$ — обобщенный коэффициент шероховатости; I_0 и $I_{\text{зим}}$ — соответственно уклоны открытого и закрытого льдом потока; m — коэффициент, учитывающий соотношение геометрических характеристик живого сечения при наличии ледяных образований.

При отсутствии заторно-зажорных явлений можно принять $I_0 = I_{\text{зим}}$. Если такое равенство не гарантировано, например во входных створах водохранилищ, в качестве опорной зависимости для определения $K_{\text{зим}}$ используют уравнение регрессии, в котором расход воды соответствует двум уровням в сопряженных створах $H_{\text{в}}$ и $H_{\text{н}}$.

Сложнее оценить динамику изменений шероховатости русла подо льдом: коэффициент шероховатости $n_{\text{зим}}$ изменяется от максимальных значений в начале ледостава до минимальных в конце. При свободном русле, как непосредственно перед наступлением ледовых явлений, так и после вскрытия реки, $n_0/n_{\text{зим}} = 1$. Эти закономерности изменения $n_0/n_{\text{зим}}$ описывает следующая эмпирическая функция времени:

$$n_0/n_{\text{зим}} = 1 - m_2 \beta_{\text{л}} \exp(-5\beta_{\text{л}}), \quad (5.29)$$

где $\beta_{\text{л}} = T/T_{\text{л}}$, T — время от начала ледообразования, $T_{\text{л}}$ — продолжительность ледостава.

Если разложить функцию (5.28) в ряд Маклорена, ограничиваясь двумя первыми членами, и использовать (5.29), то применительно к уравнению (5.17) получим следующий набор переменных x_i , от которых зависит $y = K_{\text{зим}}$:

1) фактор шероховатости, представленный как фактор времени

$$x_1 = \beta_{\text{л}} \exp(-5\beta_{\text{л}});$$

2) фактор стеснения русла льдом

$$x_2 = F_{\text{л}}/F_0, \quad x_4 = F_{\text{л}}^2/F_0^2;$$

3) смешанные факторы

$$x_3 = (F_{\text{л}}/F_0) \beta_{\text{л}} \exp(-5\beta_{\text{л}}); \quad x_5 = (F_{\text{л}}^2/F_0^2) \beta_{\text{л}} \exp(-5\beta_{\text{л}}).$$

Толщину льда, как известно, не измеряют ежедневно, но она зависит от суммы модулей отрицательных значений температуры воздуха $t_{\text{в}}$ [58], что позволяет в каждый из сложных аргументов x_2, \dots, x_5 вместо $F_{\text{л}}$ ввести $B_0 \sqrt{|\sum t_{\text{в}}|}$. Так появилась структура гидравлично-метеорологической модели учета зимнего стока. Ее идею впервые предложил А. В. Огиевский.

При неустойчивом ледоставе и заторно-зажорных явлениях, когда зимние уровни нередко превышают весенне-летние, коэффициент $K_{\text{зим}}$ теряет свою определенность. В этих случаях целесообразно опираться непосредственно на формулу Шези—Маннинга, которая после логарифмирования позволяет получить следующий состав переменных уравнений (5.17):

$$y = \lg Q, \quad x_1 = \lg F_{\text{зим}}, \quad x_2 = \lg h_{\text{зим}}, \quad x_3 = \sqrt{|\Sigma t_{\text{в}}|}. \quad (5.30)$$

Уравнения регрессии рассчитывают для каждого периода ледостава в отдельности.

Кроме гидравлических зависимостей при создании моделей гидрометрического учета стока можно также использовать общезначимые закономерности водного режима рек в зимний период. Одна из особенностей гидрографа в устойчивые зимы без оттепелей — уменьшение расходов воды по мере убывания запасов влаги в бассейне. Кривую истощения — спада гидрографа эффективно описывает формула Буссинеска:

$$Q = Q_{\text{п}} / (1 + \alpha_0 T)^2, \quad (5.31)$$

где α_0 — константа истощения грунтового питания, T — время.

Уравнение (5.31), вообще говоря, относится к отдельному водоносному горизонту, при этом в качестве $Q_{\text{п}}$ принимается расход воды, при котором река переходит на подземное питание. На основе (5.31) получено

$$Q_0/Q = a_0 + a_1 T + a_2 T^2, \quad (5.32)$$

где Q_0 — последний расход воды, измеренный при открытом русле; a_1 и a_2 — коэффициенты регрессии, выражающие закономерности спада водности, в частности, истощения грунтового питания.

Модель, основанная на закономерностях убывания зимнего стока, особенно эффективна для шугоносных водотоков и перемерзающих рек с наледями. В последнем случае кроме зависимости для убывания расходов воды потребовалось ввести функцию времени, выражающую потери стока на ледообразование и наледи. Модель учета стока усложнилась и приняла вид

$$Q = Q_0 / (1 + \alpha_0 T)^2 - [a_0 + a_1 T/T_c + a_2 (T/T_c) + \dots + a_m (T/T_c)^m], \quad (5.33)$$

где T_c — продолжительность периода спада гидрографа.

Первый член правой части представляет собой аналитическую аппроксимацию огибающей поля измеренных расходов воды за многолетие, а параметры второго члена, учитывающего потери стока на ледообразование, определяют методом наименьших квадратов по совокупности измерений отдельно взятого года.

Модели (5.32) и (5.33) имеют важное достоинство: они опираются на расходы воды Q_0 , измеренные еще при открытом русле, которые более точны, чем результаты последующих измерений, особенно при шуге, наледях и перемерзании русла.

После возобновления стока в предвесенний период ЕРВ вычисляют на основе экспоненциальной аппроксимации ветви подъема гидрографа:

$$Q = Q_{\text{мин}} \exp y, \quad (5.34)$$

где y выражает закономерность изменения расходов воды по времени T , отсчитываемому от начала увеличения водности:

$$y = \ln(Q/Q_{\text{мин}}) = a_0 + a_1 T.$$

Для службы контроля качества воды в зимний период особенно эффективна гидрохимическая модель учета стока. В ней используют обратную связь минерализации S с расходами воды Q при уровнях H при покрытом льдом русле [58]:

$$Q = a_0 + a_1 H + a_2 S. \quad (5.35)$$

Модель (5.35) нерационально использовать при вычислении ЕРВ, так как для этого нужны трудоемкие анализы ежедневных проб воды. Достоинство уравнения (5.35), полученного по данным предшествующих измерений, состоит в том, что оно позволяет определять расходы воды при каждом отборе проб для контроля качества воды в створах, где нет регулярных наблюдений за стоком.

В теплое время года дополнительные сопротивления движению потока создает влаголюбивая растительность. Для оценки пропускной способности русла при его зарастании применяют коэффициент

$$K_{\text{зар}} = Q_{\text{зар}}/Q_0,$$

где $Q_{\text{зар}}$ и Q_0 — соответственно расходы воды в зарастающем и свободном русле при одном и том же уровне H .

И в этом случае аналитическая структура модели учета стока следует из формулы Шези—Маннинга с учетом изменяющихся сопротивлений русла по мере развития биомассы. Ее рост пропорционален корню из суммы среднесуточных значений температуры воды t и начинается после их перехода через некоторое пороговое значение (10°C для средней полосы европейской части СССР). Наряду с этим стареет и отмирает сначала часть, а затем и вся масса влаголюбивых растений. Поэтому кроме учета термического фактора стеснения потока необходимо ввести некоторую эмпирическую функцию времени, чтобы описать влияние развития (старения) биомассы на коэффициент шероховатости $n_{\text{зар}}$:

$$n_{\text{зар}} = n_0 (1 - \beta + \beta^{t/T_{\text{зар}}}),$$

где $\beta = T/T_{\text{зар}}$, T — время от начала зарастания, $T_{\text{зар}}$ — полный период существования растительности в потоке.

Комплекс переменных, устанавливаемых из формулы Шези—Маннинга применительно к уравнению (5.17) имеет вид:

$$y = K_{\text{зар}}, \quad x_1 = \beta, \quad x_2 = \beta^{1/3}, \quad x_3 = B_0 \sqrt{\Sigma t} / F_0, \\ x_4 = \beta B_0 \sqrt{\Sigma t} / F_0, \quad x_5 = \beta^{1/3} B_0 \sqrt{\Sigma t} / F_0.$$

Ситуация особенно сложна при зарастании русла в зоне влияния переменного подпора, что часто происходит в устьях средних и малых равнинных рек, впадающих в моря и озера. В этом случае учетная модель основана непосредственно на формуле Шези—Маннинга в логарифмическом виде:

$$\lg Q = \lg (F_0 - m_1 B_0 \sqrt{\Sigma t}) + (2/3) \lg h + (1/2) \lg [(H_{\text{в}} - H_{\text{н}}) / L] - \\ - \lg n_0 + \lg (1 - \beta + \beta^{1/3}). \quad (5.36)$$

Если все логарифмические функции в правой части принять в виде сложных аргументов, то уравнение (5.36) примет вид уравнения линейной регрессии $\lg Q$ по четырем переменным x_1, \dots, x_4 .

Погрешность режимного учета стока σ_K , характеризующую точность определения ЕРВ, оценивают непосредственно среднеквадратическим отклонением уравнения регрессии σ_p для отдельно взятого года. В строгом смысле эта оценка относится к случаям, когда рассеяние связи (5.17) вызывают преимущественно гидравлические факторы. Малое отличие σ_p от погрешности измерения σ_n существенно увеличивает точность вычисления ЕРВ: при большом числе измерений в результате статистического сглаживания их случайных погрешностей значение $\sigma_K \rightarrow 0$. При достаточно редких измерениях (2—3 раза в месяц) погрешности σ_p приобретают систематический характер. Поэтому и для связи (5.17), близкой к однозначной зависимости, рекомендуется принимать $\sigma_K \approx \sigma_p$.

Сложнее оценить точность оперативного учета стока. В основу этой оценки можно положить отклонение σ_p , характеризующее тесноту связи (5.17) за многолетие. В численных экспериментах, проведенных авторами, погрешности оперативных данных непосредственно оценивались разностью измеренных и вычисленных на дату измерения расходов воды. С учетом всей совокупности исследованных створов погрешность оперативного учета стока в 1,5—2,0 раза больше, чем в режимном варианте: $\sigma_{K_{\text{оп}}} = (1,5 \dots 2^{\circ}) \sigma_{K_p}$.

Общую основу рассмотренных моделей гидрометрического учета стока составляет интерполяция данных измерений с использованием гидравлических зависимостей для пропускной способности русла и определяющих ее дополнительных факторов. Набор последних практически всегда можно ограничить наиболее информативной частью с учетом того, насколько значимо различие дисперсий σ_p^2 при полном и сокращенном наборе переменных x_i (для этой цели можно применить критерий Фишера).

Рассмотрим некоторые методические положения оценки точности осредненных характеристик стока в зависимости от погрешностей и частоты измерения расходов воды.

При устойчивой кривой расходов ЕРВ определяют наиболее просто: их снимают с КР или вычисляют по формуле аппроксимации (5.11). Поскольку КР осредняет поле точек $Q(H)$, случайная погрешность ЕРВ, вообще говоря, значительно меньше, чем отклонение σ_p :

$$\tilde{\sigma}_K = \tilde{\sigma}_p / \sqrt{N}, \quad (5.37)$$

где $\tilde{\sigma}_K$ и $\tilde{\sigma}_p$ — соответственно погрешности ЕРВ и уравнения регрессии (5.11) [150].

При обычном числе измерений расходов воды $N = 40 \dots 50$ в год $\tilde{\sigma}_K$ на порядок меньше $\tilde{\sigma}_p$ и точность определения ЕРВ формально достаточно высока. Но в работе [150] не учтено, что этот эффект достижим лишь при сравнительно большом числе измерений, равномерно распределенных по амплитуде колебания уровня, так что в каждом их интервале оказывается достаточно данных для надежного определения среднего положения КР. Практически это требование трудно соблюсти, особенно в области максимума непродолжительных паводков, в переходные периоды и т. п. Поэтому построенные или аппроксимированные КР так или иначе отклоняются от действительного положения, которое можно установить по большому числу измерений. Отсюда возникают квазисистематические погрешности учета стока, т. е. такие, что их статистическое сглаживание происходит менее интенсивно, чем случайных. Строгая оценка квазисистематических погрешностей учета стока в этих условиях возможна лишь в каждом конкретном случае с учетом измерений расходов воды N . Если они достаточно равномерно распределены по фазам режима (N_Φ), то вместо (5.37) можно рекомендовать

$$\tilde{\sigma}_K = \tilde{\sigma}_p \sqrt{N_\Phi / N}. \quad (5.38)$$

При устойчивых КР в среднем делают 2—3 измерения в месяц (20—25 за период открытого русла). Считают, что для достаточного освещения фазы водного режима необходимо по крайней мере пять измерений. Таким образом, вся совокупность измерений на равнинных реках с устойчивыми КР, как правило, должна распределяться по четырем гидрологическим фазам.

При неоднозначной связи $Q(H)$ ЕРВ вычисляют на основе тех или иных моделей, а сток за расчетный период T суток определяют как среднеарифметическое из ЕРВ:

$$Q_T = (1/T) \sum_{K=1}^N Q_K.$$

Если бы погрешности вычисления ЕРВ $\tilde{\sigma}_K$ не были коррелированы между собой, то, очевидно, точность среднего значения

характеризовалась бы зависимостью

$$\tilde{\sigma}_T = \tilde{\sigma}_K / \sqrt{T}. \quad (5.39)$$

Фактически при обычных интервалах между измерениями τ_n , не превышающих 15—20 сут, погрешности $\tilde{\sigma}_K$ сохраняют знак, т. е. обладают значительной взаимной корреляцией. Более или менее независимыми можно считать лишь погрешности $\tilde{\sigma}_K$, относящиеся к соседним интервалам между измерениями. В связи с этим допустимо принять

$$\tilde{\sigma}_T = \tilde{\sigma}_K \sqrt{\tau_n / T}, \quad T \geq \tau_n. \quad (5.40)$$

Во всех случаях $\tilde{\sigma}_K$ вычисляют в зависимости от способа интерполяции по формулам (4.31) и (4.32).

Допустимо также определять случайную погрешность $\tilde{\sigma}_T$ по формуле (5.39). Но тогда суммарная погрешность должна содержать систематическую составляющую Δ :

$$\tilde{\sigma}_{Tc} = \sqrt{\tilde{\sigma}_T^2 + \Delta^2},$$

причем Δ устанавливают по данным учащенных измерений расходов воды.

Общие характеристики точности вычисления осредненных значений стока приведены на рис. 5.9. Погрешности рассчитаны по формулам (5.39) и (5.40) с учетом степени рассеяния связи $Q(H)$:

- 1) при устойчивых (однозначных) КР;
- 2) при неоднозначных зависимостях $Q(H)$ в створах равнинных рек, где происходят сезонные деформации русла и переменный подпор;
- 3) при неоднозначных КР в неустойчивых руслах полугорных и горных рек.

Погрешность σ_K вычисления ЕРВ в последних двух случаях определена по формуле (4.34), относящейся к линейной интерполяции поправок \tilde{q} . Полученные оценки можно распространить и на случай использования временных КР. Оценки точности приведены отдельно для двух фаз режима — половодий (паводков) и межени. При использовании формулы (5.38) для каждой фазы принято $N_\phi = 4$, а наибольшее число измерений расходов воды $N = 60$. На реках третьей группы точность вычисления стока растет с уменьшением расходов воды (см. рис. 5.9). Обратная картина наблюдается на реках первой и второй групп, где точность определения осредненных характеристик стока в межень меньше, чем в половодье, что объясняется увеличением относительного отклонения точек измеренных расходов воды в поле (Q, H) по мере снижения водности.

Кривые на рис. 5.9 характеризуют точность режимного учета стока в открытых свободных руслах. При появлении в русле препятствий для движения потока (ледообразование, зарастание)

погрешность вычисления ЕРВ и осредненных значений стока увеличивается на 40 % и более.

Для оценки точности оперативных значений можно принять соотношение

$$\tilde{\sigma}_{K_{оп}} = 2\tilde{\sigma}_{K_p}$$

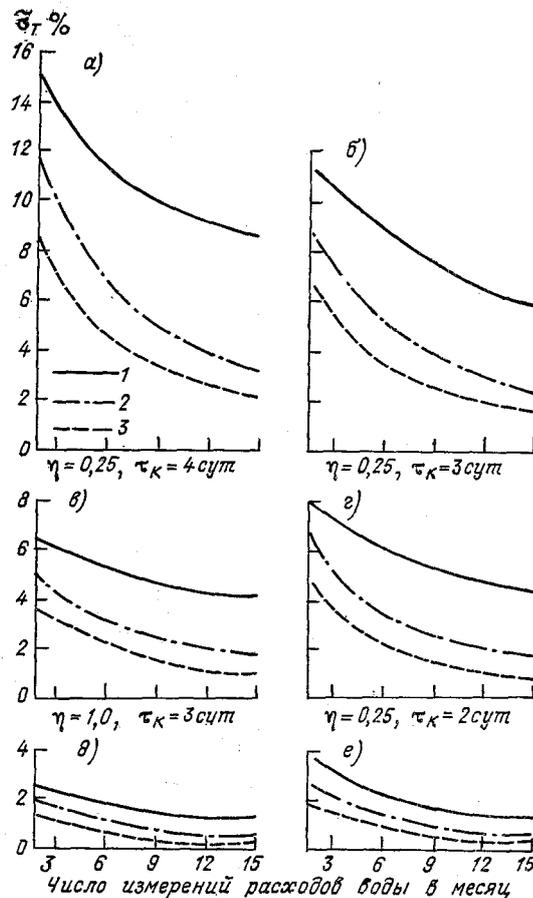


Рис. 5.9. Зависимость среднеквадратических погрешностей вычисления ежедневных (1), среднедекадных (2) и среднемесячных (3) расходов воды на реках и каналах, имеющих легко деформирующиеся (а, б), претерпевающие сезонные деформации (в, г) и устойчивые (д, е) русла, во время паводков (а, в, д) и межени (б, г, е).

Зависимости для погрешностей учета стока должны следовать из аналитической основы его моделей. Во всех случаях, когда нарушен этот принцип, оценки точности теряют свою достоверность.

5.4. Разложение гидрологических полей на естественные ортогональные составляющие и учет речного стока

Особенность разложения полей на ортогональные составляющие состоит в том, что главная информация о поле содержится в немногих слагаемых, которые в некотором смысле наилучшим образом соответствуют природе рассматриваемых исходных полей. Разложение поля на ортогональные составляющие позволяет установить вклад каждой из них в изменчивость изучаемого элемента — от первых, соответствующих наибольшему вкладу, до последующих в убывающем порядке. Для метеорологических элементов эта процедура представляет собой разложение полей на естественные ортогональные составляющие (ЕОС) и реализуется на ЭВМ [12]. Для гидрологических полей таких разработок значительно меньше. В последнее время они выполнялись в лаборатории гидрометрии ГГИ. При этом характеристики стока — расходы воды, осредненные за год, месяц, декаду и сутки, были представлены в виде модульных коэффициентов $K_i = Q_i/\bar{Q}$ или относительных отклонений от нормы $\tilde{q}_i = (Q_i - \bar{Q})/\bar{Q}$. В последнем случае результаты наблюдений на совокупности n постов, например, за m месяцев образуют матрицу

$$\|\tilde{q}_{ij}\| = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{13} & \dots & \tilde{q}_{1n} \\ \tilde{q}_{21} & \tilde{q}_{22} & \tilde{q}_{23} & \dots & \tilde{q}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{q}_{m1} & \tilde{q}_{m2} & \tilde{q}_{m3} & \dots & \tilde{q}_{mn} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

После разложения поля, заданного исходной матрицей (5.41), каждый ее элемент имеет вид суммы произведений функции x_{kj} на коэффициент T_{ki} :

$$\tilde{q}_{ij} = \sum_{k=1}^l T_{ki} x_{kj}, \quad (5.42)$$

где $l \leq n$ — число слагаемых (членов разложения).

При определении функций—слагаемых (5.42) принято естественное условие (отсюда происходит и название — естественные составляющие):

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\tilde{q}_{ij} - \sum_{k=1}^l T_{ki} x_{kj} \right)^2 = \min.$$

Функции x_{kj} зависят только от координат точек и являются собственными векторами ковариационной матрицы совокупности полей \tilde{q} для точек j и S (без сдвига во времени, т. е. при фиксированном i):

$$\left\| R_{jS} = (1/m) \sum_{i=1}^m \tilde{q}_{ij} \tilde{q}_{iS} \right\|. \quad (5.43)$$

Для определения x_j служит система уравнений

$$\sum_S R_{js} x_s = \lambda x_j, \quad (5.44)$$

где λ — собственное число матрицы $\|R_{js}\|$.

В результате решения системы (5.44) получим $l = n$ значений λ_j и соответственно x_j .

Каждому собственному вектору соответствуют коэффициенты разложения

$$T_{K_i} = \sum_j \tilde{q}_{ij} x_{kj} / \sum_j x_{kj}^2. \quad (5.45)$$

Разложение (5.42) может содержать максимальное число слагаемых $l = n$. На практике для адекватного представления поля элемента достаточно использовать первые три-четыре члена (это одно из достоинств метода).

Метод разложения полей на ЕОС применен для обоснования оптимальной гидрологической сети в зоне формирования боковой приточности в Горьковское водохранилище. Оно принимает более 33 притоков. Гидрометрическими наблюдениями охвачено 73 % площади водосбора, непосредственно тяготеющей к бьефу между Рыбинским и Горьковским гидроузлами. При составлении водных балансов Горьковского водохранилища кроме входного и выходного створов ГЭС привлечены гидрометрические данные 32 постов на боковых притоках. Для разложения поля отобраны 20 постов, расположенных преимущественно в низовьях боковых притоков с площадями водосборов от 137 до 18 500 км². В исходную совокупность не входят посты, замыкающие малые площади водосборов, при которых не гарантировано получение зонально-репрезентативных характеристик стока, и с коэффициентами вариации среднегодовых расходов воды, близкими к минимальным и максимальным значениям, а также посты, расположенные рядом с включенными в исходную совокупность. Они исключены во избежание чрезмерной корреляционной связанности гидрологических характеристик, нежелательной при разложении поля на ЕОС (впрочем, как и весьма малая корреляция между ними).

Аналитической обработке подвергнуты ряды среднемесячных расходов воды по двум вариантам совокупности: полной (20 постов с рядом наблюдений 1970—1981 гг.) и сокращенной вдвое (10 постов с рядом наблюдений за 1976—1981 гг.). Использованные посты равномерно распределены по территории. Расчеты выполнены на ЭВМ ЕС-1022 по стандартной программе математического обеспечения.

При известных параметрах разложения поля на ЕОС среднемесячные расходы воды вычисляют по формуле

$$Q_{ij} = (1 + \tilde{q}_{ij}) \bar{Q}_j = \left(1 + \sum_{k=1}^l T_{k_i} x_{kj} \right) \bar{Q}_j. \quad (5.46)$$

Доля дисперсии элемента поля, представляемой первыми l членами разложения (5.46), равна

$$D_l = \frac{\sum_{k=1}^l \lambda_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

В полученном разложении при $k=3$ $D_l = 97,3\%$, что равнозначно погрешности

$$\delta = \sqrt{1 - D_l} = \sqrt{1 - 0,973} = 0,164. \quad (5.47)$$

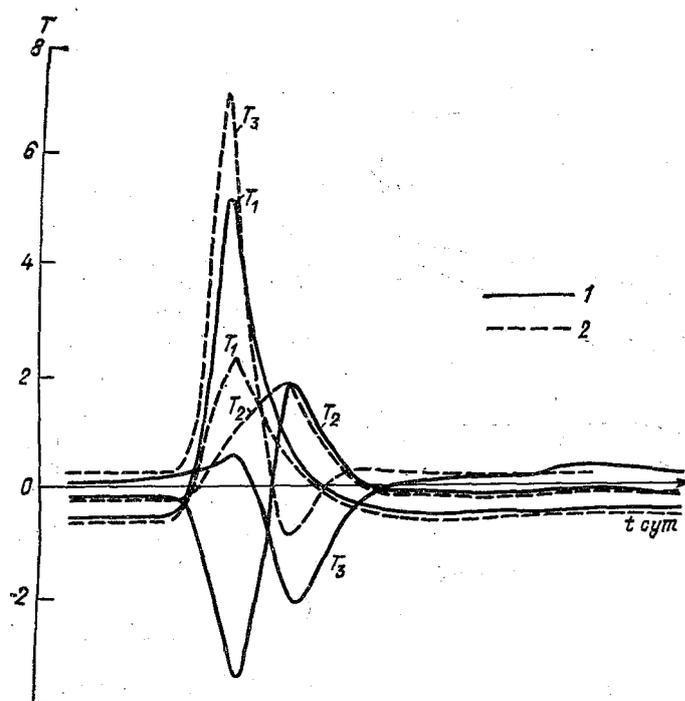


Рис. 5.10. Хронологический ход коэффициентов разложения полей среднемесячного стока за многоводный 1970 г. (1) и маловодный 1972 г. (2).

Результат непосредственного сравнения расхождений фактических (по данным наблюдений) и вычисленных по формуле (5.47) среднемесячных расходов воды при трех первых членах разложения близок к теоретической оценке.

Если поставить вопрос о генезисе ЕОС, то для его идентификации может служить хронологическая последовательность членов разложения (5.46) (рис. 5.10). Так, первый член $T_1 x_1$ воспроизводит динамику поверхностного питания рек от снеготаяния. На это указывают практически нулевые значения этой составля-

ющей в зимние месяцы и максимальные в период половодья. Вторым член $T_{2j}x_{2j}$ правомерно отождествить с долевым вкладом грунтового питания, так как его хронологический ход явно воспроизводит типичные изменения подземной составляющей стока. Графики $T_{2j}x_{2j}$ показывают фазы преобладания, прекращения и

возобновления грунтового питания. Более того, можно найти различие в динамике подземного питания, отражающей степень связанности водоносных горизонтов с рекой, согласно известным схемам [116].

Трудно физически интерпретировать третью составляющую $T_{3j}x_{3j}$. Непосредственное сопоставление рассчитанных значений показало, что для малых рек (при $A < 500 \text{ км}^2$) и наиболее крупных в рассматриваемой совокупности ($A > 1000 \text{ км}^2$) значения \bar{q}_{3j} соизмеримы с погрешностями определения самой величины q_j . На реках, имеющих промежуточные значения A , составляющая $T_{3j}x_{3j}$ достаточно существенна.

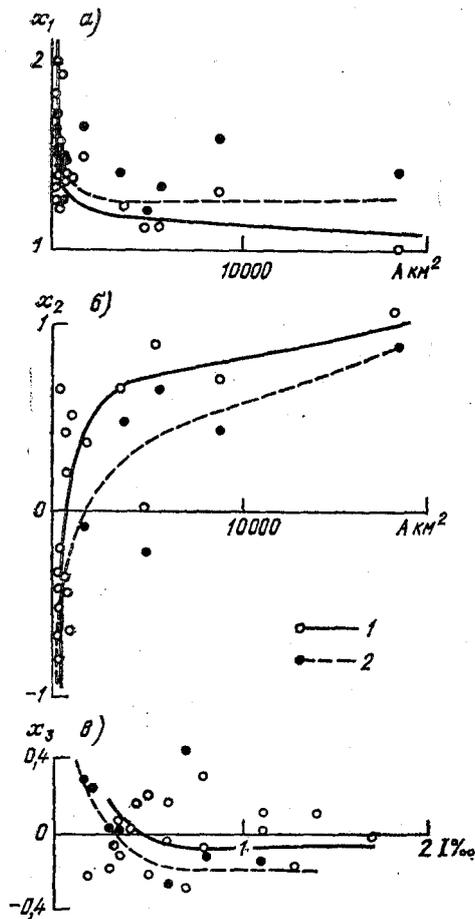


Рис. 5.11. Зависимость собственных векторов от площади водосбора (а, б) и уклона (в).

1, 2 — полная (20 постов) и сокращенная (10 постов) совокупности соответственно.

Таким образом, первые два вектора разложения полей элемента \bar{q} имеют вполне отчетливый физический смысл и могут соответствовать ландшафтно-гидрографическим характеристикам бассейнов. На рис. 5.11 приведены зависимости собственных векторов от площадей водосборов A . Вид функции $x_{kj}(A_j)$ разный для рассматриваемых первых двух векторов. Если первый вектор x_{1j} уменьшается с увеличением площади водосбора, то второй — возрастает. Третий вектор x_{3j} не зависит от площади водосбора, но

зато достаточно тесно связан со средним уклоном водосбора I_0 , характеризующим его рельеф как одно из условий формирования поверхностного стока — возможность его потерь на заполнение бессточных впадин. Обращает на себя внимание плавность изменения T_{K_i} во времени. Этот факт достаточно известен. Именно инерционность изменения коэффициентов T_{K_i} служит предпосылкой их использования при разработке численных методов гидрометеорологических прогнозов [139].

Качество разложения исходной совокупности $\|\tilde{q}_{ij}\|$ отражает соотношение первого и второго собственных чисел, равное 6,8. Другой характеристикой качества разложения служит число обусловленности Тогда: $P = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. В данном случае $P = 645$, что не является чрезмерным [137].

В какой степени допустимы полученные показатели качества разложения поля $\|\tilde{q}_{ij}\|$ на ЕОС? Линейная алгебра не дает на этот вопрос теоретического ответа. Эффективность разложения обычно устанавливают по результатам численных экспериментов для решения конкретных задач. Подобную оценку авторы выполнили на основе независимой информации: по данным наблюдений на постах, не включенных в исходную совокупность, т. е. как бы расположенных на неизученных реках.

Аналитическая структура разложения полей на ЕОС имеет определенную сложность. Но после того, как его параметры получены на ЭВМ, сами по себе расчеты стока неизученных рек просты. В самом деле, значения векторов x_{k_j} при отсутствии наблюдений устанавливают по их зависимости от площадей водосборов или порядков речных систем. При этом имеют в виду, что условия формирования стока, относящиеся к периоду наблюдений, использованных при разложении на ЕОС, не изменились к рассматриваемому моменту времени. Таким образом, требование стационарности в авторской интерпретации метода ЕОС относится не к исходным рядам наблюдений, а к условиям формирования стока. Что же касается коэффициентов разложения T_{K_i} , полученных по данным наблюдений, то они приняты для соответствующего вектора x_{K_j} безотносительно к положению постов. Среднемесячные расходы воды в неизученных створах рассчитаны по зависимости (5.46).

При расчете оперативных значений расходов воды в неизученных створах кроме векторов, определяемых по зависимостям $x_{k_j}(A, I_0)$, надо установить коэффициенты разложения T_{k_i} , заранее не известные для текущего (расчетного) интервала времени (месяц).

Возможные четыре варианта оперативного учета стока.

В а р и а н т I. Совокупность исходных данных элементов поля \tilde{q}_{ij} пополняют по результатам наблюдений за текущий расчетный интервал (в расчетах авторов — последовательно за каждый

месяц). Затем дополненную совокупность \tilde{q}_i вводят в ЭВМ, которая реализует алгоритм разложения поля \tilde{q}_i на ЕОС. При этом значения собственных векторов x_{k_i} существенно не изменяются, и значит, нет необходимости строить новые графики зависимости $x_{k_i}(A, I_0)$. Что касается коэффициентов T_{k_i} , то последние члены их временного ряда как раз и надо принять для вычисления расходов воды неизученных рек с использованием все той же формулы (5.46). При этом норму стока для данного поста \bar{Q}_i рассчитывают по зависимостям, рекомендованным в курсах гидрологии и СНиПах. В численных экспериментах авторов значения \bar{Q}_i приняты по данным наблюдений, чтобы исключить влияние погрешности определения нормы годового стока на результаты проверки эффективности разложения поля на ЕОС.

По мере течения реального времени массив исходной информации пополняют данными измерений, чтобы соответственно получить на ЭВМ очередное значение T_{k_i} .

Вариант II. При наличии связи собственных векторов с ландшафтно-гидрографическими факторами можно обойтись без ЭВМ и определять текущие значения коэффициентов разложения T_{k_i} следующим образом. Формула (5.42) имеет вид системы линейных уравнений для момента (интервала) времени i при фиксированном числе учтенных членов разложения $k = 3$. Опустив индекс i , поскольку интервал времени также фиксирован, получаем

$$\begin{aligned} T_1 x_{11} + T_2 x_{21} + T_3 x_{31} &= \tilde{q}_1, \\ T_1 x_{12} + T_2 x_{22} + T_3 x_{32} &= \tilde{q}_2, \\ T_1 x_{13} + T_2 x_{23} + T_3 x_{33} &= \tilde{q}_3. \end{aligned} \quad (5.48)$$

В уравнения (5.48) входят независимые переменные x_{k_i} (они заранее определены по связи с ландшафтно-гидрографическими факторами бассейна) и \tilde{q}_i — данные текущих измерений. Определению подлежат $T_1 - T_3$.

Числа x_{k_i} образуют матрицу коэффициентов системы (5.48):

$$B = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}.$$

При сравнительно небольшом числе неизвестных (в данном случае их всего три) для решения системы (5.48) удобно использовать формулы Крамера

$$T_s = \Delta_s / \Delta, \quad s = 1, 2, \dots, N,$$

где Δ — детерминант матрицы B , причем $\Delta = \det B \neq 0$; Δ_s — детерминант матрицы B , получаемый из нее при замене s -го столбца столбцом правых частей \tilde{q} .

Например, для определения T_1 детерминант B имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} \tilde{q}_1 & x_{21} & x_{31} \\ \tilde{q}_2 & x_{22} & x_{32} \\ \tilde{q}_3 & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}.$$

Когда число постов, где производят наблюдения, существенно больше числа неизвестных T_{ki} можно поставить и решить задачу выбора оптимального набора данных q_{ij} , при которой погрешность расчета окажется минимальной.

В а р и а н т III. При отсутствии гидрометрических данных можно заменить действительные значения расходов воды за отдельно взятый месяц их нормой, т. е. средним многолетним расходом воды за тот же месяц.

В а р и а н т IV. Значения векторов x_{kj} определяются по данным предшествующих наблюдений на соответствующем посту. Для проверки эффективности метода привлечены 10 постов, не входящих в исходную совокупность данных, использованных при получении параметров разложения поля на ЕОС. Среднемесячные расходы воды по данным наблюдений за 1982 г. сопоставлены с расчетами по (5.46) для двух случаев:

1) векторы x_{kj} определены по графикам (см. рис. 5.11) при сокращенной совокупности постов;

2) значения x_{kj} приняты по данным расчетов параметров разложения поля \tilde{q}_{ij} на ЕОС, что соответствует случаю, когда оперативный учет стока осуществлен на посту, где ранее проводившиеся наблюдения решено прекратить.

В результате численных экспериментов установлено, что погрешность учета стока по вариантам II и III выше, чем по варианту I, соответственно на 30 и 50 %. Во всех вариантах значения погрешностей стабилизируются при площадях водосбора $A > 1000 \text{ км}^2$. Наиболее эффективен по сравнению со всеми другими вариант IV, в том числе и для малых рек при $A < 1000 \text{ км}^2$. Именно по этому варианту целесообразно восстанавливать гидрограф стока (погрешность расчета при $A > 1000 \text{ км}^2$ в среднем 18 %).

Зона формирования боковой приточности в Горьковское водохранилище — достаточно характерный случай оптимизации гидрологической сети. В этой зоне действуют 32 поста, контролирующих 72,7 % всего объема боковой приточности, что может быть избыточным.

Этот вопрос рассмотрен с точки зрения принципа равных влияний частных погрешностей на точность результата измерений или вычислений [58]. В качестве такой результирующей характеристики принят суммарный расход воды бокового притока Q_6 за год или отдельно взятый месяц. Если требуемая точность вычисления Q_6 оценивается относительным значением допускаемой среднеквадратической погрешности δ , то необходимую точность

определения какой-либо составляющей характеризует допустимая частная погрешность

$$\delta_i = \delta / (\alpha_i \sqrt{N}), \quad (5.49)$$

где α_i — долевой коэффициент для отдельно взятого притока; $\alpha_i = Q_i / Q_0$; N — общее число составляющих (постов, данные по которым использованы в расчете Q_0).

При сокращенном числе гидрологических постов, контролирующих боковой приток в водохранилище, возможны два варианта учета стока рек при отсутствии гидрометрических данных: 1) по норме годового или месячного стока (в этом случае относительная погрешность $\delta_i = C_{vi}$) и 2) на основе ЕОС с погрешностью $\delta_{рг}$ или $\delta_{рм}$.

Очевидно, что при допустимой погрешности $\delta_i \geq C_{vi}$ или $\delta_i \geq \delta_{рг}$ и $\delta_i \geq \delta_{рм}$ данные наблюдений можно заменить нормой или вычисленными на основе ЕОС значениями стока. Ясно, что эта возможность существует только для притоков, характеризуемых долевым коэффициентом α_i , не превосходящим его критерильное значение, которое можно получить из условия (5.49):

$$\alpha_i \leq \alpha_{кр_i} = \delta / (\delta_i \sqrt{N}). \quad (5.50)$$

Возможное сокращение числа постов, контролирующих боковой приток в Горьковское водохранилище, проверено при допустимой погрешности его учета $\delta = 3\%$. Несмотря на это достаточно жесткое условие число постов можно сократить до минимума без снижения точности расчетных характеристик: даже в период половодья возможно ограничиться наблюдениями лишь в замыкающих створах двух-трех наиболее крупных притоков.

Таким образом, пример Горьковского водохранилища показывает, что устранение информационной избыточности содержит значительные резервы экономии трудовых и материальных ресурсов от сокращения числа пунктов наблюдений.

Установленная возможность сокращения густоты гидрологической сети относится к замыкающим створам боковых притоков водохранилищ. Естественно, полученные выводы не распространены на посты, расположенные на водосборах и по длине самих притоков, если они необходимы для изучения закономерностей формирования стока и гидрологических прогнозов.

Возможности ЕОС в этом последнем случае исследованы на примере нижнего Дона. Задача поставлена так: имея данные о расходах воды на р. Северский Донец и ее притоках, предсказать расходы воды в створе ст-цы Раздорской с заблаговременностью 3 сут (что равно среднему времени добегания волны половодья) на расчетном участке (рис. 5.12). Для подготовки расчетной базы необходимо:

1) разложить на ЕОС совокупность ЕРВ за многоводный, средней водности и маловодной годы с представлением их в мо-

дульных коэффициентах $K = Q_i/\bar{Q}$, где \bar{Q} — осредненные для выборки значения расходов воды;

2) каждый коэффициент разложения сопоставить с ежедневным расходом воды $Q_{j,t-3}$, наблюдавшимся за 3 сут до расчетной даты t , чтобы получить уравнение регрессии

$$T_{kt} = a_0 + \sum_1^N a_j Q_{j,t-3}, \quad (5.51)$$

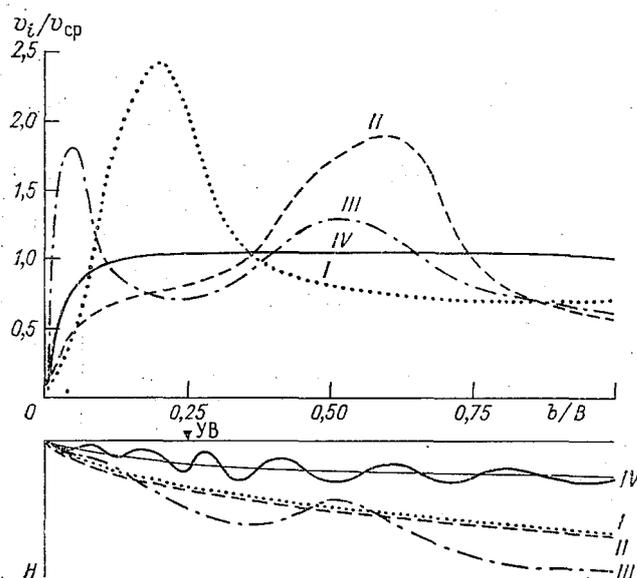


Рис. 5.12. Гидрологическая сеть в нижнем течении рек Дон и Северский Донец.

1 — Цимлянский гидроузел, 2 — ст. Раздорская, 3 — ст. Николаевская, 4 — ст. Батлаевская, 5 — х. Страхов, 6 — г. Белая Калитва, 7 — г. Усть-Донецк, 8 — х. Мостовой, 9 — х. Скосырский, 10 — х. Апанаскин, 11 — х. Погорелов, 12 — х. Богураев.

которое позволяло бы в оперативном порядке вычислять коэффициенты T_i , не прибегая к разложению на ЕОС.

В качестве предикторов использованы ЕРВ по части постов (табл. 5.2). В исходную совокупность данных не входят зарегулированные расходы воды в створе Цимлянского гидроузла. Оптимальный набор постов, вообще говоря, в каждом конкретном случае можно установить посредством численных экспериментов по условиям $r_0 \rightarrow \max$, $\sigma_p \rightarrow \min$. Параметры уравнения (5.51) приведены в табл. 5.3.

Прогнозируемые ЕРВ в створе ст-цы Раздорской определены по формуле

$$Q = \left(1 + \sum_{k=1}^l T_{kt} x_{kj}\right) \bar{Q}. \quad (5.52)$$

Таблица 5.2
Собственные векторы разложения на ЕОС совокупности ЕРВ по постам Нижнего Дона и Северского Донца

Река — пост	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Дон — ст-ца Раздорская	0,02212	0,11175	-0,09297	0,10408	0,49814	-0,30486	-0,01248
Северский Донец — г. Белая	0,23723	0,32202	-0,19019	0,20864	0,33430	0,38903	-0,01568
Калитва	1,17605	1,04402	-1,01846	-0,24036	-0,06964	-0,04006	-0,05238
Калитва — х. Погорелов	0,41166	0,59705	0,04465	0,62984	-0,20625	-0,09018	-0,06484
Сал — ст-ца Баллаевская	0,86472	0,40600	0,16116	0,02983	-0,00121	-0,01113	0,41608
Кундрючья — ст-ца Владимир-ская	1,44113	0,82777	1,11478	-0,19688	0,04388	0,00939	-0,11278
Лихая — х. Богураев	3,66002	-0,84602	-0,14190	0,06272	0,00390	-0,00142	-0,02868
Быстрая — ст-ца Скасырская							

Таблица 5.3
Параметры уравнения регрессии коэффициентов разложения по предикторам — расходам воды в расчетных створах

Коэффициент	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	r	σ_p
T_1	-0,1809	-0,00012	0,00018	0,00232	0,01293	0,34	0,936
T_2	-0,6973	0,00003	0,00016	0,00557	0,0263	0,72	0,703
T_3	0,0989	-0,00002	-0,00042	-0,00867	0,02814	0,65	0,738
T_4	-0,8701	0,00010	0,00139	-0,00637	0,03862	0,64	0,762
T_5	-1,5586	0,00008	0,00242	-0,00315	-0,01848	0,93	0,375
T_6	0,1508	-0,00083	0,00422	-0,00320	-0,01473	0,93	0,374
T_7	0,0100	-0,00002	0,00047	-0,00240	-0,00294	0,18	0,977

В расчетную формулу (5.52) входят лишь шесть членов ($l = 6$), так как УР для T_7 имеет очень низкий коэффициент корреляции $r_7 = 0,18$.

Приведем пример определения расходов воды 19.04.88 г. по предикторам-расходам воды за 16.04.88 г. согласно формуле (5.52):

$$\begin{aligned} Q_t &= (T_1x_1 + T_2x_2 + T_3x_3 + T_4x_4 + T_5x_5 + T_6x_6 + 1)\bar{Q} = \\ &= (0,0601 \cdot 0,0221 - 0,0086 \cdot 0,1118 - 0,2040 \cdot 0,0930 + \\ &+ 0,4322 \cdot 0,1041 - 0,0198 \cdot 0,4901 - 0,9460 \cdot 0,3049 + 1) \cdot 1460 = \\ &= (-0,272 + 1) \cdot 1460 = 1063 \text{ м}^3/\text{с}. \end{aligned}$$

Полученное значение отличается от фактически наблюдаемого $Q = 970 \text{ м}^3/\text{с}$ на 9,6 %.

Общая проверка точности прогнозирования выполнена на основе независимой информации — совокупности ЕРВ за апрель—май в половодье 1988 г. Среднеквадратическое отклонение вычисленных ЕРВ от фактических составило $\delta Q = 10,12$ %.

Таким образом, рассмотренные случаи дают достаточные основания для вывода о перспективности применения метода БОС в гидрологии и гидрометрии, но для этого нужны дальнейшие разработки и численные эксперименты по его адаптации к расчетам характеристик речного стока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формально гидрологические и гидравлические модели можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= L(\varphi), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \\ \varphi &= \begin{pmatrix} Q, & F \\ u, & h \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad \varphi = \varphi(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где L — нелинейный дифференциальный оператор.

Решение системы (1) можно представить в виде ряда по некоторой системе базисных ортогональных функций $\Phi_i(x)$:

$$\varphi(t, x) = \sum_i \psi_{ik}(t) \Phi_i(x). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и применяя процедуру Галеркина, получают для определений функций $\psi_{ik}(t)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_p = F_p(\psi_1, \dots, \psi_N, t), \quad \psi(0) = \psi_{p0}; \quad p = \overline{1, N}, \quad N = \overline{1, mM}, \quad (3)$$

где M — число членов, оставленных в разложении (2).

Анализ системы (3) приводит к выводу, что кроме решений, определяемых видом граничных условий, могут быть три разновидности особых решений: состояние равновесия, периодические, ограниченные непериодические (статистические). Последние имеют место, если детерминированное решение неустойчиво (образует «странный аттрактор» [116]).

Таким образом, стохастичность могут порождать следующие обстоятельства:

1) из-за неточности измерений начальное условие известно приближенно и, следовательно, должно быть задано плотностью вероятности $p(\psi, t_0)$. Тогда в последующие моменты времени t распределение вероятностей выразится плотностью $p(\psi, t)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_n (\partial p / \partial \psi_n) F_n(\psi), \quad (4)$$

где F_n — правая часть системы (3);

2) на гидрологические и гидравлические процессы воздействуют внешние шумы (флуктуации параметров), например, из-за деформаций русел, зарастания и т. п., что в конечном счете обуславливает случайность самого дифференциального оператора L ;

3) уравнениям гидравлики и гидродинамики свойственна внутренняя неустойчивость, приводящая к стохастичности. В качестве примера можно привести стохастический аттрактор, полу-

ченный для модельной системы уравнений гидравлики [73]:

$$\dot{y} = x, \quad \dot{x} = -Ry, \quad \dot{R} = kR + c, \quad (5)$$

где x и y связаны рядом преобразований с расходом воды потока; R и k — коэффициенты, определяющие морфометрию русла и гидравлические сопротивления, c — константа.

При $k < 0$ траектории системы (5) «притягиваются» к предельному множеству, структура которого характеризуется полным перемешиванием траекторий. В точках бифуркации не существует никакой возможности предсказать, в какое состояние перейдет система. Иными словами, сменяются модели, описывающие реализации полей и процессов, при этом можно отметить полную утрату взаимного соответствия характеристик объекта и принятых для него расчетных зависимостей. Но после того, как траектория (одна из многих) реализуется, вновь вступит в силу детерминизм (случайность проявляется лишь по условиям 1 и 2) — и так до следующей точки бифуркации. Для примера можно сослаться на известный график Никурадзе, на котором показана зависимость коэффициента гидравлических сопротивлений от числа Рейнольдса. Характерные точки этого графика, соответствующие смене ламинарного режима течения на турбулентный, означают вместе с тем точки бифуркации решений уравнений движения потока. Если обратиться к постулатам гидравлики, то можно отметить, что модель плоского потока, пригодная для однорукавного русла, неприемлема для случая русловых бифуркаций. Следовательно, прежде чем оперировать теми или иными расчетными зависимостями, необходимо установить морфологическое состояние русла, например, с применением критериев квазиоднородности кинематической структуры потока и типизации русловых процессов.

Основное внимание в книге уделено первым двум случаям, хотя с физической точки зрения более интересен случай, связанный с внутренней неустойчивостью. Именно неустойчивостью порождены качественные различия систем, их переход из одной в другую и процессы самоорганизации. Когда из-за неустойчивости какая-либо система теряет стационарное распределение вероятности, традиционные подходы к решению задачи могут привести в тупик.

В этих условиях особое значение приобретают философские и эвристические положения, в частности вариационные принципы и вероятностно-энтропийные подходы (минимум диссипации энергии, максимум энтропии и др.). Однако степень их универсальности еще требует особого доказательства. Так, еще неизвестно, всегда ли в природе существует минимум диссипации энергии [24]. Может быть, более реален лишь экстремум? Что касается энтропийных аспектов, то для гидрологических процессов сформулирован постулат: если где-либо возникнет стохастическая неопределенность, измеряемая шенноновской энтропией, то она должна стремиться к максимуму, с которым термодинамика свя-

зывает деградацию энергии [68]. В то же время при неравновесных условиях энтропия ведет не к деградации систем, а к организации, к «порядку из хаоса» [116]. На основе непосредственного расчета энтропии доказано, что при одинаковых средних значениях кинетической энергии энтропия ламинарного (упорядоченного) течения больше, чем турбулентного, а его традиционно считают беспорядочным. Можно не сомневаться в том, что это не единственный парадокс, с которым столкнутся в своем развитии гидрология и гидравлика. Для решения возникающих сложных проблем нужна разработка нетрадиционных моделей гидрологических процессов, в которых отразились бы механизмы бифуркации, смена форм развития объектов и фазовые переходы в динамических системах — словом, все то многообразие закономерностей, которое открывается при глубоком изучении явлений природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абальянц С. Х. Устойчивые и переходные режимы в искусственных руслах.— Л.: Гидрометеиздат.— 1981.— 238 с.
2. Айвазян О. М. К расчету пропускной способности земляных каналов и русел//Гидротехническое строительство.— 1989.— № 1.— С. 18—26.
3. Алтунин В. С. Мелиоративные каналы в земляных руслах.— М.: Колос.— 1979.— 255 с.
4. Алтунин В. С., Ларионова Л. В. Гидравлический расчет крупных каналов в легкоразмываемых грунтах//Гидротехническое строительство.— 1986.— № 1.— С. 26—31.
5. Алтунин В. С., Ларионова Л. В. Гидравлические сопротивления крупных земляных каналов//Гидротехническое строительство.— 1987.— № 8.— С. 18—21.
6. Альтшуль А. Д. Основные закономерности равномерного течения воды в каналах//Изв. АН СССР. Серия Технические науки.— 1956.— № 5.— С. 85—94.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Наука.— 1981.— 568 с.
8. Антроповский В. И. Гидроморфологические зависимости и их дальнейшее развитие//Труды ГГИ.— 1969.— Вып. 169.— С. 34—86.
9. Антроповский В. И. Режимы сопротивления в необлицованных руслах//Гидротехника и мелиорация.— 1984.— № 4.— С. 32—37.
10. Артамонов К. Ф. Регулировочные сооружения при водозаборе.— Фрунзе: Изд. АН КиргССР.— 1963.
11. Астапов Ю. М., Медведев В. С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления.— М.: Наука.— 1982.— 304 с.
12. Багров Н. А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих//Труды ЦИП. 1959. Вып. 74.— С. 3—24.
13. Багров Н. А. К теории механических ветроизмерителей//Метеорология и гидрология.— 1989.— № 3.— С. 116—118.
14. Балакаев Б. К. Каракумский канал.— Ашхабад: Ылым.— 1979.— 194 с.
15. Баренблатт Г. И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика.— Л.: Гидрометеиздат.— 1982.— 255 с.
16. Барлоу Р., Прошон Ф. Математическая теория надежностей.— М.: Советское радио.— 1969.— 468 с.
17. Барышников Н. Б. Морфология, гидрология и гидравлика пойм.— Л.: Гидрометеиздат.— 1987.— 280 с.
18. Беркович К. М. и др. Районирование территории СССР по геолого-геоморфологическим условиям развития русловых деформаций//Работа водных потоков.— М.— 1987.— С. 143—151.
19. Бернадский Н. М. Речная гидравлика.— М.—Л.: Госэнергоиздат.— 1933.— 148 с.
20. Боровков В. С. Русловые процессы и динамика речных потоков на урбанизированных территориях.— Л.: Гидрометеиздат.— 1989.— 286 с.
21. Бутаков А. Н. Теоретические модели формирования русловых образований//Труды V Всесоюз. гидрол. съезда. Т. 10, кн. 1.— Л.— 1988.— С. 119—130.
22. Васильев О. Ф., Лятхер В. М. Гидравлика//Механика в СССР за 50 лет. Т. 2.— М.— 1970.— С. 709—790.
23. Васильченко Г. В. Воздействие потоков на мелиоративные и водохозяйственные сооружения.— Минск: Урожай.— 1985.— 175 с.
24. Великанов М. А. Динамика русловых потоков: В 2 т.— М.: ГИТЛ. Т. 1: 1954.— 324 с.; Т. 2: 1955.— 324 с.
25. Вид В. Э. Фотографический метод определения расхода воды в открытых потоках//Труды III Всесоюз. гидрол. съезда. Т. 8.— Л.— 1959.— С. 66—74.
26. Викторов А. С. Рисунок ландшафта.— М.: Мысль.— 1986.— 178 с.

27. Войнич-Сяноженцкий Т. Г. Проблема устойчивости течения потока реальной жидкости в каналах конечной глубины//Изв. ТНКСГЭИ.—Т. 16: 1966.—С. 18—38; Т. 18: 1969.—С. 20—39.
28. Войнич-Сяноженцкий Т. Г. Гидродинамика устьевых участков рек и взморий бесприливных морей//Труды ЗапНИГМИ.—1972.—Вып. 46 (52).—204 с.
29. Вопросы гидротехники свободных рек. Сборник избранных трудов основоположников русской русловой гидротехники.—М., 1948.—363 с.
30. Высоцкий Д. В., Соловьев Н. Я. Оценка влияния пульсации скорости течения на показания гидрометрической вертушки//Труды ГГИ.—1988.—Вып. 325.—С. 73—80.
31. Гандин Л. С., Каган Р. Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных.—Л.: Гидрометеиздат.—1976.—360 с.
32. Гиргидов А. Д. Об учете метеорологических факторов при расчетах крупных каналов//Гидротехническое строительство.—1988.—№ 1.—С. 33—35.
33. Глушков В. Г. Вопросы теории и методы гидравлических исследований.—М.: Изд-во АН СССР.—1961.—416 с.
34. Голубцов В. В. О гидравлическом сопротивлении и формуле для расчета средней скорости течения горных рек//Труды КазНИГМИ.—1969.—Вып. 33.—С. 30—41.
35. Гончаров В. Н. Динамика русловых потоков.—Л.: Гидрометеиздат.—1962.—374 с.
36. Грачев Н. Р., Карлыханов О. К. Закономерности формирования извилистых русел//Гидротехническое строительство.—1987.—№ 7.—С. 32—33.
37. Гринвальд Д. И., Никора В. И. Речная турбулентность.—Л.: Гидрометеиздат.—1988.—151 с.
38. Гришанин К. В. Устойчивость русел рек и каналов.—Л.: Гидрометеиздат.—1974.—143 с.
39. Гришанин К. В. Как ведет себя речной поток//Метеорология и гидрология.—1984.—№ 9.—С. 95—100.
40. Гришанин К. В., Замышляев В. И. Возникновение меандрирования как проблема гидродинамической неустойчивости//Труды ГГИ.—1985.—Вып. 301.—С. 5—12.
41. Грушевский М. С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах.—Л.: Гидрометеиздат.—1982.—287 с.
42. Дебольский В. К. и др. Образование и развитие песчаных гряд при движении взвешенного потока в неразрываемых границах//Водные ресурсы.—1977.—№ 3.—С. 157—166.
43. Дегтярев В. В. Улучшение судоходных условий сибирских рек.—М.: Транспорт.—1987.—176 с.
44. Доу Го-Жень. Перемещение наносов и устойчивость дна водных потоков: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: ЛИВТ, Л., 1960.—38 с.
45. Егоров С. А. О расчете каналов с очень большим гидравлическим радиусом//Гидротехническое строительство.—1973.—№ 6.—С. 38—40.
46. Железняков Г. В. Пропускная способность русел каналов и рек.—Л.: Гидрометеиздат.—1981.—311 с.
47. Жуковский Н. Н. Гидрологическая система регулирования рек и перспективы ее применения.—Горький.—1928.—32 с.
48. Зегжда А. П. Гидравлические потери на трение в каналах и трубопроводах.—Л.: Госстройиздат.—1957.—278 с.
49. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.—М.: Наука.—1973.—352 с.
50. Знаменская Н. С. Донные наносы и русловые процессы. Л.: Гидрометеиздат.—1976.—190 с.
51. Знаменский В. А. Анализ потерь энергии в водоемах и предложения по моделированию гидравлического режима//Труды ГГИ.—1968.—Вып. 155.—С. 88—108.
52. Зубков Н. С. Врезание реки в аллювиальные отложения на дне долины и характерные типы руслового процесса.—Геоморфология.—1987.—№ 3.—С. 39—44.

53. Ибад-Заде Ю. А., Крупник М. Я., Асадулаева Э. А. Новый метод определения устойчивого поперечного сечения русла в несвязных грунтах//Гидротехническое строительство.—1982.—№ 6.—С. 34—37.
54. Казаков И. Е., Мальчиков С. В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний.—М.: Наука.—1983.—384 с.
55. Карасев И. Ф. О принципах размещения и перспективах развития гидрологической сети//Труды ГГИ.—1968.—Вып. 164.—С. 3—36.
56. Карасев И. Ф. Распределение продольных скоростей течения в поймах и руслах рек//Труды ГГИ.—1973.—Вып. 202.—С. 3—39.
57. Карасев И. Ф. Русловые процессы при переброске стока.—Л.: Гидрометеиздат.—1975.—С. 298.
58. Карасев И. Ф. Речная гидрометрия и учет водных ресурсов.—Л.: Гидрометеиздат.—1980.—310 с.
59. Карасев И. Ф. Руслоформирующие расходы воды//Метеорология и гидрология.—1986.—№ 8.—С. 94—98.
60. Карасев И. Ф. Модели расхода воды при интеграционных измерениях скоростей русловых потоков//Труды ГГИ.—1987.—Вып. 328.—С. 80—100.
61. Карасев И. Ф., Коваленко В. В. Уравнения неустановившегося движения потока как основа экстраполяции расходов воды//Труды ГГИ.—1982.—Вып. 292.—С. 3—8.
62. Карасев И. Ф., Коваленко В. В. Стохастические аспекты гидравлики каналов//Труды V Всесоюз. гидр. съезда. Т. 10, кн. 1.—Л.—1988.—430 с.
63. Карасев И. Ф., Лобанов В. А. Оценка эффективности пространственной интерполяции характеристик речного стока и численность оптимальной гидрологической сети СССР//Труды ГГИ.—1988.—Вып. 325.—С. 3—12.
64. Карасев И. Ф., Ременюк В. А. Измерение расходов воды и учет стока при неустановившемся движении речных потоков//Труды V Всесоюз. гидр. съезда. Т. 3.—Л.—1989.—518 с.
65. Караушев А. В. Речная гидравлика.—Л.: Гидрометеиздат.—1969.—416 с.
66. Картвелишвили Н. А., Галактионов Ю. И. Идеализация сложных динамических систем.—М.: Наука.—1976.—272 с.
67. Картвелишвили Н. А. Нетрадиционные задачи гидравлики.—М.: Энергоатомиздат.—1985.—125 с.
68. Картвелишвили Н. А. Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного потока.—Л.: Гидрометеиздат.—1985.—168 с.
69. Кереселидзе Н. Б. Теоретический критерий плановой устойчивости русла//Гидротехническое строительство в горных условиях. Вып. 2.—Тбилиси.—1974.—С. 41—50.
70. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.—М.: Наука.—1975.—240 с.
71. Коваленко В. В. Об одномерной гидравлической идеализации неустановившегося открытого потока и уточнении критерия устойчивости движения на быстотоках//ЛГМИ.—Л., 1977.—770 с. Деп. в ВИНТИ 18.03.77, № 1048.
72. Коваленко В. В. Гидрологическая измерительная техника.—Л.: Изд. ЛПИ.—1984.—60 с.
73. Коваленко В. В. Измерение и расчет характеристик неустановившихся речных потоков.—Л.: Гидрометеиздат.—1984.—160 с.
74. Коваленко В. В. Гидрометрическое оценивание речного стока с элементами стохастического подхода.—Л.: Изд. ЛПИ.—1986.—61 с.
75. Коваленко В. В. Стохастическое оценивание гидравлического режима водопропускных сооружений//Вопросы эффективности гидрометеорологических исследований в целях интенсификации народного хозяйства.—Л.: Изд. ЛПИ.—1987.—172 с.
76. Коваленко В. В. Динамические и стохастические модели гидрологического цикла.—Л.: Изд. ЛПИ.—1988.—34 с.
77. Коваленко В. В., Илларионов А. В. К автоматизации экспериментальной проверки решений динамико-стохастических моделей речной гидрометрии//Труды V Всесоюз. гидр. съезда. Т. 3.—Л.—1988.—518 с.

78. Коваленко В. В., Илларионов А. В., Сало Ю. А. Экспериментальное исследование автоколебаний безнапорных потоков//Динамика русловых потоков.—Л.: Изд. ЛПИ.—1987.—138 с.
79. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности//ДАН СССР.—1941.—Т. 30.—С. 299—303.
80. Кондратьев Н. Е., Попов И. В., Смищенко Б. Ф. Основы гидроморфологической теории руслового процесса.—Л.: Гидрометеиздат.—1982.—272 с.
81. Коновалов И. М., Баланин В. В., Селезнев В. М. Новая теория турбулентных струй и ее приложение в гидротехнике//Труды ЛИВТа.—1962.—Вып. 26.
82. Крамер Г. Математические методы статистики/Под ред. А. Н. Колмогорова.—М.: Мир.—1975.—648 с.
83. Кузин П. С. Классификация рек и гидрологическое районирование СССР.—Л.: Гидрометеиздат.—1960.—455 с.
84. Куколевский Г. А. Гидравлично-вероятностные характеристики русловых процессов//Труды V Всесоюз. гидрол. съезда. Т. 10, кн. 1.—Л.—1988.—430 с.
85. Курдюмов Л. Д. Закономерности эрозионно-аккумулятивного процесса.—Л.: Гидрометеиздат.—1987.—128 с.
86. Кучмент Л. С., Мотовилов Ю. Г. О форме поперечного сечения речных русел//Метеорология и гидрология.—1973.—№ 3.—С. 53—57.
87. Лапшенков В. С. Прогнозирование русловых деформаций в бьефах речного гидроузла.—Л.: Гидрометеиздат.—1979.—238 с.
88. Левашов А. А. Расчет коэффициента Шези с помощью морфологических характеристик русла//Динамика русловых потоков. Л.—1983.—С. 63—66.
89. Ляпин А. Н., Чеботарев А. И. О деформациях и устойчивости речных русел//Метеорология и гидрология.—1976.—№ 1.—С. 55—64.
90. Лятхер В. М., Милитеев А. Н., Школьников С. Я. Численное моделирование турбулентных открытых потоков//Водные ресурсы.—1987.—№ 1.—С. 35—41.
91. Маккавеев В. М. Вопросы теории турбулентности и движения наносов//Труды ГГИ.—1963.—Вып. 100.—С. 54—57.
92. Маккавеев Н. И. Русло реки и эрозия в ее бассейне.—М.: Изд-во АН СССР.—1955.—346 с.
93. Маккавеев Н. И., Чалов Р. С. Русловые процессы.—М.: Изд-во МГУ.—1986.—264 с.
94. Мелконян Г. И. Потери напора на трение при нестационарном турбулентном течении//Труды ЛИВТ.—1977.—Вып. 153.—С. 40—46.
95. Мечитов И. И. Гидравлические исследования работы берегозащитных сооружений.—Ереван, 1960.—42 с.
96. Мещерская А. В. и др. Естественные составляющие метеорологических полей.—Л.: Гидрометеиздат.—1970.—200 с.
97. Мирцхулава Ц. Е. Основы физики и механики эрозии русел.—Л.: Гидрометеиздат.—1988.—304 с.
98. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.—Киев: Наукова думка.—1971.—440 с.
99. Михалев М. А. Распределение скорости течения по живому сечению каналов различного поперечного сечения при равномерном движении//Труды ЛПИ.—1982.—№ 382.—С. 8—15.
100. Михалев М. А., Павлов С. Я. Гидравлический расчет необлицованных каналов//Гидравлика и инженерная гидрология. Калинин: 1981. С. 13—24.
101. Михинов А. Е. Плановая неустойчивость деформируемых русел//Метеорология и гидрология.—1984. № 6.—С. 85—87.
102. Михинов А. Е. Связь размеров русловых микроформ с гидравлическими параметрами потока//Метеорология и гидрология.—1986.—№ 8.—С. 86—93.
103. Михневич Э. И. Устойчивость русел открытых водотоков.—Минск: Урожай.—1988.—240 с.
104. Мишуев А. В. Влияние формы поперечного сечения канала на пара-

- метры крупных волн перемещения//Гидротехническое строительство.—1987.— № 8.— С. 5—10.
105. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент.—М.: Наука.—1979.—223 с.
106. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика: В 2 т.—М.: Наука. Т. 1: 1965.—640 с.; Т. 2: 1967.—720 с.
107. Музылев С. В., Привальский В. Е., Раткович Д. Я. Стохастические модели в инженерной гидрологии.—М.: Наука.—1982.
108. Никитин И. К. Сложные турбулентные течения и процессы тепло-массопереноса.—Киев: Наукова думка.—1980.—238 с.
109. Николаев Ю. В. Преобразование информации в приложении к задачам гидрометеорологии.—Л.: Гидрометеоздат.—1969.—64 с.
110. Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы.—Л.: Гидрометеоздат.—1988.—412 с.
111. Павловский Н. Н. Неравномерное движение грунтовых вод.—Л.: Кубуч. 1932.—80 с.
112. Патрашев А. Н. Гидромеханика.—М.: Военмориздат.—1953.
113. Патрашев А. Н., Кивако Л. А., Гожий С. И. Прикладная гидромеханика.—М.: Изд-во МО СССР.—1970.—605 с.
114. Писарев Ю. В. Результаты и перспективы исследования стохастической морфологии русел рек//Гидрофизические процессы в реках и водохранилищах.—М., 1985.—С. 185—190.
115. Полубаринова-Кочина Л. Я. Теория движения грунтовых вод.—М.: Наука. 1977.—664 с.
116. Пригожин И. От существующего к возникающему.—М.: Наука.—1985.—328 с.
117. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика.—М.: Наука.—1979.—496 с.
118. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука. 1968.—С. 165—172.
119. Рекомендации по статистическим методам анализа однородности пространственно-временных колебаний речного стока.—Л.: Гидрометеоздат.—1984.—78 с.
120. Ременьюк В. А. Исследование точности формул для вычисления средней скорости на вертикали по многочисленным измерениям//Труды ГГИ.—1982.—Вып. 292.—С. 66—73.
121. Ременьюк В. А., Серяков А. Е. Характеристики точности моделей расходов воды при экспресс-измерениях//Труды ЛГМИ.—1990.—Вып. 107.—С. 67—75.
122. Ржаницын Н. А. Морфологические и гидрологические закономерности строения речной сети.—Л.: Гидрометеоздат.—1960.—238 с.
123. Ржаницын Н. А. Руслоформирующие процессы рек.—Л.: Гидрометеоздат.—1985.—263 с.
124. Рогунович В. П. Определение приведенного коэффициента шероховатости//Метеорология и гидрология.—1986.—№ 3.—С. 81—88.
125. Рогунович В. П. Автоматизация математического моделирования движения воды и примесей в системах водотоков.—Л.: Гидрометеоздат.—1989.—380 с.
126. Рождественский А. В., Чеботарев А. И. Статистические методы в гидрологии.—Л.: Гидрометеоздат.—1974.—424 с.
127. Ромашин В. В. О структурном подходе к русловой морфометрии.—Труды ГГИ, 1968.—Вып. 155.—С. 56—63.
128. Садовский Г. Л. К вопросу изучения речных переформирований//Речной транспорт.—1949.—№ 4.—С. 20—23.
129. Савельева А. В., Акатов В. А. О метрологическом обосновании на гидрологических постах Госкомгидромета СССР//Метеорология и гидрология.—1986.—№ 10.—С. 93—100.
130. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.—М.: Наука.—1968.—464 с.
131. Себер Д. Линейный регрессионный анализ.—М.: Мир.—1980.—456 с.

132. Сергутин В. Е., Радюк А. Л. О морфометрии русел и сечении каналов.— Красноярск: Изд. Красноярского ун-та.— 1984.— 150 с.
133. Серебряков А. В., Калинина Л. В. Связь морфологических характеристик перекатов однорукавного русла с удельным расходом воды// Труды ЛИВТа.— 1975.— Вып. 151.— С. 81—95.
- Сидорчук А. Ф. Структура руслового рельефа, ее связь с формами русла и определяющими факторами// Работа водных потоков.— М., 1987.— С. 114—120.
135. Тянь Х. С. О пульсациях расхода воды в напорных и открытых водотоках// Труды V Всесоюз. гидрол. съезда. Т. 3.— Л.— 1988.— 518 с.
136. Урываева И. В. Долгосрочный прогноз весеннего стока в бассейне Верхней Камы// Вопросы гидрологии суши.— Л.— 1978.— С. 3—9.
137. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Госфизматиздат.— 1960.— 656 с.
138. Хавич В. А. Допустимые пределы упрощения динамического уравнения неустановившегося движения воды в реках при математическом моделировании// Труды ЦНИИКИВР. Вопросы гидравлики и инженерной гидрологии.— М., 1983.— С. 113—118.
139. Химин Н. М. Неформальная спецификация стохастических моделей гидрологических процессов// Метеорология и гидрология.— 1986.— № 1.— С. 75—82.
140. Хмаладзе Г. Н. Условия применимости стандартных сроков наблюдений над уровнями воды горных рек Закавказья// Труды ЗапНИГМИ.— 1960.— Вып. 7.— С. 113—137.
141. Шапиро Х. Ш., Вербицкий В. С., Оспанов А. Н. Исследование движения жидкости в открытых каналах с очень малыми уклонами// Гидротехническое строительство.— 1986.— № 4.— С. 23—26.
142. Шахтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах.— М.: Мир.— 1971.— 291 с.
143. Яглом А. М. Об учете инерции метеорологических приборов при измерениях в турбулентной атмосфере// Труды геофизического ин-та АН СССР.— 1954.— № 24 (151).— С. 112—162.
145. Anderson A. G. On the development of stream meanders.— Pr. 12 congr. IAHR, 1967, N 1, p. 370—378.
146. Carson M. A. The meandering-braided river threshold: a reappraisal.— J. of hydr. res., Amsterdam, 1984, 73, p. 315—334.
147. Chen R. The multilayer width-integrated velocity measurement method.— Advances in Hydrometry. Proc. Exeter Symp., IAHS Publ., 1982, N 134, p. 75—85.
148. Garbrecht G. Abflussberchnungen für Flüsse und Kanäle.— Die Wasser-Wirtschaft, 1961, n. 2, 3.
149. Hincu S. Sur l'instabilité du tracé rectiligne du lit de riviérs.— Compte rendu 8 Journ. hydr. société hydrotech. de France, 1964. t. 1, p. 139—144.
150. Hydrometry Principles and practices/Ed. R. W. Herschy.— N. Y., 1978.— P. 511.
151. Kazemipow A. K., Apelt C. I. New data on shape effects in smooth rectangular channels. J. of hydr. res., 1982, vol. 20, N 3, p. 225—233.
152. Leclerc M., Bobee B., Villeneuve. Adaptation and application of the Karasev method to the rationalization of Quebec's hydrometric basic network.— Nordic Hydrol., 1974, N 5, p. 213—288.
153. Moss M. E. e. a. Design of Surface — Water Data Network for Regional Information. US Geolog. Serv. Water-Supply pap., 1982, 2178, 32 p.
154. Nalluri C., Adepoju B. A. Shape effects on resistance to flow in smooth channels of circular cross-section. J. of hydr. res., 1985. Vol. 23, N 1, p. 37—46.
155. Osterkamp W. R., Hedman E. R. Variation of width and discharge for natural high-gradient stream channels. Water res., 1977. Vol. 13, N 2, p. 256—258.
156. Parker G., Anderson A. Basic principles of River Hydraulics. J. of the Hydr. Div. Pr. of the ASCE, 1979. Vol. 105, N 2.
157. Rickup G., Warner R. Effects of hydrologic regime on magnitude and frequency of dominant discharge.— J. Hydrol., 1976. Vol. 29.

158. Sager G. Approximationer durch die Funktion $y-ax^b$.—Acta Hydrophysice, Berlin, 1977. Bd XXII, H 3—4, S. 245—255.
159. Savini J., Bedhaine G. Analysis of current-meter data of Columbia river gauging stations. Washington, 1971, 59 p.
160. Schaffernak F. Grundriss der Flussmorphologie und Flussbaues. Wien, Springer, 1950.
161. Shih K., Grigg M. A. Reconsideration of hydraulic radius as a geometric quantity in open channel hydraulics.—Proc. XII Congr. IAHR. 1967, p. 14.
162. Simonovic C. P., Pelletier P. M., Barlisher K. D. Optimization of the hydrometric network operation by a heuristic travelling salesman algorithm. Water res. bull., Am. water res. assoc., 1988. Vol. 24, N 6, p. 1185—1192.
163. Vanoni V. A. River Dynamics.—Advances in Appl. Mech. N. Y.—San Francisco—London: Acad. Press, 1975. Vol. 15, p. 1—87.
164. Verne R. S., Richard H. B. Moving boat discharge measurements using acoustic Doppler techniques.—Advances in Hydrometry. Proc. Exeter Symp. IAHS Publ., 1982, N 134, p. 87—92.
165. Vittal N., Ranga-Raju K. G., Garde R. J. Resistance of two dimensional triangular roughness. J. of Hydr. res., 1977. Vol. 15, N 1, p. 19—36.
166. Wagner H. Beitrag zur Ablusberechnung offener Gerinne. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden. Jahrgang. 21 (1972). Heft 3. TU. Dresden.
167. Wahl K. L. Evolution of the use of channel cross-section properties for estimating streamflow characteristics. Selected Water—Supply, p. 2262.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Стохастические закономерности гидрологических процессов и методы их математического описания	6
1.1. О соотношении динамических и стохастических закономерностей в гидравлике и гидрометрии	—
1.2. Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова	11
1.3. Стохастическое обобщение модели кинематической волны	22
1.4. Описание движения речного потока как случайного процесса с помощью характеристических функционалов	24
Глава 2. Квазипериодические эффекты и гидравлические сопротивления в русловых потоках	34
2.1. О существовании периодических решений уравнений гидравлики	—
2.2. Критериально-статистические характеристики кинематической структуры руслового потока	37
2.3. Факторы гидравлических сопротивлений	47
2.4. Связь коэффициента Шези с глубиной и относительной шириной русла	51
2.5. Гидравлические сопротивления в руслах с поймой	57
2.6. Колебательные решения модельных уравнений гидравлики	59
2.7. Статистическое обобщение, появление квазипериодичности пульсационных изменений расходов воды	64
Глава 3. Критериально-статистические характеристики русловых процессов	69
3.1. Руслоформирующий эффект паводий и паводков	—
3.2. Общие формы и статистические характеристики речных русел	79
3.3. Морфологическая типизация русловых процессов	90
3.4. Критерии некоторых типов русловых процессов и их вероятностная интерпретация	98
3.5. Надежность гидротехнических сооружений на реках и каналах	103
Глава 4. Стохастические модели речной гидрометрии	109
4.1. Уравнение гидрометрической вертушки и оценка точности ее показаний	—
4.2. Методы приближенного представления случайных функций в задачах гидрометрии	113
4.3. Гидрометрические модели расходов воды	130
4.4. Экспериментальное обоснование решений стохастических уравнений для расхода воды	149
4.5. Экстраполяция расходов воды за пределы их измерения	153
Глава 5. Гидрометрический учет речного стока	158
5.1. Принципы размещения и оптимальная густота пунктов гидрологических наблюдений на реках	—
5.2. Стохастический подход в задачах гидрометрического учета речного стока	163
5.3. Пропускная способность русла и модели гидрометрического учета стока	168
5.4. Разложение гидрологических полей на естественные ортогональные составляющие и учет речного стока	187
Заключение	198
Список литературы	201