

А. А. Дмитриев

**Ортогональные
экспоненциальные
функции
в гидрометеорологии**



Гидрометеиздат

Ленинград • 1973

Ответственный редактор

Е. П. Борисенков

В книге ставится задача о построении унифицированных легко интегрируемых и дифференцируемых функций для описания эмпирических закономерностей, встречающихся в гидрометеорологии. В качестве таких функций предлагается использовать ортогональные нормированные линейные комбинации экспоненциальных функций. Предлагаемые функции позволяют разлагать в просто интегрируемые ряды на интервале $0 \leq x < \infty$ функции, заданные таблично или аналитически. С помощью предлагаемых функций удастся аппроксимировать законы распределения таких элементов как скорость ветра, температура, геопотенциал, осадки, загрязненность воздуха и т. п.

Книга рассчитана на специалистов по обработке гидрометеорологических данных и специалистов, интересующихся применением математических методов обработки.

This book deals with the problem of constructing the unified and easily integrated and differentiated functions for the description of empirical relationships in the field of hydrometeorology. The linear combinations of normalized orthogonal functions are suggested to be used for this purpose. The functions enable one to expand a function given in analytical or tabular form in an easily integrated series in the range $0 \leq x < \infty$. By means of the suggested functions a fairly good approximation of the distribution of wind speed, air temperature, geopotential, precipitation, air pollution and other elements could be obtained.

The book is addressed to experts in processing the hydro-meteorological data.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Гидрометеорологическая информация часто имеет вид числовых характеристик, которые желательно представить как некоторые аналитические выражения. Это могут быть зависимости от времени, координат или повторяемостей некоторых величин, разбитых по градациям. Подбираемое аналитическое выражение для удобства его использования при различных выкладках и численных расчетах должно быть легко интегрируемо и дифференцируемо. Такими свойствами для конечных интервалов обладают тригонометрические функции $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$, из которых строятся ряды Фурье, широко применяемые в самых разнообразных областях науки и техники. При интервалах изменения аргумента от нуля до бесконечности наиболее просто интегрируются и дифференцируются экспоненциальные функции и их линейные комбинации. Это обстоятельство и дало повод автору посвятить предлагаемую монографию применению экспоненциальных функций в гидрометеорологии. Существует множество гидрометеорологических задач, приводящих к построению систем ортогональных экспоненциальных функций. В начале исследований автор сделал попытку применения неортогональной линейной комбинации экспоненциальных функций. Впервые с такой задачей он столкнулся в своей кандидатской диссертации «Некоторые энергетические соотношения, характеризующие трансформацию воздушных масс» в 1941 г. при аппроксимации функций поглощения, отличающихся от закона Буге. Тогда были применены линейные комбинации экспоненциальных функций, которые хотя и не были ортогональными, тем не менее оказались полезными и стали внедряться [19, 6] (стр. 105). Значительно позже, в 1967—1968 гг., при аппроксимации дифференциальных законов распределения (ДЗР) метеорологических и санитарно-гигиенических параметров автор построил систему ортогональных экспоненциальных нормированных функций, у которых подбираются не только коэффициенты Фурье, но и декременты затухания в экспонентах. Последнее отличает их использование от многих известных рядов типа Фурье и позволяет получать сравнительно быстро сходящиеся аппроксимации. Свойство ортогональности рассматриваемых функций позволяет повышать точность представления той или иной закономерности путем вычисления последующих коэффициентов Фурье без пересчета предыдущих.

Во многих случаях использование описываемых ниже функций может быть целесообразно и поэтому их следует рассматривать как дополнительный класс способов аппроксимации, расширяющий существующие методы. При частных значениях параметров отдельные зависимости приобретают вид известных ранее формул.

Вряд ли следует много говорить о разнообразных задачах, в которых находят свое применение функции распределения. Хочется обратить внимание лишь на одну из них — возможность сжатия информации, содержащейся в многочисленных справочниках по метеорологии, гидрологии и другим дисциплинам. В них целые страницы исписываются цифрами, дающими распределение по градациям различных элементов. Большинство этих распределений могло бы быть представлено в виде формул, содержащих один, два или максимум три параметра, что при использовании экспоненциальных законов позволяет без особого труда рассчитать вероятности и обеспеченности для любых, нужных на практике пределов. Тогда таблица, содержащая 10 граф и 10 строк, т. е. 100 чисел, и занимающая около половины страницы, заменится в худшем случае одним числом для типа закона и по два числа (значения параметров) на каждую строку, т. е. всего 21 число, что потребует в 5 раз меньше места. При этом облегчается пересчет и для тех градаций, которых в справочнике может и не быть.

Вопрос о предоставлении сжатой информации сейчас делается все более актуальным в связи с ее быстро нарастающим потоком, что особенно ощущается в гидрометеорологии.

В более ранних работах автора для ДЗР были введены обозначения $F_n(x)$, которые для преемственности используются и в монографии. Вместе с тем делается попытка ввести новую систематизацию, основанную на внешнем виде кривых для ДЗР.

Ограниченный объем рукописи не позволил включить в настоящее издание ряд разделов, посвященных описанию алгоритмов подбора как параметров разложения по ортонормированным экспоненциальным функциям, так и ДЗР. Эти алгоритмы основаны на хорошо развитых в математике методах поиска экстремума, и читатель, заинтересованный в численных расчетах, сможет найти соответствующую литературу.

Считаю своим долгом принести благодарность всем тем, кто в той или иной мере помог мне при разработке отдельных вопросов, вошедших в книгу, или при подготовке самой монографии. Ряд ценных замечаний был сделан О. Б. Мерцаловой, просмотревшей отдельные разделы рукописи. В дипломной работе Л. П. Упоровой была развита задача построения ортонормированных линейных комбинаций экспоненциальных функций с использованием упрощенных методов подбора параметров ДЗР. В процессе сокращения рукописи до заданного объема значительный труд был сделан Ю. В. Дмитриевой. Расчеты Г. М. Абакумовой нескольких функций последующих номеров позволили методом индукции найти выражение для коэффициентов при экспонентах у ортонормированных функций любых номеров. Обобщение ДЗР в виде $F_{2,\gamma}$ появилось при аппроксимации спектра турбулентных пульсаций, полученного Г. А. Серовой. Интересные примеры применения полученных закономерностей даны А. А. Исаевым. Ряд примеров специально для монографии был подготовлен Н. Н. Выгодской и Н. В. Зукерт, просчитан на ЭВМ А. И. Зининым.

ВВЕДЕНИЕ

Разложение в бесконечный ряд по ортогональным нормированным функциям $v_n(x)$ некоторой функции $f(x)$, заданной аналитически или в виде таблицы, возможно в том случае, если система ортогональных функций полная, а сама разлагаемая функция удовлетворяет условиям интегрируемости в интервале ортогональности. Практически все метеорологические параметры представляют собой ограниченные кусочно-непрерывные функции времени или координат и могут быть представлены в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n(x), \quad (1, B)$$

где коэффициенты b_n , называемые коэффициентами Фурье, вычисляются для интервала ортогональности $a \leq x \leq b$ по формуле

$$b_n = \int_a^b f(x) v_n(x) dx. \quad (2, B)$$

Иногда, если это необходимо для выполнения условия ортогональности, под знаком интеграла вводится весовая функция $\rho(x)$. Полная система ортогональных функций обладает тем свойством, что к ней нельзя присоединить какую-либо дополнительную функцию, не равную тождественно нулю, которая образовала бы вместе с ней новую ортогональную систему функций.

Условие ортогональности функций $v_n(x)$, если $\rho(x) = 1$, имеет вид

$$\int_a^b v_n(x) v_m(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m. \quad (3, B)$$

Условие нормированности можно представить интегралом

$$\int_a^b v_n^2(x) dx = 1. \quad (4, B)$$

Согласно неравенству Бесселя можно написать

$$\sum_{m=0}^n b_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (5, B)$$

При интегрируемом квадрате f^2 в правой части выражения (5, В) в соответствии с равенством Парсеваля имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m^2 = \int_a^b f^2(x) dx. \quad (6, В)$$

Ошибка аппроксимации функции $f(x)$ в форме (1, В) определяется выражением

$$H_n = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{m=1}^n b_m v_m(x) \right]^2 dx, \quad (7, В)$$

причем по условию (2, В) имеем

$$H_n = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{m=1}^n b_m^2. \quad (8, В)$$

Когда $n \rightarrow \infty$, то при полной системе имеет место в соответствии с равенством Парсеваля сходимость ряда к $f(x)$ в среднем, когда $H_n \rightarrow 0$.

Следует отметить практически полезное свойство, что для каждой непрерывной в области M функции $f(P)$ точки P можно подобрать полином $F(P, x)$, составленный из линейно независимых функций $v_1(P), v_2(P), \dots, v_n(P)$, который бы наименее уклонялся от заданной функции $f(P)$. Согласно А. Хаару [2] (стр. 79), единственность полинома наименьшего уклонения для каждой функции $f(P)$ будет тогда и только тогда, когда каждый полином $F(P; x) \neq 0$ имеет в M не более $n - 1$ различных нулей.

Отсюда следует, что при рядах ортогональных функций конечной длины, не представляющих полной системы, удовлетворяющих указанным выше условиям, можно получать аппроксимацию функций с заданной степенью точности. Величина уклонения определяется как максимум разности между значениями функции $f(P)$ и полинома

$$F(P; x) = x_1 v_1(P) + x_2 v_2(P) + \dots + x_n v_n(P) \quad (9, В)$$

в области $M (P \in M)$. На этом свойстве, в частности, основан подбор дифференциальных законов распределения и практически всегда применяемое обрывание рядов Фурье на некотором члене. Вряд ли стоило бы здесь много уделять внимания исследованию полноты системы и другим вопросам, необходимым в строгих математических курсах, поскольку данная монография рассчитана на сравнительно широкий круг читателей, не всегда достаточно подготовленных в области математики. Поэтому основное внимание было уделено изложению методов получения рассматриваемых функций и, насколько позволял ограниченный объем, отдельных способов вычисления входящих в них параметров.

1. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ

$$D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m), D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m), D_m(x)$$

1.1. Построение системы функций для действительной области

Рассмотренные в «Введении» в общем виде ортогональные функции могут быть построены различными способами. Как отмечалось в предисловии, автор пришел к ним при решении конкретных задач. Одна из них относится к области теоретической актинометрии и представляется наиболее наглядной. Это задача о математической аппроксимации эффекта Форбса, выражающегося в том, что прозрачность атмосферы возрастает с удлинением пути солнечного луча в атмосфере. Возникает мысль о возможности представления прозрачности атмосферы в виде суммы экспонент, где каждая входит со своим весовым множителем [7], [8]. Это эквивалентно представлению интегрального луча Солнца в виде суммы лучей нескольких разных длин волн, каждый из которых ослабляется по закону Буге, со своим декрементом ослабления. В конце большого оптического пути остаются лишь слабо поглощаемые компоненты. Если представить, что таких монохроматических лучей существует бесконечное число, то прозрачность атмосферы можно представить в виде разложения в ряд вида

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\alpha_k x}. \quad (1,1,1)$$

Здесь функции

$$a_k e^{-\alpha_k x} = a_k y^{\alpha_k}, \quad (2,1,1)$$

если обозначить

$$e^{-x} = y, \quad (3,1,1)$$

не являются ортогональными между собою. Однако важно отметить [20], что согласно теореме Г. Мюнца, бесконечная последовательность членов вида $1, y^{\alpha_1}, y^{\alpha_2}, \dots$ с возрастающими по величине положительными числами α_k составляет полную систему функций на интервале $0 \leq y \leq 1$ при условии, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k}$ расходится. Так,

например, ряды с $\alpha_k = k$, $\alpha_k = \frac{k^2}{k+1}$ и т. д. расходятся, тогда как геометрическая прогрессия с $\alpha_k = 2^k$ и вообще с $\alpha_k = (1+\varepsilon^2)^k$, а также ряды с более быстро убывающими членами сходятся. В первом

случае широкий класс убывающих с ростом аргумента x функций можно представлять в виде

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y^{\alpha_k}, \quad (4,1,1)$$

где $0 \leq y \leq 1$ или, что равносильно, в виде ряда (1, 1, 1).

Поскольку экспоненциальные функции $e^{-\alpha_k x}$ линейно независимы, то можно из бесконечной системы этих функций с бесконечным счетным множеством декрементов α_k построить ортогональную систему функций

$$D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m C_{km} e^{-\alpha_k x}. \quad (5,1,1)$$

Эта система ортогональных и нормированных функций (5, 1, 1) позволяет в силу равномерной сходимости ряда аппроксимировать кусочно-непрерывные функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k D_k(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (6,1,1)$$

где коэффициенты разложения b_k определяются интегралом

$$b_k = \int_0^{\infty} f(x) D_k(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k) dx. \quad (7,1,1)$$

Ошибка разложения в конечный ряд, содержащий n членов, может характеризоваться величиной

$$\begin{aligned} H_n &= \int_0^{\infty} \left[f(x) - \sum_{m=1}^n b_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 dx = \\ &= \int_0^{\infty} f^2(x) dx - \sum_{m=1}^n b_m^2. \end{aligned} \quad (8,1,1)$$

Если функция $f(x)$ не нормирована, то за меру относительной ошибки разложения можно принять величину

$$H_{\text{rel}} = 1 - \frac{\sum_{m=1}^n b_m^2}{\int_0^{\infty} f^2(x) dx}. \quad (9,1,1)$$

Построение системы ортогональных функций хорошо разработано в общем виде [20]. Для нахождения коэффициентов C_{km} первых двух функций схема расчетов приведена в [10].

Представим искомые ортонормированные функции в виде

$$D_1(x; \alpha_1) = C_1 e^{-\alpha_1 x} \quad (10,1,1)$$

и

$$D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) = C_{12} e^{-\alpha_1 x} + C_{22} e^{-\alpha_2 x}, \quad (11,1,1)$$

где коэффициенты C_1, C_{12}, C_{22} неизвестны.

Для первой функции по условию нормирования

$$\int_0^{\infty} D_m^2(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx = 1 \quad (12,1,1)$$

находим

$$C_1^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha_1 x} dx = \frac{C_1^2}{2\alpha_1} = 1, \quad (13,1,1)$$

откуда искомый коэффициент

$$C_1 = \sqrt{2\alpha_1}. \quad (14,1,1)$$

Для второй функции удобнее начать с использования условия ортогональности, которое имеет общий вид

$$\int_0^{\infty} D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_n(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dx = 0 \text{ при } m \neq n. \quad (15,1,1)$$

Подставляя в выражение (15,1,1) формулы (10,1,1) и (11,1,1) с учетом (14,1,1), получаем

$$\int_0^{\infty} D_1(x; \alpha_1) D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) dx = \sqrt{2\alpha_1} C_{12} \left[\frac{1}{2\alpha_1} + \frac{C_{22}}{C_{12}} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] = 0, \quad (16,1,1)$$

откуда

$$\frac{C_{22}}{C_{12}} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1}. \quad (17,1,1)$$

Теперь выражение (11,1,1) можно переписать в виде

$$D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) = C_{12} \left(e^{-\alpha_1 x} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} e^{-\alpha_2 x} \right). \quad (18,1,1)$$

Это будет ортогональная к $D_1(x; \alpha_1)$, но ненормированная функция. Для ее нормирования воспользуемся условием (12,1,1), которое дает

$$\int_0^{\infty} D_2^2(x; \alpha_1, \alpha_2) dx = C_{12}^2 \left[\frac{1}{2\alpha_1} - 2 \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(2\alpha_1)^2 2\alpha_2} \right] = 1, \quad (19,1,1)$$

откуда

$$C_{12} = -\frac{2\sqrt{2\alpha_2} \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (20,1,1)$$

Если таким образом определены первые $n-1$ функции вплоть до $D_{n-1}(x; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, то следующую можно представить в виде

$$D_n(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = C_{nn} e^{-\alpha_n x} + \sum_{k=1}^{n-1} d_{nk} D_k(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k). \quad (21,1,1)$$

Умножая обе части равенства (21,1,1) последовательно на различные номера найденных функций и интегрируя, в силу ортогональности получаем систему уравнений

$$0 = C_{nn} \int_0^{\infty} e^{-\alpha_n x} D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dx + d_{nm}, \quad (22,1,1)$$

откуда подстановка (22,1,1) в (21,1,1) дает уравнение

$$\begin{aligned} D_n(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ = C_{nn} \left\{ e^{-\alpha_n x} - \sum_{k=1}^{n-1} D_k(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k) \int_0^{\infty} e^{-\alpha_n \xi} D_k(\xi; \alpha_1, \dots, \alpha_k) d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (23,1,1)$$

Возводя выражение (23,1,1) в квадрат и интегрируя, легко найти из условия нормированности (12,1,1) последний неизвестный коэффициент

$$C_{nn} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\alpha_n x} - \sum_{k=1}^{n-1} D_k(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k) \int_0^{\infty} e^{-\alpha_n \xi} D_k(\xi; \alpha_1, \dots, \alpha_k) d\xi \right\}^2 dx}}. \quad (24,1,1)$$

Приведем выражения для первых трех функций [9]

$$D_1(x; \alpha_1) = \sqrt{2\alpha_1} e^{-\alpha_1 x}; \quad (25,1,1)$$

$$D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{2\alpha_1 \sqrt{2\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} e^{-\alpha_2 x} - e^{-\alpha_1 x} \right); \quad (26,1,1)$$

$$\begin{aligned} D_3(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{2\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) \sqrt{2\alpha_3}}{(\alpha_2 - \alpha_1) (\alpha_3 - \alpha_1)} \times \\ \times \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_3) (\alpha_2 + \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_1)}{2\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_3 - \alpha_2)} e^{-\alpha_3 x} - \frac{\alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_1)}{\alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_2)} e^{-\alpha_2 x} + e^{-\alpha_1 x} \right]. \end{aligned} \quad (27,1,1)$$

Любая функция при произвольном m определяется выражением

$$D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m C_{km} e^{-\alpha_k x}, \quad (28,1,1)$$

где методом индукции можно получить, что

$$C_{km} = \frac{\sqrt{2\alpha_m} (\alpha_k + \alpha_1) (\alpha_k + \alpha_2), \dots, (\alpha_k + \alpha_{m-1})}{(\alpha_k - \alpha_1) (\alpha_k - \alpha_2), \dots, (\alpha_k - \alpha_{k-1}) (\alpha_k - \alpha_{k+1}), \dots, (\alpha_k - \alpha_m)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\alpha_m} \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_k + \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) \prod_{j=k+1}^m (\alpha_k - \alpha_j)}. \quad (29,1,1)$$

Интересно отметить, что после опубликования первых работ с описанием рассматриваемых функций, нам удалось познако-

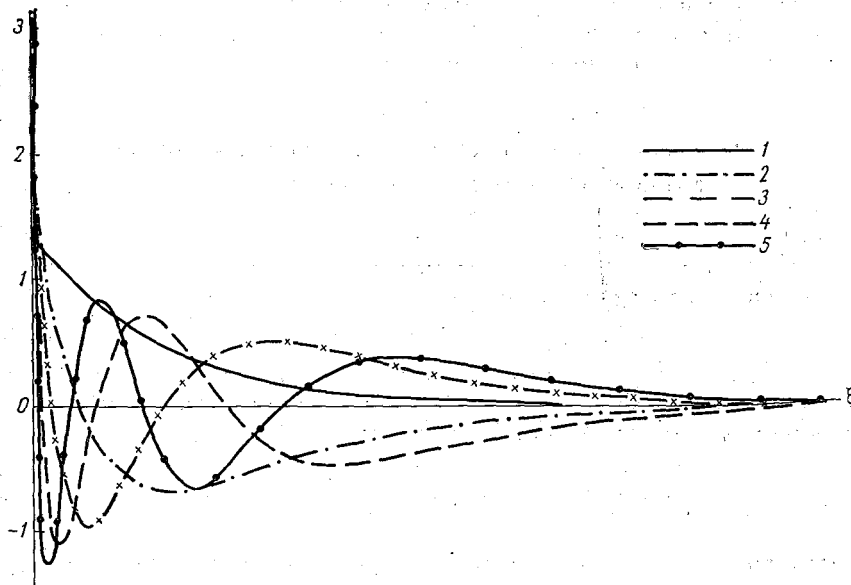


Рис. 1. График функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

По оси абсцисс отложены $\xi = \alpha_1 x$, а по оси ординат $\frac{D_m(\xi; 1, \dots, m)}{\sqrt{\alpha_1}}$. Номера кривых 1-5 соответствуют значениям i , при этом $m=i$.

миться с близкими исследованиями, проведенными в другой области для целей автоматического управления [22]. Там были получены функции, названные авторами $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ и т. д., которые являются частным случаем функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, если положить $\alpha_1 = C$, $\alpha_2 = 2C$, $\alpha_3 = 3C$, ..., $\alpha_m = mC$. Эти функции воспроизведены ниже:

$$\Psi_1(t) = \sqrt{2C} e^{-Ct}; \quad (30,1,1)$$

$$\Psi_2(t) = \sqrt{C} (6e^{-2Ct} - 4e^{-Ct}); \quad (31,1,1)$$

$$\Psi_3(t) = \sqrt{6C} (10e^{-3Ct} - 12e^{-2Ct} + 3e^{-Ct}); \quad (32,1,1)$$

$$\Psi_4(t) = \sqrt{2C} (70e^{-4Ct} - 120e^{-3Ct} + 60e^{-2Ct} - 8e^{-Ct}); \quad (33,1,1)$$

$$\Psi_5(t) = \sqrt{10C} (126e^{-5Ct} - 280e^{-4Ct} + 210e^{-3Ct} - 60e^{-2Ct} + 5e^{-Ct}). \quad (34,1,1)$$

Вопрос о сходимости там не исследуется, а о полноте системы не ставится вовсе. Подбирается только один декремент C по характеру устремления разлагаемой функции к нулю при больших значениях аргумента.

Из рис. 1 легко видеть, что функция с индексом m имеет $m-1$ пересечений с осью абсцисс и соответственно столько же раз меняет свой знак на противоположный. Таким образом, построенные в данном параграфе ортонормированные функции удовлетворяют упомянутому условию А. Хаара и могут быть применены для аппроксимации с заданной степенью точности при использовании рядов ортогональных функций конечной длины.

2.1. Распространение системы ортонормированных функций на комплексную область

Декременты затухания α_k в общем случае могут быть комплексными при условии, что действительная часть их $\alpha_{k, \text{re}}$ положительна. Обозначим комплексный декремент γ_k . Тогда

$$\gamma_k = \alpha_{k, \text{re}} + i\alpha_{k, \text{im}}, \quad (1,2,1)$$

где $i = \sqrt{-1}$, а $\alpha_{k, \text{im}}$ — мнимая часть. Тогда интеграл от экспоненты, взятый по x вдоль действительной оси, являясь комплексной величиной, будет тем не менее иметь смысл

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha_{k, \text{re}} + i\alpha_{k, \text{im}})x} dx = \frac{1}{\alpha_{k, \text{re}} + i\alpha_{k, \text{im}}}. \quad (2,2,1)$$

Интеграл от квадрата нормированных функций также теперь может оказаться комплексной величиной, что не всегда удобно. Поэтому условие нормированности часто записывают в виде [24]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} D_m^*(z; \alpha_{1, \text{re}} + i\alpha_{1, \text{im}}, \dots, \alpha_{m, \text{re}} + i\alpha_{m, \text{im}}) D_m^*(z; \alpha_{1, \text{re}} - \\ - i\alpha_{1, \text{im}}, \dots, \alpha_{m, \text{re}} - i\alpha_{m, \text{im}}) dz = \\ = \int_0^{\infty} D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m) D_m^*(z; \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_m) dz = 1, \end{aligned} \quad (3,2,1)$$

где $D_m^*(z; \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_m) = \overline{D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m)}$ есть комплексная сопряженная с $D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ функция.

Условие ортогональности для комплексных функций тогда принимает вид

$$\int_0^{\infty} D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m) D_n^*(z; \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n) dz = 0 \text{ при } m \neq n. \quad (4,2,1)$$

Рассмотрим первую функцию

$$D_1^*(z; \gamma_1) = C_1 e^{-\gamma_1 z} = (C_{1, \text{re}} + i C_{1, \text{im}}) e^{-(\alpha_{1, \text{re}} + i \alpha_{1, \text{im}}) z}. \quad (5,2,1)$$

Условие нормированности дает

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (C_{1, \text{re}} + i C_{1, \text{im}}) e^{-(\alpha_{1, \text{re}} + i \alpha_{1, \text{im}}) z} (C_{1, \text{re}} - i C_{1, \text{im}}) e^{-(\alpha_{1, \text{re}} - i \alpha_{1, \text{im}}) z} dz = \\ = \frac{(C_{1, \text{re}}^2 + C_{1, \text{im}}^2)}{2\alpha_{1, \text{re}}} = 1, \end{aligned}$$

или

$$C_{1, \text{re}}^2 + C_{1, \text{im}}^2 = 2\alpha_{1, \text{re}}. \quad (6,2,1)$$

Получаем одно уравнение для определения двух неизвестных, что создает определенные трудности и требует привлечения дополнительных условий. Однако, если воспользоваться условием

$$\int_0^\infty D_1^{*2}(z; \gamma_1) dz = \frac{(C_{1, \text{re}}^2 - C_{1, \text{im}}^2 + 2i C_{1, \text{re}} C_{1, \text{im}})}{2(\alpha_{1, \text{re}} + i \alpha_{1, \text{im}})} = 1, \quad (7,2,1)$$

то, сравнивая коэффициенты при действительной и мнимой частях, получаем два условия для определения двух неизвестных:

$$C_{1, \text{re}}^2 - C_{1, \text{im}}^2 = 2\alpha_{1, \text{re}};$$

$$C_{1, \text{re}} C_{1, \text{im}} = \alpha_{1, \text{im}}.$$

Отсюда

$$C_{1, \text{re}}^4 - 2\alpha_{1, \text{re}} C_{1, \text{re}}^2 - \alpha_{1, \text{im}}^2 = 0,$$

откуда

$$C_{1, \text{re}}^2 = \alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2},$$

а

$$C_{1, \text{im}}^2 = -\alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2}.$$

Теперь легко найти:

$$C_{1, \text{re}} = \sqrt{\alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2}}; \quad (8,2,1)$$

$$C_{1, \text{im}} = \sqrt{-\alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2}}. \quad (9,2,1)$$

Таким образом, вместо условия нормированности (3,2,1) возьмем (7,2,1).

Первая ортонормированная функция для комплексной области принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} D_1^*(z; \alpha_{1, \text{re}} + i \alpha_{1, \text{im}}) = \left[\sqrt{\alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2}} \cos \alpha_{1, \text{im}} z + \right. \\ \left. + \sqrt{-\alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2}} \sin \alpha_{1, \text{im}} z \right] e^{-\alpha_{1, \text{re}} z} + \end{aligned}$$

$$+ i \left[\sqrt{-\alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2} \cos \alpha_{1, \text{im}} z - \sqrt{\alpha_{1, \text{re}} + \sqrt{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2} \sin \alpha_{1, \text{im}} z} \right] e^{-\alpha_{1, \text{re}} z} \quad (10,2,1)$$

Легко видеть, что при $\alpha_{1, \text{im}} = 0$ формула (10,2,1) вырождается в (10,1,1) и, наоборот, ее можно было бы получить из (14,1,1) и (10,1,1), если там считать α_1 и C_1 комплексными величинами. Для второй функции в комплексной области в общем виде имеем

$$D_2^*(z; \alpha_{1, \text{re}} + i\alpha_{1, \text{im}}, \alpha_{2, \text{re}} + i\alpha_{2, \text{im}}) = (C_{21, \text{re}} + iC_{21, \text{im}}) e^{-(\alpha_{1, \text{re}} + i\alpha_{1, \text{im}})z} + (C_{22, \text{re}} + iC_{22, \text{im}}) e^{-(\alpha_{2, \text{re}} + i\alpha_{2, \text{im}})z}, \quad (11,2,1)$$

причем считая, что:

$$C_{21, \text{re}} + iC_{21, \text{im}} = C_{12}^*, \quad C_{22, \text{re}} + iC_{22, \text{im}} = C_{22}^*; \\ \alpha_{1, \text{re}} + i\alpha_{1, \text{im}} = \gamma_1, \quad \alpha_{2, \text{re}} + i\alpha_{2, \text{im}} = \gamma_2, \quad (12,2,1)$$

можно (11,2,1) переписать в краткой форме

$$D_2^*(z; \gamma_1, \gamma_2) = C_{12}^* e^{-\gamma_1 z} + C_{22}^* e^{-\gamma_2 z}, \quad (13,2,1)$$

которая формально аналогична выражению (11,1,1). Эта формальная аналогия позволяет написать условия нормирования и ортогональности в виде

$$\int_0^\infty D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m) D_n^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_n) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 1 & \text{при } m = n \end{cases} \quad (14,2,1)$$

и воспользоваться затем выкладками, приведенными в п. 1,1.

Подставляя выражения (5,2,1) и (13,2,1) в (14,2,1) и учитывая соотношения (17,1,1) и (20,1,1), а также (12,2,1), получаем:

$$\frac{C_{22}^*}{C_{12}^*} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\gamma_1} = \frac{\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2 + \alpha_{1, \text{re}} \alpha_{2, \text{re}} - \alpha_{1, \text{im}} \alpha_{2, \text{im}}}{2(\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2)} - \\ - i \frac{\alpha_{1, \text{im}} \alpha_{2, \text{re}} - \alpha_{1, \text{re}} \alpha_{2, \text{im}}}{2(\alpha_{1, \text{re}}^2 + \alpha_{1, \text{im}}^2)}; \quad (15,2,1)$$

$$C_{12}^* = \frac{2\sqrt{2}\gamma_2\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_{2, \text{re}}^2 + \alpha_{2, \text{im}}^2}}{\sqrt{(\alpha_{1, \text{re}} - \alpha_{2, \text{re}})^2 + (\alpha_{1, \text{im}} - \alpha_{2, \text{im}})^2}} \times \\ \times e^{\left[\frac{1}{2} i \operatorname{arctg} \frac{\alpha_{2, \text{im}}}{\alpha_{2, \text{re}}} - i \operatorname{arctg} \frac{\alpha_{1, \text{im}} - \alpha_{2, \text{im}}}{\alpha_{1, \text{re}} - \alpha_{2, \text{re}}} + i \operatorname{arctg} \frac{\alpha_{1, \text{im}}}{\alpha_{1, \text{re}}} \right]}. \quad (16,2,1)$$

Во многих случаях аппроксимация наблюдающихся закономерностей с помощью комплексных ортонормированных функций $D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ дает более быструю сходимость вследствие большего числа параметров подгонки. Однако из-за ограниченности

объема книги этот вопрос подробнее здесь не рассматривается. Для наглядного представления на рис. 2 изображены кривые для частного случая $\gamma_1 = \alpha_1(1+i)$, $\gamma_2 = \alpha_2(1+i)$, когда в общем выражении

$$D_m^* = \operatorname{Re} D_m^* + i \operatorname{Im} D_m^* \quad (17,2,1)$$

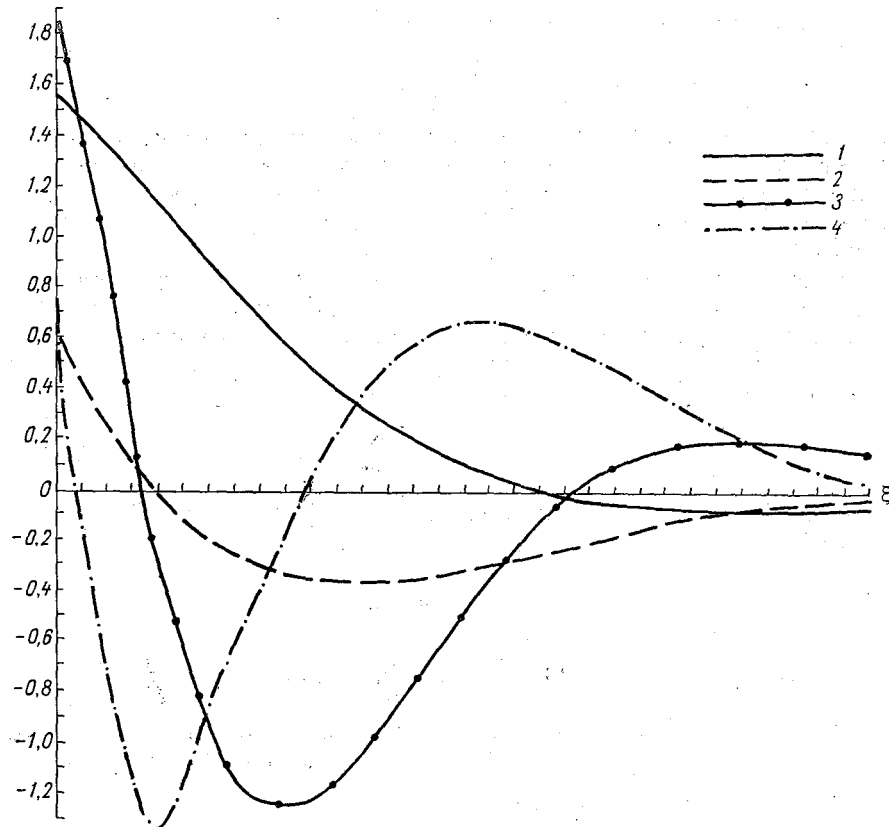


Рис. 2. Графики функций $D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

По оси абсцисс отложены $\xi = \alpha_1 x$, а по оси ординат действительные и мнимые части функций $D_m^*(\xi; 1+i, \dots, m(1+i))$.

$$\begin{aligned} \text{Кривые: } 1 - \operatorname{Re} \frac{D_1^*(\xi; 1+i)}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad 2 - \operatorname{Im} \frac{D_1^*(\xi; 1+i)}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad 3 - \operatorname{Re} \frac{D_2^*(\xi; 1+i, 2(1+i))}{\sqrt{\alpha_1}}, \\ 4 - \operatorname{Im} \frac{D_2^*(\xi; 1+i, 2(1+i))}{\sqrt{\alpha_1}}. \end{aligned}$$

можно положить, что действительные Re и мнимые Im части функций $D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ соответственно равны:

$$\operatorname{Re} D_1^*(\xi; 1+i) = \sqrt{\alpha_1} \left[\sqrt{1+\sqrt{2}} \cos \xi + \sqrt{\sqrt{2}-1} \sin \xi \right] e^{-\xi}; \quad (18,2,1)$$

$$\operatorname{Im} D_1^*(\xi; 1+i) = \sqrt{\alpha_1} \left[\sqrt{\sqrt{2}-1} \cos \xi - \sqrt{1+\sqrt{2}} \sin \xi \right] e^{-\xi}, \quad (19,2,1)$$

$$\operatorname{Re} D_2^*(\xi; 1+i, 2(1+i)) = 4 \sqrt{\alpha_1} \left[\frac{3}{2} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{8}\right) e^{-2\xi} - e^{-\xi} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{8}\right) \right]; \quad (20,2,1)$$

$$\operatorname{Im} D_2^*(\xi; 1+i, 2(1+i)) = -4 \sqrt{\alpha_1} \left[\frac{3}{2} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{8}\right) e^{-2\xi} - e^{-\xi} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{8}\right) \right]. \quad (21,2,1)$$

Из сравнения рис. 2 с рис. 1 легко видеть, что при комплексных аргументах вид кривых усложняется и появляется знакопеременность даже у действительной части первой функции, которая при действительных декрементах была простой, монотонно убывающей зависимостью.

Использованное здесь определение условий ортонормированности (14,2,1) позволяет воспользоваться для комплексных функций многими из закономерностей, полученных для функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. В частности, для функций с комплексными параметрами вместо выражения (28,1,1) можем написать

$$D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = \sum_{k=1}^m C_{km}^* e^{-\gamma_k z}, \quad (22,2,1)$$

причем общий вид для комплексных коэффициентов C_{km}^* аналогично формуле (29,1,1) в этом случае принимает вид

$$C_{km}^* = \frac{\sqrt{2\gamma_m} \prod_{i=1}^{m-1} (\gamma_k + \gamma_i)}{\prod_{i=1}^{k-1} (\gamma_k - \gamma_i) \prod_{j=k+1}^m (\gamma_k - \gamma_j)}. \quad (23,2,1)$$

Применим общую формулу (23,2,1) для построения системы коэффициентов C_{km}^* к третьей ортогональной функции $D_3^*(x; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Полагая $m=3$ и последовательно $k=1$, или 2, или 3, находим:

$$C_{13}^* = \frac{\sqrt{2\gamma_3} \prod_{i=1}^2 (\gamma_1 + \gamma_i)}{\prod_{j=2}^3 (\gamma_1 - \gamma_j)} = \frac{\sqrt{2\gamma_3} (\gamma_1 + \gamma_1) (\gamma_1 + \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2) (\gamma_1 - \gamma_3)}; \quad (24,2,1)$$

$$C_{23}^* = \frac{\sqrt{2\gamma_3} \prod_{i=1}^2 (\gamma_2 + \gamma_i)}{\prod_{i=1}^1 (\gamma_2 - \gamma_i) \prod_{j=3}^3 (\gamma_2 - \gamma_j)} = \frac{\sqrt{2\gamma_3} (\gamma_2 + \gamma_1) (\gamma_2 + \gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (\gamma_2 - \gamma_3)}; \quad (25,2,1)$$

$$C_{33}^* = \frac{\sqrt{2\gamma_3} \prod_{i=1}^2 (\gamma_3 + \gamma_i)}{\prod_{i=1}^2 (\gamma_3 - \gamma_i)} = \frac{\sqrt{2\gamma_3} (\gamma_3 + \gamma_1) (\gamma_3 + \gamma_2)}{(\gamma_3 - \gamma_1) (\gamma_3 - \gamma_2)}. \quad (26,2,1)$$

Практические расчеты по формуле (23,2,1) не представляют принципиальных трудностей, однако оперирование с комплексными числами при достаточно больших номерах k, m связано с громоздкими вычислениями. В связи с этим представляется целесообразным в большей части случаев использовать функции с действительными значениями параметров, которые рассматриваются нами более подробно. Однако при небольшом числе членов, приведенные функции с комплексными декрементами могут найти применение. Примером для этого является формула (8,2,4).

3.1. Ортогональные функции $D_m(x)$ на базе нормального закона распределения

Многие дифференциальные законы распределения метеорологических элементов образуются в результате наложения нескольких типов метеорологических процессов, каждый из которых можно

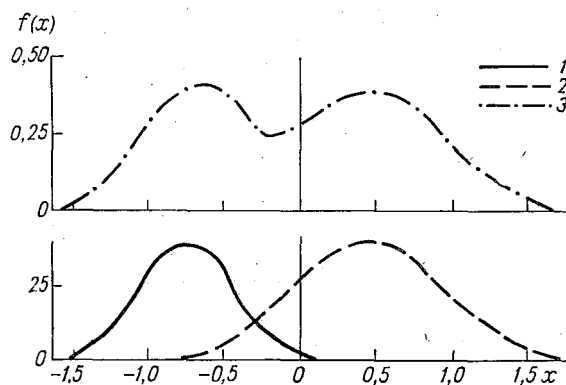


Рис. 3. Образование композиционной кривой дифференциального закона распределения температуры.

Кривая 1 соответствует $\sigma_1=0,32^\circ$, $\bar{x}_1=-0,75^\circ$; 2 — $\sigma_2=0,50^\circ$, $\bar{x}_2=0,45^\circ$; 3 — композиционная при $A_1=0,39$ и $A_2=0,61$.

рассматривать как случайную функцию со своей дисперсией σ_h^2 и своей средней $\bar{x}_h$. Около этих средних происходят случайные флуктуации, подчиняющиеся определенному дифференциальному закону распределения (ДЗР), например нормальному. Примером такой комбинированной функции распределения является кривая бимодального распределения отклонения температуры лета от средней многолетней, обязанный наличию двух основных типов циркуляции, приведенная на рис. 3. В нижней части рисунка представлены оба ДЗР слагающих процессов. В верхней части рисунка изображена

кривая для результирующего закона распределения вида

$$f(x) = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2, \quad (1,3,1)$$

$$\text{где } \varphi_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x}_i)^2}{2\sigma_i^2}}.$$

Как будет показано в п. 2.2, такие законы могут быть аппроксимированы некоторыми линейными комбинациями функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Однако в отдельных случаях, при интервале изменения аргумента от $-\infty$ до $+\infty$ и небольшом числе налагающихся гауссовских распределений может оказаться удобным применение другого типа ортогональных функций, которые обозначим русской буквой $D_m(x)$ и покажем способ их построения.

Будем исходить из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \beta_m^2 (x^2 \beta_m^2 - 1) y = 0, \quad (2,3,1)$$

где $\beta_m^2 = \frac{1}{\sigma_m^2}$ можно рассматривать как собственные числа некоторой задачи математической физики. Если числа β_m^2 образуют бесконечное счетное множество, то соответствующая им система решений будет полной. Она имеет вид

$$y_m = C_{1,m} e^{-\frac{\beta_m^2 x^2}{2}} + C_{2,m} e^{-\frac{\beta_m^2 x^2}{2}} \int_0^x e^{\beta_m^2 \xi^2} d\xi. \quad (3,3,1)$$

Мы ограничиваем класс рассматриваемых функций такими, которые обращаются в нуль на бесконечно большом удалении от начала координат и полагаем $C_{2,m} = 0$. В результате для аппроксимации обращающихся в нуль при $|x| \rightarrow \infty$ функций получаем ряд

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{1,m} e^{-\frac{\beta_m^2 x^2}{2}}. \quad (4,3,1)$$

Полноту системы функций вида $y_m^{\beta_m^2} = e^{-\frac{\beta_m^2 x^2}{2}}$ можно также обосновать по теореме Г. Мюнца, аналогично тому, как это было сделано в п. 1.1 для ортонормированных экспоненциальных функций. При этом сходимость ряда $1, y_1^{\beta_1^2}, y_2^{\beta_2^2}, \dots$ будет осуществляться при условии, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_h^2}$ расходится. Однако и при невыполнении последнего условия возможна аппроксимация большинства имеющих на практике соответствующих функций полиномами с конечным числом членов вида $y_m^{\beta_m^2}$, дающим наименьшее отклонение в соответствии с теоремой А. Хаара, упомянутой во «Введении».

Отдельные слагаемые ряда (4,3,1) не ортогональны между

собой, в связи с чем удобнее рассматривать ряд из ортогональных функций

$$D_m(x) = \sum_{k=1}^m a_{km} e^{-\frac{\beta_k^2 x^2}{2}}, \quad (5,3,1)$$

которые удовлетворяют условию ортонормированности

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_m(\xi) D_n(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 1 & \text{при } m = n \end{cases} \quad (6,3,1)$$

Тогда аппроксимируемую функцию записываем в виде

$$f(x) = \sum_{m=1}^n b_m D_m(x). \quad (7,3,1)$$

Пользуясь условием (6,3,1) и ограничиваясь для примера двумя первыми членами ряда, находим выражения для первых двух функций:

$$D_1(x) = \sqrt{\frac{\beta_1}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\beta_1^2 x^2}{2}}; \quad (8,3,1)$$

$$D_2(x) = \sqrt{\frac{2\beta_2}{\sqrt{\pi}}} \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \left[e^{-\frac{\beta_1^2 x^2}{2}} - \frac{1}{\beta_1} \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}} e^{-\frac{\beta_2^2 x^2}{2}} \right]. \quad (9,3,1)$$

Эти выражения симметричны относительно начала координат, за которое можно принимать среднюю величину.

Если известны параметры β_m^2 , то константы Фурье находятся простым интегрированием

$$b_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_m(x) dx. \quad (10,3,1)$$

При неизвестных параметрах β_m^2 можно воспользоваться общим методом минимизации ошибки аппроксимации. В частном случае закона распределения вида (1,3,1), когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \bar{T}$, можно, как это показано ниже, вычислить параметры β_1^2 , β_2^2 , A_1 , A_2 , основываясь на первых трех четных моментах, так как нечетные моменты для симметричного ДЗР обращаются в нуль. Общее выражение для частных четных моментов напомним в виде

$$\overline{(T - \bar{T})^{2m}} = \overline{x_k^{2m}} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-\frac{\beta_k^2 x^2}{2}} dx = \frac{\sigma_k^{2m} (2m-1)!}{2^{m-1} (m-1)!}. \quad (11,3,1)$$

Тогда, обозначая через $\overline{x^{2m}}$ эмпирические центральные моменты, получаем следующую замкнутую систему уравнений:

$$A_1\sigma_1^2 + A_2\sigma_2^2 = C_2; \quad (12,3,1)$$

$$A_1\sigma_1^4 + A_2\sigma_2^4 = C_4; \quad (13,3,1)$$

$$A_1\sigma_1^6 + A_2\sigma_2^6 = C_6; \quad (14,3,1)$$

$$A_1 + A_2 = 1, \quad (15,3,1)$$

где

$$C_2 = \overline{x^2}, \quad C_4 = \frac{1}{3} \overline{x^4}, \quad C_6 = \frac{1}{15} \overline{x^6}. \quad (16,3,1)$$

Исключая последовательно переменные, можно получить для определения дисперсии $D_1 = \sigma_1^2$ первого слагаемого кубическое уравнение

$$D_1^3 + \frac{1}{2} \frac{C_4 + C_2^2}{C_2} D_1^2 + \frac{1}{2} \frac{C_4 C_2 - C_6}{C_2} D_1 + \frac{C_6 C_2 - C_4^2}{2C_2} = 0. \quad (17,3,1)$$

Затем по найденной величине σ_1^2 вычисляется дисперсия второго слагаемого

$$\sigma_2^2 = \frac{C_4 - C_2\sigma_1^2}{C_2 - \sigma_1^2}, \quad (18,3,1)$$

и после этого находится доля A_1 процессов первого типа из соотношения

$$A_1 = \frac{C_2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}, \quad (19a,3,1)$$

а затем — второго типа

$$A_2 = \frac{\sigma_1^2 - C_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}. \quad (19b,3,1)$$

Для аппроксимации несимметричных относительно начала координат кривых на интервале $-\infty < x < \infty$ можно вместо функций вида (5,3,1) воспользоваться более общими выражениями

$$D_m(x) = \sum_{k=1}^m a_{km} e^{-\frac{1}{2} \beta_k^2 (x - \alpha_k)^2}. \quad (20,3,1)$$

В этом случае подбор параметров ряда (7,3,1) может производиться в принципе также, как это указывалось выше. Однако при использовании метода моментов следует учесть возросшее число неизвестных. При разложении по двум первым функциям число неизвестных составляет 6: это будут $A_1, A_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ или соответ-

ственно $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, b_1, b_2$, где $\alpha_k = \bar{x}_k$. Теперь для выражения (1,3,1) с учетом выражения (11,3,1) и соотношения

$$\begin{aligned} \overline{(x-\bar{x})^n} = & A_1 \int_{-\infty}^{\infty} [(x-\alpha_1) + (\alpha_1-\bar{x})]^n \varphi_1 dx + \\ & + A_2 \int_{-\infty}^{\infty} [(x-\alpha_2) + (\alpha_2-\bar{x})]^n \varphi_2 dx \end{aligned} \quad (21,3,1)$$

можно получить следующую замкнутую систему уравнений, включая (15,3,1):

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = \bar{x}; \quad (22,3,1)$$

$$A_1 [\sigma_1^2 + (\alpha_1 - \bar{x})^2] + A_2 [\sigma_2^2 + (\alpha_2 - \bar{x})^2] = \overline{(x-\bar{x})^2}; \quad (23,3,1)$$

$$A_1 [3(\alpha_1 - \bar{x})\sigma_1^2 + (\alpha_1 - \bar{x})^3] + A_2 [3(\alpha_2 - \bar{x})\sigma_2^2 + (\alpha_2 - \bar{x})^3] = \overline{(x-\bar{x})^3}; \quad (24,3,1)$$

$$\begin{aligned} A_1 [3\sigma_1^4 + 6(\alpha_1 - \bar{x})^2\sigma_1^2 + (\alpha_1 - \bar{x})^4] + A_2 [3\sigma_2^4 + 6(\alpha_2 - \bar{x})^2\sigma_2^2 + \\ + (\alpha_2 - \bar{x})^4] = \overline{(x-\bar{x})^4}; \end{aligned} \quad (25,3,1)$$

$$\begin{aligned} A_1 \left[\frac{15}{4} (\alpha_1 - \bar{x}) \sigma_1^4 + 10 (\alpha_1 - \bar{x})^3 \sigma_1^2 + (\alpha_1 - \bar{x})^5 \right] + \\ + A_2 \left[\frac{15}{4} (\alpha_2 - \bar{x}) \sigma_2^4 + 10 (\alpha_2 - \bar{x})^3 \sigma_2^2 + (\alpha_2 - \bar{x})^5 \right] = \overline{(x-\bar{x})^5}. \end{aligned} \quad (26,3,1)$$

Конкретные выражения для функций $D_m(x)$ вида (20,1,3) могут быть получены на основании условия ортонормированности (6,3,1), которое с учетом вспомогательного соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta_1^2 (x-\alpha_1)^2}{2}} e^{-\frac{\beta_2^2 (x-\alpha_2)^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta_1^2 + \beta_2^2}} e^{-\frac{\beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}} \quad (27,3,1)$$

дает, например, для первых двух функций следующие выражения:

$$D_1(x) = \sqrt{\frac{\beta_1}{V\pi}} e^{-\frac{\beta_1^2 (x-\alpha_1)^2}{2}}; \quad (28,3,1)$$

$$\begin{aligned} D_2(x) = & \sqrt{\frac{2\beta_2}{V\pi}} \frac{\beta_1}{\sqrt{\frac{\beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} - 2\beta_1 \beta_2}} \times \\ & \times \left[e^{-\frac{\beta_1^2 (x-\alpha_1)^2}{2}} - \frac{1}{\beta_1} \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}} e^{-\frac{\beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}} e^{-\frac{\beta_2^2 (x-\alpha_2)^2}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (29,3,1)$$

Если иметь в виду соотношения (29,3,1), то разложение в ряд вида (7,3,1) функции $f(x)$, состоящей из двух компонент, в соответствии с формулой (1,3,1) будет иметь следующие коэффициенты Фурье:

$$b_1 = A_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{2\sqrt{\pi}}} + A_2 \beta_2 \sqrt{\frac{\beta_1}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}}; \quad (30,3,1)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} A_2 \sqrt{\frac{2\beta_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}} \times \\ \times \sqrt{\frac{\beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2) e^{\frac{\beta_1^2 \beta_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}} - 2\beta_1 \beta_2}}. \quad (31,3,1)$$

Как можно видеть из приведенных материалов, использование функций $D_m(x)$, основанных на законе нормального распределения, полезно применять при небольшом числе слагаемых для расчетов обеспеченностей, поскольку при этом можно пользоваться табулированными значениями интеграла вероятности. Наилучших результатов при этом следует ожидать тогда, когда отдельные компоненты композиционного закона подчиняются нормальному закону распределения. В других случаях, а также, когда получаемые аппроксимации предполагается использовать для аналитических выкладок более удобно пользоваться функциями $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Интересно отметить, что частный случай, рассмотренный в виде легко решаемой до конца системы уравнений (12—15,3,1), может представлять интерес не только для симметричных ДЗР. Как будет показано в п. 4.1, разложение в ряд типа (5,3,1) удобно для аппроксимации автокорреляционных функций, которые симметричны относительно начала координат.

4.1. О подборе параметров разложения

Наиболее быстрой сходимости рядов вида (6,1,1) можно достигнуть путем подбора декрементов α_h таким образом, чтобы ошибка, вычисляемая по формуле (8,1,1), делалась меньше заданной при наименьшем числе членов n . В математике методу поиска экстремума посвящено большое число работ. С изложением различных вариантов алгоритмов по этому вопросу можно познакомиться в работах [7], [9], [18].

Если функция $f(x)$ задана в аналитическом виде, то в принципе коэффициенты b_m находятся простым интегрированием

$$b_m = \int_0^\infty f(x) D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx. \quad (1,4,1)$$

Однако при этом требуется подобрать декременты α_i так, чтобы первые коэффициенты Фурье были максимальными, т. е. чтобы

$$\frac{\partial b_m}{\partial \alpha_m} = 0 \quad (2,4,1)$$

и

$$\frac{\partial^2 b_m}{\partial \alpha_m^2} < 0. \quad (3,4,1)$$

Это эквивалентно условию минимума ошибки H_n при заданном числе членов n , где

$$\begin{aligned} H_n &= \int_0^\infty \left[f(x) - \sum_{m=1}^n b_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 dx = \\ &= \int_0^\infty f^2(x) dx - \sum_{m=1}^n b_m^2. \end{aligned} \quad (4,4,1)$$

Для наглядной иллюстрации ограничимся очень простым примером, когда результат очевиден и все внимание может быть обращено на методическую сторону. Пусть нам требуется найти b_m и α_m для функции пропускания линии поглощения

$$\tau = e^{-kx}, \quad (5,4,1)$$

где $k = \frac{S\gamma}{\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2}$ [19].

Для $m=1$ имеем

$$b_1(\alpha_1) = \int_0^\infty e^{-kx} D_1(x; \alpha_1) dx = \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{k + \alpha_1}. \quad (6,4,1)$$

При произвольных α_m можно найти для $m=2$

$$\begin{aligned} b_2(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_0^\infty e^{-kx} D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) dx = \\ &= \frac{2\alpha_1 \sqrt{2\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} \frac{1}{k + \alpha_2} - \frac{1}{k + \alpha_1} \right), \end{aligned} \quad (7,4,1)$$

и т. д.

Однако потребуем теперь, чтобы коэффициент Фурье b_1 был максимальным. Согласно условию (2,4,1) и выражению (6,4,1), находим

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} = \sqrt{2} \left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}(k + \alpha_1)} - \frac{\sqrt{\alpha_1}}{(k + \alpha_1)^2} \right] = 0. \quad (8,4,1)$$

Отсюда следует, что $\frac{k+\alpha_1}{2} - \alpha_1 = 0$. Это может осуществиться при

$$\alpha_1 = k = \frac{S\gamma}{\pi} \frac{1}{(\gamma - \gamma_0)^2 + \gamma^2}. \quad (9,4,1)$$

Подставляя (9,4,1) в (6,4,1), находим оптимальное значение b_1

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha_1}}. \quad (10,4,1)$$

Соответственно формула (7,4,1) после подстановки в нее (9,4,1) при любом значении α_2 дает $b_2 = 0$. Такой же результат будет и для любого значения b_m при $m > 1$. Очевидно, ошибка H_n уже при наличии одного члена разложения в этом простом случае окажется равной нулю. Если подбор оптимального значения первого параметра α_1 не был бы произведен, то для получения надлежащей точности аппроксимации ряд (1, В) должен был содержать значительно большее число членов.

Подобная закономерность имеет место и для более сложных функций, рассмотрение которых не так наглядно. В п. 2,4 приведен пример оптимального подбора параметров для гауссовской функции. Следует отметить, что, кроме этого примера, переразложение некоторых аналитических зависимостей по функциям D_m может быть полезно при решении задач динамической метеорологии, пользующейся уравнениями математической физики, в которых наряду с рассматриваемыми рядами содержатся слагаемые в виде аналитических функций. Для получения алгебраических уравнений между коэффициентами разложений необходимо эти аналитические функции переразложить в ряд по функциям D_m . Подобная необходимость возникает при согласовании полей. Пусть, например, линейные операторы от скорости $L_1(v)$ и от давления $L_2(p)$ связаны между собой равенством $L_1(v) = kL_2(p)$, причем каждый из них может быть представлен независимо вычисляемым разложением $L_1(v) = \sum b_{v,m} D_m(x)$ или $L_2(p) = \sum b_{p,m} D_m(x)$, где x — некоторая координата. Тогда, очевидно, должно иметь место соотношение между коэффициентами $b_{v,m} = kb_{p,m}$, позволяющее провести объективный контроль разных гармоник разложения.

2. ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ К ЧАСТНЫМ ЗАДАЧАМ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

1.2. Распределение частиц аэрозоля по размерам

В атмосферной оптике часто возникает необходимость определить дифференциальный закон распределения (ДЗР) $F(x)$ -частиц аэрозоля по размерам x на основании измеренной прозрачности атмосферы $g(y)$ [27]. Здесь x — безразмерный радиус частиц, а y — безразмерная длина волны света.

Для определения $F(x)$ необходимо решить интегральное уравнение первого рода [11]

$$g(y) = \int_0^{\infty} K(x, y) F(x) dx, \quad (1,1,2)$$

где $K(x, y)$ — ядро, пропорциональное монодисперсному коэффициенту рассеяния. В частности, если ввести обозначения

$$\delta = \frac{2\pi(m-1)}{\lambda} r, \quad (2,1,2)$$

где r — радиус частицы, λ — длина волны света, m — коэффициент преломления, то монодисперсный коэффициент рассеяния, отнесенный к величине $2\pi r^2$, будет определяться формулой

$$K(\delta) = \frac{k(r, \lambda)}{2\pi r^2} = 1 - \frac{\sin 2\delta}{\delta} + \frac{1 - \cos 2\delta}{2\delta^2}. \quad (3,1,2)$$

На бесконечно большом расстоянии выражение (3,1,2) стремится не к нулю, а к постоянной величине K_{∞} , которая в частном случае равна единице. Следовательно, и разложение ядра в ряд по ортонормированным функциям, обращающимся в нуль на бесконечно большом расстоянии, должно содержать свободный член и разворачиваться в ряд как по x , так и по y . Пусть это будет разложение с известными коэффициентами Фурье b_k , имеющие вид

$$K(x, y) = K_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_m(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*). \quad (4,1,2)$$

Функция прозрачности также разлагается в ряд с известными коэффициентами Фурье

$$g(y) = g_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m D_m(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*). \quad (5,1,2)$$

Искомая функция $F(x)$ представляется в виде разложения с коэффициентами C_m , подлежащими определению

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (6,1,2)$$

Поскольку ДЗР должен быть нормирован, то сумма всех частиц равна общему числу частиц N , а если количество частиц каждого радиуса отнесено к общему числу частиц, то сумма всех долей образует единицу. Если представить $F(x)$ в виде произведения (6,1,2), накладывается условие нормированности

$$\int_0^{\infty} F(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \int_0^{\infty} D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx = M, \quad (7,1,2)$$

где $M=N$ или 1, в зависимости от исходных предпосылок.

Рассмотрим структуру составляющих коэффициентов Фурье для ядра интегрального уравнения, которое в случае формул (3,1,2) и (2,1,2) может быть записано в виде

$$K(\delta) = 1 - \frac{\sin 2\beta \frac{r}{\lambda}}{\beta \frac{r}{\lambda}} + \frac{1 - \cos 2\beta \frac{r}{\lambda}}{2\beta^2 \frac{r^2}{\lambda^2}}, \quad (8,1,2)$$

где $\beta = \pi(m-1)$. Поскольку функции $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ являются линейной комбинацией экспонент, коэффициенты Фурье для (8,1,2) будут линейными комбинациями интегралов следующего вида:

$$\mu_{m,p} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[-\frac{\sin 2\beta \frac{r}{\lambda}}{\beta \frac{r}{\lambda}} + \frac{1 - \cos 2\beta \frac{r}{\lambda}}{2\beta^2 \frac{r^2}{\lambda^2}} \right] e^{-\alpha_m r} e^{-\alpha_p^* \lambda} dr d\lambda. \quad (9,1,2)$$

Интеграл (9,1,2) легко берется, если учесть [6], что:

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \frac{\sin at}{t} dt = \arctg \frac{a}{\gamma}; \quad (10,1,2)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \frac{1 - \cos at}{t^2} dt = a \arctg \frac{a}{\gamma} - \frac{\gamma}{2} \ln \left(1 + \frac{a^2}{\gamma^2} \right); \quad (11,1,2)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \frac{1}{1+t^2} dt = \sin \gamma \operatorname{ci}(\gamma) - \cos \gamma \operatorname{si}(\gamma); \quad (12,1,2)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \frac{t}{1+t^2} dt = -[\cos \gamma \operatorname{ci}(\gamma) + \sin \gamma \operatorname{si}(\gamma)]; \quad (13,1,2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\gamma t}}{t} dt = -E_i(-\gamma) \approx -\left\{ 0,577216 + \ln \gamma + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma^i}{i \cdot i!} \right\}, \quad (14,1,2)$$

где

$$\text{ci}(\gamma) = - \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \quad (15,1,2)$$

$$\text{si}(\gamma) = - \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du. \quad (16,1,2)$$

Тогда, после первого интегрирования (9.1.2) по r и замены переменных, получаем

$$\mu_{m,p} = - \frac{2\beta}{V^{\alpha_m}} \int_0^{\infty} t^2 \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) e^{-\gamma t} dt, \quad (17,1,2)$$

где

$$t = \frac{V^{\alpha_m}}{2\beta} \lambda; \quad \gamma = \frac{2\beta\alpha_p}{V^{\alpha_m}}. \quad (18,1,2)$$

Второе интегрирование с учетом выражений (12,1,2) — (14,1,2) дает

$$\mu_{m,p} = \frac{2\beta}{V^{\alpha_m}} \frac{2}{\gamma} \left\{ \frac{2}{\gamma} [\sin \gamma \text{ci}(\gamma) - \cos \gamma \text{si}(\gamma)] - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{2}{\gamma^2} \right) [\cos \gamma \text{ci}(\gamma) + \sin \gamma \text{si}(\gamma)] - \frac{2}{\gamma^2} 0,577216 \right\}. \quad (19,1,2)$$

Общий вид выражения для коэффициентов Фурье ядра будет

$$b_m = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [K(x, y) - K_{\infty}] D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \times \\ \times D_m(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*) dx dy. \quad (20,1,2)$$

В соответствии с (28,1,2)

$$D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m C_{km} e^{-\alpha_k x}. \quad (21,1,2)$$

Тогда, с учетом выражения (20,1,2), имеем

$$b_m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{im} C_{jm}^* \mu_{i,j}. \quad (22,1,2)$$

Коэффициенты Фурье для функции прозрачности находятся по экспериментальным данным путем интегрирования

$$a_m = \int_0^{\infty} [g(y) - g_{\infty}] D_m(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*) dy. \quad (23,1,2)$$

Подстановка рядов (4,1,2), (5,1,2), (6,1,2) в основное интегральное уравнение (1,1,2) дает

$$g_{\infty} + \sum_{m=1}^n a_m D_m(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*) = K_{\infty} M + \sum_{m=1}^n C_m b_m D_m(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*). \quad (24,1,2)$$

Здесь суммирование делается практически для некоторого числа n , при котором коэффициенты b_m достаточно велики сравнительно с ошибкой. Неизвестные коэффициенты ДЗР спектра частиц по размерам находятся путем сравнения множителей перед одинаковыми номерами ортонормированных функций. В результате получим:

$$M = \frac{g_{\infty}}{K_{\infty}}; \quad (25,1,2)$$

$$C_m = \frac{a_m}{b_m}. \quad (26,1,2)$$

Одним из условий применимости данного метода, аналогичным требованию полноты системы собственных функций, является возможность представления ядра в виде ряда (4,1,2) с достаточно большим числом членов, имеющих малые погрешности. В формуле (26,1,2) коэффициент b_m вычисляется по выражению (22,1,2). Коэффициенты a_m находятся по наблюдениям данной метеорологической ситуации при помощи разработанной стандартной методики. Тогда вычисление неизвестных коэффициентов C_m искомого ряда (6,1,2) в соответствии с (26,1,2) сводится к простой процедуре деления соответствующих пар чисел.

2.2. Схема решения некоторых интегральных уравнений

Некоторые задачи динамической метеорологии требуют решения интегрального уравнения второго рода, имеющего вид

$$g(y) + \int_0^{\infty} K(x, y) F(x) dx = F(y). \quad (1,2,2)$$

Здесь неизвестная функция $F(x)$ находится и в правой части и под знаком интеграла. Мы ищем ее в виде разложения в ряд

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (2,2,2)$$

Это возможно в том случае, если возможны разложения в ряды функций $g(y)$ и ядра $K(x, y)$. Пусть это будут

$$g(y) = g_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m D_m(y; \alpha_1, \dots, \alpha_m); \quad (3,2,2)$$

$$K(x, y) = K_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_m(y; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (4,2,2)$$

Подстановка выражений (2,2,2), (3,2,2), (4,2,2) в интегральное уравнение (1,2,2) дает

$$g_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m D_m(y; \alpha_1, \dots, \alpha_m) + K_{\infty} \int_0^{\infty} F(x) dx + \sum_{m=1}^n C_m b_m D_m(y; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (5,2,2)$$

Из выражения (5,2,2) находим:

$$\int_0^{\infty} F(x) dx = -\frac{g_{\infty}}{K_{\infty}}; \quad (6,2,2)$$

$$C_m = \frac{a_m}{1 - b_m}. \quad (7,2,2)$$

В случае $b_m = 1$ уравнение (1,2,2) не может быть однозначно решено, так как тогда удовлетворяется однородное интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} K(x, y) F(x) dx = F(y), \quad (8,2,2)$$

причем константы C_m могут быть произвольными.

3.2. Схема вычисления некоторых интегралов

В динамической метеорологии, оптике атмосферы и в других областях метеорологической науки нередко возникает необходимость рассчитывать определенные интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Если такой расчет должен быть произведен при определенном значении параметра, то используют методы численного интегрирования. Однако иногда бывает удобно получать аналитическое выражение, дающее функциональную зависимость значений этого интеграла от параметра. В случае возможности аппроксимации подынтегрального выражения в виде рядов по функциям $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ аналитическая аппроксимация

таких интегралов существенно упрощается. Так, например, если в интеграле

$$F(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx \quad (1,3,2)$$

подынтегральное выражение представляется в виде

$$f(x, y) = \sum_{m, n} b_{m, n} D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_n(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*), \quad (2,3,2)$$

то с учетом выражения

$$D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m a_{km} e^{-\alpha_k x} \quad (3,3,2)$$

легко вместо выражения (1,3,2) получить

$$F(y) = \sum_{m, n} b_{m, n} \sum_{k=1}^m \frac{a_{km}}{\alpha_k} D_n(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*). \quad (4,3,2)$$

В качестве примера приведем более сложный случай, где подынтегральная функция по-разному ведет себя с ростом величины двух, определяющих ее аргументов. Пусть требуется вычислить величину поглощения спектральной линии [19], определяемую выражением

$$W_{SI}(\omega) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-k(\nu) \omega}) d\nu, \quad (5,3,2)$$

где

$$k(\nu) = \frac{C}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2}. \quad (6,3,2)$$

С ростом аргумента ω подынтегральная функция стремится к единице, а с ростом частоты ν убывает коэффициент поглощения $k(\nu)$ и поглощение стремится к нулю. В связи с этим в данном случае разложение в ряд подынтегральной функции будем производить по частям. Сначала ищем разложение

$$e^{-k(\nu) \omega} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\nu) D_n(\omega; \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*). \quad (7,3,2)$$

Учитывая соотношение (3,3,2), коэффициенты Фурье легко определяются в виде

$$b_n(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-k(\nu) \omega} \sum_{l=1}^n a_{ln}^* e^{-\alpha_l^* \omega} d\omega = \sum_{l=1}^n \frac{a_{ln}^*}{k(\nu) + \alpha_l^*}. \quad (8,3,2)$$

Теперь можно подынтегральную функцию представить следующим образом:

$$\begin{aligned} f(\nu, w) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \frac{a_{ln}^*}{k(\nu) + \alpha_l^*} \sum_{i=1}^n a_{in}^* e^{-\alpha_i^* w} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m(w) D_m(\nu; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \end{aligned} \quad (9,3,2)$$

Коэффициенты Фурье $q_m(w)$ определяются обычным способом в виде интеграла

$$q_m = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \frac{a_{ln}^*}{k(\nu) + \alpha_l^*} \sum_{i=1}^n a_{in}^* e^{-\alpha_i^* w} \right\} \sum_{r=1}^m a_{rm} e^{-\alpha_r \nu} d\nu. \quad (10,3,2)$$

Для производства интегрирования требуется вычислить интеграл, который обозначим

$$J_{r, l} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_r \nu}}{k(\nu) + \alpha_l^*} d\nu. \quad (11,3,2)$$

Здесь интегральное выражение на вещественной оси не имеет особенностей и, следовательно, вычисления интеграла (11,3,2) не представляют принципиальных трудностей. После выкладок легко вместо выражения (10,3,2) получить

$$q_m = \sum_{r=1}^m \frac{a_{rm}}{\alpha_r} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n a_{ln}^* e^{-\alpha_l^* w} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m a_{in}^* a_{rm} J_{r, l}. \quad (12,3,2)$$

Часто оказывается, что двух-трехчленная формула дает удовлетворительную аппроксимацию [7], [9]. Оставляя в разложении только два коэффициента Фурье, получаем для них по формуле (12,3,2) следующие два выражения:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_{11}}{\alpha_1} - \{ [a_{12}^* (a_{12}^* J_{11} + a_{22}^* J_{12}) a_{11} + (a_{11}^*)^2 a_{11} J_{11}] e^{-\alpha_1^* w} + \\ &+ a_{22}^* a_{11} (a_{12}^* J_{11} + a_{22}^* J_{12}) e^{-\alpha_2^* w} \}; \end{aligned} \quad (13,3,2)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{a_{12}}{\alpha_1} + \frac{a_{22}}{\alpha_2} - \{ [(a_{11}^*)^2 + (a_{12}^*)^2] a_{12} J_{11} + [(a_{11}^*)^2 + \\ &+ (a_{12}^*)^2] a_{22} J_{21} + a_{12}^* a_{22}^* a_{12} J_{12} + a_{12}^* a_{22}^* a_{22} J_{22} \} e^{-\alpha_1^* w} - \\ &- \{ a_{22}^* [a_{12}^* (a_{12} J_{11} + a_{22} J_{21}) + a_{22}^* (a_{12} J_{12} + a_{22} J_{22})] \} e^{-\alpha_2^* w}. \end{aligned} \quad (14,3,2)$$

Учитывая выражения (9,3,2), (13,3,2), (14,3,2), можно величину поглощения спектральной линии написать в виде

$$W_{Sl}(w) = q_1(w) \frac{a_{11}}{\alpha_1} + q_2(w) \left[\frac{a_{12}}{\alpha_1} + \frac{a_{22}}{\alpha_2} \right], \quad (15,3,2)$$

что эквивалентно форме записи

$$W_{Sl}(\omega) = A_1 - A_2 e^{-\alpha_1^* \omega} - A_3 e^{-\alpha_2^* \omega}, \quad (16,3,2)$$

где константы A_i зависят от характеристик линий поглощения через величины $J_{r,i}$, входящие в них. Из вида формулы (16,3,2) следует, что с ростом количества поглощающей субстанции ω растет величина поглощения, стремясь к некоторому пределу.

В случае переменного предела интегрирования вычисление интегралов вида

$$F(x) = \int_x^\infty f(x) dx, \quad (17,3,2)$$

где подынтегральная функция разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (18,3,2)$$

может производиться как с использованием представлений функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ в виде линейных комбинаций экспонент (3,3,2), так и с использованием общих свойств производных данных функций, даваемых формулами [10].

Эти выражения для производных могут быть получены путем дифференцирования обеих частей равенств (25—28,3,2) из п. 1.1 и после этого исключения экспоненциальных множителей. В результате получаем следующие выражения, в которых опущены аргументы функций:

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} = -\alpha_1 D_1; \quad (19,3,2)$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial x} = -\alpha_2 D_2 - 2\alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} D_1; \quad (20,3,2)$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial x} = -\alpha_3 D_3 - 2\alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} D_2 - 2\alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}} D_1; \quad (21,3,2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_m}{\partial x} = & -\alpha_m D_m - 2\alpha_{m-1} \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}} D_{m-1} - \\ & - 2\alpha_{m-2} \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-2}}} D_{m-2} - \dots - 2\alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_1}} D_1, \end{aligned} \quad (22,3,2)$$

или

$$\frac{\partial D_m}{\partial x} = -\alpha_m D_m - 2 \sqrt{\alpha_m} \sum_{k=1}^{m-1} \sqrt{\alpha_{m-k}} D_{m-k}. \quad (23,3,2)$$

Из них последовательным интегрированием после замены функций низких номеров на производные по x легко получить следующие соотношения:

$$\int_x^\infty D_1(x; \alpha_1) dx = \frac{1}{\alpha_1} D_1(x; \alpha_1); \quad (24,3,2)$$

$$\int_x^\infty D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) dx = \frac{1}{\alpha_2} D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) - \frac{2}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} D_1(x; \alpha_1). \quad (25,3,2)$$

Далее, опуская в правой части для краткости аргументы функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, имеем:

$$\int_x^\infty D_3(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) dx = \frac{1}{\alpha_3} D_3 - \frac{2}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} D_2 + \frac{2}{\alpha_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} D_1; \quad (26,3,2)$$

$$\begin{aligned} \int_x^\infty D_4(x; \alpha_1, \dots, \alpha_4) dx &= \frac{1}{\alpha_4} D_4 - \frac{2}{\alpha_3} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}} D_3 + \\ &+ \frac{2}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_4}} D_2 - \frac{2}{\alpha_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_4}} D_1. \end{aligned} \quad (27,3,2)$$

На основании соотношений (24—27,3,2) методом индукции можно получить для любого номера функции общее выражение интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^\infty D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx &= \frac{1}{\alpha_m} D_m - \frac{2}{\alpha_{m-1}} \sqrt{\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}} D_{m-1} + \\ &+ \frac{2}{\alpha_{m-2}} \sqrt{\frac{\alpha_{m-2}}{\alpha_m}} D_{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{2}{\alpha_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_m}} D_1, \end{aligned} \quad (28,3,2)$$

или

$$\begin{aligned} \int_x^\infty D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx &= \frac{D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\alpha_m} - \\ &- \frac{2}{\sqrt{\alpha_m}} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \frac{D_{m-k}(x; \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k})}{\sqrt{\alpha_{m-k}}}. \end{aligned} \quad (29,3,2)$$

Подстановка выражений (29,3,2) и (18,3,2) в (17,3,2) позволяет для искомого интеграла получить выражение через те же нормированные ортогональные функции в форме суммы

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left[\frac{D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\alpha_m} - \frac{2}{\sqrt{\alpha_m}} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{D_{m-k}(x; \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k})}{\sqrt{\alpha_{m-k}}} \right]. \end{aligned} \quad (30,3,2)$$

Данное выражение выгодно использовать в тех случаях, когда желательно иметь ряд, составленный из ортогональных функций. Если в этом нет необходимости, то возможно под знаком интеграла выразить ортогональные функции через линейную комбинацию экспонент (3,3,2) и затем произвести элементарным способом интегрирование.

Как отмечалось, применение приведенных методов выгодно там, где требуется в результате интегрирования получить не одно число, а аналитическую зависимость или разложение по функциям D_m . Аналитическая форма позволяет исследовать зависимость величины интеграла от некоторого параметра, которую проще рассчитать по конечной формуле, чем путем многократного интегрирования. Разложение в ряд бывает необходимо при решении задач математической физики, возникающих в динамической метеорологии. Подобная задача появляется в более общей постановке вопроса о прогнозировании на основе решения интегрального уравнения Винера—Хопфа (см. п. 3.4).

4.2. Приближенная оценка спектра турбулентных включений по измерениям в одной точке

Часто турбулентные флуктуации измеряются безынерционным датчиком, помещенным в некоторой точке, которая или неподвижно закреплена и омывается протекающими мимо нее воздушными массами, или движется вместе с носителем. Аналогичные рассуждения применимы к гидросфере при регистрации там турбулентных пульсаций. В обоих случаях происходит пересечение гипотетических сферических включений по некоторым хордам длины l , не превышающей диаметра S этих включений. Для определения ДЗР диаметров окружностей $F_1(S)$, являющихся следом сечения сфер горизонтальной плоскостью [3], решается интегральное уравнение

$$\frac{\omega(l)}{l} = \frac{1}{S} \int_l^\infty F_1(S) \frac{dS}{\sqrt{S^2 - l^2}}, \quad (1,4,2)$$

где $\omega(l)$ известный из наблюдений ДЗР хорд окружностей, лежащих в данной плоскости.

Ядро этого уравнения имеет особенность при $S=l$ и, следовательно, не может быть с достаточной степенью точности разложено в ряд по ортонормированным экспоненциальным функциям. Поэтому воспользуемся некоторыми преобразованиями и приближенными приемами. Сначала произведем замену переменных, пользуясь подстановкой

$$S = tl. \quad (2,4,2)$$

Тогда вместо интегрального уравнения (1,4,2) имеем

$$\frac{w(t)}{t} = \frac{1}{S} \int_1^{\infty} F_1(lt) \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}, \quad (3,4,2)$$

где особенность имеет место при $t=1$.

Произведем интегрирование по частям, для исключения особенности в знаменателе. Тогда имеем

$$\frac{w(t)}{t} = \frac{1}{S} \left\{ \frac{F_1(lt)}{t} \sqrt{t^2-1} \int_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \sqrt{t^2-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{F_1(lt)}{t} \right) dt \right\}. \quad (4a,4,2)$$

При бесконечно больших значениях аргумента плотность вероятности $F_1(lt) \rightarrow 0$, а при $t=1$ имеем $\sqrt{t^2-1}=0$. Следовательно, выражение (4a, 4,2) принимает вид

$$\frac{w(t)}{t} = -\frac{1}{S} \int_1^{\infty} \sqrt{t^2-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{F_1(lt)}{t} \right) dt. \quad (4б,4,2)$$

В выражении (4б,4,2) ядро интегрального уравнения монотонно растет с ростом аргумента и стремится к величине

$$\sqrt{t^2-1} = t \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} \approx t \left(1 - \frac{1}{2t^2} \right) = t - \frac{1}{2t}. \quad (5,4,2)$$

Разность

$$\left(t - \frac{1}{2t} \right) - \sqrt{t^2-1} \approx \sum_{m=1}^N b_m D_m(t-1; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (6,4,2)$$

на бесконечно большом расстоянии обращается в нуль, а при $t=1$ равна $\frac{1}{2}$. Она может быть с надлежащей степенью точности представлена рядом ортонормированных функций, стоящих в правой части выражения (6,4,2). Коэффициенты Фурье здесь определяются на основании вспомогательных соотношений:

$$\int_1^{\infty} \sqrt{t^2-1} e^{-\alpha(t-1)} dt = \frac{e^{\alpha} K_1(\alpha)}{\alpha}, \quad (7,4,2)$$

где $K_1(\alpha)$ — функция Макдональда, которая при малых значениях аргумента стремится к бесконечности по закону

$$K_1(\epsilon) \rightarrow \frac{1}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\epsilon}{2}; \quad (8,4,2)$$

второй и третий интегралы хорошо известны:

$$\int_1^{\infty} t e^{-\alpha(t-1)} dt = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}; \quad (9,4,2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t} e^{-\alpha(t-1)} dt = -e^{\alpha} E_1(-\alpha). \quad (10,4,2)$$

Известно, что при малых значениях аргумента имеет место разложение в ряд

$$E_i(-\alpha) = 0,5772 + \ln \alpha - \alpha + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{1}{3} \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \quad (11,4,2)$$

Поэтому, если в общем виде для произвольных α имеем

$$\int_1^{\infty} \left[\left(t - \frac{1}{2t} \right) - \sqrt{t^2 - 1} \right] e^{-\alpha(t-1)} dt = \omega(\alpha),$$

где

$$\omega(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2} e^{\alpha} E_i(-\alpha) - \frac{e^{\alpha} K_1(\alpha)}{\alpha}, \quad (12,4,2)$$

то при $\alpha = \varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon) &\approx \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2} (0,5772 + \ln \varepsilon - \varepsilon + \dots) - \\ &- \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon}{2} \right) (1 + \varepsilon) = -0,2886 + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \varepsilon \ln \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда при $\alpha = 0$ получаем

$$\int_1^{\infty} \left[t - \frac{1}{2t} - \sqrt{t^2 - 1} \right] dt = \frac{1}{2} \ln 2 - 0,2886, \quad (13,4,2)$$

т. е. подынтегральная функция (6,4,2) интегрируема и выражение для b_m имеет смысл при всех значениях α .

На основании выражения (12,4,2) можно написать

$$b_m = \sum_{k=1}^m a_{km} \omega(\alpha_k). \quad (14,4,2)$$

Интегральное уравнение (4,4,2) теперь представится с учетом равенства (6,4,2) в форме

$$\begin{aligned} \frac{w(l)}{l} &= -\frac{1}{S} \int_1^{\infty} \left[\left(t - \frac{1}{2t} \right) - \sum_{m=1}^N b_m D_m(t-1; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right] \times \\ &\times \frac{d}{dt} \left[\frac{F_1(lt)}{t} \right] dt. \end{aligned} \quad (15,4,2)$$

Пусть известная функция в левой части выражения (15,4,2) может быть представлена в виде разложения в ряд

$$\frac{w(l)}{l} = \sum_{k=1}^N \beta_k D_k(l; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*). \quad (16,4,2)$$

Будем искать коэффициенты γ_{mk} разложения в двойной ряд неизвестной функции

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{F_1(lt)}{t} \right] = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \gamma_{mk} D_m(t-1; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_k(l; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*). \quad (17,4,2)$$

Подставляя выражение (17,4,2) в (15,4,2) и интегрируя с учетом формул (9,4,2), (10,4,2), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \beta_k D_k(l; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*) = & -\frac{1}{S} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \gamma_{mk} D_k(l; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*) \times \\ & \times \sum_{j=1}^m a_j \left[\left(\frac{1}{\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_j^2} \right) + \frac{1}{2} e^{\alpha_j E_l} (-\alpha_j) \right] + \frac{1}{S} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N b_m \gamma_{mk} \times \\ & \times D_k(l; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*). \end{aligned} \quad (18,4,2)$$

Сравнивая множители при одинаковых номерах k , получаем систему из N уравнений с N^2 неизвестными γ_{mk}

$$\begin{aligned} \beta_k = & -\frac{1}{S} \sum_{m=1}^N \gamma_{mk} \sum_{j=1}^m a_j \left[\frac{1}{\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_j^2} + \frac{1}{2} e^{\alpha_j E_l} (-\alpha_j) \right] + \\ & + \frac{1}{S} \sum_{m=1}^N b_m \gamma_{mk}. \end{aligned} \quad (19,4,2)$$

Воспользуемся теперь соотношениями (14,4,2) и (12,4,2) и сократим одинаковые члены под знаком суммирования, после чего имеем

$$\beta_k = -\frac{1}{S} \sum_{m=1}^N \gamma_{mk} \sum_{j=1}^m a_j \left[\frac{e^{\alpha_j K_1} (\alpha_j)}{\alpha_j} \right]. \quad (20,4,2)$$

Из системы уравнений (20,4,2) не представляет принципиальных трудностей определить все коэффициенты Фурье γ_{mk} , если при $m \neq n$ $\gamma_{mk} = 0$, и тогда найти

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{F_1(lt)}{t} \right] = \sum_{m=1}^N \gamma_{mm} D_m(t-1; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_m(l; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*). \quad (21,4,2)$$

Интегрируя обе части выражения (21,4,2) по t от 1 до ∞ и используя соотношения (29,3,2), находим ДЗР диаметров шарообразных турбулентных включений

$$\begin{aligned} F_1(l) = & -\sum_{m=1}^N \gamma_{mm} D_m(l; \alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*) \left\{ \frac{D_m(0; \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\alpha_m} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{V \alpha_m} \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{D_{m-j}(0; \alpha_1, \dots, \alpha_{m-j})}{V \alpha_{m-j}} \right\}. \end{aligned} \quad (22,4,2)$$

Приведенные рассуждения важны в методическом отношении. Действительно, на первый взгляд кажется возможным в интегральном уравнении (46,4,2) сразу сделать подстановку в виде разложения (17,1,4) с неизвестными коэффициентами γ_{mm} . Однако при

этом в соответствии с выражением (16,4,2) могут быть подобраны оптимальным образом лишь декременты α_j^* , тогда как параметры α_j остаются произвольными. После выделения разности (6,4,2) оказывается возможным объективно подобрать и эти параметры. Для этого можно воспользоваться методом, изложенным в п. 4.1, а именно, нахождением таких значений α_j , при которых первые коэффициенты Фурье достигают максимума. Так, например, для первого коэффициента Фурье имеем условие максимума

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_1^\infty \left[\left(t - \frac{1}{2t} \right) - \sqrt{t^2 - 1} \right] e^{-\alpha_1(t-1)} \sqrt{2\alpha_1} dt = \\ = \sqrt{2\alpha_1} \frac{\partial \omega(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha_1}} \omega(\alpha_1) = 0. \quad (23,4,2)$$

Здесь производная от функции $\omega(\alpha_1)$ определяется соотношением

$$\omega'(\alpha) \equiv \frac{\partial \omega(\alpha)}{\partial \alpha} = \left\{ -\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} + \frac{1}{2} e^\alpha E_i(-\alpha) + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} - e^\alpha \frac{K_1(\alpha)}{\alpha} + \right. \\ \left. + e^\alpha \frac{K_2(\alpha)}{\alpha} \right\}. \quad (24,4,2)$$

Выражение (24,4,2) легко получается на основании равенства (12,4,2) и известных выражений для интегральной показательной функции

$$E_i(-\alpha) = - \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (25,4,2)$$

и для производной от функций $K_p(\alpha)$

$$\frac{d^m}{\alpha d\alpha} \left[\frac{K_p(\alpha)}{\alpha^p} \right] = (-1)^m \frac{K_{p+m}(\alpha)}{\alpha^{p+m}}. \quad (26,4,2)$$

После того как определены первые $m-1$ декрементов α_j , декремент α_m определяется путем решения уравнения

$$\frac{\partial b_m}{\partial \alpha_m} = \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial \alpha_k}{\partial \alpha_m} \omega(\alpha_k) + \alpha_k \frac{\partial \omega(\alpha_k)}{\partial \alpha_m} \right] = 0 \quad (27,4,2)$$

при условии, что

$$\frac{\partial^2 b_m}{\partial \alpha_m^2} < 0. \quad (28,4,2)$$

Закончив подбор параметров α_j до того номера N , который обеспечивает заданную точность аппроксимации, можно переходить к вычислениям коэффициентов β_k из системы уравнений (20,4,2), а затем к расчету ДЗР диаметров шарообразных турбулентных включений по формуле (22,4,2). Подобная процедура расчета может быть использована и для случая гипотезы о несферической форме турбулентных включений, причем в формуле (27,4,2) изменится выражение для функции $\omega(\alpha)$.

Данная постановка задачи отличается тем, что дает спектр турбулентных включений в аналитическом виде и может быть от начала до конца запрограммирована для расчетов на ЭВМ. Кроме того, по измерениям вдоль одной линии восстанавливается картина флуктуаций в пространстве, что не всегда делается.

5.2. Восстановление оригинала по операционному изображению функции

Изображение $F(p)$ функции $f(t)$ при одностороннем преобразовании Лапласа дается выражением [6]

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1,5,2)$$

Коэффициенты b_m разложения в ряд функции $f(t)$ по ортогональным нормированным экспоненциальным функциям $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (7,1,1) находятся интегрированием

$$b_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \int_0^{\infty} f(t) D_m(t; \alpha_1, \dots, \alpha_m) dt. \quad (2,5,2)$$

В выражении (2,5,2) функции $D_m(t; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ являются линейными комбинациями экспонент с различными декрементами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$

$$D_m(t; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m C_{km} e^{-\alpha_k t}, \quad (3,5,2)$$

где

$$C_{km} = \frac{\sqrt{2x_m} \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_k + \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) \prod_{j=k+1}^m (\alpha_k - \alpha_j)}. \quad (4,5,2)$$

Заменяя в выражении (1,5,2) параметр p на α и учитывая выражения (2,5,2) и (3,5,2), легко получить

$$b_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \int_0^{\infty} f(t) \sum_{k=1}^m C_{km} e^{-\alpha_k t} dt,$$

или

$$b_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m C_{km} \frac{F(\alpha_k)}{\alpha_k}. \quad (5,5,2)$$

Разложение в ряд по функциям $D_m(t; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ имеет вид

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_m(t; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (6,5,2)$$

Если изображение $F(p)$ функции $f(t)$ каким-то образом получено, например, путем решения некоторого уравнения в области изображений, то, вычисляя по формуле (5,5,2) коэффициенты b_m и подставляя их в выражение (6,5,2), находим искомый оригинал

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m C_{km} \frac{F(\alpha_k)}{\alpha_k} D_m(t; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (7,5,2)$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДРУГИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1.3. Основные свойства дифференциальных законов распределения с аргументами от нуля до бесконечности

В метеорологии, гидрологии и других науках, связанных с обработкой эмпирического материала, часто принято строить гистограммы — графики, дающие число случаев наблюдения или повторяемость в процентах появления в определенных градациях значений данного элемента (скорость ветра или течений, высота волн, относительная топография, высоты места над уровнем моря и т. п.). Дифференциальные законы распределения (ДЗР) показывают распределение плотности вероятности $F(x)$ вдоль шкалы возможных значений гидрометеорологического элемента x . Вероятность P того, что данный элемент примет значение в интервале от $x_k = kh$ до $x_{k+1} = (k+1)h$ определяется интегралом

$$P(kh < x < (k+1)h) = \int_{kh}^{(k+1)h} F(x) dx. \quad (1,1,3)$$

Из формулы (1,1,3) следует, что ДЗР $F(x)$ отличается от распределения вероятностей P и соответственно от гистограмм тем сильнее, чем больше величина h градации. Так, например, при известном законе распределения

$$F_1(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}, \quad (2,1,3)$$

имеющем плотность вероятности $F_1(0) = 0$ и $F_1(\hat{x}) = F_{mx} = \alpha e^{-1}$ при $x = \hat{x} = \frac{1}{\alpha}$, можем получить в нулевой градации $k=0$ большую вероятность, чем в первой, если возьмем, в частности, за величину шага $h = \frac{2}{\alpha}$. Тогда:

$$P(0 < x < 2\hat{x}) = \alpha^2 \int_0^{\frac{2}{\alpha}} x e^{-\alpha x} dx = 1 - 3e^{-2};$$

$$P(2\hat{x} < x < 4\hat{x}) = \alpha^2 \int_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{4}{\alpha}} x e^{-\alpha x} dx = e^{-2}(3 - 5e^{-2}).$$

Вероятность нулевой градации оказывается больше вероятности первой градации в отношении

$$\frac{P(0 < x < 2\hat{x})}{P(2\hat{x} < x < 4\hat{x})} = \frac{e^2(1 - 3e^{-2})}{3 - 5e^{-2}} > 1.$$

Таким образом, в данном частном случае истинный ДЗР качественно отличается от характера гистограммы. Если кривая для рассматриваемого ДЗР выходит из нулевой точки при $x=0$, а затем достигает максимума при $\hat{x} = \frac{1}{\alpha}$, то гистограмма имеет мо-

нотонно убывающие ординаты с ростом аргумента x , начиная от нулевых значений аргумента, где ординаты максимальны. Это свойство искажения характера распределения по градациям гидрометеорологических параметров в зависимости от величины градаций следует учитывать при подборе типов ДЗР и его параметров. В излагаемых ниже приближенных графических и смешанных методах, где ординаты подбираемого ДЗР принимаются за средние значения ординат гистограмм, отнесенных к единичному интервалу, желательно уменьшать величину градаций, чтобы лучше уловить тип ДЗР. При разработке алгоритма расчетов на ЭВМ параметров ДЗР производится сравнение фактических и теоретических численностей по градациям для того, чтобы уменьшить погрешности, связанные с группированием по градациям. Точность достигаемой аппроксимации при расчетах на ЭВМ нетрудно все время контролировать.

При подборе ДЗР одним из основных условий является достоверность того, что при испытаниях появится одно из всех возможных событий, эквивалентное тому, что площадь под кривой гистограммы, выраженной в относительных единицах, равна единице (а в числе случаев появления события в данной градации равна общему числу случаев). Назовем это условием нормированности ДЗР. Оно может быть записано в виде

$$\int_0^{\infty} F(x) dx = 1. \quad (3.1.3)$$

Гистограмма некоторого гидрометеорологического элемента, полученная для конкретного ряда наблюдений, может содержать отдельные детали (частные максимумы или минимумы), которые носят случайный характер и исчезнут при увеличении длины ряда. В связи с этим часто производится их сглаживание по определенному закону. Если такой закон не известен заранее, то можно найти аппроксимацию полученного эмпирического распределения по методу, изложенному в п. 2.1 или 3.1, ограничиваясь несколькими первыми членами. В других случаях бывает из теоретических соображений или на основании экспериментальных данных известен характер кривой распределения, которая может быть описана ДЗР, содержащим сравнительно небольшое число параметров. Это облегчает процедуру подбора параметров.

Для несимметричных дифференциальных законов распределения с аргументом, меняющимся от нуля и до бесконечности, существует много различных формул, из которых, пожалуй, наиболее широкое распространение получили кривые Пирсона и гамма-распределение. При этом некоторые из кривых Пирсона являются частным случаем гамма-распределения. Так, например, кривые Пирсона типа X [25]

$$y = y_0 e^{-\gamma x} \quad (4,1,3)$$

являются частным случаем гамма-распределения

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad (5,1,3)$$

где

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx, \quad (6,1,3)$$

причем $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ при n целом и положительном, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Действительно, полагая в выраже-

нии (5,1,3) $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{\gamma}$, мы получаем

$$f(x) = \gamma e^{-\gamma x}, \quad (7,1,3)$$

что соответствует закону (4,1,3).

Нашей задачей в этом параграфе является не изложение уже хорошо освещенного в литературе материала [21], а построение некоторых типовых ДЗР на интервале изменения аргумента $0 < x < \infty$ с применением линейных комбинаций показательных функций. Такие ДЗР легко интегрируются, дифференцируются и не содержат в качестве множителей каких-либо многочленов. Последнее обстоятельство обеспечивает отсутствие фиктивных отрицательных плотностей вероятности, которые могут возникать при некоторых значениях аргумента, например, у полиномов Грама—Шарлье, имеющих действительные корни. То же можно сказать о ДЗР, представляемых несколькими полиномами Чебышева—Лягерра

$$\psi_n = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{n!} L_n(x), \quad (8,1,3)$$

где $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$,

которые ортогональны на интервале от 0 до ∞ . Их линейная комбинация содержит многочлены, дающие отрицательные частоты при наличии действительных корней.

Для ДЗР, содержащих не более трех параметров, можно предложить выделить основные типы I—III и дополнительные типы IV и V.¹

Тип I, как видно из рис. 4, имеет кривые 1, 2, обладающие максимумом при $x=0$ и затем монотонно убывающие по мере роста аргумента. В типе I можно выделить два подтипа:

Ia — убывание начинается сразу от оси y , при этом производная

$$\left(\frac{\partial F_{Ia}}{\partial x}\right)_{x=0} < 0; \quad (9,1,3)$$

примером такого распределения служит загрязненность атмосферы [18];

Iб — кривая образует как бы горизонтальную ступеньку при $x=0$ и, следовательно, имеет

$$\left(\frac{\partial F_{Ib}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad (10,1,3)$$

такого типа кривые встречаются в гидрологии и носят название S-образных кривых.

Тип II—ДЗР имеет максимум на некотором расстоянии от начала координат, а при $x=0$ пересекает ось ординат на некотором уровне, лежащем ниже, чем максимум. Производная по x от этого ДЗР в точке $x=0$ равна нулю, т. е. касательная горизонтальна

$$\left(\frac{\partial F_{II}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \quad (11,1,3)$$

Такой тип ДЗР может встречаться при изучении распределения скоростей ветра и, как это будет показано в п. 2.3, удобен для описания бимодальных законов (рис. 4, кривая 3).

Тип III—ДЗР имеет нулевое значение плотности вероятности при $x=0$ и максимум на некотором удалении от начала координат. Этот закон делится на два подтипа:

IIIa — кривая ДЗР, исходя из начала координат, круто поднимается вверх, достигая максимума, а затем монотонно опускается;

IIIб — в начале координат значения плотности вероятности и производной от нее равны нулю:

$$(F_{IIIa})_{x=0} = (F_{IIIb})_{x=0} = 0; \quad (12,1,3)$$

$$\left(\frac{\partial F_{IIIb}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \quad (13,1,3)$$

¹ Такая классификация не является единственно возможной.

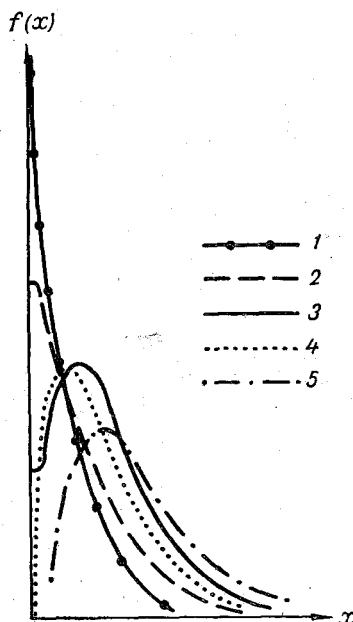


Рис. 4. Схемы графиков для ДЗР типов I, II, III.

1 — ДЗР типа Ia, 2 — ДЗР типа Ib, 3 — ДЗР типа II, 4 — ДЗР типа IIIa, 5 — ДЗР типа IIIb.

Эти кривые встречаются, например, при изучении распределения скоростей ветра, распределения освещенности под пологом леса и т. д.

Тип IV и последующие типы отличаются более чем одной модой и встречаются в ДЗР, образованных несколькими разнородными процессами. Так, например, повторяемость абсолютной влажности воздуха в прибрежной полосе моря часто группируется около двух значений — средней влажности берегового воздуха и средней влажности морского воздуха, — между которыми намечается больший или меньший минимум повторяемости. Так, например, для случая двух мод можно рассмотреть тип IV. Первая мода наблюдается в начале координат и не имеет нулевой производной по x , а вторая — при некотором значении $\hat{x} \neq 0$.

Тип Va — в начале координат плотность вероятности равна нулю, а производная по x отлична от нуля.

Тип Vб — в начале координат и плотность вероятности, и первая производная по x от нее обращаются в нуль, а максимумы имеют место в точках $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ на некотором расстоянии от начала координат.

2.3. Построение ДЗР с аргументами от нуля до бесконечности

Все ДЗР, перечисленные в п. 1.3, легко получаются в виде линейной комбинации ортогональных функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Для каждого типа закона необходимо взять столько функций, сколько условий накладывается на форму кривой распределения, ему соответствующей. После получения выражения ДЗР вида

$$F(x) = \sum_{m=1}^n b_m D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (1,2,3)$$

нетрудно, собирая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми декрементами затухания α_i , перейти к другой форме ДЗР вида

$$F(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\alpha_k x}, \quad (2,2,3)$$

где

$$a_k = \sum_{m=1}^n b_m C_{km}. \quad (3,2,3)$$

Прежде чем перейти к получению формул для ДЗР различного типа, полезно ввести следующие обозначения: l — норма N_n

соответствующей ортонормированной функции, даваемая выражением

$$N_n = \int_0^{\infty} D_n(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dx; \quad (4,2,3)$$

2 — производная Q_n от соответствующей функции, взятая по аргументу x при $x \rightarrow 0$

$$Q_n = \left(\frac{\partial D_n(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial x} \right)_{x \rightarrow 0}. \quad (5,2,3)$$

Теперь легко получить известный экспоненциальный закон распределения, накладывая на разложение

$$F_1(x) = b_1 D_1(x; \alpha_1) \quad (6,2,3)$$

только одно условие нормированности (3, 1, 2), который дает

$$b_1 = \frac{1}{N_1}. \quad (7,2,3)$$

Подстановка выражения (7,2,3) в (6,2,3) дает для закона по нашей систематизации типа Ia следующее выражение:

$$-III'_{Ia} \equiv F_1(x) = \frac{1}{N_1} D_1(x; \alpha_1), \quad (8,2,3)$$

где III'_{Ia} — интегральный закон распределения (см. п. 7.3).

Очевидно

$$N_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{2\alpha_1} e^{-\alpha_1 x} dx = \sqrt{\frac{2}{\alpha_1}}, \quad (9,2,3)$$

а подстановка выражения (9,2,3) в (25,1,1) дает

$$-III'_{Ia} \equiv F_1(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 x}. \quad (10,2,3)$$

График для формулы (10,2,3) в системе координат $\xi = \alpha_1 x$, $y = -\frac{1}{\alpha_1} III'_{Ia}$ представлен кривой 1 на рис. 4.

Построение ДЗР типа Iб требует выполнения двух условий: нормирования (3,1,2) и обращения в нуль производной при $x=0$ (10,1,2). В связи с этим ищем закон типа Iб в виде

$$-III'_{Ib} \equiv F_2(x) = b_1 D_1(x; \alpha_1) + b_2 D_2(x; \alpha_1, \alpha_2). \quad (11,2,3)$$

Неизвестные константы b_1 и b_2 определяются согласно выражениям (3,1,3) и (10,1,3) из уравнений:

$$b_1 N_1 + b_2 N_2 = 1; \quad (12,2,3)$$

$$b_1 Q_1 + b_2 Q_2 = 0. \quad (13,2,3)$$

Решая систему (12,2,3), (13, 2, 3), находим

$$-III'_{Ib} \equiv F_2(x) = \frac{Q_1 D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) - Q_2 D_1(x; \alpha_1)}{N_2 Q_1 - N_1 Q_2}. \quad (14,2,3)$$

Учитывая выражение (9,2,3) и что

$$N_2 = -\sqrt{\frac{2}{a_2}}, \quad (15,2,3)$$

$$Q_1 = -a_1 \sqrt{2a_1}, \quad (16,2,3)$$

$$Q_2 = -(2a_1 + a_2) \sqrt{2a_2}, \quad (17,2,3)$$

можно получить вместо (14,2,3) другую форму [10] закона типа I6

$$-III'_{I6} \equiv F_2(x) = \frac{a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} (a_2 e^{-a_1 x} - a_1 e^{-a_2 x}). \quad (18,2,3)$$

Кривая для ДЗР — III'_{I6} представлена на рис. 4 под номером 1. Обобщение типа I6 см. в п. 4.3, формулы (72,4,2) и (73,4,3).

Построение типа II ДЗР требует использования разложения с тремя коэффициентами Фурье для того, чтобы удовлетворить трем условиям: (3,1,3), (11,1,3) и заданному не нулевому значению $F_7(0)$ плотности вероятности при $x=0$, т. е.

$$-III'_{II}(0) \equiv F_7(0) \neq 0. \quad (19,2,3)$$

Для удовлетворения всех трех условий получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1 N_1 + b_2 N_2 + b_3 N_3 &= 1 \\ b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_3 Q_3 &= 0 \\ b_1 D_1(0; a_1) + b_2 D_2(0; a_1, a_2) + b_3 D_3(0; a_1, a_2, a_3) &= F_7(0) \end{aligned} \right\} \quad (20,2,3)$$

Отсюда:

$$b_1 = \frac{1}{\Delta} \{ Q_2 D_3(0; a_1, a_3) - Q_3 D_2(0; a_1, a_2) + F_7(0) [N_2 Q_3 - N_3 Q_2] \}; \quad (21,2,3)$$

$$b_2 = \frac{1}{\Delta} \{ -Q_1 D_3(0; a_1, a_3) + Q_3 D_1(0; a_1) - F_7(0) [N_1 Q_3 - N_3 Q_1] \}, \quad (22,2,3)$$

$$b_3 = \frac{1}{\Delta} \{ Q_1 D_2(0; a_1, a_2) - Q_2 D_1(0; a_1) + F_7(0) [N_1 Q_2 - N_2 Q_1] \}, \quad (23,2,3)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ D_1(0; a_1) & D_2(0; a_1, a_2) & D_3(0; a_1, a_2, a_3) \end{vmatrix}. \quad (24,2,3)$$

После вычисления всех значений b_k по формулам (21,2,3), (22,2,3), (23,2,3) и подстановки их в общую формулу

$$-III'_{II}(x) \equiv F_7(x) = b_1 D_1(x; a_1) + b_2 D_2(x; a_1, a_2) + b_3 D_3(x; a_1, a_2, a_3) \quad (25,2,3)$$

можно, объединяя все члены при одинаковых экспонентах, получить следующее выражение:

$$-Ш'_{II}(x) = a_1(\nu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \left[e^{-\alpha_1 x} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} e^{-\alpha_2 x} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} e^{-\alpha_3 x} \right] + \\ + \frac{F_7(0)}{\alpha_3 - \alpha_2} (\alpha_3 e^{-\alpha_2 x} - \alpha_2 e^{-\alpha_3 x}), \quad (26,2,3)$$

где

$$a_1(\nu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\alpha_1 \left[\nu - \frac{F_7(0)}{\alpha_2 \alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \right]}{1 - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \frac{\alpha_1}{\alpha_3}}, \quad (27,2,3)$$

причем для ДЗР с положительным аргументом x следует брать $\nu=1$. ДЗР типа II представлен кривой 3 на рис. 4.

Построение ДЗР типа IIIa требует удовлетворения условия нормирования (3,1,3) и условия (12,1,3) обращения функции в нуль при $x=0$. Общий вид этого закона

$$-Ш'_{IIIa} \equiv F_3(x) = b_1 D_1(x; \alpha_1) + b_2 D_2(x; \alpha_1, \alpha_2). \quad (28,2,3)$$

Для определения констант b_k получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1 N_1 + b_2 N_2 &= 1 \\ b_1 D_1(0; \alpha_1) + b_2 D_2(0; \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29,2,3)$$

После произведения вычислений, находим

$$F_3(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2) \sqrt{2\alpha_1}} \left[D_1(x; \alpha_1) - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) \right] \quad (30,2,3)$$

или

$$-Ш'_{IIIa} = \frac{\alpha_1 \eta}{\eta - 1} [e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_1 \eta x}], \quad (31,2,3)$$

где $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 1$. График для ДЗР типа IIIa представлен на рис. 4 кривой 4. Она круто поднимается из начала координат и более полого опускается после достижения максимума. Построение ДЗР типа IIIб требует удовлетворения трех условий: (3,1,3), (12,1,3) и (13,1,3). Подстановка в них общей формулы

$$-Ш'_{IIIb} \equiv F_4(x) = b_1 D_1(x; \alpha_1) + b_2 D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) + b_3 D_3(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (32,2,3)$$

дает систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1 N_1 + b_2 N_2 + b_3 N_3 &= 1 \\ b_1 D_1(0; \alpha_1) + b_2 D_2(0; \alpha_1, \alpha_2) + b_3 D_3(0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 0 \\ b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_3 Q_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33,2,3)$$

которая является частным случаем $F_7(0)=0$ системы (20,2,3). Объединяя множители при одинаковых экспонентах, можно получить следующее общее выражение для ДЗР типа IIIб:

$$-Ш'_{IIIб} \equiv F_4(x) = \frac{1}{D} \left\{ (\alpha_3 - \alpha_2) e^{-\alpha_1 x} - (\alpha_3 - \alpha_1) e^{-\alpha_2 x} + (\alpha_2 - \alpha_1) e^{-\alpha_3 x} \right\}, \quad (34,2,3)$$

где

$$D = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1}. \quad (35,2,3)$$

При некоторых частных предположениях этот закон принимает более краткую форму, о чем будет говориться позже. График для него представлен кривой 5 на рис. 4.

Удобное для использования упрощение формулы (34,2,3) получается при условии, что

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \delta. \quad (36,2,3)$$

Тогда вместо выражения (34,2,3) получаем

$$F_{4,2}^{(\delta)}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{2} e^{-\alpha_1 x} \left[\frac{1 - e^{-\delta x}}{\delta} \right]^2. \quad (37,2,3)$$

Вводя обозначение

$$\left[\frac{1 - e^{-\delta x}}{\delta x} \right]^n = \varphi_n(\delta x), \quad (38,2,3)$$

можем выражение (37,2,3) переписать в виде

$$F_{4,2}^{(\delta)}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{2} e^{-\alpha_1 x} x^2 \varphi_2(\delta x). \quad (39,2,3)$$

Обобщая выражение (39,2,3) на случай произвольного номера n показателя степени, получаем совокупность ДЗР вида

$$F_{4,n}^{(\delta)}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}{n!} x^n e^{-\alpha_1 x} \varphi_n(\delta x). \quad (40,2,3)$$

В частности, при обработке максимальных за сутки скоростей ветра наилучшее приближение получаем, взяв показатели $n=3$, т. е. приняв ДЗР

$$F_{4,3}^{(\delta)}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{6} x^3 e^{-\alpha_1 x} \varphi_3(\delta x). \quad (41,2,3)$$

Функция $\varphi_n(\xi)$ обладает свойством обращаться в единицу при $\xi \rightarrow 0$ и монотонно убывать по мере роста ξ . Первое из указанных свойств обращает ДЗР (40,2,3) в гамма-распределение при $\delta \rightarrow 0$, а второе показывает, что множитель $\varphi_1(\xi)$ должен приводить к более быстрому убыванию плотности вероятности с ростом аргумента x и к сдвигу максимума к началу координат по сравнению с обычным гамма-распределением.

Тип IV с двумя модами может быть получен наложением двух ДЗР разного типа, например, Ia и IIIб. В этом случае можем положить

$$\begin{aligned} -III'_{IV}(x) &= A_1 F_1(x) + A_2 F_4(x) = \\ &= \left(A_1 \alpha_1 + A_2 \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{D} \right) e^{-\alpha_1 x} - A_2 \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{D} e^{-\alpha_2 x} + A_2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{D} e^{-\alpha_3 x}, \end{aligned} \quad (42,2,3)$$

где D дается формулой (35,2,3). Очевидно, при $x=0$ плотность вероятности убывает, так как $\left(\frac{\partial F_4}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$ и, следовательно,

$$-\left(\frac{\partial III'_{IV}}{\partial x} \right)_{x=0} = -A_1 \alpha_1^2. \quad (43,2,3)$$

При некотором значении $x=\check{x}$ будет достигнут минимум, когда

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial III'_{IV}}{\partial x} \right)_{x=\check{x}} &= -A_1 \alpha_1^2 e^{-\alpha_1 \check{x}} - \\ &A_2 \left[\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{D} \alpha_1 e^{-\alpha_1 \check{x}} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{D} \alpha_2 e^{-\alpha_2 \check{x}} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{D} \alpha_3 e^{-\alpha_3 \check{x}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (44,2,3)$$

где D дается формулой (35,2,3). Это следует из свойства функции $F_4(x)$ менять знак своей производной после достижения экстремума при $x=\hat{x}_4$. Благодаря этому до достижения точки $x=\hat{x}_4$ выражение в квадратных скобках формулы (44,2,3) будет отрицательно и, будучи умножено на надлежащим образом подобранную величину ($-A_2$), обеспечит выполнение равенства (44,2,3). После

точки $x=\check{x}$ производная $-\frac{\partial III'_{IV}}{\partial x}$ на некотором интервале делается положительной, функция $-III'_{IV}(x)$ стремится к своему максимуму при $x=\hat{x}$, который наступает ближе к началу координат, чем $x=\hat{x}_4$, так как там первая производная от выражения (42,2,3) снова делается отрицательной (в силу того, что $\left| \frac{\partial F_4(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_4} = 0$).

Построение ДЗР типа Va и Vб может быть осуществлено наложением двух унимодальных законов с весовыми коэффициентами A_1 и A_2 . В качестве конкретного примера приведем случай наложения двух гамма-распределений:

$$f(x; \alpha_k) = \alpha_k^2 x e^{-\alpha_k x} \quad (45,2,3)$$

со значениями $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 10$, полагая

$$-III'_{Va}(x) = A_1 f(x; \alpha_1) + A_2 f(x; \alpha_2), \quad (46,2,3)$$

где взято:

$$A_1 = \frac{k}{\alpha_1}; \quad A_2 = \frac{k}{\alpha_2}; \quad K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (47,2,3)$$

На рис. 5 воспроизведен ход кривых слагающих (1 и 2) и функции $\frac{f(x; 1)}{\alpha_1} + \frac{f(x; 10)}{\alpha_2} = -\frac{\Pi_{Va}}{k}$ (3). Из рис. 5 легко видеть на

суммарной кривой два максимума: острый при $x=0,1$ и пологий при $x=1$. Их соотношение могло бы быть изменено по высоте пиков соответствующим подбором множителей A_1 и A_2 при условии $A_1 + A_2 = 1$.

Комбинируя слагаемые ДЗР разного типа, можно варьировать форму кривых $-\Pi'_V(x)$ и получать типы Va и Vб.

Общие принципы подбора параметров и некоторые частные случаи будут рассмотрены отдельно. Они основаны на различных способах оценки точности аппроксимации подбираемых типов законов и соответствующих декрементов (см. п. 4.3—5.3).

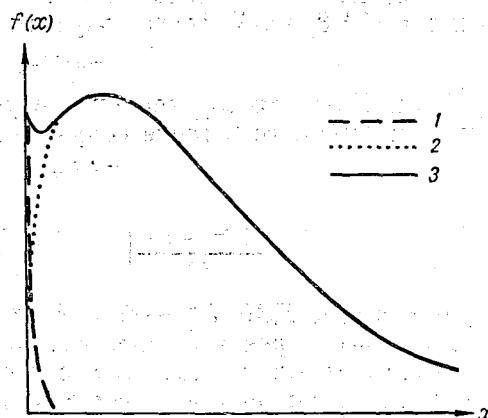


Рис. 5. Схема двугорбой кривой распределения при $0 < x < \infty$ типа V.

Кривые: 1 — $\frac{f(x, 1)}{\alpha_1}$, 2 — $\frac{f(x, 10)}{\alpha_2}$, 3 — ДЗР типа V.

3.3. Построение ДЗР с аргументами, изменяющимися от $-\infty$ до ∞

Ряд случайных величин (таких, как температура воздуха или подстилающей поверхности, атмосферное давление близ земной поверхности, которые никогда не достигают определенных пределов, например абсолютного нуля) удобнее аппроксимировать ДЗР с аргументами, меняющимися от $-\infty$ до ∞ . Как отмечалось ранее (см. п. 3.1), их аппроксимация может быть осуществлена путем разложения по функциям $D_m(x)$. Однако удобство оперирования экспоненциальными функциями заставляет рассмотреть также и методику, основанную на их использовании. При этом приходится всю область изменения аргумента делить на две части — с положительными и отрицательными аргументами, сопрягая ДЗР в начале координат. Очевидно, в точке сопряжения не должно быть скачка, т. е. справа и слева от нее как функция ДЗР, так и производная

от нее на бесконечно малом удалении будут иметь одно и то же значение.

Вообще говоря, за точку сопряжения можно брать формально начало координат, например нулевую температуру. Пусть число случаев с отрицательной температурой будет n^- , а с положительной n^+ . Общее число случаев равно

$$N = n^- + n^+. \quad (1,3,3)$$

Возьмем относительные числа v^- и v^+ , поделив обе части равенства (1,3,3) на N . Тогда получаем

$$1 = v^- + v^+. \quad (2,3,3)$$

Если ДЗР для случаев n^- и случаев n^+ соответственно будет $F^-(x)$ и $F^+(x)$, то в точке сопряжения имеют место соотношения:

$$F^-(0) = F^+(0) \quad (3,3,3)$$

и

$$\left. \frac{\partial F^-(-x)}{\partial x} \right|_{-x=0} = \left. \frac{\partial F^+(x)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (4,3,3)$$

В качестве ДЗР $F^-(-x)$ и $F^+(x)$ могут быть использованы любые из рассмотренных типов в п. 1.3 и 2.3 или разложения в ряд по функциям $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ с соответствующим знаком перед аргументом. Однако во многих случаях бывает выгоднее избегать расчетов производных (4,3,3) и обеспечивать их автоматическое сопряжение, беря за начало отсчета аргумента точку экстремума, в которой производная равна нулю как справа, так и слева.

Если мы хотим аппроксимировать унимодальный ДЗР с вершиной в точке $\hat{x}$, то примем в качестве аргумента

$$z = x - \hat{x} \quad (5,3,3)$$

и будем писать общий ДЗР в виде

$$-III'_\wedge(x) = \begin{cases} v^- F_2(-z) & \text{при } x < \hat{x} \\ v^+ F_2(z) & \text{при } x > \hat{x} \end{cases} \quad (6,3,3)$$

где параметры α_1 и α_2 в отрицательной и положительной областях могут быть различными, если ДЗР несимметричен относительно точки $\hat{x}$. В случае симметричного ДЗР имеют место равенства $\alpha_1^- = \alpha_1^+$ и $\alpha_2^- = \alpha_2^+$.

На рис. 6 приведен пример слабо несимметричного ДЗР с одной вершиной (кривая 1), полученный по формуле (6,3,3) для случая $\alpha_1^+ = 1,00$, $\alpha_1^- = 1,00$, $\alpha_2^+ = 1,01$, $\alpha_2^- = 1,02$ с учетом равенства (3,3,3) [12].

Для построения бимодальных кривых с аргументом от $-\infty$ до ∞ можно произвести сопряжение в точке антимоды (минимума, расположенного между двумя максимумами), которую обозначим

$x = \check{x}$, двух законов типа $-\Pi'_{\Pi}(x)$, или соответственно $F_7^+(x)$ и $F_7^-(-x)$. Положим, что

$$-\Pi'_{\wedge \wedge}(s) = \begin{cases} F_7^+(s) & \text{при } x > \check{x}; \\ F_7^-(-s) & \text{при } x < \check{x}, \end{cases} \quad (7,3,3)$$

где $s = x - \check{x}$.

В качестве примера кривая 2 на рис. 6 показывает характер изменения функции $-\Pi'_{\wedge \wedge}(x)$ для частного случая слегка несим-

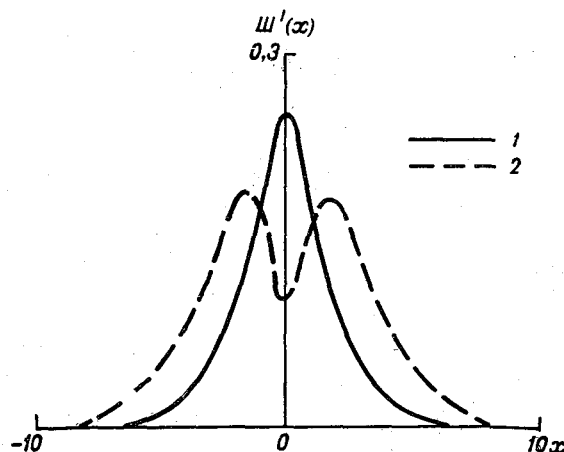


Рис. 6. Пример кривых для ДЗР с аргументами от $-\infty$ до ∞ :

$$1 - \Pi'_{\wedge}(x), \quad 2 - \Pi'_{\wedge \wedge}(x).$$

метричной двугорбой кривой, полученной при значениях: $\alpha_1^- = \alpha_1^+ = 1$, $\alpha_2^+ = 1,01$, $\alpha_2^- = 1,02$, $\alpha_3^+ = 1,02$, $\alpha_3^- = 1,04$. Величина минимума и расстояние между максимумами могут существенно меняться в зависимости от изменения выбранных параметров, вплоть до разделения максимумов или слияния их в одну плоскую вершину.

4.3. Приближенные методы оценок параметров ДЗР

Рассмотрим те из приближенных методов, которые могут быть использованы для грубых оценок декрементов α_n на основе применения графических или других приемов, вносящих зачастую субъективную ошибку, но не требующих обязательного использования ЭВМ или громоздких ручных расчетов. Такие приемы представляют интерес для многих специалистов, производящих предварительные или единичные расчеты без использования ЭВМ. Чаще всего при обработке материалов гидрометеорологических и других

наблюдений для характеристики ДЗР наблюдавшихся случайных величин используются моменты различного порядка. Это могут быть начальные моменты, которые для температуры имеют вид

$$m_k = \int_0^{\infty} T^k f(T) dT \quad (1,4,3)$$

или центральные моменты

$$\mu_k = \int_0^{\infty} (T - \bar{T})^k f(T) dT, \quad (2,4,3)$$

где в первом случае момент порядка k вычисляется относительно начала координат ($T=0$), а во втором — относительно средней величины ($T=\bar{T}$), определяемой по ДЗР $f(T)$ следующим образом:

$$\bar{T} = m_1 = \int_0^{\infty} T f(T) dT, \quad (3,4,3)$$

если переменная T имеет только положительные значения. В случае возможности отрицательных значений интегрирование в формулах (1,4,3), (2,4,3), (3,4,3) должно производиться от $-\infty$ до ∞ . Подставляя в выражения для моментов вместо ДЗР $f(x)$ соответствующее выражение из пп. 1.3—3.3, можно после интегрирования получить некоторую функцию от неизвестных параметров α_k . Если таких параметров будет n , то, написав n уравнений для первых n моментов, получим замкнутую систему для определения всех α_k по предварительно вычисленным на основании данных наблюдений моментам.

Вычисление общего вида зависимостей для моментов может производиться как непосредственно подстановкой в формулы (1,4,3) или (2,4,3) вместо плотности вероятности соответствующих типов ДЗР, так и путем использования характеристической функции [24]. Если ДЗР можно представить в виде ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\alpha_k x}, \quad (4,4,3)$$

то в соответствии с общим определением характеристической функции $g(\lambda)$ можно написать

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx, \quad (5,4,3)$$

что в случае $f(x)=0$ при $x<0$ и при учете формулы (4,4,3) дает

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} a_k e^{(i\lambda - \alpha_k)x} dx = - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{i\lambda - \alpha_k}. \quad (6,4,3)$$

Начальный момент m_k связан с характеристической функцией соотношением

$$m_k = i^{-k} \frac{\partial^k g(\lambda)}{\partial \lambda^k} \Big|_{\lambda=0} \quad (7,4,3)$$

Это полезное для практического применения свойство следует из определения (5,4,3) характеристической функции. Действительно, дифференцируя по λ обе части выражения (5,4,3), получаем

$$\frac{\partial^k g(\lambda)}{\partial \lambda^k} = (i)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} x^k f(x) dx.$$

Положим здесь $\lambda=0$ и получим

$$\frac{\partial^k g(\lambda)}{\partial \lambda^k} \Big|_{\lambda=0} = (i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx,$$

где интеграл в правой части дает момент m_k для случая аргумента, который может принимать все значения на действительной оси от $-\infty$ до ∞ . При плотности вероятности, обращающейся в нуль для отрицательных значений аргумента, интеграл переходит в формулу (1,4,3). Выражая соответствующий момент в явном виде, получаем формулу (7,4,3). Подстановка выражения (6,4,3) в (7,4,3) дает для начального момента формулу

$$m_k = -i^{-k} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \sum_{p=1}^n \frac{a_p}{i\lambda - \alpha_p} \Big|_{\lambda \rightarrow 0} = k! \sum_{p=1}^n \frac{a_p}{\alpha_p^{k+1}}. \quad (8,4,3)$$

Применим формулу (8,4,3) к закону типа Ia, для которого, согласно формуле (10,2,3), $a_1 = \alpha_1$ и $a_k = 0$ (при $k > 1$). На основе выражения (8,4,3) сразу получаем для ДЗР $-\text{III}'_{\text{Ia}}(x)$ следующие моменты:

$$m_0 = 1, \quad m_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad m_2 = \frac{2}{\alpha_1^2}, \quad \dots, \quad m_k = \frac{k!}{\alpha_1^k}. \quad (9,4,3)$$

Тот же результат получается, если воспользоваться более громоздкими вычислениями с учетом известных формул вида

$$\int x^n e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} x^n e^{-ax} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{-ax} dx. \quad (10,4,3)$$

Для ДЗР $-\text{III}'_{\text{Ib}}(x)$ аналогичным образом имеем:

$$m_0 = 1; \quad (11a,4,3)$$

$$m_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \right); \quad (11б,4,3)$$

$$m_2 = 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^3} \right); \quad (11в,4,3)$$

$$\dots \dots \dots m_k = k! \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{k+1}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^{k+1}} \right). \quad (11г,4,3)$$

Подобным способом могут быть найдены выражения для начальных моментов любого порядка произвольной функции рассматриваемых типов. Например, для ДЗР типа II имеем общее выражение начального момента k -того порядка

$$m_k = k! a_1 (\nu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \left(\frac{1}{\alpha_1^{k+1}} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \frac{1}{\alpha_2^{k+1}} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3^{k+1}} \right) + k! \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2^{k+1}} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3^{k+1}} \right) \frac{F_7(0)}{\alpha_3 - \alpha_2}. \quad (12,4,3)$$

Для ДЗР типа IIIа находим

$$m_k = k! \frac{\alpha_1 \eta}{\eta - 1} \left(\frac{1}{\alpha_1^{k+1}} - \frac{1}{\alpha_2^{k+1}} \right). \quad (13,4,3)$$

ДЗР типа IIIб имеет начальные моменты вида

$$m_k = \frac{k!}{D} \left(\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1^{k+1}} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2^{k+1}} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3^{k+1}} \right). \quad (14,4,3)$$

$$\text{где } D = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1}.$$

Бимодальные законы распределения типов IV, V и т. п., получаемые как комбинации более простых законов, имеют начальные моменты, являющиеся аналогичными линейными комбинациями моментов для составляющих законов. Если начальные моменты m_k найдены, то центральные моменты μ_k определяются по известным классическим формулам

$$\mu_k = \sum_{p=0}^k (-1)^{k-p} C_k^p m_p m_1^{k-p}, \quad (15,4,3)$$

где

$$C_k^p = \frac{k!}{p! (k-p)!}. \quad (16,4,3)$$

Кроме того, они могут быть вычислены с помощью характеристической функции по формулам

$$\mu_k = i^{-k} \left[\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{-i\lambda \bar{x}} g(\lambda) \right]_{\lambda=0}. \quad (17,4,3)$$

Если воспользоваться формулой Лейбница для производной произведения и переписать выражение (17,4,3) в виде

$$\mu_k = i^{-k} \sum_{p=0}^k C_k^p [D^p e^{-i\lambda \bar{x}} D^{k-p} g(\lambda)]_{\lambda=0}, \quad (18,4,3)$$

то, учитывая, что

$$[D^p e^{-i\lambda \bar{x}}]_{\lambda=0} = (-i\bar{x})^p \quad (19,4,3)$$

и

$$[D^{k-p}g(\lambda)]_{\lambda=0} = \sum_{r=1}^n \frac{i^{k-p}(k-p)!}{\alpha_r^{k-p+1}} a_r, \quad (20,4,3)$$

можно найти

$$\mu_k = \sum_{p=0}^k C_k^p \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^p x_r^p (k-p)! a_r}{\alpha_r^{k-p+1}}. \quad (21,4,3)$$

Применяя формулы (7,4,3) и (21,4,3) для вычисления моментов, можно получить, как это отмечалось ранее, замкнутую систему уравнений. Возьмем для примера ДЗР

$$F_3(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x}), \quad (22,4,3)$$

который содержит два неизвестных: α_1 и α_2 . Находим выражения для двух моментов:

$$m_1 \equiv \bar{x} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2}; \quad (23,4,3)$$

$$\mu_2 \equiv \sigma^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2}, \quad (24,4,3)$$

где значение величин в левой части известно из экспериментальных данных, так как

$$m_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k; \quad (25,4,3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - m_1)^2 \quad (26,4,3)$$

Из уравнений (23,4,3) и (24,4,3) легко найти α_1 и α_2 , так как, получив сначала разность

$$m_1^2 - \mu_2 = \frac{2}{\alpha_1 \alpha_2}, \quad (27,4,3)$$

можно выразить одну неизвестную α_2 через вторую α_1 ;

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{2}{m_1^2 - \mu_2}. \quad (28,4,3)$$

Подставляя выражение (28,4,3) в (24,4,3), приходим к квадратному уравнению относительно α_1

$$\alpha_1^2 - \frac{2m_1}{m_1^2 - \mu_2} \alpha_1 + \frac{2}{m_1^2 - \mu_2} = 0. \quad (29,4,3)$$

Отсюда находим

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m_1^2 - \sigma^2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{2\sigma^2}{m_1^2} - 1} \right], \quad (30a,4,3)$$

а подстановка выражения (30а,4,3) в (28,4,3) дает

$$\alpha_2 = \frac{2}{m_1 \left[1 \pm \sqrt{\frac{2\sigma^2}{m_1^2} - 1} \right]}. \quad (31а,4,3)$$

Знаки «+» или «-» выбираются таким образом, чтобы второй декремент α_2 получился больше, чем α_1 , причем оба декремента должны быть положительными и действительными. В противном случае статистическая совокупность не удовлетворяет данному ДЗР $F_3(x)$. В частности, положим, что $\frac{2\sigma^2}{m_1^2} - 1 = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$.

Тогда, очевидно, что следует брать

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m_1^2 - \sigma^2} \left(1 - \sqrt{\frac{2\sigma^2}{m_1^2} - 1} \right) \approx \frac{1}{m_1} \quad (30б,4,3)$$

и

$$\alpha_2 = \frac{2}{m_1 \left[1 - \sqrt{\frac{2\sigma^2}{m_1^2} - 1} \right]} \approx \frac{4}{\varepsilon m_1}. \quad (31б,4,3)$$

Подобным способом можно в принципе для любого типа ДЗР подбирать параметры α_k по известным эмпирическим моментам. Как известно, для ДЗР типа Ia определение α_1 сводится к нахождению обратной величины от первого начального момента, т. е. к выражению

$$\alpha_1 = \frac{1}{m_1} = \frac{1}{x} \quad (32,4,3)$$

что следует также из формул (9,4,3). Для других законов получаются более или менее сложные соотношения.

Рассмотрим в качестве следующего примера ДЗР типа Ib, для которого, согласно выражениям (11а) и (11б,4,3), можно написать:

$$m_1 = \bar{x} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} \right) = \frac{\alpha_2^2 + \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_1^2}{(\alpha_2 + \alpha_1) \alpha_1 \alpha_2}; \quad (33,4,3)$$

$$m_2 = \frac{2(\alpha_2^2 + \alpha_1^2)}{\alpha_1^2 \alpha_2^2}. \quad (34,4,3)$$

Перепишем их в виде:

$$m_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2 + \alpha_1}; \quad (35,4,3)$$

$$m_2 = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_1)^2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} - \frac{4}{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (36,4,3)$$

Если ввести вспомогательные переменные:

$$\alpha_2 + \alpha_1 = \xi; \quad \alpha_1 \alpha_2 = \eta, \quad (37,4,3)$$

то уравнения (35,4,3) и (36,4,3) сводятся к системе двух более простых уравнений с неизвестными ξ и η :

$$(m_2 - 2m_1^2)\xi^2 + 2 = 0; \quad (38,4,3)$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{m_1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2}. \quad (39,4,3)$$

Из выражения (38,4,3) легко находится

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{m_2 - 2m_1^2}}, \quad (40,4,3)$$

что имеет смысл при $m_2 > 2m_1^2$. Подстановка значения ξ , вычисленного по формуле (40,4,3), в (39,4,3) определяет величину η ; после чего не составляет труда по формулам (37,4,3) определить α_1 и α_2 для ДЗР типа Iб (для $F_2(x)$).

Однако следует обратить внимание на то, что чем выше номер момента, тем менее надежно он определяется в силу того, что маловероятные события с большим аргументом, случайно возникая при удлинении ряда, могут существенно изменить величину таких моментов. Рассмотрим следующий пример, по данным Л. П. Упоровой [10], которая для абсолютной влажности в Москве взяла умышленно короткий период, с декабря 1964 г. по февраль 1965 г., подсчитала среднюю величину $\bar{x}_3 = 2,8118$ и дисперсию $\sigma_3^2 = \mu_2 = 2,3376$. Воспроизведенное число значащих цифр здесь дано условно, что будет понятно из дальнейшего изложения. По экстремным точкам были подобраны параметры, оказавшиеся равными $\alpha_1 = 0,56$, $\alpha_2 = 0,80$, $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1,42$. (о подборе параметров

по экстремным точкам будет говориться позже). Поскольку ряд данных обрывался и имел наибольшую градацию 8,00—8,99 г/м³, то, найдя параметры ДЗР, было естественно уточнить первый начальный и второй центральный моменты, т. е. среднюю и дисперсию. Для этого было необходимо ввести поправки на неучтенные значения аргумента $x > x_{\max}$ к средней

$$\Delta \bar{x} = \int_{x_{\max}}^{\infty} x F_3(x) dx \quad (41,4,3)$$

и к дисперсии

$$\Delta \sigma^2 = \int_{x_{\max}}^{\infty} (x - \bar{x})^2 F_3(x) dx. \quad (42,4,3)$$

Оказалось, что исправленная средняя выросла на 10%, а дисперсия почти в два раза. Теоретические их значения $\bar{x} = 3,0368$, $\sigma_T^2 = 4,7514$. Сравнение теоретических и практических значений показывает, что даже одна значащая цифра для дисперсии была бы

сомнительна. В связи с этим следует осторожно подходить к подбору параметров по эмпирическим моментам второго и более высокого порядка и для грубых приближений отдавать предпочтение методу особых точек или минимизации ошибок. Кроме того, приведенный пример заставляет считать целесообразным после определения параметров ДЗР уточнять найденные эмпирические значения моментов, вводя поправки на значения аргументов, превышающие крайнюю градацию. Для этого могут использоваться формулы типа (41,4,3) и (42,4,3) или должны быть получены специальные выражения. Способ получения таких выражений покажем на ДЗР типа Ia, который был получен, в частности в [18], для загрязнения городского воздуха пылью или сажей. В этом случае истинная средняя $\bar{S}$ и дисперсия σ^2 должны подсчитываться по формулам:

$$\bar{S} = \int_0^{\infty} S \alpha e^{-\alpha S} dS = \frac{1}{\alpha}; \quad (43,4,3)$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (S - \bar{S})^2 \alpha e^{-\alpha S} dS = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (44,4,3)$$

Вместо этого практические подсчеты производят до некоторой предельной концентрации $S = nh$, где h — ширина градации. Если внутри каждого интервала не применяют формулу прямоугольников, трапеций или парабол, а используют «истинный» ДЗР, то практически подсчет средней ведут по формуле

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{пр}} &= \frac{\alpha h}{2} \int_0^h e^{-\alpha S} dS + \frac{3\alpha h}{2} \int_h^{2h} e^{-\alpha S} dS + \dots + \frac{2n-1}{2} \alpha h \int_{(n-1)h}^{nh} e^{-\alpha S} dS = \\ &= \frac{h}{2} - h(e^{-\alpha h} + e^{-2\alpha h} + e^{-3\alpha h} + \dots + e^{-n\alpha h}) = \\ &= \frac{h}{2} - h \frac{e^{-\alpha h} - e^{-n\alpha h}}{1 - e^{-\alpha h}}. \end{aligned} \quad (45,4,3)$$

Практический расчет дисперсии ведется по схеме

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{пр}}^2 &= \alpha \left(\frac{h}{2} - \bar{S} \right)^2 \int_0^h e^{-\alpha S} dS + \alpha \left(\frac{3h}{2} - \bar{S} \right)^2 \int_h^{2h} e^{-\alpha S} dS + \dots = \\ &= \left(\frac{h}{2} - \bar{S} \right)^2 + 2h[(h - \bar{S})e^{-\alpha h} + (2h - \bar{S})e^{-2\alpha h} + \dots \\ &\dots + (nh - \bar{S})e^{-n\alpha h}] = \left(\frac{h}{2} - \bar{S} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{2h(e^{-\alpha h} - e^{-n\alpha h})}{(1 - e^{-\alpha h})} - \\ &\quad - \bar{S} \frac{2h(e^{-\alpha h} - e^{-n\alpha h})}{1 - e^{-\alpha h}}. \end{aligned} \quad (46,4,3)$$

Если число членов было бы неограниченным, т. е. $n \rightarrow \infty$, то мы имели бы более точное выражение для средней

$$\bar{S}_{\text{пр}, \infty} = \frac{h}{2} - h \frac{e^{-ah}}{1 - e^{-ah}} \quad (47,4,3)$$

и для дисперсии

$$\sigma_{\text{пр}, \infty}^2 = \left(\frac{h}{2} - \bar{S} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{2he^{-ah}}{1 - e^{-ah}} - \bar{S} \frac{2he^{-ah}}{1 - e^{-ah}}. \quad (48,4,3)$$

Сравнивая выражения (45,4,3) и (46,4,3) с (47,4,3) и (48,4,3), соответственно находим поправки на отброшенные градации:

$$\Delta \bar{S}_{\text{пр}} = \bar{S}_{\text{пр}} - \bar{S}_{\text{пр}, \infty} = \frac{he^{-anh}}{1 - e^{-ah}} \quad (49,4,3)$$

и

$$\Delta \sigma_{\text{пр}}^2 = \sigma_{\text{пр}}^2 - \sigma_{\text{пр}, \infty}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial a} + \bar{S} \right) \frac{2he^{-anh}}{(1 - e^{-ah})}. \quad (50,4,3)$$

Из этих формул следует очевидный вывод о том, что чем меньше взятое число членов при той же величине градации, тем большей получается поправка.

Соотношения (49,4,3) и (50,4,3) могут быть использованы для получения общего вида поправок для средней и дисперсии ДЗР вида (4,4,3), связанных с отбрасыванием градаций с большими аргументами. Очевидно, погрешности будут равны:

$$\Delta \bar{S}_{\text{пр}} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\alpha_k} \frac{he^{-\alpha_k nh}}{1 - e^{-\alpha_k h}}; \quad (51,4,3)$$

$$\Delta \sigma_{\text{пр}}^2 = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\alpha_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \bar{S} \right) \frac{2he^{-\alpha_k nh}}{(1 - e^{-\alpha_k h})}. \quad (52,4,3)$$

В силу отмеченных недостатков метода подбора параметров по моментам часто оказывается более выгодным использовать метод особых точек, таких как экстремумы, точки перегиба, или точки на кривых распределения, имеющие ординату (плотность вероятности), равную половине модального значения. Обычно в районе указанных точек имеется много экспериментальных данных и, следовательно, удлинение ряда не должно вызывать такого резкого их смещения, какое может происходить, например, с абсолютным максимумом или минимумом, дающим заметный вклад в величину моментов высоких номеров.

Покажем применение метода особых точек для приближенного определения параметров функций $F_1(x) (-III'_{1a})$; $F_2(x) (-III'_{16})$; $F_3(x) (-III'_{11a})$; $F_4(x) (-III'_{116})$; $F_7(x) (-III_{II}(x))$. Будем обозначать соответственно:

плотность вероятности в начале координат

$$F_k(0), \quad (53,4,3)$$

плотность вероятности в модальной точке

$$F_k(\hat{x}) \equiv \hat{F}_k, \quad (54,4,3)$$

а ее абсциссу

$$x = \hat{x}, \quad (55,4,3)$$

абсциссу точки перегиба

$$x = \tilde{x} \quad (56,4,3)$$

и значение плотности вероятности в ней

$$F_k(\tilde{x}) \equiv \tilde{F}_k, \quad (57,4,3)$$

значение аргумента x в точке с ординатой, равной половине от модальной

$$x = x_{\frac{1}{2}}. \quad (58,4,3)$$

Тогда для ДЗР типа Ia из условий

$$F_1(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} F_1(0) = \alpha e^{-\alpha x_{\frac{1}{2}}} \text{ и } F_1(0) = \alpha, \quad (59,4,3)$$

находим

$$\alpha = \frac{\ln 2}{x_{\frac{1}{2}}}. \quad (60,4,3)$$

Для ДЗР типа Ib можно воспользоваться двумя процедурами счета:

а) исходя из условий

при $x = \tilde{x}$

$$\frac{\partial^2 F_2(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (61,4,3)$$

и при $x = 0$

$$F_2(0) = z_0, \quad (62,4,3)$$

можно построить два трансцендентных уравнения:

$$\alpha_1 = \frac{1 + \eta}{\eta} F_2(0) \quad (63,4,3)$$

и

$$\alpha_1 = \frac{\ln \eta}{\tilde{x}(\eta - 1)}, \quad (64,4,3)$$

где $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Из уравнений (63,4,3) и (64,4,3) можно графическим методом и методом ложных положений определить обе неизвестные α_1 и η , а затем вычислить α_2 ;

б) предположить малость разности

$$\varepsilon = \alpha_2 - \alpha_1 \ll 1 \quad (65,4,3)$$

и, следовательно,

$$e^{-\alpha_2 x} = e^{-\alpha_1 x} e^{-\varepsilon x} \approx e^{-\alpha_1 x} \left[1 - \varepsilon x + \frac{1}{2} (\varepsilon x)^2 \right], \quad (66,4,3)$$

а также воспользоваться условием

$$F_2\left(x \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} F_2(0), \quad (67,4,3)$$

которое приводит к трансцендентному уравнению

$$2 \left(1 + \alpha_1 x \frac{1}{2} \right) = e^{\alpha_1 x \frac{1}{2}}. \quad (68,4,3)$$

Приближенное решение уравнения (68,4,3) дает

$$\alpha_1 \approx \frac{1,65}{x \frac{1}{2}}. \quad (69,4,3)$$

Условие (66,4,3) позволяет из выражения (18,2,3) получить

$$\varepsilon = \alpha_1 \frac{\alpha_1 - 2F_2(0)}{F_2(0) - \alpha_1}, \quad (70,4,3)$$

подстановка в которое значения α_1 из (69,4,3) позволяет найти

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varepsilon. \quad (71,4,3)$$

ДЗР типа Iб был обобщен при попытке применить его к описанию спектра длительности турбулентных пульсаций температуры [15], так как не давал нужной точности аппроксимации.

После нормирования на 1 было использовано следующее выражение:

$$F_{2, \gamma^-}(x) \equiv -\mathcal{H}'_{1\gamma^-}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \gamma^-} (e^{-\alpha_1 x} - \gamma^- e^{-\alpha_2 x}) \quad (72,4,3)$$

и равноценное ему

$$F_{2, \gamma^+}(x) \equiv -\mathcal{H}'_{1\gamma^+}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_1 \gamma^+} (e^{-\alpha_1 x} + \gamma^+ e^{-\alpha_2 x}). \quad (73,4,3)$$

В формуле (72,4,3) $0 < \gamma^- < 1$, а в формуле (73,4,3) $\gamma^+ > 1$. Формально оба выражения переходят одно в другое и имеют общий алгоритм приближенной оценки, который не использует особых точек и будет описан позже.

то выражение (83,4,3) с учетом (84,4,3) и (85,4,3) дает следующее уравнение четвертой степени для определения μ , а следовательно, и δ по известному значению ν соответственно α_1 :

$$\mu^4 - \mu^2(2 + \nu) + \mu 2\nu + (1 - \nu) = 0, \quad (88,4,3)$$

которое имеет 4 корня:

$$\mu_{1,2} = 1, \quad \mu_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1 - (1 - \nu)}. \quad (89,4,3)$$

Из них практический интерес представляет корень

$$\mu_4 = -1 + \sqrt{\nu}, \quad (90,4,3)$$

который ограничен значениями $0 < \mu < 1$ при $1 < \nu < 4$, а отрицательный корень и константа, не зависящая от ν , должны быть отброшены. Следовательно, δ связано с α_1 соотношением

$$\delta = -\frac{1}{\hat{x}} \ln \left(\sqrt{\frac{z_2}{\hat{F}_4}} e^{\alpha_1 \hat{x}} - 1 \right). \quad (91,4,3)$$

ДЗР $F_4(x)$ можно рассматривать как частный случай ДЗР $F_7(x)$, получаемый при условии, что $F_7(0) = 0$.

Для ДЗР $F_7(x) = -\Pi'_\Pi(x)$ полагаем:

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \varepsilon, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \varepsilon, \quad (92,4,3)$$

где $\varepsilon \ll \alpha_1$, и используем разложение (66,4,3). Тогда по известным условиям в месте максимума $F_7(\hat{x}) = \hat{F}_7$ и в начале координат $F_7(0) = \check{F}_7$ можно найти

$$\alpha_1 \approx \left(\frac{1}{\hat{x}} + \check{F}_7 \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\hat{x}} + \check{F}_7 \right)^2 - \frac{6\check{F}_7}{\hat{x}}} \quad (93,4,3)$$

и

$$\varepsilon = \frac{-3\alpha_1 \hat{x}^2 \left(\frac{1}{2} \alpha_1 - \hat{F}_7 \right) + \sqrt{9\alpha_1^2 \hat{x}^4 \left(\frac{1}{2} \alpha_1 - \hat{F}_7 \right)^2 - 4 \left(\alpha_1 - \check{F}_7 \right) \hat{x}^2} \times \dots}{2 \left(\alpha_1 - \check{F}_7 \right) \hat{x}^2} \times \dots$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \alpha_1^3 \hat{x}^2 + \hat{F}_7 \left(1 + \alpha_1 \hat{x} - \alpha_1 \hat{x}^2 \right) - \hat{F}_7 e^{\alpha_1 \hat{x}} \right] \quad (94,4,3)$$

Заканчивая описание методов подбора параметров с использованием особых точек, следует сделать одно общее замечание. При определении положения особых точек приходится опираться на график или таблицу распределения по грациям. Оценка места максимума может быть сделана со сравнительно небольшой точностью. Соответственно точность основанных на этом расчетов не может быть высокой. Тем не менее для многих практических целей получаемые при этом приближения оказываются удовлетвори-

тельными, как это можно будет увидеть на отдельных примерах гидрометеорологических задач в настоящей главе.

Остановимся на некоторых методах определения параметров, использующих графические представления результатов экспериментов и их статистическую обработку с применением метода наименьших квадратов и некоторых других приемов. При этом может быть достигнута несколько большая объективность, чем при определении особых точек.

В качестве первого примера рассмотрим обобщенную функцию

$$F_{2\gamma^+} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_1 \gamma^+} (e^{-\alpha_1 x} + \gamma^+ e^{-\alpha_2 x}), \quad (95,4,3)$$

где γ^+ велико по сравнению с единицей. Как уже отмечалось, эта функция позволяет описать ДЗР длительностей турбулентных пульсаций температуры в приземном слое атмосферы.

Поставим перед собой задачу найти разложение логарифма от выражения (95,4,3) в ряд вида

$$\ln F_{2\gamma^+} \equiv y = C_0^+ - C_1^+ x + C_2^+ x^2. \quad (96,4,3)$$

По эмпирическим материалам $y_1, y_2, \dots, y_N$ можно с достаточной объективностью вычислить стоящие справа константы C_0^+, C_1^+, C_2^+ . Для этого достаточно решить систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^N y_k &= N C_0^+ - C_1^+ \sum_1^N x_k + C_2^+ \sum_1^N x_k^2 \\ \sum_1^N x_k y_k &= C_0^+ \sum_1^N x_k - C_1^+ \sum_1^N x_k^2 + C_2^+ \sum_1^N x_k^3 \\ \sum_1^N x_k^2 y_k &= C_0^+ \sum_1^N x_k^2 - C_1^+ \sum_1^N x_k^3 + C_2^+ \sum_1^N x_k^4 \end{aligned} \right\} \quad (97,4,3)$$

где x_k — значения аргумента для середины градации, в нашем случае длительности флюктуации температуры, а y_k — логарифм относительной частоты появления события в данной градации.

Для получения связи между константами C_2^+ и определяемыми параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ и соответственно $\alpha_2 - \alpha_1 = \delta$ прологарифмируем сначала обе части формулы (95,4,3), а затем будем разлагать полученные выражения в степенной ряд. В начале имеем

$$\ln F_{2, \gamma^+} \equiv y = \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2 \gamma^+}{\alpha_2 + \alpha_1 \gamma^+} - \alpha_2 x + \ln \left(\frac{1}{\gamma^+} e^{\delta x} + 1 \right). \quad (98,4,3)$$

Разлагая далее последний член правой части в ряд, получаем сумму знакопеременных членов вида $\pm \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\gamma} e^{\delta x} \right)^n$, которые в свою

очередь разлагаются в ряды по степеням $\frac{(m\delta x)^n}{n!}$ и группируются в соответствии с общим множителем $(\delta x)^n$. Тогда легко получаем промежуточное выражение

$$y = \ln \frac{a_1 a_2 \gamma^+}{a_2 + a_1 \gamma^+} - \alpha_2 x + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{1}{\gamma^+} \right)^k + \right. \\ \left. + \delta x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(\gamma^+)^k} + \frac{\delta^2 x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \left(\frac{1}{\gamma^+} \right)^k + \dots \right\}. \quad (99,4,3)$$

Первые две суммы в фигурных скобках хорошо известны и сходятся при $\frac{1}{\gamma^+} = \beta < 1$, соответственно, к значениям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \beta^k = \ln(1 + \beta); \quad (100,4,3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \beta^k = \frac{\beta}{1 + \beta}. \quad (101,4,3)$$

Третью сумму можно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \beta^k = (\beta - \beta^2 + \beta^3 - \beta^4 + \dots) + (-\beta^2 + \beta^3 - \beta^4 + \beta^5 - \dots) + \\ + (\beta^3 - \beta^4 + \beta^5 - \beta^6 + \dots) + \dots = \frac{\beta}{1 + \beta} - \frac{\beta^2}{1 + \beta} + \frac{\beta^3}{1 + \beta} - \dots = \\ = \frac{\beta}{(1 + \beta)^2}. \quad (102,4,3)$$

Подставляя зависимости (100,4,3), (101,4,3), (102,4,3) в выражение (99,4,3), находим

$$\ln F_{2, \gamma^+} = \ln \frac{a_1 a_2 (\gamma^+ + 1)}{a_2 + a_1 \gamma^+} - \left(\alpha_2 - \frac{\delta}{\gamma^+ + 1} \right) x + \left(\frac{\delta}{\gamma^+ + 1} \right)^2 \gamma^+ \frac{x^2}{2} + \dots \quad (103,4,3)$$

Сравнение формул (103,4,3) и (96,4,3) дает:

$$C_0^+ = \ln \frac{a_1 a_2 (\gamma^+ + 1)}{a_2 + a_1 \gamma^+}; \quad (104,4,3)$$

$$C_1^+ = \alpha_2 - \frac{\delta}{1 + \gamma^+}, \text{ или } C_1^+ = \alpha_1 + \frac{\delta \gamma^+}{\gamma^+ + 1}; \quad (105,4,3)$$

$$C_2^+ = \frac{\delta^2 \gamma^+}{2 (\gamma^+ + 1)^2}. \quad (106,4,3)$$

Интересно отметить, что аналогичные выражения получаются и для функции

$$F_{2, \gamma^-} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \gamma^-} (e^{-\alpha_1 x} - \gamma^- e^{-\alpha_2 x}), \quad (107,4,3)$$

где $\gamma^- < 1$.

Действительно, при $\gamma^- < 1$ выражение (107,4,3) преобразуется к виду, аналогичному (98,4,3)

$$y = \ln F_{2, \gamma^-} = \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \gamma^-} - \alpha_1 x + \ln(1 - \gamma^- e^{-\delta x}). \quad (98^*,4,3)$$

Натуральный логарифм разности в предположении, что $\gamma^- e^{-\delta x} < 1$, разлагается в ряд, где экспоненты в свою очередь разлагаются в ряды по степеням δx . После этого производится собирание вместе всех слагаемых, имеющих общий множитель $(\delta x)^n$, причем степени $n > 2$ отбрасываются. В результате можно получить промежуточное уравнение, аналогичное (99,4,3):

$$y = \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \gamma^-} - \alpha_1 x - \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\gamma^-)^k - \delta x \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma^-)^k + \right. \\ \left. + \frac{\delta^2 x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k (\gamma^-)^k - \dots \right\}. \quad (99^*,4,3)$$

Хотя последнее выражение похоже на (99,4,3), однако оно отличается от него знакопеременностью членов и заменой декремента α_2 на α_1 во втором члене правой части. Все эти бесконечные суммы в фигурных скобках легко вычисляются, получаем

$$y = \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \gamma^-} - \alpha_1 x - \left\{ -\ln(1 - \gamma^-) - \delta x \frac{\gamma^-}{1 - \gamma^-} + \right. \\ \left. + \frac{\delta^2 x^2}{2} \frac{\gamma^-}{(1 - \gamma^-)^2} - \dots \right\}$$

или окончательно находим

$$\ln F_{2, \gamma^-} = \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2 (1 - \gamma^-)}{\alpha_2 - \alpha_1 \gamma^-} - \left(\alpha_1 - \frac{\delta \gamma^-}{1 - \gamma^-} \right) x - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \gamma^-}{(1 - \gamma^-)^2} x^2 \dots \quad (108,4,3)$$

Представляя выражение (108,4,3) в виде

$$y = C_0^- - C_1^- x - C_2^- x^2, \quad (109,4,3)$$

имеем:

$$C_0^- = \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2 (1 - \gamma^-)}{\alpha_2 - \alpha_1 \gamma^-}; \quad (110,4,3)$$

$$C_1^- = \alpha_1 - \frac{\delta \gamma^-}{1 - \gamma^-}; \quad (111,4,3)$$

$$C_2^- = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \gamma^-}{(1 - \gamma^-)^2}. \quad (112,4,3)$$

Формулы (108,4,3) и (103,4,3) переходят одна в другую после замены γ^+ на $-\gamma^-$. Это обстоятельство очень ценно для практического использования полученных выражений, так как дает возможность производить расчеты по любому из приведенных вариантов и в случае получения отрицательного знака у найденного числа γ переходить к соответствующей парной формуле. Предварительный правильный выбор знака перед коэффициентом γ не является необходимым.

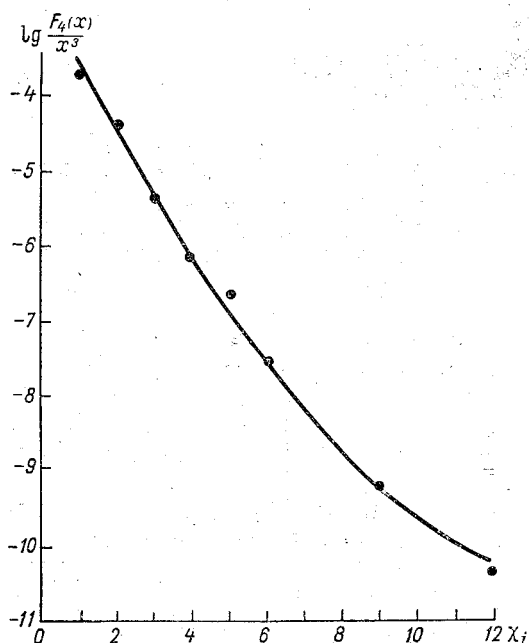


Рис. 8. Сравнение кривой $\ln \frac{F_4(x)}{x^3} = -C_0 - C_1x + C_2x^2$ с экспериментальными данными по максимальной скорости ветра за сутки.

Примером такого ДЗР при $n=3$ является повторяемость по градациям максимальных за сутки скоростей ветра по флюгеру, о чем подробнее пойдет речь в п. 5.3.

Для иллюстрации на рис. 8 показано, как экспериментальные точки в масштабе $\ln \frac{F_4(x)}{x^3}$ ложатся на подобранную кривую $y = -C_0 - C_1x + C_2x^2$. Легко видеть, что точки ложатся на кривую (параболу) лучше, чем на прямую. Следовательно, распределения подобного рода гидрометеорологических переменных лучше описываются законом $F_{4,n}^{(6)}(x)$, нежели простой гамма-функцией, которая для $n=3$ имела бы вид

$$f(x) = \frac{\alpha^4 x^3}{6} e^{-\alpha x} \quad (114,4,3)$$

Формулы (110—112,4,3) или соответственно (104—106,4,3) позволяют по эмпирическим константам $C_k^\pm$ определить все три параметра α , δ , γ , пользуясь достаточно хорошо разработанными методами математики.

В качестве второго примера рассмотрим смешанный графический и численный метод подбора параметров для функций типа $F_{4,n}^{(6)}$. Согласно формуле (37,2,3), имеем

$$F_{4,n}^{(6)} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}{n!} e^{-\alpha_1 x} x^n \varphi_n(\xi), \quad (113,4,3)$$

где $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\delta$.

и для переменной $y = \ln \frac{f(x)}{x^3}$ давала бы линейную зависимость от аргумента $y = \ln \frac{\alpha^4}{6} - \alpha x$. Вместо этого имеем аппроксимацию $y = \ln A - \alpha_1 x + \ln \varphi_n(\delta x)$, (115,4,3)

где

$$A = \frac{\prod_{k=1}^{m+1} a_k}{m!}, \quad (116,4,3)$$

$$\varphi_n(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} \right)^n. \quad (117,4,3)$$

Функция $\varphi_n(\xi)$ монотонно убывает с ростом ξ , а при $\xi=0$ $\varphi_n(0)=1$ и ДЗР (113,4,3) вырождается в гамма-распределение (5,2,3).

Во многих случаях для практического использования удобно логарифм функции $\varphi_n(\xi)$ аппроксимировать законом

$$\ln \varphi_n(\xi) \approx -a_n \xi + b_n \xi^2, \quad (118,4,3)$$

где

$$a_n = n \cdot 0,477, \quad b_n = n \cdot 0,0305_3. \quad (119,4,3)$$

Тогда, например, для функции $\varphi_3(\xi)$ имеем

$$\ln \varphi_3(\xi) = -1,43\xi + 0,0916\xi^2, \quad (120,4,3)$$

причем средняя квадратичная ошибка такой аппроксимации на интервале $0 \leq \xi \leq 5$ равна $\sigma = 0,0262$ в логарифмическом масштабе. Это соответствует в натуральном масштабе примерно 6% ординаты. Если такая точность достаточна для потребителя, то выражение (115,4,3) можно переписать в виде

$$y = -C_0 - C_1 x + C_2 x^2, \quad (121,4,3)$$

где

$$C_0 = -\ln A, \quad (122,4,3)$$

$$C_1 = \alpha_1 + a\delta, \quad (123,4,3)$$

$$C_2 = b\delta^2. \quad (124,4,3)$$

Значения этих констант C_k определяются, как и выше, из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_k &= n \ln A - (\alpha_1 + a\delta) \sum_{k=1}^n x_k + b\delta^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \ln A \sum_{k=1}^n x_k - (\alpha_1 + a\delta) \sum_{k=1}^n x_k^2 + b\delta^2 \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k &= \ln A \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\alpha_1 + a\delta) \sum_{k=1}^n x_k^3 + b\delta^2 \sum_{k=1}^n x_k^4 \end{aligned} \right\} \quad (125,4,3)$$

где $y = \ln \frac{F_4(x)}{x^3}$ или, вообще говоря, $y = \ln \frac{F_{4,n}^{(6)}(x)}{x^n}$. По найденным значениям констант легко вычислить на основании формул (123,4,3) и (124,4,3)

$$\delta = \sqrt{\frac{C_2}{b}} \quad (126,4,3)$$

и

$$\alpha_1 = C_1 - a \sqrt{\frac{C_2}{b}}. \quad (127,4,3)$$

Кроме того, можно найти место ($\hat{x}$) максимума плотности вероятности. Для этого достаточно продифференцировать по x приближенную формулу

$$F_{4,n}^{(6)}(x) = n \ln x - C_0 - C_1 x + C_2 x^2 \quad (128,4,3)$$

и, приравняв результат к нулю, решить получающееся квадратное уравнение

$$n - C_1 \hat{x} + 2C_2 \hat{x}^2 = 0. \quad (129,4,3)$$

Для места максимума находим

$$\hat{x} = \frac{C_1}{4C_2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{n8C_2}{C_1^2}} \right]. \quad (130,4,3)$$

Второй корень со знаком «+» перед квадратным корнем не имеет смысла, так как соответствует некоторому минимуму, возникающему за пределами применимости параболической аппроксимации.

Отметим, что в области больших аргументов ξ вместо формулы (118,4,3) следует писать

$$\ln \varphi_n(\xi) \approx -ne^{-\xi} - n \ln \xi, \quad (131,4,3)$$

или, если отбросить экспоненциальный член в связи с его малостью, то

$$\ln \varphi_n(\xi) \approx -n \ln x - n \ln \delta. \quad (132,4,3)$$

С учетом приближения (132,4,3) формула (115,4,3) заменяется на

$$\ln F_{4,n}^{(6)} = \ln A - \alpha_1 x - n \ln \delta. \quad (133,4,3)$$

Для максимальной за сутки скорости ветра экспериментальные точки при больших значениях аргумента начинают давать большой разброс в связи с малым числом случаев, а поэтому оказывается достаточным использовать систему (125,4,3) и формулы (126,4,3) и (127,4,3).

5.3. Примеры ДЗР для гидрометеорологической информации

Описанные в п. 4.3 приближенные методы были использованы в ряде исследований для получения параметров ДЗР различных гидрометеорологических характеристик. Здесь невозможно дать примеры на все возможные варианты из приведенных типов. Трудно также для каждого гидрометеорологического элемента привести типовые характеристики, тем более что они меняются для различных географических районов и сезонов. Один и тот же элемент, например температура воздуха, может обладать различными ДЗР в районах с однородной воздушной массой и вблизи фронтальной зоны. Унимодальный закон распределения, получающийся часто внутри одного сезона, может смениться на бимодальный при рассмотрении годового периода. Поэтому приводимые ниже примеры нельзя расценивать как типовые для различных случаев, они могут служить только как иллюстрации к применению того или иного типа закона.

Пример 1. ДЗР типа Ia — простой экспоненциальный закон распределения давно известен и можно было бы не останавливаться на нем. Однако представляется интересным отметить, что этому закону приближенно подчиняется загрязненность атмосферы над городом пылью, сернистым газом и сажой [18].

Если концентрацию обозначить S мг/м³, то дифференциальный закон ее распределения, согласно формулам (10,2,3) и (9,4,3), будет

$$F_1(S) = \frac{1}{\bar{S}} e^{-\frac{S}{\bar{S}}}, \quad (1,5,3)$$

где $\bar{S}$ — средняя концентрация.

Отсюда легко найти вероятность превышения некоторой заданной концентрации и, в частности, предельно допустимой концентрации $S_{\text{пдк}}$. Это будет

$$P(S > S_{\text{пдк}}) = e^{-\frac{S_{\text{пдк}}}{\bar{S}}}. \quad (2,5,3)$$

Так, например, если принять $S_{\text{пдк}} = 0,5$ мг/м³ для сернистого газа и пыли и $S_{\text{пдк}} = 0,15$ мг/м³ для сажи, то по формуле (2,5,3) можно получить следующие значения вероятности превышения $S_{\text{пдк}}$ (в процентах) при сильном и слабом ветре зимой и летом:

Скорость ветра (м/с)	Январь			Июль		
	пыль	сажа	SO ₂	пыль	сажа	SO ₂
0—1	7	5	27	8	2	3
8—9	3	0,7	6	25	2	—

Из приведенных данных хорошо видно, что летом сильный ветер, поднимая пыль с земли, в 25% всех случаев создает высокие концентрации пыли. Зимой при слабых ветрах более чем в 25% всего числа случаев образуется завышенная концентрация сернистого газа. Кроме того, в январе при слабых ветрах заметно возрастает число случаев повышенного содержания сажи и пыли по сравнению с их содержанием при погоде с сильным ветром, когда динамическая турбулентность уносит выделяемые примеси в верхние слои атмосферы.

Пример 2. На метеорологической площадке МГУ Г. А. Серова производила измерения турбулентных пульсаций температуры, затем была найдена повторяемость по грациям длительности флюктуаций [15]. Измерения производились малоинерционным проволочным датчиком и регистрировались на осциллографной ленте. Учитывались колебания от самых коротких, порядка сотых долей секунды, до 10—20 секунд.

Для аппроксимации была использована обобщенная формула (95,4,3), так как расчеты по формуле (18,2,3) привели к абсурду. Весь диапазон длительностей был разбит на 10 интервалов по одной условной единице каждый. В этом случае формула ДЗР имела следующий конкретный вид:

$$F_{2\gamma^+} = 0,08 (e^{-0,19x} + 14e^{-1,9x}), \quad (3,5,3)$$

где $\alpha_1 = 0,19$, $\alpha_2 = 1,9$, $\gamma = 14$ были определены из условий (104—106,4,3). При этом после исключения из них неизвестной величины γ^+ пришлось решать систему двух уравнений вида:

$$\begin{aligned} 2C_2 [\alpha_2^2 - 8\alpha_2\alpha_1 + 4\alpha_1^2] &= (\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1^2) (C_1 + \alpha_1) (C_1 + \alpha_2 - \alpha_1); \\ e^{C_0} [\alpha_2 C_1 + \alpha_2^2 - \alpha_1 (\alpha_2 + C_1 + \alpha_1)] &= \alpha_1 \alpha_2^2 - 2\alpha_1^2 \alpha_2. \end{aligned} \quad (4,5,3)$$

Расчет производился сначала путем нахождения приближенных корней графическим методом, а затем уточнения их методом итераций.

Для сравнения экспериментальных данных с расчетными были вычислены вероятности длительностей по грациям

$$\begin{aligned} P((k-1)h < x < kh) &= \int_{(k-1)h}^{kh} F_{2\gamma^+} dx = B \left[\frac{(1 - e^{-\alpha_1 h})}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 kh} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^+ (1 - e^{-\alpha_2 h})}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 kh} \right], \end{aligned} \quad (5,5,3)$$

где $B = 0,08$.

При очень малом шаге h формула (5,5,3) вырождается в обычное выражение

$$P((k-1)h < x < kh) = F_{2\gamma^+}(kh) h. \quad (6,5,3)$$

Приведем результаты расчетов по формуле (5,5,3), в которых в условных единицах времени также даны разности между теоретическими и экспериментальными повторяемостями длительностей

турбулентных пульсаций температуры (одна условная единица равна 0,33 секунды):

Интервал . . .	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
Вероятность . .	0,57	0,15	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01
Разность . . .	0,01	—0,07	0,00	0,01	—0,01	0,02	—0,01	0,01	0,00	0,00

Средняя квадратичная ошибка данной аппроксимации, полученной при малом числе итераций, составила

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (P_k - m_k)^2} = 0,03. \quad (7,5,3)$$

Полученный ДЗР показывает на очень быстрое убывание числа случаев по мере роста длительности пульсаций, что легко объяснить с физической точки зрения. Конечно, при идеальном безынерционном приборе, вероятно, в первой градации наметился бы максимум, если при $d=1$ см в природе исчезают турбулентные завихрения. Имевшиеся осциллограммы не давали формального права обнаружить такие мелкие пульсации с частотой более 100—1000 гц.

Пример 3. В работе [16] была получена зависимость ДЗР суточных сумм осадков от величины осадков R мм в форме закона $F_{4,2}^{(\delta)}(x)$, причем оказалось, что параметр α_1 зависит от длительности τ часов выпадения осадков в течение суток. В соответствии с формулой (37,2,3) при малой величине δ ($\delta=0,01$ мм⁻¹) можно написать

$$F_{4,2}^{(\delta)}(R) \approx \frac{\alpha_1^3}{2} R^2 e^{-\alpha_1 R} \varphi_2(\delta R), \quad (8,5,3)$$

где при длительностях выпадения осадков в пределах $0 \leq \tau \leq 1,5$ часа имеет место соотношение

$$\alpha_1 = 4,11 - 1,82\tau, \quad (9,5,3)$$

полученное по данным метеорологической станции Малоярославец за период 1944—1968 гг.

Для длительностей выпадения осадков больших, чем 1,5 часа в качестве грубого приближения можно взять

$$\alpha_1 = \frac{1}{0,261\tau + 0,330} \quad (10,5,3)$$

и воспользоваться формулой (37,2,3). В обоих случаях с ростом длительности выпадения дождя декремент α_1 убывает, а следовательно, модальное количество осадков смещается в сторону больших сумм и вместе с тем возрастает полуширина кривых, т. е. расстояние между ординатами, имеющими высоту, равную половине от модальной. Так, например, если при длительности $\tau=0 \div 1$ час полуширина $\Delta R=0,9$ мм, то при $\tau=8 \div 10$ часов $\Delta R \approx 8,5$ мм. Это означает, что с удлинением τ происходит выполаживание формы ДЗР для суточных сумм осадков, т. е. разные суточные суммы

меньше отличаются по вероятности их выпадения сравнительно с кратковременными дождями, имеющими острый модальный пик.

Пример 4. Этот пример представляет особый интерес, так как в нем показывается возможность практического использования ДЗР с пределами изменения аргумента $0 \leq x < \infty$ к описанию случайных величин, обладающих принципиально ограниченными пределами возможных изменений аргумента. Такие материалы нам были любезно подготовлены Н. Н. Выгодской и Н. В. Зукерт. Ими исследовались величины пропускания суммарной радиации под пологом леса различного возраста. Эта величина, обозначим ее буквой P , меняется в пределах $0 < P < 1$. Однако благодаря наличию

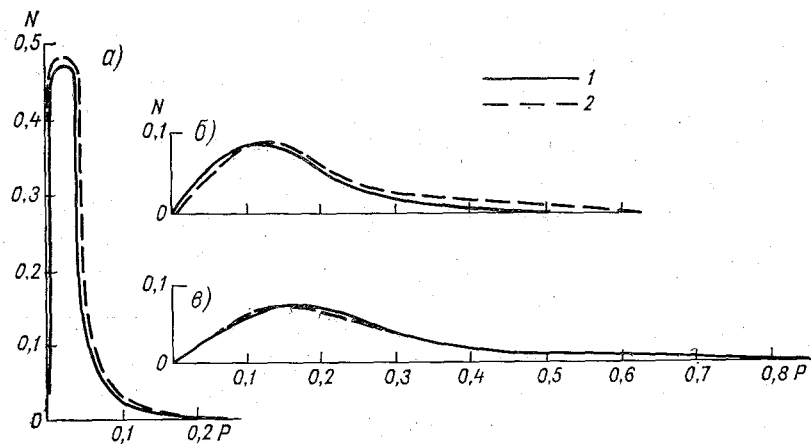


Рис. 9. Аппроксимация пропускания осиновым лесом различного возраста суммарной радиации, по Н. Н. Выгодской и Н. В. Зукерт.

1 — результат наблюдений, 2 — расчет по формуле (11,5,3).

резко выраженного максимума в области $0 < P < 0,2$ и быстрого последующего убывания плотности вероятности оказалось возможным их аппроксимировать с несколько меньшей точностью гамма-функцией

$$f(x) = \frac{\alpha^3}{2} x^2 e^{-\alpha x} \quad (11,5,3)$$

и с несколько большей точностью выражением

$$F_{4,2}^{(\delta)}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{2\delta^2} e^{-\alpha_1 x} (1 - e^{-\delta x})^2. \quad (12,5,3)$$

В первом случае для осинового леса с возрастом 55 лет (рис. 9 а) получилась оценка $\chi_1^2 = 0,02$, а во втором $\chi_2^2 = 0,005$. Декремент взят $\alpha_1 = 1,8$. Для осинового леса возраста 35 лет (рис. 9 б) оценки оказались: $\chi_1^2 = 0,01$, $\chi_2^2 = 0,0002$. Декремент $\alpha_1 = 0,360$. Для осинового леса возраста 25 лет (рис. 9 в) соответственно получено $\chi_1^2 = 0,0006$ и $\chi_2^2 = 0,00007$. Декремент $\alpha_1 = 0,260$. Чем старше лес, тем острее

максимум и тем меньшему максимуму $\hat{P}$ он соответствует. Максимум пропускания приходится соответственно на градации в случаях: а) 0,021—0,040, б) 0,11—0,20, в) 0,11—0,20.

Пример 5. Данный пример иллюстрирует использование параметров, характеризующих ДЗР, для выявления определенных закономерностей. Так, например, при изучении влияния солнечной активности на циркуляционные процессы нами была произведена сортировка максимальных скоростей ветра по градациям средних годовых чисел Вольфа. Материалы наблюдений Тимирязевской сельскохозяйственной академии за период с 1879 по 1960 г. (82 года) были рассортированы на пять групп по числам Вольфа:

1) от 1 до 19, 2) от 20 до 39, 3) от 40 до 59, 4) от 60 до 79 и 5) от 80 и более.

Каждая группа сортировалась по градациям скорости ветра для четырех месяцев разных сезонов. Затем по формулам (125,4,3) были рассчитаны коэффициенты C_k , а по формулам (126,4,3), (127,4,3) — параметры α_1 и δ . Оказалось, что для всех четырех месяцев имеется тенденция к немонотонному ходу — образованию экстремума соответствующих параметров вблизи группы 3. Для иллюстрации этого в табл. 1 приведены данные за апрель и июль, т. е. за теплый период, когда картина более ясная и экстремум приходится на группу 3. В январе экстремум падает на группу 3 для максимума α_1 и минимума δ , зато минимум α_1 приходится на группу 2, тогда как δ к крайним группам растет. В октябре экстремумы наблюдались такого же типа, что и в январе, но они приходились на группу 4.

Таблица 1

Параметры закона $F_{4,3}^{\delta}(x)$ для максимальной скорости ветра в зависимости от группы солнечной активности

Группа	C_0	C_1	C_2	α_1	δ
Апрель					
1	3,18	0,871	0,0221	0,169	0,491
2	3,16	0,743	0,00524	0,401	0,239
3	3,36	0,702	0,00288	0,454	0,173
4	3,28	0,739	0,00669	0,352	0,270
5	3,10	0,764	0,00720	0,360	0,282
Июль					
1	2,35	0,936	0,0100	0,463	0,330
2	2,15	1,008	0,0165	0,402	0,424
3	1,83	1,074	0,0214	0,382	0,488
4	3,53	0,713	0,00270	0,468	0,172
5	2,27	0,857	—	0,857	—

В табл. 1 максимумы набраны полужирным шрифтом, минимумы — курсивом. Из этих данных видно, что в апреле максимум S_0 и минимум S_1 и S_2 в июле меняются на обратные соотношения. Так же меняются и соотношения параметров α_1 и δ . Это показывает немонотонную связь между числами Вольфа W и светимостью солнца S . Если эта связь имеет вид

$$S = S_0 - S' (W - \bar{W})^2, \quad (13,5,3)$$

то возникает интересная гипотеза о том, что здесь находит свое отражение принцип минимума диссипации энергии при стационарных условиях, совместимых с граничными условиями неравновесного термодинамического процесса [8].

На ЭВМ «Минск-22» А. И. Зинин произвел автоматизированный подбор параметров для распределения по градациям суточных сумм осадков, продолжительностью 2—4 часа, по данным станции Малоярославец за 25-летний период наблюдений (табл. 2).

Расчеты на ЭВМ показали, что данное распределение может быть описано ДЗР типа II или IIIa, т. е. формулами $F_7(x)$ (26,2,3) или $F_3(x)$ (22,4,3) соответственно с коэффициентами для $F_7(x)$: $\alpha_1 = 0,6795$, $\alpha_2 = 0,6812$, $\alpha_3 = 1,7438$, а для $F_3(x)$: $\alpha_1 = 0,6490$, $\alpha_2 = 0,6670$. Ошибка H в первом случае составляет 0,0044151, а во втором 0,0043436, т. е. величины одного порядка. В связи с этим, отдавая преимущество более простой формуле, имеем

$$F_3(x) = 24,15 (e^{-0,649x} - e^{-0,667x}). \quad (14,5,3)$$

Таблица 2

Суточные суммы осадков по градациям, продолжительностью 2—4 часа, средние за 25 лет. Малоярославец

Осадки, мм	Число случаев	Осадки, мм	Число случаев	Осадки, мм	Число случаев	Осадки, мм	Число случаев
0—1	34	4—5	21	8—9	3	12—13	2
1—2	41	5—6	8	9—10	3	13—16	0
2—3	49	6—7	5	10—11	1	16—17	1
3—4	37	7—8	4	11—12	2	<17	0

На рис. 10 наглядно представлено сравнение частоты осадков в определенных градациях, вычисленных по формуле (14,5,3) и полученных из наблюдений. Из рис. 10 видно, что наибольшее расхождение отмечается в области 1—2 мм, где точность измерения осадков невелика. Переход из градации 0—1 мм в градацию 1—2 мм примерно в 20% случаев может привести к субъективно идеальному совпадению обеих кривых, а такой переход возможен при соответствующем учете потерь на смачивание, тем более важном, чем меньше осадков.

Перейдем к рассмотрению схемы расчета параметров ДЗР с аргументом, меняющимся от $-\infty$ до ∞ . Примерами таких распределений являются данные по температуре воздуха, высоте уровня водоема над некоторой «нулевой» отметкой, проекция вектора скорости или количества движения на заданную ось и др.

Для таких элементов ДЗР могут быть как унимодальные, так и обладающие несколькими модами. Рассмотрим два возможных варианта: А — унимодального и Б — бимодального распределений. Большее число мод не всегда бывает статистически закономерным. В тех случаях, когда физически обосновано появление трех и более мод, принципиально возможно воспользоваться аппроксимацией положительной и отрицательной ветвей гистограмм с помо-

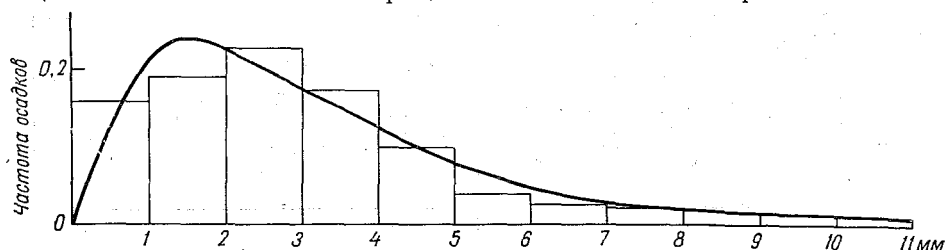


Рис. 10. Гистограмма повторяемости осадков продолжительностью 2—4 часа в Малоярославце и $F_3(R)$ при $\alpha_1=0,649$ и $\alpha_2=0,667$.

щью рядов ортогональных функций $D_m(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ при последующей склейке обеих ветвей в нулевой точке.

Случай А при симметрии может описываться нормальным законом или колоколообразным, получающимся из ДЗР типа 1б, если аргумент x там заменить на модуль разности

$$|z| = |x - \hat{x}|, \quad (15,5,3)$$

где $\hat{x}$ — модальное значение аргумента.

При отсутствии симметрии относительно точки $z=0$ колоколообразный несимметричный закон может записываться в виде

$$-W'_\Lambda(x) = \begin{cases} v^- F_2^- (|z|); \\ v^+ F_2^+ (|z|), \end{cases} \quad (16,5,3)$$

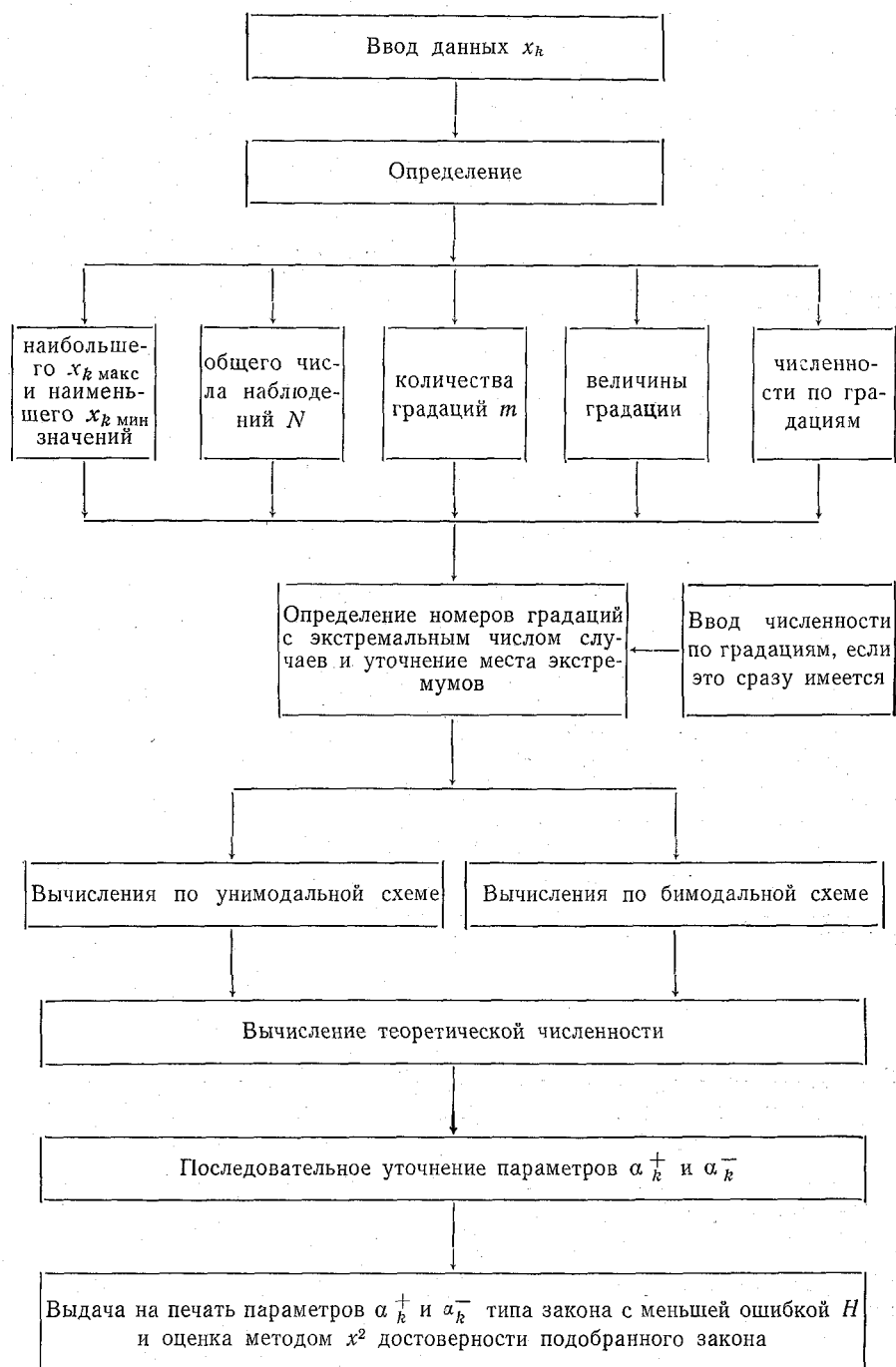
где функции $F_2^- (|z|)$ и $F_2^+ (|z|)$ даются выражениями (18,2,3) с разными значениями декрементов α_h^- и α_h^+ слева и справа от моды, а v^- и v^+ — соответственно доли общего числа случаев, приходящиеся на отрицательную и положительную области аргумента z , удовлетворяющие условию

$$v^- + v^+ = 1. \quad (17,5,3)$$

Кроме того, отсутствие скачка при $z=0$ требует выполнения равенства

$$v^- F_2^- (0) = v^+ F_2^+ (0), \quad (18,5,3)$$

Общая схема расчета ДЗР с аргументом $-\infty < x < \infty$



из которого следует, что нельзя произвольно выбирать все четыре декремента α_1^+ , α_2^+ , α_1^- , α_2^- , а если первые три из них найдены, то четвертый дается соотношением

$$\alpha_2^- = \frac{\alpha_1^-}{\frac{\nu^-}{\nu^+} \alpha_1^- \frac{\alpha_2^+ + \alpha_1^+}{\alpha_1^+ \alpha_2^+} - 1}. \quad (19,5,3)$$

Случай Б с бимодальным распределением может быть описан ДЗР типа II, как это указывалось в формуле (7,3,3), полагая

$$-III'_{\wedge \wedge}(s) = \begin{cases} \nu^+ F_7^+(s) & \text{при } s = x - \check{x} > 0; \\ \nu^- F_7^-(-s) & \text{при } s < 0, \end{cases} \quad (20,5,3)$$

где $F_7(s) \equiv -III'_{\Pi}(x)$ дается выражением (26,2,3) или (25,2,3),

а $\check{x}$ — абсцисса минимальной плотности вероятности между двумя модами. При симметричном законе все декременты с соответствующими индексами внизу $\alpha_k^+ = \alpha_k^-$ равны между собою для обоих полуосей, а при отсутствии симметрии имеет место соотношение

$$F_7^-(0) = F_7^+(0), \quad (21,5,3)$$

которое аналогично формуле (18,5,3). Однако оно отличается отсутствием множителя ν , входящего в выражение для $a_1(\nu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, согласно формуле (27,2,3). При расчетах в качестве первого приближения за величину $\check{F}_7$ можно принять минимальную ординату гистограммы между двумя модами, т. е. так называемую антимоду $\check{F}_7 = \frac{\check{\nu}}{h} = \frac{\check{\nu}_k}{h}$. Во время расчетов эта величина может уточняться наряду с параметрами α_k .

Конкретная схема алгоритма подбора ДЗР при аргументе, меняющемся от $-\infty$ до ∞ приведена на стр. 80.

6.3. Распространение ДЗР на двумерные векторы

В гидрометеорологии очень часто бывает выгодно рассматривать двумерные плотности вероятности, связывающие такие, например [18], две переменные, как скорость ветра и интенсивность дождя, скорость ветра и загрязненность атмосферы и т. д. В самом общем случае двумерную функцию $f(x, y)$ можно представить в виде ряда

$$f(x, y) = f_\infty + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k} D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_k(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_2^*), \quad (1,6,3)$$

где

$$b_{m,k} = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} (f(x,y) - f_{\infty}) D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \times \\ \times D_k(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*) dx dy. \quad (2,6,3)$$

Если нет оснований для предварительного выбора декрементов α_i и α_i^* , то можно воспользоваться общими методами математики. Однако теперь ошибка разложения по m -ортогональным функциям с аргументом x и k -функциям с аргументом y будет иметь вид

$$H_{m,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[(f(x,y) - f_{\infty}) - \right. \\ \left. - \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k b_{s,r} D_s(x; \alpha_1, \dots, \alpha_s) D_r(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*) \right]^2 dx dy. \quad (3,6,3)$$

В процессе расчета искомые декременты подбираются таким образом, чтобы ошибка была минимальной при каждом данном числе членов ряда. Минимизация может производиться методом наиболее быстрого спуска. Для того чтобы избежать расчетов с большим числом неизвестных, не выгодных для нелинейных систем уравнений даже при использовании ЭВМ, целесообразно вести последовательные определения декрементов. Сначала рассматривают ошибку $H_{1,1}$, зависящую от двух параметров α_1 и α_1^* , которые определяются методом последовательных уточнений, а затем минимизируют $H_{2,2}$, определяя α_2, α_2^* . Общая схема процедуры такова: пусть $m-1$ параметр α_s и $k-1$ параметр α_r^* определены, причем m и k вначале могут быть равны единице. Тогда выражение (3,6,3) содержит только два неизвестных параметра α_m и α_k^* . Для их определения можно использовать любой метод поиска экстремума и, в частности, положив в качестве нулевого приближения:

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + \alpha_1; \quad \alpha_k^* = \alpha_{k-1} + \alpha_1^*, \quad (4,6,3)$$

вычислить производные:

$$\frac{\partial H_{m,k}}{\partial \alpha_m}; \quad (5a,6,3)$$

$$\frac{\partial H_{m,k}}{\partial \alpha_k^*}, \quad (5b,6,3)$$

а затем найти последовательно уточненные значения декрементов, считая, что обобщенный вектор β состоит из двух независимых компонент

$$\beta_{m,k} = i\alpha_m + j\alpha_k^*. \quad (6,6,3)$$

Описанный метод применим для любой формы задания функции $f(x, y)$. В формуле (1,6,3) для общности разложения написан член f_∞ , который при обычных ДЗР равен нулю. Ряд вида (1,6,3) с коэффициентами Фурье вида (2,6,3) пригоден для аппроксимации убывающих до нуля с ростом аргумента функций и законов, стремящихся к постоянной величине f_∞ при безграничном росте аргумента.

Во многих частных случаях ДЗР с аргументами $0 < x < \infty$ и $0 < y < \infty$ может быть представлен в виде оборванного ряда вида

$$\begin{aligned} f(x, y) &= b_{11} D_1(x; \alpha_1) \left[D_1(y; \alpha_1^*) + \frac{b_{12}}{b_{11}} D_2(y; \alpha_1^*, \alpha_2^*) \right] + \\ &+ b_{21} D_2(x; \alpha_1, \alpha_2) \left[D_1(y; \alpha_1^*) + \frac{b_{22}}{b_{21}} D_2(y; \alpha_1^*, \alpha_2^*) \right] = \\ &= \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 b_{mk} D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_k(y; \alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*), \quad (7,6,3) \end{aligned}$$

или в форме

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{11} e^{-\alpha_1 x} e^{-\alpha_1^* y} + a_{12} e^{-\alpha_1 x} e^{-\alpha_2^* y} + a_{21} e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1^* y} + \\ &+ a_{22} e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_2^* y}. \quad (8,6,3) \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения в выражении (7,6,3) могут определяться по формуле (2,6,3). Ряд (8,6,3) состоит из неортогональных членов. Рассмотрим, как его преобразовать к виду закона, имеющего нулевую производную в начале координат и нормированного на единицу. В этом случае он удовлетворяет трем естественным условиям:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0; \quad (9,6,3)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0; \quad (10,6,3)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy = 1. \quad (11,6,3)$$

Эти условия дают три уравнения:

$$-a_{11}\alpha_1 - a_{12}\alpha_1 - a_{21}\alpha_2 - a_{22}\alpha_2 = 0; \quad (12,6,3)$$

$$-a_{11}\alpha_1^* - a_{12}\alpha_2^* - a_{21}\alpha_1^* - a_{22}\alpha_2^* = 0; \quad (13,6,3)$$

$$\frac{a_{11}}{\alpha_1 \alpha_1^*} + \frac{a_{12}}{\alpha_1 \alpha_2^*} + \frac{a_{21}}{\alpha_2 \alpha_1^*} + \frac{a_{22}}{\alpha_2 \alpha_2^*} = 1. \quad (14,6,3)$$

Для замыкания системы (12—14,6,3) можно сделать предположение, что $f(0,0) = f_0$ или в частном случае функция

обращается в нуль. Последнее предположение дает замыкающее уравнение

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \quad (15,6,3)$$

для нахождения коэффициентов a_{ij} двумерного ДЗР, являющегося обобщением функции $F_3(x)$ ($-III'_{IIIa}(x)$), имеющего следующий вид

$$f_3(x, y) = \frac{\alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_2^*}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^* - \alpha_1^*)} \left\{ e^{-\alpha_2^* x - \alpha_1^* y} - e^{-\alpha_1^* x - \alpha_2^* y} - e^{-\alpha_2^* x - \alpha_1^* y} + e^{-\alpha_2^* x - \alpha_2^* y} \right\}. \quad (16,6,3)$$

Легко проверить простым интегрированием выражения (16,6,3) по переменной y от 0 до ∞ , что найденная формула перейдет

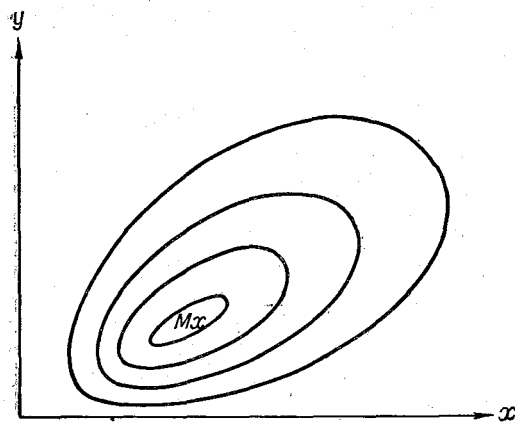


Рис. 11. Схема изолиний для двумерного ДЗР $f_3(x, y)$.

Mx — максимум.

в формулу (31,2,3), дающую ДЗР типа IIIa. Схема изолиний для двумерного ДЗР $f_3(x, y)$, описываемого формулой (16,6,3), дана на рис. 11. Нулевая изолиния следует вдоль осей x и y , а максимум расположен несимметрично относительно центра изолиний.

Подобным методом можно построить большее количество типов двумерных ДЗР, легко интегрируемых и дифференцируемых. Многие из них могут быть построены в виде произведений или сумм произведений

одномерных ДЗР разного типа, написанных соответственно для двух аргументов (x и y) с различными декрементами. Так, например, могут быть взяты следующие комбинации:

$$f_1(x, y) = A_1 F_1(x; \alpha_1) F_1(y; \alpha_1^*), \quad (17,6,3)$$

где $F_1(x; \alpha_1)$ дается формулой (2,2,3). Это будет убывающая судалением от начала координат функция, имеющая конечную величину производной в начале координат. Функция

$$f_2(x, y) = A_2 F_2(x; \alpha_1, \alpha_2) F_2(y; \alpha_1^*, \alpha_2^*) \quad (18,6,3)$$

также убывающая с удалением от начала координат, но с горизонтальной вершиной при $x=0, y=0$, как это следует из формулы (18,2,3) для функции $F_2(x; \alpha_1 \alpha_2)$.

Произведение двух функций типа II может в соответствии с формулой (26,2,3) дать большое разнообразие двумерных ДЗР с нулевой производной в начале координат и ненулевыми значениями при этом плотности вероятности

$$f_{II}(x, y) = A_{II} \Pi_{II}(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Pi_{II}(y; \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*). \quad (19,6,3)$$

Беря произведение двух функций $F_3(x)$ и $F_3(y)$ с различными декрементами, на основании формулы (31,2,3) получаем рассмотренный закон вида (16,6,3) с одним максимумом, смещенным от начала координат.

7.3. Интегральные законы распределения

Интегральный закон распределения показывает вероятность того, что некоторая величина x_m не будет превышена. Если плотность вероятности случайной величины x , меняющейся в диапазоне от 0 до ∞ (например, скорость ветра, загрязненность атмосферы и др.) будет $F_n(x)$, то интегральный закон распределения для нее будет

$$\Phi(x_m) = \int_0^{x_m} F_n(\xi) d\xi. \quad (1,7,3)$$

Вероятность превышения некоторой критической величины скорости ветра, паводка, допустимой концентрации пыли или сажи и других явлений представляет огромный интерес для решения ряда практических задач. Назовем ее коротко ВП и обозначим как разность

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{\infty} F_n(\xi) d\xi = \Pi_n(x). \quad (2,7,3)$$

Если ДЗР имеет общий вид (2,2,3), то ВП кратко записывается в форме

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{\alpha_k} e^{-\alpha_k x}. \quad (3,7,3)$$

Это есть функция, убывающая вместе с ростом аргумента, так как под знаком интеграла в выражении (2,7,3) стоит существенно положительная функция.

Для конкретных введенных выше ДЗР можно написать следующие выражения для ВП:

$$\Pi_{Ia}(x) = e^{-\alpha_1 x}. \quad (4,7,3)$$

Этот закон, как отмечалось ранее, полезен при расчетах загрязненности атмосферы.

Закон

$$III_{16}(x) = \frac{a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} \left(\frac{a_2}{a_1} e^{-a_1 x} - \frac{a_1}{a_2} e^{-a_2 x} \right) \quad (5,7,3)$$

может встретиться при гидрологических расчетах в распределениях с горизонтальной касательной в начале координат, для которых ДЗР быстро убывает с ростом аргумента.

Неравномерное изменение ВП для ДЗР типов II и III может быть выражено

$$III_{II}(x) = a_1 (v_1, a_1, a_2, a_3) \left[\frac{1}{a_1} e^{-a_1 x} - \frac{a_3 - a_1}{a_2 (a_3 - a_2)} e^{-a_2 x} + \frac{a_2 - a_1}{a_3 (a_3 - a_2)} e^{-a_3 x} \right] + \frac{F_7(0)}{a_3 - a_2} \left[\frac{a_3}{a_2} e^{-a_2 x} - \frac{a_2}{a_3} e^{-a_3 x} \right], \quad (6,7,3)$$

где a_1 дается формулой (27,2,3);

$$III_{IIIa}(x) = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left[\frac{1}{a_1} e^{-a_1 x} - \frac{1}{a_2} e^{-a_2 x} \right]; \quad (7,7,3)$$

$$III_{IIIb}(x) = \frac{1}{D} \left\{ \frac{a_3 - a_2}{a_1} e^{-a_1 x} - \frac{a_3 - a_1}{a_2} e^{-a_2 x} + \frac{a_2 - a_1}{a_3} e^{-a_3 x} \right\}, \quad (8,7,3)$$

где D дается формулой (35,2,3).

Еще более неравномерный закон получается для типа IV, дающего две волны более быстрого убывания в соответствии с формулой (42,2,3)

$$III_{IV}(x) = \left[A_1 + A_2 \frac{a_3 - a_2}{a_1 D} \right] e^{-a_1 x} - A_2 \frac{a_3 - a_1}{a_2 D} e^{-a_2 x} + A_2 \frac{a_2 - a_1}{a_3 D} e^{-a_3 x}, \quad (9,7,3)$$

где D дается формулой (35,2,3), а величины A_1 и A_2 представляют собой доли случайных величин, подчиняющихся соответственно ДЗР $F_1(x)$ и $F_4(x)$, т. е. связанные с определенным типом гидрометеорологических процессов.

Примеры применения формул данного типа для оценок ВП можно найти в п. 5.3. Кроме того, на основании данных, приведенных в табл. 1, были рассчитаны ВП скорости ветра различных критических значений. В качестве последних были взяты $v_1 = 1$ м/с, v_2 ,

равное модальному значению $\hat{v}$, и $v_3 = 20$ м/с (табл. 3). Максимумы в табл. 3 набраны полужирным шрифтом, минимумы — курсивом.

Для расчета вероятности, или обеспеченности, характеристик ВП при больших значениях аргументов на основании только фактических данных наблюдений без использования какого-либо сглаживающего теоретического закона следует использовать очень длинные ряды наблюдений. В противном случае суждение о повторяемости редких экстремальных скоростей ветра или других явлений будет сильно зависеть от случайно выбранного ряда наблюдений. Даже при одной и той же длине ряда, но в разные пе-

риоды наблюдений ВП может существенно изменяться, причем случайным образом.

Таблица 3

Вероятность превышения скорости ветра				
$v_1 = 1 \text{ м/с}, v_2 = \hat{v}, v_3 = 20 \text{ м/с}$				
Группа	$\hat{v}$	Вероятность превышения скорости,		
		v_1	$\hat{v}$	v_3
Апрель				
1	4,4	0,996	0,755	0,0597
2	4,3	0,994	0,666	0,0247
3	4,4	0,994	0,653	0,0010
4	4,4	0,995	0,675	0,0044
5	4,3	0,996	0,677	0,0039
Июль				
1	3,5	0,988	0,666	0,0006
2	3,3	0,987	0,690	0,0012
3	3,2	0,985	0,700	0,0015
4	4,4	0,995	0,654	0,0014
5	3,5	0,988	0,647	0,0000

Использование ДЗР с параметрами, подобранными объективным методом по большому числу точек, лежащих на всем диапазоне изменений переменной величины, позволяет более надежно изучать изменения ВП от одной группы характеристик солнечной активности (или по другим параметрам) к другой. Так, например, из табл. 3 можно увидеть, что, как правило, экстремальная вероятность превышения выбранных значений скоростей ветра приходится на среднюю, третью, группу солнечной активности, для которой средние годовые числа Вольфа имели величины от 40—59. Оказалось, что в апреле вероятность превышения скорости ветра 20 м/с и модальной скорости, т. е. скорости с максимумом повторяемости, при третьей группе минимальна.

В июле на третью группу падает максимум вероятности превышения как скорости 20 м/с, так и модальной. Наряду с этим в июле отмечается минимум вероятности превышения скорости 1 м/с, т. е. наибольшее по сравнению с другими группами солнечной активности число дней с максимальной скоростью ветра меньшей 1 м/с. Приведенные различия сравнительно невелики и на обычных гистограммах выявить их было бы трудно.

Из данных табл. 3 можно сделать также общий для всех групп солнечной активности вывод о том, что вероятность скоростей, больших чем модальная, выше вероятности меньших скоростей.

8.3. Оценка точности подбора ДЗР при различном объеме статистического массива

При подборе параметров ДЗР на ЭВМ в соответствии с алгоритмом точность аппроксимации оценивалась по величине интеграла квадрата уклонения эмпирических значений от теоретических. При учете n членов ряда эта ошибка обозначалась H_n [см. формулу (4,1,4)]. Вопрос о вероятности того, что выбранный ДЗР при данных декрементах α_2 соответствует эмпирической совокупности при описании алгоритма, специально не рассматривался, хотя в программе для ЭВМ и предусматривалась выдача на печать величин критерия χ^2 . В данном параграфе ставится вопрос о том, как влияет изменение объема статистического массива (числа случаев n независимых испытаний) на оценку правильности подбора типа ДЗР и его декрементов. При этом число степеней свободы k будет тем меньше, чем больше параметров содержит ДЗР, так как для их определения требуются дополнительные соотношения, увеличивающие количество ограничений.

Обычный в математической статистике вопрос о том, каков должен быть объем выборки n для того, чтобы с определенной вероятностью можно было судить о точности нахождения средней величины, здесь заменяется другим: какова должна быть величина объема статистической совокупности для того, чтобы при заданной величине некоторой меры ошибки можно было с заданной вероятностью считать, что найденный ДЗР правильно описывает данный эмпирический материал. Это также хорошо известный в математической статистике вопрос о проверке некоторой нуль-гипотезы, для решения которого существует ряд критериев, как-то Колмогорова, Пирсона и т. п. Будем основываться в основном на критерии χ^2 . Постановка задачи заключается в следующем: имеется S градаций гидрометеорологического элемента со значениями признаков по каждой градации $T_1, \dots, T_S$ и численностью в каждом классе $m_1, \dots, m_S$. Пусть объем совокупности равен n . Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^S m_i = n. \quad (1,8,3)$$

Для полученного эмпирически распределения частот m_i подбираем ДЗР, который имеет r параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, для определения которых используется r -условий

$$\sum_{i=1}^S \omega_{hi} m_i = l_h, \quad (2,8,3)$$

где $h=1, \dots, r$. Таким образом, имеется k степеней свободы

$$k = S - r - 1. \quad (3,8,3)$$

Обозначим частоты, получаемые по ДЗР, через

$$m_i^0 = P_i n, \quad (4,8,3)$$

где P_i — вероятности, вычисляемые по ДЗР. Мерой ошибки такого распределения является

$$H = \sum_{i=1}^S (m_i - nP_i)^2. \quad (5,8,3)$$

Ошибка обращается в нуль при условии совпадения теоретических и экспериментальных численностей, когда

$$m_i = m_i^0. \quad (6,8,3)$$

При этом критерий

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^S \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} \quad (7,8,3)$$

также обращается в нуль, а вероятность превышения эмпирического значения χ , даваемая формулой

$$P_k(\chi > \chi_3) = \frac{1}{2^{\frac{k-2}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{\chi_3}^{\infty} \chi^{k-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi, \quad (8,8,3)$$

где $\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ — гамма-функция [25]

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{при } x > 0 \quad (9,8,3)$$

(или при $\operatorname{Re} x > 0$, если x — комплексная величина), превращается в интеграл

$$P_k(\chi > 0) = \frac{1}{2^{\frac{k-2}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{\infty} \chi^{k-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi = 1, \quad (10,8,3)$$

что говорит о точности выбора ДЗР. Однако на практике всегда $\chi_3 > 0$, а ошибка H никогда не обращается в нуль. Чаще всего величина ошибки, вычисляемая по формуле (5,8,3), растет с увеличением объема выборки n , хотя точность подбора закона при большей выборке может возрастать. Поэтому удобно ввести отношение

$$\frac{H}{n^2} = \tilde{H} = \sum_{i=1}^S (v_i - P_i)^2, \quad (11,8,3)$$

где

$$v_i = \frac{m_i}{n} \quad (12,8,3)$$

есть эмпирическая частота появления события T_i в градации i .

Требуется выяснить, какова должна быть величина n всей совокупности значений гидрометеорологического элемента T для того,

чтобы можно было с вероятностью $P_k > P_k^{\text{крит}}$ судить о соответствии эмпирического и подобранного теоретического распределений. Для этого перепишем выражение (7,8,3) в виде

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^S \frac{(v_i - P_i)^2}{P_i} = n \tilde{\chi}^2. \quad (13,8,3)$$

Очевидно, что при тех же значениях v_i и P_i критерий χ^2 возрастает прямо пропорционально объему совокупности и, следовательно, интеграл (8,8,3) может быть записан в виде

$$P_k(\chi > \chi_3) = \frac{1}{2^{\frac{k-2}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \tilde{\chi}_3 \sqrt{n}} \int_{\tilde{\chi}_3 \sqrt{n}}^{\infty} \chi^{k-1} e^{-\frac{1}{2} \chi^2} d\chi. \quad (14,8,3)$$

Из выражения (14,8,3) следует, что одно и то же относительное расхождение $\tilde{\chi}_3^2$ при малой выборке может рассматриваться как противоречащее принятой гипотезе о ДЗР, тогда как для большой выборки вероятность появления отклонений частот $(v_i - P_i)$ больших, чем наблюдаемые, может оказаться малой и, следовательно, ДЗР окажется статистически достоверным.

В связи со сказанным разумно ставить вопрос таким образом, чтобы исходить из заданной меры относительной ошибки $\tilde{N}$, определяемой формулой (11,8,3), или относительного расхождения

$$\tilde{\chi}^2 = \sum_{i=1}^S \frac{(v_i - P_i)^2}{P_i} \quad (15,8,3)$$

и отыскивать объем выборки n , при котором вероятность $P_k(\chi > \sqrt{n} \tilde{\chi}_3)$ будет не меньше некоторого критического значения $P_k^{\text{крит}}$.

В этом случае наблюдаемые расхождения $(v_i - P_i)$ можно считать случайными, а ДЗР — не противоречащим экспериментальным данным. Чем больше объем выборки, тем выше должна быть точность подбора закона для согласия его с опытом в соответствии с критерием χ^2 . Так, например, если принять критическую вероятность $P^{\text{крит}} = 0,95$, то при четырех степенях свободы ($k=4$) $\chi^2 = 0,71$

и при $n=100$ имеем относительную ошибку $\tilde{\chi}^2 = 0,0071$, тогда как при $n=10\,000$ она будет $0,000071$ и соответственно $\tilde{\chi} = 8,4 \cdot 10^{-2}$ и $8,4 \cdot 10^{-3}$ [25].

На основе таблиц значений χ^2 [25] при вероятности 0,95% и разных значениях числа степеней свободы k выражения для оценки необходимого числа наблюдений при заданной относительной ошибке $\tilde{\chi}^2$ будут иметь вид:

$$\text{при } k=1 \quad N_1 = \frac{0,039}{\tilde{\chi}^2}; \quad (16,8,3)$$

$$\text{при } k=2 \quad N_2 = \frac{0,103}{\tilde{\chi}^2}; \quad (16\text{б}, 8, 3)$$

$$\text{при } k=3 \quad N_3 = \frac{0,352}{\tilde{\chi}^2}; \quad (16\text{в}, 8, 3)$$

$$\text{при } k=4 \quad N_4 = \frac{0,71}{\tilde{\chi}^2}; \quad (16\text{г}, 8, 3)$$

$$\text{при } k=5 \quad N_5 = \frac{1,14}{\tilde{\chi}^2}. \quad (16\text{д}, 8, 3)$$

Пусть для примера требуется достигнуть такой точности, при которой отклонение теоретических частот составляет 1% эмпирических. Тогда имеем

$$(v_i - P_i)^2 = 10^{-4} P_i^2 \quad (17, 8, 3)$$

и формула (15,8,3) дает

$$\tilde{\chi}^2 = 10^{-4} \sum_{i=1}^S P_i = 10^{-4}. \quad (18, 8, 3)$$

Согласно выражений (16а,8,3) и (16д,8,3) в этом случае получаем необходимое число наблюдений соответственно равным $N_1 = 390$, а $N_5 = 114 \cdot 10^2$.

Качественно такие же закономерности можно получить исходя из известного критерия Колмогорова, согласно которому вероятность того, что наибольшее расхождение Δ между теоретическим и эмпирическим интегральным законом распределения будет больше, чем $\frac{\lambda}{\sqrt{N}}$, т. е.

$$\Delta \geq \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \quad (19, 8, 3)$$

равна

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}. \quad (20, 8, 3)$$

Приближенно $P(\lambda) = 0,5$ при $\lambda \approx 0,52$. Следовательно, число наблюдений N связано с ошибкой Δ соотношением

$$N = \frac{0,27}{\Delta^2}. \quad (21, 8, 3)$$

В случае ошибки 1% формула (21,8,3) независимо от числа степеней свободы дает $N = 27 \cdot 10^2$.

4. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

1.4. Автокорреляционные функции и спектр мощности (спектральная плотность случайной функции)

Автокорреляционные функции широко используются в гидрометеорологии для описания временных и пространственных зависимостей. Вместо случайных величин при этом рассматриваются случайные процессы $X(t)$. Таким случайным процессом может быть изменение температуры, высоты изобарической поверхности во времени или вдоль круга постоянной широты и т. п. В общем случае случайный процесс характеризуется математическим ожиданием $MoX(t) = \bar{x}(t)$ или средней величиной, зависящей от времени (или координат). В качестве примера можно привести температуру воздуха, которая обладает заметным годовым ходом и некоторыми флюктуациями, меняющимися год от года. Многолетний средний годовое изменение температуры является неслучайной функцией — математическим ожиданием температуры. Изменение температуры во времени для определенного года называют конкретной реализацией случайного процесса, в данном случае — температуры. Для каждого данного момента t может быть вычислена дисперсия $Dis X(t)$, являющаяся неслучайной функцией от времени, а корень квадратный из нее дает среднее квадратическое отклонение случайного процесса. В гидрометеорологии нередко не учитывается изменение математического ожидания со временем, что может приводить к появлению ложных корреляций [12] (стр. 342).

Автоковариационной или ненормированной корреляционной функцией называют математическое ожидание произведений отклонений от средних, взятых в различные моменты времени t_1 и t_2 :

$$B_X(t_1, t_2) = \text{cov} [X(t_1), X(t_2)], \quad (1a, 1, 4)$$

или

$$B_X(t_1, t_2) = Mo \{ [X(t_1) - \bar{x}(t_1)] [X(t_2) - \bar{x}(t_2)] \}. \quad (1б, 1, 4)$$

Нормированная автокорреляционная функция или просто автокорреляционная функция определяется выражением

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{B_X(t_1, t_2)}{\sqrt{Dis X(t_1) Dis X(t_2)}} = \frac{B_X(t_1, t_2)}{\sqrt{B_X(t_1, t_1) B_X(t_2, t_2)}}. \quad (2, 1, 4)$$

Общие свойства автокорреляционной функции для стационарного случайного процесса следующие [23].

1. Симметричность относительно биссектрисы угла с координатами t_1, t_2 , выражающаяся равенством

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1). \quad (3,1,4)$$

2. Ограниченность ненормированной корреляционной функции, выражающаяся соотношением

$$B_X(t_1, t_2) \leq \sqrt{B_X(t_1, t_1) B_X(t_2, t_2)}. \quad (4,1,4)$$

3. Для любых функций $\varphi(t)$ и для любой области интегрирования L имеет место соотношение

$$\int_L \int_L B_X(t_1, t_2) \varphi(t_1) \overline{\varphi(t_2)} dt_1 dt_2 = \text{Mo} \left\{ \left| \int_L [x - \bar{x}(t)] \varphi(t) dt \right|^2 \right\} > 0, \quad (5,1,4)$$

а следовательно, корреляционная функция всегда определено положительна.

4. Корреляционная функция производной порядка p от случайной функции (производная от случайной функции определяется пределом в среднем квадратическом) равна смешанной производной порядка $2p$ от корреляционной функции величины $X(t)$

$$B_{X^{(p)}(t)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2p} B_X(t)(t_1, t_2)}{\partial t_1^p \partial t_2^p}. \quad (6,1,4)$$

5. Корреляционная функция от интеграла случайной функции

$$Y(t) = \int_0^t X(t) dt, \quad (7,1,4)$$

часто встречающегося в гидрометеорологии при анализе вековых колебаний климата, равна двухкратному интегралу от корреляционной функции случайного процесса

$$B_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} B_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (8,1,4)$$

6. Если случайную функцию или ее отклонение от средней, зависящей от координат, можно рассматривать как независимую от времени (или координат), то такая функция называется стационарной случайной функцией и обладает постоянной средней величиной и не зависящим от времени средним квадратичным отклонением.

Автокорреляционная функция для стационарного случайного процесса зависит только от разности координат или времени, но не меняется с изменением начального момента, т. е. для нее

$$B_X(t_1, t_2) = B_X(t_2 - t_1) \quad (9,1,4)$$

и, следовательно, автокорреляционная функция стационарного случайного процесса симметрична относительно начала координат, что можно записать в виде

$$B_X(\tau) = B_X(-\tau). \quad (10,1,4)$$

Это свойство требует, чтобы касательная к автокорреляционной стационарной функции линия в начале координат была горизонтальна, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\left. \frac{\partial B_X(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (11,1,4)$$

Это условие ограничивает возможность аппроксимации автокорреляционных функций стационарного процесса кривыми с максимумом при нулевом значении аргумента. К таким функциям относится выражение (16,5,3) для функции $-\widetilde{III}'(x)$, а также разложения в ряд (7,3,2) по ортогональным функциям $D_m(x)$ вида

$$D_m(x) = \sum_{k=1}^m a_k e^{-\frac{\beta_k^2 x^2}{2}} \quad (12,1,4)$$

[см., например, формулы (8,3,2) и (9,3,2)]. Аппроксимационные выражения, дающие скачок производной при нулевом значении аргумента, не годятся.

7. Корреляционные функции стационарного случайного процесса могут быть представлены в виде интеграла Фурье

$$B_X(\tau) = \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (13,1,4)$$

где $S_X(\omega)$ называют спектральной плотностью стационарной случайной функции. Она определяется выражением

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (14,1,4)$$

Из уравнения (13,1,4) при $\tau = t_2 - t_1 = 0$ следует, что

$$B_X(0) \equiv \text{Dis } X = \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (15,1,4)$$

8. Автоковариационная функция может быть представлена в виде канонического разложения

$$B_X(t_1, t_2) = \sum_v \text{Dis}_v x_v(t_1) x_v(t_2), \quad (16,1,4)$$

где Dis — дисперсии случайных величин V_v , имеющих математические ожидания, равные нулю и входящие в представление случайной величины $X(t)$ в виде ряда

$$X(t) = M_0 X(t) + \sum_v V_v x_v(t), \quad (17,1,4)$$

где $x_v(t)$ есть не случайные, так называемые координатные функции.

Общее выражение для координатных функций имеет вид

$$x_v(t) = \frac{1}{\text{Dis.}_v} \text{Mo} \{ [X - \bar{x}(t)] V_v \}. \quad (18,1,4)$$

При расчете по формуле (18,1,4) учитывается некоррелированность случайных величин между собой. Математическое ожидание вычисляется суммированием по разным реализациям величины $X(t)$, в процессе чего положительные и отрицательные отклонения взаимно компенсируются.

Рассмотрим образование корреляционной функции в случае, если реализации случайной функции $X(t)$ можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_1(t) - Mo\,X(t) &\equiv X'_1(t) = \sum_{\nu} V_{\nu,1} D_{\nu}(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) \\ &\vdots \\ X_k(t) - Mo\,X(t) &\equiv X'_k(t) = \sum_{\nu} V_{\nu,k} D_{\nu}(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) \end{aligned} \right\} (19,1,4)$$

Суммируя по всем индексам k от 1 до N , получаем слева и справа тождественно нули, так как по определению имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(t) &= \text{Mo}X(t) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V_{\nu, k} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20, 1, 4)$$

Возводя обе части каждого равенства из системы (19,1,4) в квадрат и суммируя, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [X_k(t) - \text{Mo } X(t)]^2 = \text{Dis } X(t) = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\sum_y V_{y,k} D_{y,k}(t; \alpha_1, \dots, \alpha_y) \right]^2. \end{aligned} \quad (21a, 1, 4)$$

Если случайные величины $V_{v, k}$ некоррелированы между собой, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left[\sum_{\nu} V_{\nu, k} D_{\nu}(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) \right]^2 &= \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{\nu} V_{\nu, k}^2 D_{\nu}^2(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) + \right. \\ &+ 2 \sum_{\nu} \sum_{\mu} V_{\nu, k} V_{\mu, k} D_{\nu}(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) D_{\mu}(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{\mu}) \left. \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{\nu} V_{\nu, k}^2 D_{\nu}^2(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) \end{aligned}$$

и выражение (21а,3,1) можно переписать в виде

$$\text{Dis } X(t) = \sum_v \text{Dis } \nu D_v^2(t; \alpha_1, \dots, \alpha_v). \quad (21б,1,4)$$

Равенство (21б,1,4) показывает, что дисперсия переменной $X(t)$ при наличии переменной во времени средней, такой как суточный или годовой ход, равна сумме дисперсий

$$\text{Dis } \nu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V_{\nu, k}^2 \quad (22,1,4)$$

коэффициентов при разных координатных функциях. Сравнивая выражения (21б,1,4) и (16,1,4), легко получить известное выражение

$$\text{Dis } X(t) = B_X(t, t), \quad (23,1,4)$$

что с конкретным видом координатных функций дает вместо равенства (16,3,1) следующее соотношение:

$$B_X(t_1, t_2) = \sum_v \text{Dis } \nu D_v(t_1; \alpha_1, \dots, \alpha_v) D_v(t_2; \alpha_1, \dots, \alpha_v). \quad (24,1,4)$$

Из выражения (24,1,4) следует, что автокорреляционные функции, описываемые разложением (16,1,4), убывают, иногда переходя через нуль, и по мере роста аргумента стремятся по абсолютной величине к нулю. В случае стационарного случайного процесса, когда средняя и дисперсия не зависят от времени, автокорреляционные функции также не зависят от времени, а являются функциями разности $\tau = t_2 - t_1$, о чем говорилось выше. Для них можно воспользоваться разложением

$$B_X(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_m(|\tau|; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (25,1,4)$$

или

$$B_X(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k D_k(\tau; \beta_1, \dots, \beta_k), \quad (26,1,4)$$

где ортогональные функции под знаком нормирования даются выражениями соответственно (5,1,1) или (8,3,1), (9,3,1) и (12,1,4). Возможно также использование для аппроксимации разложений по комплексным ортогональным функциям $D_m^*(z; \beta_1, \dots, \beta_m)$ (см. п. 2.1).

Выражения (24,1,4) и (25,1,4) легко дифференцируются и интегрируются, а следовательно, в соответствии со свойствами 4 и 5 по известной для случайной величины корреляционной функции можно без громоздких вычислений получить корреляционные функции для производной от нее [формула (6,4,1)] или от интеграла [формула (8,1,4)], т. е. для так называемых в климатологии интегральных сумм.

Аналогично, исходя из формул (25,1,4) и (26,1,4) нетрудно получить общее выражение для спектральной плотности стационарной случайной функции, даваемое равенством (14,1,4).

Для упрощения выкладок перепишем выражения (25,1,4) и (26,1,4) в виде:

$$B_X(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-|\tau| \alpha_m}; \quad (27,1,4)$$

$$B_X(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\beta_k^2 \tau^2}{2}}. \quad (28,1,4)$$

Подставляя выражение (27,1,4) в (14,1,4) и производя интегрирование, находим для экспоненциальной аппроксимации

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \alpha_m}{\alpha_m^2 + \omega^2}. \quad (29,1,4)$$

Аналогично для линейных комбинаций нормального закона формулы (28,1,4) и (14,1,4) дают спектральную плотность в виде ряда

$$S_X(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\beta_k} e^{-\frac{\omega^2}{2\beta_k^2}}. \quad (30,1,4)$$

Обе формулы дают убывание членов по мере роста частоты ω . При экспоненциальной зависимости увеличение декремента α_m ведет к убыванию членов ряда. Во втором случае декремент не монотонно влияет на величину членов ряда, имеющих максимум при значении $\beta_k = \hat{\beta}_k$, равном

$$\hat{\beta}_k = \frac{\omega}{\sqrt{2}}. \quad (31,1,4)$$

В обе стороны от этого максимума с изменением β_k идет монотонное убывание до нуля. Рассмотренный характер изменения в зависимости от декремента затухания может искажаться характером последовательности значений коэффициентов a_k .

Применим для аппроксимации выражения (16,1,4) формулу, основанную на ДЗР F_2

$$B_X(\tau) = C \frac{a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} (a_2 e^{-a_1 \tau} - a_1 e^{-a_2 \tau}), \quad (32,1,4)$$

где

$$C = \text{Dis } X \frac{a_2 + a_1}{a_1 a_2}. \quad (33,1,4)$$

Выражение (33,1,4) для нормирующей константы C находим в соответствии с условием (23,1,4), утверждающим, что автокорреляционная функция при аргументе нуль равна дисперсии. Теперь

получаем частное представление для корреляционной ненормированной функции в виде

$$B_X(\tau) = \frac{\text{Dis } X}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 \tau} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 \tau}), \quad (34,1,4)$$

производная от которой при $\tau=0$ обращается в нуль.

Найдем спектральную плотность стационарной случайной функции с корреляционной функцией (34,1,4). Подставляя выражение (34,1,4) в (14,1,4), имеем:

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \frac{2}{\pi} \frac{\text{Dis } X}{(\alpha_2 - \alpha_1)} \left\{ \frac{\alpha_2 \alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2^2 + \omega^2} \right\} = \\ &= \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \text{Dis } X}{\pi} \left[\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{(\alpha_1^2 + \omega^2)(\alpha_2^2 + \omega^2)} \right]. \end{aligned} \quad (35,1,4)$$

Легко видеть, что функция спектральной плотности, полученная по выражению (35,1,4), является существенно положительной величиной, как это и должно быть. С увеличением частоты спектральная плотность убывает.

Простейший случай закономерности (26,1,4) или (30,1,4) с одним членом $\alpha_1 = \text{Dis } X$, $\alpha_k = 0$ при $k > 1$ дает существенно положительную спектральную плотность с максимумом, вычисляемым по формуле (31,1,4).

Для иллюстрации способа применения свойств 4 и 5 корреляционных функций рассмотрим случай, когда имеется такая функция, например, для температуры воздуха в зависимости от разности времени $\tau = t_2 - t_1$

$$B_T(\tau) = \frac{\sigma_T^2}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 \tau} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 \tau}). \quad (36,1,4)$$

Требуется вычислить корреляционную функцию для тенденции температуры. Вместо громоздких пересчетов по первичным материалам можно сразу написать на основании формулы (6,1,4), что

$$\begin{aligned} B_{\frac{\partial T}{\partial t}}(\tau) &= \frac{\partial^2 B_T(t_2 - t_1)}{\partial t_1 \partial t_2} = - \frac{\partial^2 B_T(\tau)}{\partial \tau^2} = \\ &= - \frac{\sigma_T^2 \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_1 e^{-\alpha_1 \tau} - \alpha_2 e^{-\alpha_2 \tau}). \end{aligned} \quad (37,1,4)$$

При $\tau=0$ формула (37,1,4) в соответствии со свойством (15,1,4) дает дисперсию для тенденции в виде

$$B_{\frac{\partial T}{\partial t}}(0) = \alpha_1 \alpha_2 \sigma_T^2. \quad (38,1,4)$$

Теперь рассмотрим, какая автокорреляционная функция получится для интеграла от температуры, так часто применяемого

в сельскохозяйственной метеорологии в виде суммы положительных температур. На основании формулы (8,1,4) имеем

$$B_t \int_0^t \tau dt (\tau) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} B_T(t_2 - t_1) dt_2 dt_1. \quad (39,1,4)$$

Вычисление двойного интеграла (39,1,4) легко производится, если иметь в виду [24] (стр. 243), что, например, при $S < S'$

$$\begin{aligned} \int_0^S \int_0^{S'} e^{-\alpha |t-t'|} dt dt' &= \int_0^S \left\{ \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} dt' + \int_t^{S'} e^{-\alpha(t'-t)} dt' \right\} dt = \\ &= \frac{2}{\alpha} S + \frac{1}{\alpha^2} [e^{-\alpha S} + e^{-\alpha S'} - e^{-\alpha(S'-S)} - 1]. \end{aligned} \quad (40,1,4)$$

Учитывая выражения (40,1,4), (39,1,4) и (36,1,4), можно для корреляционной функции интеграла получить

$$\begin{aligned} B_t \int_0^t \tau dt (t_2, t_1) &= \frac{2\sigma_T^2}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \min\{t_2, t_1\} + \\ &+ \frac{\sigma_T^2}{\alpha_2 - \alpha_1} \left\{ \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} [e^{-\alpha_1 t_2} + e^{-\alpha_1 t_1} - e^{-\alpha_1 |t_2 - t_1|} - 1] - \right. \\ &\left. - \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} [e^{-\alpha_2 t_2} + e^{-\alpha_2 t_1} - e^{-\alpha_2 |t_2 - t_1|} - 1] \right\}. \end{aligned} \quad (41,1,4)$$

Нетрудно видеть, что двукратное дифференцирование этой формулы дает в соответствии с условием (6,3,1) корреляционную функцию самой температуры

$$\frac{\partial^2 B_t \int_0^t \tau dt (t_2, t_1)}{\partial t_2 \partial t_1} = B_T(t_2, t_1). \quad (42,1,4)$$

2.4. Примеры корреляционных функций, применяемых в гидрометеорологии

В практике изучения связанности гидрометеорологических процессов существует много попыток аппроксимировать автокорреляционную функцию различным способом. Каждый автор предлагает свою, более или менее удачную формулу. В применении к нормированной корреляционной функции они дают при $x=0$ единицу, хотя не всегда имеют производную в нулевой точке, равную нулю. Ненормированные корреляционные функции обычно при нулевом аргументе стремятся к дисперсии, но также не всегда имеют нулевую производную. Приведем некоторые примеры таких функций.

Наиболее близкой к формуле (34,1,4) является аппроксимация [17] ненормированной корреляционной функции для скорости ветра

$$R_{ff}(\tau) = \frac{\sigma_f^2}{1 - \alpha^2 T_0^2} \left(e^{-\alpha |\tau|} - \alpha T_0 e^{-\frac{|\tau|}{T_0}} \right). \quad (1,2,4)$$

При нуле она дает нулевую производную, а сама функция при этом обращается в величину, несколько меньшую дисперсии

$$R_{ff}(0) = \frac{\sigma_f^2}{1 + \alpha T_0}. \quad (2,2,4)$$

Малоинерционные измерения температуры воздуха на высоте 1 м посредством термометра сопротивления в полуденные часы августа 1961 г., произведенные в днепровской экспедиции УкрНИГМИ привели к корреляционной функции, также использующей линейную комбинацию экспонент, однако, с одинаковым знаком [1]

$$R_{ff}(\tau) = \sigma_f^2 (0,295 e^{-0,029 |\tau|} + 0,705 e^{-0,241 |\tau|}), \quad (3,2,4)$$

где $\sigma_f^2 = 0,46$ град.² Эта формула дает $R_{ff}(0) = \sigma_f^2$, но производная от нее при $\tau = 0$ отлична от нуля. Эта формула близка к функции F_{2y^*} (95,4,3). Смешанная форма автокорреляционной функции геопотенциала для поверхности 500 мб используется во многих работах. Например, в работе [30] имеется формула

$$r_{HH}(\rho) = (1 + \rho) e^{-\rho}, \quad (4,2,4)$$

где ρ — расстояние в тысячах километров. Она может быть представлена как частный случай более общего выражения

$$R_{xx}(\tau) = b_1 F_1 + b_2 F_2 = e^{-\alpha_1 \tau} + (e^{-\alpha_1 \tau} - e^{-\alpha_2 \tau}), \quad (5,2,4)$$

где $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta$, $\delta = \alpha_1$. В случае гипотезы о малости величины $\delta \cdot \tau$, когда $e^{-\alpha_2 \tau} \approx e^{-\alpha_1 \tau} (1 - \delta \tau)$, если обозначить $\delta \tau = \rho = \alpha_1 \tau$ получается формула (4,2,4).

Аппроксимация [31] корреляционной функции в виде

$$r_{HH}(\rho) = e^{-\left(\frac{\rho}{1,4}\right)^2} \quad (6,2,4)$$

практически является частным случаем разложения (28,1,4) при сохранении одного первого члена.

Близка к этому случаю формула [4]

$$r_{HH}(\rho) = e^{-0,664 \rho^{1,94}}. \quad (7,2,4)$$

Здесь показатель степени 1,94 очень мало отличается от двойки. Иногда применяемые выражения [26] вида

$$r_{HH}(\rho) = e^{-0,29\rho} \cos(0,70\rho) \quad (8,2,4)$$

могут быть аппроксимированы комплексными ортогональными функциями $D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$, полученными по формулам (10,2,1),

(17,2,1), (18—21,2,1). Выражение (8,2,4) обращается в единицу при $\rho=0$, но имеет не нулевую производную, что отмечается и для функции [23]

$$r_{HH}(\rho) = \frac{\sin(1,51\rho)}{1,51\rho} e^{-0,25\rho}. \quad (9,2,4)$$

Более сложное произведение используется в работе [5], где один из множителей является функцией Бесселя нулевого порядка

$$r_{HH}(\rho) = e^{-0,195\rho^{1,5}} J_0(1,065\rho). \quad (10,2,4)$$

Разложение коэффициента корреляции в ряд по функциям $D_m(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ с последующим переходом к ряду по экспонентам было использовано в работе [13]. Сначала было найдено для суточных сумм осадков значение коэффициента корреляции между центральной реперной станцией и отдельными кольцевыми зонами шириной 5 км и радиусами, кратными 5 км. Коэффициенты корреляции вычислялись с учетом длительности выпадения осадков в течение суток. Было получено выражение

$$1 - r(\tau) = \sum_{m=1}^N b_m(l_i) D_m(\tau; \alpha_1(l_i), \dots, \alpha_m(l_i)), \quad (11,2,4)$$

где параметры α_k оказались функциями от расстояния до кольцевой зоны. Оно определялось по формуле

$$\tilde{l}_i = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} l_{ik}}{m_i}, \quad (12,2,4)$$

где $l_{i,k}$ — расстояние от реперной станции до станции N_k , находящейся в кольцевой зоне N_i . Для упрощения выкладок вся область была разделена на две подобласти, для которых конкретные зависимости имели вид:

в подобласти с расстояниями от 3,33 до 12,66 км

$$1 - r = (0,140 + l \cdot 0,006) e^{-0,139\tau} + 0,814 e^{-(1,540 - 0,045l)\tau}; \quad (13,2,4)$$

в подобласти с расстояниями от 17,62 до 27,50 км

$$1 - r = (0,140 + l \cdot 0,006) e^{-0,139\tau} + (0,730 + l \cdot 0,006) e^{-(1,053 - 0,013l)\tau}. \quad (14,2,4)$$

Полезно отметить, что приведенные разнотипные корреляционные функции можно было бы переразложить в ряд по ортогональным экспоненциальным функциям оптимальным образом. Покажем возможность переразложения на примере функции вида (6,2,4).

Рассмотрим более подробно способ определения первого коэффициента b_1 разложения функции $e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}}$ в ряд по ортогональным функциям $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. По общей теории имеем

$$b_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} D_1(x; \alpha_1) dx = \sqrt{2\alpha_1} \int_0^\infty e^{-\alpha_1 x - \frac{\beta^2 x^2}{2}} dx. \quad (15,2,4)$$

Воспользуемся известной формулой из операционного исчисления [6] (стр. 202), которая дает для

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad F(p) = p e^{p^2} \operatorname{erfc}(p). \quad (16,2,4)$$

Следовательно, можно написать

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{\beta} e^{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \int_{\frac{\alpha}{\beta\sqrt{2}}}^\infty e^{-u^2} du. \quad (17,2,4)$$

Подставляя (17,2,4) в (15,2,4), имеем

$$b_1 = \frac{2\sqrt{\alpha_1}}{\beta} e^{\frac{\alpha_1^2}{2\beta^2}} \int_{\frac{\alpha_1}{\beta\sqrt{2}}}^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sqrt{x} e^{x^2} [1 - \Phi(x)], \quad (18,2,4)$$

$$\text{где } x = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}\beta}, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Найдем экстремальное значение α_1 , дающее максимальное значение b_1 . Для этого, согласно п. 4.1, дифференцируем выражение (18,2,4) по α_1 и приравняем результат нулю

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} = \frac{2}{\beta} \left\{ \left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}} e^{\frac{\alpha_1^2}{2\beta^2}} + \sqrt{\alpha_1} \frac{\alpha_1}{\beta^2} e^{\frac{\alpha_1^2}{2\beta^2}} \right] \int_{\frac{\alpha_1}{\beta\sqrt{2}}}^\infty e^{-u^2} du - \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\beta\sqrt{2}} \right\} = 0. \quad (19,2,4)$$

Можно показать, что такое экстремальное значение существует, причем $0 < \alpha_1 < \infty$. Как известно [28] (стр. 15—16),

$$\int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(x)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(x - \frac{x^3}{113} + \frac{x^5}{215} - \dots \right). \quad (20,2,4)$$

Кроме того, имеет место асимптотическое разложение

$$\int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi \sim \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2}}{x} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \dots \right]. \quad (21,2,4)$$

В соответствии с этим выражение (19,2,4) для малых $x = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}\beta}$ можно написать в виде

$$\frac{\sqrt{\alpha_1} \beta}{2} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} \approx \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma_1^2}{\beta^2} \right) e^{\frac{\alpha_1^2}{2\beta^2}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(x - \frac{x^3}{113} + \dots \right) \right] - \frac{\alpha_1}{\beta \sqrt{2}} \right\} = 0, \quad (22,2,4)$$

или в более удобной форме, вводя везде x :

$$\frac{\sqrt{\alpha_1} \beta}{4} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} \approx \left\{ \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) e^{x^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - x \right] - \frac{1}{2} x \right\}. \quad (23,2,4)$$

Из (23,2,4) видно, что при $x=0$ фигурная скобка больше нуля и, следовательно, величина b_1 должна расти с ростом x , т. е. $\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} > 0$ при $x=0$.

Используем асимптотическое представление (21,2,4), тогда имеем

$$\frac{\beta \sqrt{\alpha_1}}{4} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} = \left\{ \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) e^{x^2} \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2}}{x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \dots \right) - 2x \right\} = 0. \quad (24,2,4)$$

Отсюда при $x \rightarrow \infty$ фигурная скобка отрицательна, а величина b_1 убывает. Следовательно, существует такое значение $\alpha_1 = \hat{\alpha}_1$, при котором $b_1 = b_{1, \text{макс}}$. Будем искать место максимума численно, преобразовав выражение (19,2,4) к виду

$$\frac{\beta \sqrt{\alpha_1}}{4} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} = \left\{ \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) e^{x^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(x)] - \frac{x}{2} \right\}. \quad (25,2,4)$$

Пользуясь методом дихотомии и беря за начальные значения $x=0,2$ и $x=1$, вычисляем уже на третьем шаге, что знак производной меняется между значениями $x=0,6$ и $x=0,7$, т. е. корнем является приближенная величина $\hat{x} \approx 0,65$ или $\hat{\alpha}_1 = 0,65 \cdot \sqrt{2}\beta$. При этом

$$\hat{b}_1 = 0,440 \frac{\sqrt{\pi \sqrt{2}}}{\sqrt{\beta}}. \quad (26,2,4)$$

Произвольный коэффициент Фурье такого переразложения имеет вид

$$b_m = \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx. \quad (27,2,4)$$

Если

$$D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m c_{km} e^{-\alpha_k x}, \quad (28,2,4)$$

то выражение (27,2,4) с учетом (17,2,4) дает

$$b_m = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sum_{k=1}^m c_{km} e^{\frac{\alpha_k^2}{2\beta^2}} \int_{\frac{\alpha_k}{\beta\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (29,2,4)$$

Здесь все α_k при $k < m$ определены на предыдущем шаге и для оптимизации разложения требуется определить лишь коэффициент α_m . Так, например, для второй ортогональной функции имеем

$$b_2 = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \frac{2\sqrt{2}\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} e^{\frac{\alpha_2^2}{2\beta^2}} \int_{\frac{\alpha_2}{\beta\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-u^2} du - e^{\frac{\alpha_1^2}{2\beta^2}} \int_{\frac{\alpha_1}{\beta\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-u^2} du \right], \quad (30,2,4)$$

где величина α_1 уже найдена и уточнению подлежит только величина α_2 , что не представляет принципиальных трудностей.

3.4. К использованию функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ при статистических прогнозах

Предположим, что нам известна функциональная зависимость от времени $X(t)$ метеорологической характеристики X на интервале от $-\infty$ до момента $t = t_0$. По этой зависимости требуется вычислить ожидаемое значение характеристики в момент $t = t_0 + \Delta t$, которое обозначим $X^*(t_0 + \Delta t)$.

В соответствии с теорией Винера—Колмогорова ищут такую оптимальную функцию влияния или импульсную переходную функцию $W(\tau, \Delta t)$, которая с наименьшей средней квадратичной ошибкой $\bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon_{\min}^2$ позволяет производить вычисления по формуле

$$X^*(t_0 + \Delta t) = \int_0^{\infty} W(\tau, \Delta t) X(t_0 - \tau) d\tau. \quad (1,3,4)$$

Если здесь функция X взята как отклонение от нормы и ее математическое ожидание равно нулю, то умножая обе части выражения (1,3,4) на $X(t)$ и производя осреднение в предположении, что

$$\overline{X(t_0) X(t_0 - \tau)} = K_x(\tau), \quad (2a,3,4)$$

$$\overline{X^*(t_0 + \Delta t) X(t_0)} = K_x(\Delta t) \quad (2б,3,4)$$

есть автоковариационные функции, то вместо (1,3,4) получают

$$K_x(\Delta t) = \int_0^{\infty} W(\tau, \Delta t) K_x(\tau) d\tau. \quad (3,3,4)$$

Пусть автоковариационные функции имеют вид

$$K_x(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m D_m(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (4,3,4)$$

тогда функция влияния в уравнении (3,3,4) может быть представлена в виде ряда с неизвестными коэффициентами

$$W(\tau, \Delta t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k D_k(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_k) D_k(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_k). \quad (5,3,4)$$

Подстановка выражений (4,3,4) и (5,3,4) в (3,3,4) и учет ортонормированности функций D_m дает после интегрирования

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m D_m(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m b_m D_m(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (6,3,4)$$

откуда следует, что при $b_m \neq 0$ $\mu_m = 1$, а при $b_m = 0$ μ_m может быть произвольным. Последнее известно из общих свойств интегральных уравнений 1-го рода.

С учетом сказанного формула (5,3,4) для функции влияния принимает вид

$$W(\tau, \Delta t) = \sum_m D_m(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_m) D_m(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (7,3,4)$$

где суммирование, строго говоря, должно производиться для тех индексов, при которых $b_m \neq 0$. Так, например, если

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \frac{[N_2 Q_1 - N_1 Q_2]}{Q_1 D_2(0; \alpha_1, \alpha_2) - Q_2 D_1(0; \alpha_1)} F_2(\tau) = \\ &= \frac{Q_1 D_2(\tau; \alpha_1, \alpha_2) - Q_2 D_1(\tau; \alpha_1)}{Q_1 D_2(0; \alpha_1, \alpha_2) - Q_2 D_1(0; \alpha_1)}, \end{aligned} \quad (8,3,4)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\alpha_1 \sqrt{2\alpha_1}, \quad Q_2 = -(2\alpha_1 + \alpha_2) \sqrt{2\alpha_2}, \\ N_2 &= \sqrt{\frac{2}{\alpha_2}}, \quad N_1 = \sqrt{\frac{2}{\alpha_1}}, \end{aligned} \quad (9,3,4)$$

то

$$b_1 = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{2\alpha_1}(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (10,3,4)$$

$$b_2 = -\frac{\alpha_1}{\sqrt{2\alpha_2}(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (11,3,4)$$

а функция влияния может быть записана в виде

$$W(\tau, \Delta t) = D_1(\tau, \alpha_1) D_1(\Delta t; \alpha_1) + D_2(\tau; \alpha_1, \alpha_2) D_2(\Delta t; \alpha_1, \alpha_2), \quad (12,3,4)$$

или

$$W(\tau, \Delta t) = 2\alpha_1 e^{-\alpha_1(\tau + \Delta t)} + \frac{8\alpha_1^2 \alpha_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \left[\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} \right)^2 e^{-\alpha_2(\tau + \Delta t)} + e^{-\alpha_1(\tau + \Delta t)} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} (e^{-\alpha_2\tau - \alpha_1\Delta t} + e^{-\alpha_2\Delta t - \alpha_1\tau}) \right]. \quad (13,3,4)$$

Средняя квадратичная ошибка прогноза обычно находится вычитанием из обеих частей равенства (13,4) истинного значения $X(t + \Delta t)$ с последующим возведением в квадрат и осреднением. Тогда имеем для среднего квадрата ошибки прогноза следующее общее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 &= [X^*(t + \Delta t) - X(t + \Delta t)]^2 = [X^*(t + \Delta t)]^2 + [X(t + \Delta t)]^2 - \\ &\quad - 2 \int_0^\infty W(\tau + \Delta t) \overline{X(t + \Delta t) X(t - \tau)} d\tau = \\ &= K_{x^*}(0) + K_x(0) - 2 \int_0^\infty W(\tau + \Delta t) K_x(\tau + \Delta t) d\tau. \end{aligned} \quad (14,3,4)$$

Если соотношение (3,3,4) переписать в виде

$$K_x(\Delta t) = \int_0^\infty W(\tau + \Delta t) K_x(\tau) d\tau, \quad (15,3,4)$$

то интеграл в правой части равенства (14,3,4), после замены переменных

$$\tau + \Delta t = \xi, \quad (16,3,4)$$

примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W(\tau + \Delta t) K_x(\tau + \Delta t) d\tau &= \int_{\Delta t}^\infty W(\xi) K_x(\xi) d\xi = \\ &= K_x(0) - \int_0^{\Delta t} W(\xi) K_x(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (17,3,4)$$

Если в выражении (14,3,4) принять $K_{x^*}(0) = K_x(0)$ и подставить туда (17,3,4), то средний квадрат ошибки будет равен

$$\bar{\varepsilon}^2 = 2 \int_0^{\Delta t} W(\xi) K_x(\xi) d\xi. \quad (18,3,4)$$

Из формулы (18,3,4) следует, что при выполнении равенства (15,3,4) ошибка прогноза будет расти с увеличением заблаговременности Δt от нулевого значения при $\Delta t = 0$ и до $2K_x(0)$ при $\Delta t \rightarrow \infty$. Если прогнозируемая величина $X^*(t + \Delta t)$ имеет корреляционную функцию $K_{x^*}(\Delta t)$, отличающуюся от $K_x(\Delta t)$, т. е. если ин-

тегральное уравнение (15,3,4) решается лишь приближенно, то ошибка будет

$$\bar{\varepsilon}^2 = K_{x^*}(0) + K_x(0) - 2K_{x^*x}(0). \quad (19,3,4)$$

Обозначим коэффициент корреляции между фактической и прогнозированной величиной символом r . Тогда можно написать

$$K_{x^*x}(0) = r\sigma_{x^*}\sigma_x, \quad (20,3,4)$$

где

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0)}, \quad \sigma_{x^*} = \sqrt{K_{x^*}(0)}. \quad (21,3,4)$$

Выражение (19,3,4) с учетом (20,3,4) показывает, что средний квадрат ошибки при коэффициенте корреляции $r=1$ делается минимальным и равным

$$\bar{\varepsilon}^2 = [\sigma_{x^*} - \sigma_x]^2, \quad (22,3,4)$$

тогда как при отсутствии корреляции, когда $r=0$, имеем

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sigma_{x^*}^2 + \sigma_x^2 = K_{x^*}(0) + K_x(0). \quad (23,3,4)$$

По существу оба эти случая являются предельными, так как вариант с $r=-1$, который дает

$$\bar{\varepsilon}^2 = [\sigma_{x^*} + \sigma_x]^2, \quad (24,3,4)$$

не представляет интереса для прогнозирования.

Таким образом, средний квадрат ошибки прогнозирования по схеме Винера—Колмогорова практически заключается в пределах $K_{x^*}(0) + K_x(0) - 2\sqrt{K_{x^*}(0)K_x(0)} < \bar{\varepsilon}^2 < K_{x^*}(0) + K_x(0)$. (25,3,4)

Если исходить из выражения (15,3,4), обобщив его к виду

$$K(\delta) = \int_0^\infty W(\tau+a+\delta)K(\tau+a)d\tau, \quad (26,3,4)$$

то это будет равносильно частному случаю оператора $\mathcal{E}^-(\varphi)$, преобразующему функцию $K(\psi)$ в функцию $K(\varphi-\psi)$. В общем случае операцию экстраполяции можно записать в виде

$$\mathcal{E}^-(\varphi)*K(\psi) = K(\varphi-\psi) \quad (27a,3,4)$$

или, если обозначить

$$\varphi - \psi = \delta \quad (28,3,4)$$

$$\mathcal{E}^-(\psi+\delta)*K(\psi) = K(\delta). \quad (27b,3,4)$$

Применительно к прогнозу элемента $T(t)$, например, температуры, высоты изобарической поверхности или некоторого четырехмерного параметра с заблаговременностью Δt можно написать

$$\mathcal{E}^+(\tau+\Delta t)*T(t-\tau) = T[(\tau+\Delta t)+(t-\tau)] = T(t+\Delta t). \quad (29,3,4)$$

В формуле (29,3,4) оператор $\mathcal{E}^-$ заменен на $\mathcal{E}^+$, имея в виду, что при умножении справа обеих частей равенства и осреднении получаем:

$$\left. \begin{aligned} \overline{T(t-\tau) T(t)} &= K(-\tau) \\ \overline{T(t+\Delta t) T(t)} &= K(\Delta t) \end{aligned} \right\} \quad (30,3,4)$$

Оператор $\mathcal{E}^+$ дает алгебраическую сумму аргументов

$$\mathcal{E}^+(\varphi) * K(\psi) = K(\varphi + \psi) \quad (31,3,4)$$

или по аналогии с (29,3,4)

$$\mathcal{E}^+(\tau + \Delta t) * K(-\tau) = K(\Delta t). \quad (32,3,4)$$

Сравнение равенств (29,3,4) и (32,3,4) показывает, что оператор $\mathcal{E}^+$, переводящий функцию аргумента ψ или $t - \tau$ в функцию от алгебраической суммы аргументов $\psi + \varphi$ или $(t - \tau) + (\tau + \Delta t)$ и т. п., в одном случае применяется к четной функции ($K(-\tau) = K(\tau)$ при стационарном процессе), а в другом к нечетной, какой является, вообще говоря, аномалия температуры $T(t - \tau)$ относительно точки $\tau = 0$. Это создает определенные трудности в определении оператора, так как, заменив в выражении (32,3,4) $K(-\tau)$ на равную ему величину $K(\tau)$, для получения в правой части равенства величины $K(\Delta t)$ следует также заменить оператор $\mathcal{E}^+$ на $\mathcal{E}^-$ и воспользоваться соотношением (27,3,4). Рассмотрим сначала такой случай, когда оператор представляет собой следующий алгоритм: прогнозируемый элемент $T(t_0 - \tau)$ представляется в виде разложения в ряд

$$T(t_0 - \tau) = \sum b_m(t_0) D_m(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (33,3,4)$$

где параметры α_k [1] подбираются по корреляционной функции для оптимального ее представления наиболее коротким рядом

$$K(-\tau) = \sum \beta_m D_m(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (34,3,4)$$

Если процесс стационарен, то умножая обе части (33,3,4) на $T(t_0 - \tau)$ и интегрируя по τ от 0 до ∞ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T(t_0 - \tau) T(t'_0 - \tau) d\tau &= \sum_{m,k} \int_0^\infty b_m(t_0) b_k(t'_0) D_m(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \times \\ &\times D_k(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_k) d\tau = \sum_m b_m(t_0) b_m(t'_0) = K(t_0 - t'_0). \end{aligned} \quad (35,3,4)$$

Последний знак равенства в выражении (35,3,4) будет иметь силу, если независимо от разности $t_0 - t'_0 = \Delta t \geq 0$ можно написать

$$\sum_m b_m(t_0) b_m(t'_0) = \sum_m \beta_m D_m(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (36,3,4)$$

Поскольку ряд (33,3,4) определен при $t \leq t_0 - \tau$, где $\tau \geq 0$, а оператор $\mathcal{E}^+$ дает функцию для области $t \geq t_0$, то следует построить

продолжение рассматриваемой функции в область $t \geq t_0$. Такое продолжение естественно искать в виде ряда

$$T^*(t_0 + \Delta t) = \sum_m \tilde{b}_m(t_0) D_m(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (37,3,4)$$

где декременты α_k те же, что и в (33,3,4), а коэффициенты Фурье $\tilde{b}_m$ находятся из условия сопряжения при $t = t_0$ самой функции и ее производных. Такое определение оператора пригодно для экстраполяции как симметричных функций вида (32,3,4), так и несимметричных.

Условие сопряжения функции и производных имеет вид:

$$T(t_0) = T^*(t_0); \quad (38,3,4)$$

$$\left. \frac{\partial^{2n+1} T(t_0 - \tau)}{\partial \tau^{2n+1}} \right|_{\tau=0} = - \left. \frac{\partial^{2n+1} T^*(t_0 + \Delta t)}{\partial (\Delta t)^{2n+1}} \right|_{\Delta t=0}; \quad (39,3,4)$$

$$\left. \frac{\partial^2_n T(t_0 - \tau)}{\partial \tau^2_n} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial^2_n T^*(t_0 + \Delta t)}{\partial (\Delta t)^2_n} \right|_{\Delta t=0}. \quad (40,3,4)$$

Подстановка разложений (33,3,4) и (37,3,4) в условия сопряжения (38,3,4) — (40,3,4) дает систему уравнений, позволяющую определить, сколько получено коэффициентов Фурье $\tilde{b}_m$ и сколько взято условий сопряжения.

Обозначая для краткости производные от ортонормированных функций при нулевом аргументе в виде

$$\left. \frac{\partial^k D_m(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial \tau^k} \right|_{\tau=0} = D_m^{(k)}(0). \quad (41,3,4)$$

Эту систему можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{2n} \tilde{b}_m D_m(0) &= \sum_{m=1}^{2n} b_m D_m(0) \\ \sum_{m=1}^{2n} \tilde{b}_m D_m^{(2k-1)}(0) &= - \sum_{m=1}^{2n} b_m D_m^{(2k-1)}(0) \\ \sum_{m=1}^{2n} \tilde{b}_m D_m^{(2k)}(0) &= \sum_{m=1}^{2n} b_m D_m^{(2k)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (42,3,4)$$

при $k = 1, 2, \dots, n$.

Бесконечно большое число членов из системы (42,3,4) определить, вообще говоря, нельзя, а если в каких-то частных случаях было бы и возможно, то это не имело бы практического смысла, так как чем выше порядок производной, тем менее точно она соответствует истинной кривой в силу наличия ошибок наблюдений и округлений. Поэтому целесообразно ограничиваться первыми несколькими членами. Рассмотрим для примера три случая: а) сопряжения только самой функции; б) сопряжения функции и первой производной; в) сопряжения вплоть до второй производной.

Случай (а) является наиболее простым и соответствует симметричным относительно точки $t=t_0$ функциям. Для него оператор $\mathcal{E}^+$ соответствует следующему частному преобразованию

$$\mathcal{E}^+(\tau+\Delta t)^* T(t_0-\tau) = D_1(\Delta t) \int_0^\infty T(t_0-\tau) D_1(\tau; \alpha_1) d\tau. \quad (43,3,4)$$

Это симметричное преобразование может быть обобщено на более сложные симметричные кривые в предположении равенства всех производных, причем в условии (42,3,4) для нечетных производных не ставится знак минус (—). Тогда оказывается, что $\tilde{b}_m = b_m$ и операция преобразования имеет вид скалярного произведения двух векторов

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+(\tau+\Delta t)^* T(t_0-\tau) = & \left(\int_0^\infty T(t_0-\tau) D_1(\tau; \alpha_1) d\tau \mathbf{i}_1 + \dots + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty T(t_0-\tau) D_n(\tau; \alpha_1, \alpha_n) d\tau \mathbf{i}_n, \right. \\ & \left. D_1(\Delta t; \alpha_1) \mathbf{i}_1 + D_2(\Delta t; \alpha_1, \alpha_2) \mathbf{i}_2 + \dots \right) = \sum_{m=1}^n b_m D_m(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \end{aligned} \quad (44,3,4)$$

Выражение (44,3,4) соответствует интегральному уравнению (3,3,4) с функцией влияния (5,3,4).

Случай (б) соответствует экстраполяции с сохранением величины аномалии и тангенса угла наклона в точке $t=t_0$. Общие условия (42,3,4) для случая (б) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_1 D_1(0) + \tilde{b}_2 D_2(0) &= b_1 D_1(0) + b_2 D_2(0) \\ \tilde{b}_1 D_1^{(1)}(0) + \tilde{b}_2 D_2^{(1)}(0) &= -b_1 D_1^{(1)}(0) - b_2 D_2^{(1)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (45,3,4)$$

Решение системы (45,3,4) дает следующую матричную форму определения коэффициентов $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{(D_1 D_2)'}{\Delta}, & -\frac{(D_2^2)'}{\Delta} \\ -\frac{(D_1^2)'}{\Delta}, & \frac{(D_1 D_2)'}{\Delta} \end{pmatrix}_{\tau=0} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \int_0^\infty T(t_0-\tau) D_1(\tau; \alpha_1) d\tau \\ \int_0^\infty T(t_0-\tau) D_2(\tau; \alpha_1, \alpha_2) d\tau \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46,3,4)$$

Вся операция прогнозирования для случая (б) имеет вид

$$(\mathcal{E}^+(\tau + \Delta t)^* T(t_0 - \tau)) = \begin{pmatrix} D_1(\Delta t; \alpha_1), & 0 \\ 0, & D_2(\Delta t; \alpha_1, \alpha_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix}. \quad (47,3,4)$$

Здесь введены обозначения:

$$(D_i D_j)' = \frac{\partial}{\partial \tau} [D_i(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_i) D_j(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_j)]_{\tau=0} \quad (48,3,4)$$

$$\Delta = D_1 D_2' - D_1' D_2, \quad (49,3,4)$$

причем

$$D_1 = D_1(0; \alpha_1); \quad D_2 = D_2(0; \alpha_1, \alpha_2);$$

$$D_j' = \frac{\partial}{\partial \tau} [D_j(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_j)]_{\tau=0};$$

$$D_m(\Delta t) = D_m(\Delta t; \alpha_1, \dots, \alpha_m). \quad (50,3,4)$$

Общие выражения первых производных через сами функции даны в п. 3.2.

В случае (в) требуется решить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_1 D_1 + \tilde{b}_2 D_2 + \tilde{b}_3 D_3 &= b_1 D_1 + b_2 D_2 + b_3 D_3 \\ \tilde{b}_1 D_1' + \tilde{b}_2 D_2' + \tilde{b}_3 D_3' &= -b_1 D_1' - b_2 D_2' - b_3 D_3' \\ \tilde{b}_1 D_1'' + \tilde{b}_2 D_2'' + \tilde{b}_3 D_3'' &= b_1 D_1'' + b_2 D_2'' + b_3 D_3'' \end{aligned} \right\}, \quad (51,3,4)$$

Вся операция прогнозирования для случая (в) в условной матричной форме имеет вид:

$$(\mathcal{E}^+(\tau + \Delta t)^* T(t_0 - \tau)) = \begin{pmatrix} D_1(\Delta t), & 0, & 0, \\ 0, & D_2 \Delta t, & 0, \\ 0, & 0, & D_3(\Delta t) \end{pmatrix} \times$$

$$\left(\begin{aligned} &1 + \frac{2D_1'}{\Delta} (D_2 D_3'' - D_2'' D_3), \quad \frac{2D_2'}{\Delta} (D_2 D_3'' - D_2'' D_3), \quad \frac{2D_3'}{\Delta} (D_2 D_3'' - D_2'' D_3); \\ &-\frac{2D_1'}{\Delta} (D_1 D_3'' - D_1'' D_3), \quad 1 - \frac{2D_2'}{\Delta} (D_1 D_3'' - D_1'' D_3), \quad -\frac{2D_3'}{\Delta} (D_1 D_3'' - D_1'' D_3) \\ &\frac{2D_1'}{\Delta} (D_1 D_2'' - D_1'' D_2), \quad \frac{2D_2'}{\Delta} (D_1 D_2'' - D_1'' D_2), \quad 1 + \frac{2D_3'}{\Delta} (D_1 D_2'' - D_1'' D_2) \end{aligned} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \int_0^\infty T(t_0 - \tau) D_1(\tau) d\tau \\ \int_0^\infty T(t_0 - \tau) D_2(\tau) d\tau \\ \int_0^\infty T(t_0 - \tau) D_3(\tau) d\tau \end{pmatrix}. \quad (52,3,4)$$

Выражения для вторых производных следующие:

$$\frac{\partial^2 D_1(x; a_1)}{\partial x^2} = a_1^2 D_1(x; a_1); \quad (53,3,4)$$

$$\frac{\partial^2 D_2(x; a_1, a_2)}{\partial x^2} = a_2^2 D_2(x; a_1, a_2) + 2(a_1 + a_2) \sqrt{a_1 a_2} D_1(x; a_1); \quad (54,3,4)$$

$$\frac{\partial^2 D_3(x; a_1, a_2, a_3)}{\partial x^2} = a_3^2 D_3(x; a_1, a_2, a_3) + 2(a_2 + a_3) \times$$

$$\times \sqrt{a_2 a_3} D_2(x; a_1, a_2) + 2(a_1 + 2a_2 + a_3) \sqrt{a_1 a_3} D_1(x; a_1). \quad (55,3,4)$$

Формулы (44,3,4) и матричные представления операции прогнозирования (47,3,4) и (52,3,4) решают задачи (б) и (в).

В заключение рассмотрим, каким должен быть оператор $W(\Delta t + \tau)$ для того, чтобы после интегрирования по схеме (17,3,4) он переводил функцию $K(\tau + b)$ в $K(a - b)$. Прежде чем перейти к преобразованиям полезно привести вспомогательные соотношения, связывающие ортогональные экспоненциальные функции от суммы аргументов $x + y$ с x и y . Эти соотношения для первых двух функций имеют вид:

$$D_1(x + y; a_1) = \frac{1}{\sqrt{2a_1}} D_1(x; a_1) D_1(y; a_1) \quad (56,3,4)$$

$$D_2(x + y; a_1, a_2) = \gamma_{22} D_2(x; \dots) D_2(y; \dots) + \gamma_{12} [D_2(x; \dots) D_1(y; \dots) + D_1(x; \dots) D_2(y; \dots)] - \gamma_{11} D_1(x; a_1) D_1(y; a_2), \quad (57,3,4)$$

где

$$\gamma_{22} = \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{2a_2}(a_1 + a_2)}, \quad \gamma_{12} = \frac{\sqrt{2a_1}}{a_1 + a_2}, \quad \gamma_{11} = \frac{\sqrt{2a_2}}{a_1 + a_2}. \quad (58a, б, в, 3,4)$$

Получение соотношений (56,3,4) и (57,3,4) не представляет труда, если учесть, что

$$e^{-a_1 x} = \frac{1}{\sqrt{2a_1}} D_1(x; a_1), \quad (59,3,4)$$

$$e^{-a_2 x} = \gamma_{22} D_2(x; a_1, a_2) + \gamma_{12} D_1(x; a_1) \quad (60,3,4)$$

и подставить их в соответствующие формулы для функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (см. п. 1.1).

Перейдем к рассмотрению, какова должна быть функция влияния $W(\tau+a)$ для того, чтобы удовлетворялось интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} W(\tau+a) K(\tau+b) d\tau = K(a-b). \quad (61,3,4)$$

Введем обозначение

$$a-b=\delta. \quad (62,3,4)$$

Тогда прогностическое интегральное уравнение переписывается в виде

$$\int_0^{\infty} W(\tau+b+\delta) K(\tau+b) d\tau = K(\delta). \quad (63,3,4)$$

Воспользуемся представлением

$$W(\tau+b+\delta) = \mu_1 D_1(\tau+b+\delta; \alpha_1) + \mu_2 D_2(\tau+b+\delta; \alpha_1, \alpha_2); \quad (64,3,4)$$

и

$$K(\tau+b) = b_1 D_1(\tau+b; \alpha_1) + b_2 D_2(\tau+b; \alpha_1, \alpha_2); \quad (65a,3,4)$$

$$K(\delta) = b_1^+ D_1(\delta; \alpha_1) + b_2^+ D_2(\delta; \alpha_1, \alpha_2), \quad (65b,3,4)$$

где в дальнейшем, ради краткости, будем опускать символы декрементов, оставляя в скобках только значения аргументов, т. е. записывая ортогональные функции в виде

$$D_m(\tau+b; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = D_m(\tau+b). \quad (66,3,4)$$

Подстановка выражений (64,3,4) — (66,3,4) в (63,3,4) дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [\mu_1 D_1(\tau+b+\delta) + \mu_2 D_2(\tau+b+\delta)] [b_1 D_1(\tau+b) + \\ + b_2 D_2(\tau+b)] d\tau = b_1^+ D_1(\delta) + b_2^+ D_2(\delta). \end{aligned} \quad (67,3,4)$$

Производя интегрирование с учетом условий ортонормированности и формул разложения функций от суммарного аргумента (56,3,4) — (57,3,4), можно после выкладок из выражения (67,3,4) получить соотношения для вычисления коэффициентов μ_k :

$$\begin{aligned} \mu_2 = \frac{b_2^+}{[\gamma_{22} D_2(b) + \gamma_{12} D_1(b)] \left\{ b_2 \gamma_{22} [\gamma_{22} D_2(b) + \gamma_{12} D_1(b)] + \right. \\ \left. + \gamma_{12} \left[b_1 \frac{D_1(b)}{\sqrt{2\alpha_1}} + b_2 (\gamma_{12} D_2(b) - \gamma_{11} D_1(b)) \right] \right\}}; \end{aligned} \quad (68,3,4)$$

$$\mu_1 = \frac{2\alpha_1}{D_1(b)} \times \frac{b_1^+ - \mu_2 [\gamma_{12} D_2(b) + \gamma_{11} D_1(b)] b_2 \left[\gamma_{12} \frac{D_1(b)}{\sqrt{2\alpha_1}} + \gamma_{12} (\gamma_{12} D_2(b) - \gamma_{11} D_1(b)) \right]}{b_1 \frac{D_1(b)}{\sqrt{2\alpha_1}} + b_2 (\gamma_{12} D_2(b) - \gamma_{11} D_1(b))} + \\ + \sqrt{2\alpha_1} \mu_2 \left\{ \gamma_{11} - \frac{\gamma_{12} [\gamma_{12} D_2(b) - \gamma_{11} D_1(b)]}{D_1(b)} \right\}. \quad (69,3,4)$$

Интересно отметить, что найденные коэффициенты μ зависят от аддитивной постоянной b . В частном случае $b=0$, наиболее часто встречающемся при расчетах, из выражений (68,3,4) — (69,3,4) следует:

$$\mu_2 = \frac{b_2^+}{b_{11}\gamma_{12} + b_{22}\gamma_{22}}; \quad (70,3,4)$$

$$\mu_1 = \sqrt{2\alpha_1} \left\{ \frac{b_1^+}{b_1} + \frac{b_2^+}{b_1} \frac{\gamma_{11}b_1 - \gamma_{12}b_2}{\gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2} \right\}. \quad (71,3,4)$$

Полученные формулы пригодны для использования их при нестационарных статистических процессах, когда b_k^+ может быть не равно b_k . В соответствии с этим они позволяют преобразовывать также несимметричные функции. Следует отметить, что функция $W(\tau + \Delta t)$ должна удовлетворять условиям, известным как условия «физической осуществимости», т. е. в нашем случае обращаться в нуль при значениях $\tau < 0$. Учитывая это свойство и подставляя соотношения (64,3,4), (65,3,4), (70,3,4), (71,3,4) в выражение для среднего квадрата ошибки

$$\bar{\varepsilon}^2 = K(0) - 2 \int_0^\infty W(\tau + \Delta t) K(\tau + \Delta t) d\tau + \\ + \int_0^\infty W(\tau_2 + \Delta t) \int_0^\infty W(\tau_1 + \Delta t) K(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (72,3,4)$$

можно с учетом формул (56,3,4), (57,3,4) получить сначала вспомогательные соотношения:

$$\int_0^\infty W(\tau_1 + \Delta t) K(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 = K(\tau_2 + \Delta t); \quad (73,3,4)$$

$$\int_0^\infty W(\tau + \Delta t) K(\tau + \Delta t) d\tau = K(0) - \int_0^{\Delta t} W(y) K(y) dy. \quad (74,3,4)$$

Оказывается, что двойной интеграл в правой части выражения (72,3,4) отличается от $K(0)$, как это следовало из общих соображений в формуле (14,3,4), по-видимому, за счет особенностей приме-

няемой аппроксимации. Подставляя формулы (73,3,4), (74,3,4) в (72,3,4), находим

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_0^{\Delta t} W(y) K(y) dy. \quad (75,3,4)$$

Выражение (75,3,4) легко интегрируется, если учесть общее свойство экспоненциальных ортогональных функций, которые запишем ради краткости в виде $D_m(x)$, в том, что интегралы от квадратных выражений имеют вид:

$$\int_0^x D_1^2(\xi) d\xi = 1 - \frac{D_1^2(x)}{2\alpha_1}; \quad (76,3,4)$$

$$\int_0^x D_1(\xi) D_2(\xi) d\xi = -\frac{D_1(x) D_2(x)}{\alpha_1 + \alpha_2} + \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{D_1^2(x)}{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad (77,3,4)$$

$$\int_0^x D_2^2(\xi) d\xi = 1 - \frac{D_2^2(x)}{2\alpha_2} - \frac{2D_1^2(x)}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{2D_1(x) D_2(x)}{\alpha_1 + \alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}. \quad (78,3,4)$$

Подставляя выражения (64,3,4), (65,3,4), (76,3,4), (78,3,4) в (75,3,4), имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 = & K(0) + D_1^2(\Delta t) \left[\frac{b_1}{\sqrt{2\alpha_1}} \left(\mu_2 \gamma_{11} - \frac{\mu_1}{\sqrt{2\alpha_1}} \right) + \frac{b_2}{\sqrt{2\alpha_1}} (\mu_1 \gamma_{11} - 2\mu_2 \gamma_{12}) \right] + \\ & + D_1(\Delta t) D_2(\Delta t) \gamma_{12} \left[-\frac{\mu_2 b_1}{\sqrt{2\alpha_1}} + \left(\frac{2\mu_2}{\sqrt{2\alpha_2}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{2\alpha_1}} \right) b_2 \right] - D_2^2(\Delta t) \frac{\mu_2 b_2}{2\alpha_2}, \end{aligned} \quad (79,3,4)$$

где

$$K(0) = b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 = \sqrt{2\alpha_1} b_1^+ + \sqrt{2\alpha_2} b_2^+. \quad (80,3,4)$$

Легко убедиться, что при $\Delta t = 0$ выражение (79,3,4) обращается в нуль, а при $\Delta t \rightarrow \infty$ оно стремится к пределу, равному $K(0) = \sigma^2$.

Представляется интересным затронуть задачу о прогнозировании величины $X(t)$ с учетом известного вплоть до интересующего нас момента $t = t_0 + \Delta t$ хода во времени некоторого определяющего процесса, который характеризуется параметром $Y(t)$. До момента $t = t_0$ известен также ход во времени самой прогнозируемой величины. В этом случае прогноз дается по формуле

$$\begin{aligned} X(t_0 + \Delta t) = & v_x \int_0^\infty W_x(\tau + \Delta t) X(t_0 - \tau) d\tau + \\ & + v_y \int_0^\infty W_y(\tau) Y(t_0 + \Delta t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (81,3,4)$$

где W_x и W_y — функция влияния, а v_x и v_y — весовые функции. Их определение производится аналогично изложенному ранее, путем перехода к соотношению между известными корреляционными функциями и решения его. При жесткой связи между величинами X и Y определяющим будет коэффициент v_y , а при очень слабой v_x . В отдельных случаях весовые функции могут быть включены в функцию влияния.

Формула (81,3,4), по-видимому, может быть применена при сверхдолгосрочном прогнозировании с учетом ожидаемой солнечной активности или какого-либо другого ведущего процесса, изменение которого предвычисляется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ариэль Н. З., Бютнер Э. К., Константинов А. Р. Методика и результаты исследований спектральных характеристик турбулентных пульсаций в приземном слое. — Труды ГГО, 1963, вып. 144.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., Гостехиздат, 1947.
3. Вульфсон Н. И. Статистические методы определения действительных параметров конвективных потоков по наблюдаемым. — Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1958, № 7.
4. Гандин Л. С., Багрова Е. И. О структуре поля высот поверхности 500 мб. — Труды ГГО, 1959, вып. 93.
5. Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О пространственной статистической структуре поля геопотенциала. — Труды ГГО, 1963, вып. 168.
6. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.-Л., ГИТТЛ, 1951.
7. Дмитриев А. А. О скорости прогревания атмосферы солнечной радиацией с учетом рассеянной радиации первого порядка. — Труды Морского гидрофиз. ин-та АН СССР, 1953, т. 3.
8. Дмитриев А. А. Динамическая метеорология. М., МГУ. Географический факультет, 1968.
9. Дмитриев А. А., Абакумова Г. М. Аппроксимация коэффициента пропускания комбинациями $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ показательных функций $e^{-\alpha x}$. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. VI, 1970, № 1.
10. Дмитриев А. А., Упорова Л. П. Об использовании функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ для получения законов распределения, географических и гидрометеорологических параметров. — Вестник МГУ, сер. географ., 1969, № 4.
11. Дмитриев А. А. О применении функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ для решения некоторых интегральных уравнений атмосферной оптики. — Труды кафедры теории вероятности и вычислительной математики Московского экономико-статистического института. Физико-математические науки. М., 1970.
12. Дмитриев А. А. К методике численного определения параметров трансцендентных функций распределения. — Труды НИИАК, 1969, вып. 58.
13. Дмитриев А. А., Клименко Л. В. Вековые колебания осадков в Москве. В кн.: «Радиационный режим и осадки в Москве», под ред. проф. А. А. Дмитриева. М., МГУ. 1967.
14. Дмитриев А. А., Исаев А. А. Оценка возможности распространения результатов наблюдений на реперной станции над суточными суммами осадков на окружающую территорию. — Метеорология и гидрология, 1970, № 9.
15. Дмитриев А. А., Серова Г. А. О методике расчета спектра турбулентных пульсаций температуры. — Труды кафедры теории вероятности и вычислительной математики Московского Экономико-статистического института. Физико-математические науки. М., 1972.
16. Дмитриев А. А., Исаев А. А. Об особенностях учета осадков при планировании поливных работ на крупных сельскохозяйственных массивах. — Вестник МГУ, сер. геогр., 1970, № 5.
17. Дмитриева Ф. А. К приближенному вероятностному анализу структуры скорости ветра над морем. — Вестник МГУ, сер. мат. мех. и астроном., 1963, № 7.

18. Климат Москвы, под ред. проф. А. А. Дмитриева, Н. П. Бессонова, Л., Гидрометеиздат, 1969.
- 19а. Кондратьев К. Я., Актинометрия. Л., Гидрометеиздат, 1965.
- 19б. Кондратьев К. Я. Лучистый теплообмен в атмосфере. Л., Гидрометеиздат, 1956.
20. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. М., ГТТИ, 1933.
21. Лахтин Л. К. Кривые распределения и построение интерполяционных формул по способам Пирсона и Брунса. М., 1922.
22. Лэннинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИИЛ, 1958.
23. Олевская С. М. Пространственно-временная структура поля геопотенциала H_{500} . — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. 2. 1966, № 12.
24. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
25. Романовский В. Математическая статистика. М.-Л., ГОНТИ, 1938.
26. Фортус М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. — Труды ГГО, 1964, вып. 65.
27. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Вычисление спектра частиц по данным о спектральной прозрачности. — В кн.: «Актинометрия и оптика атмосферы». М., «Наука», 1964.
28. Шпильрейн Я. Н. Таблицы специальных функций, ч. 1, М.-Л., ГТТИ, 1933.
29. Эльдертон П. Кривые распределения численностей и корреляция. М., ГОНТИ, 1924.
30. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. — Труды ГГО, 1961, вып. 121.
31. Kuipers W. J. A. Density of meteorological network in relation to accuracy of estimation. — Commission syn. meteorol. Rept. of the work group on networks. Geneva, WMO, 1962, Appendix 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5

1. Ортонормированные функции

$$D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m), D_m^*(z; \gamma_1, \dots, \gamma_m), D_m(x)$$

1.1. Построение системы функций для действительной области	7
2.1. Распространение системы ортонормированных функций на комплексную область	12
3.1. Ортогональные функции $D_m(x)$ на базе нормального закона распределения	17
4.1. О подборе параметров разложения	22

2. Приложение функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ к частным задачам гидрометеорологии

1.2. Распределение частиц аэрозоля по размерам	25
2.2. Схема решения некоторых интегральных уравнений	28
3.2. Схема вычисления некоторых интегралов	29
4.2. Приближенная оценка спектра турбулентных включений по измерениям в одной точке	34
5.2. Восстановление оригинала по операционному изображению функции	39

3. Аппроксимация законов распределения гидрометеорологических элементов и других случайных величин

1.3. Основные свойства дифференциальных законов распределения с аргументами от нуля до бесконечности	41
2.3. Построение ДЗР с аргументами от нуля до бесконечности	45
3.3. Построение ДЗР с аргументами, изменяющимися от $-\infty$ до ∞	51
4.3. Приближенные методы оценок параметров ДЗР	53
5.3. Примеры ДЗР для гидрометеорологической информации	73
6.3. Распространение ДЗР на двумерные векторы	81
7.3. Интегральные законы распределения	85
8.3. Оценка точности подбора ДЗР при различном объеме статистического массива	88

4. Аппроксимация корреляционных функций

1.4. Автокорреляционные функции и спектр мощности (спектральная плотность случайной функции)	92
2.4. Примеры корреляционных функций, применяемых в гидрометеорологии	99
3.4. К использованию функций $D_m(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ при статистических прогнозах	104
Литература	117

*Дмитриев
Александр
Александрович*

**ОРТОГОНАЛЬНЫЕ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ
ФУНКЦИИ
В ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ**

Редактор *М. М. Ясногородская*
Художник *В. П. Сысало*
Худож. редактор *В. А. Каралкин*
Техн. редактор *М. С. Костакова*
Корректор *А. В. Хюркес*

Сдано в набор 19/IX 1972 г. Подписано к печати 25/I 1973 г. М-11041. Бумага 60×90^{1/16}.
типогр. № 1. Печ. л. 7,5. Уч.-изд. л. 7,8.
Тираж 1350 экз. Индекс МЛ-27. Заказ 415.
Цена 78 коп.
Гидрометеиздат, Ленинград, В-53,
2-я линия, 23.

Ленинградская типография № 8
«Союзполиграфпрома» при
Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.