

Р.И. Варенглер

ПОДСИЕ,  
АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ,  
ПРОМЕЖУСЧНАЯ  
АСИМПТОТИКА

Теория  
и практика  
из геодезической  
и спутниковой  
геодезии

Г. И. Баренблatt

---

# ПОДОБИЕ, АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ, ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

---

*Теория  
и приложения  
к геофизической  
гидродинамике*

Издание 2-е,  
переработанное и дополненное



ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ  
1982



Рецензенты: академик Л. М. Бреховских; академик А. В. Гапонов-Грехов; академик А. М. Обухов; д-р физ.-мат. наук, проф. М. И. Юдин (Главная геофизическая обсерватория им. А. И. Воейкова)

Ответственный редактор: чл.-корр. АН СССР А. С. Монин

Книга содержит современное изложение анализа размерностей и теории подобия с многочисленными примерами разной степени сложности.

Излагаемые новые подходы анализа размерностей и гипотезы автомодельности нового типа применяются для исследования ряда задач (в частности, турбулентных течений в приземном слое атмосферы и пристеночном слое турбулентного потока с поперечным сдвигом, динамики турбулентных пятен в жидкости с сильно устойчивой стратификацией и т. д.).

Рассчитана на широкий круг читателей — математиков, механиков, специалистов по физике атмосферы и океана.

The monograph by G. I. Barenblatt "Similarity, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics" gives a modern presentation of dimensional analysis and theory of dynamical similarity with numerous examples of various degree of complexity. New approaches of dimensional analysis and self-similarity hypotheses of new types are presented and applied to the investigation of various problems (turbulent flows in atmospheric surface layers, wall layers of turbulent shear flows, dynamics of turbulent spots in fluids with strongly stable stratification etc.).

The book is of interest to mathematicians and specialists in mechanics, physics of atmosphere and ocean.

*Светлой памяти любимой матери,  
Надежды Вениаминовны Каган,  
посвящает автор свою работу.*

---

## ОТ АВТОРА

---

Исследователям — теоретикам и экспериментаторам — полезно знать, что могут дать методы подобия, что такое автомодельность, как ее усмотреть и как ею пользоваться. Это особенно относится к геофизической гидродинамике, где исследуемые процессы необычайно сложны и методы подобия часто являются единственным средством теоретического анализа. Дать представление об этом круге вопросов — задача предлагаемой книги.

Наряду с некоторыми известными задачами, включенными в книгу для полноты изложения, в нее вошло много материала, сравнительно нового и еще не ставшего предметом традиционного изложения. Естественно, что в выборе материала и особенно способа изложения оказались научные интересы автора. Я надеюсь тем не менее, что книга в известной мере отражает состояние дел в обсуждаемом круге вопросов, снова привлекающем сейчас внимание механиков, геофизиков разного профиля и физиков-теоретиков.

После выхода первого издания книги я получил во многих письмах и беседах интересные предложения для нового издания.

Мне показалось прежде всего, что прогнозы, связанные с применением методов подобия к геофизической гидродинамике, нас не обманули. Я постарался поэтому представить во втором издании некоторые новые результаты в этой области, отобрав те из них, в которых теоретические исследования подкреплены экспериментальными.

Новая глава, относящаяся к фракталам Мандельброта, связывает фрактали с неполной автомодельностью. Оказалось, как это часто бывает, что исследователи в разных концах света шли к этим близким идеям независимо, разными путями.

Наконец, я расширил главу, где говорилось об упругости и включил туда кое-что из теории разрушения. Эта область тоже дает хороший материал в связи с неполной автомодельностью и промежуточными асимптотиками.

Мне приятно повторить здесь слова глубокой благодарности Я. Б. Зельдовичу и А. С. Монину. Их стимулирующее дружеское

внимание к моей работе осталось неизменным, и я многим обязан их терпеливому вниманию, предложениям и критике.

Я благодарю рецензентов книги Л. М. Бреховских, А. В. Гапонова-Грехова, А. М. Обухова и М. И. Юдина. Глубокие замечания этих выдающихся ученых были очень полезны при подготовке окончательного варианта.

Моих учеников и коллег В. М. Енгова и Р. В. Гольдштейна я также благодарю за ценные предложения и замечания. И. А. Викторовой, Е. В. Пастернак, Т. О. Абрамян и О. Н. Шароновой я благодарен за помощь при подготовке рукописи книги к печати.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга Г. И. Баренблatta содержит попытку ответить на важный вопрос: как понимать сложные физические процессы и как интерпретировать результаты, полученные численным счетом.

Прогресс в численных расчетах не только принес большое благо, но и внес известное замешательство в вопрос о роли человеческого сознания. Часто именно человек в содружестве человека с машиной оказывается слабым местом этого содружества.

Задача формулировки правил и извлечения идей из огромной массы расчетных или экспериментальных результатов остается делом нашего мозга, нашего сознания.

Проблема эта тесно связана с распознаванием образов. Не одним совпадением объясняется то, что как в русском, так и в английском языках слово «очевидный» имеет два значения — не только нечто легко и ясно понимаемое, но и нечто непосредственно видимое нашими глазами.

Отождествление форм и поиск инвариантных отношений составляют базу распознавания образов; так, мы опознаем подобие большого и малого треугольников и т. д.

Предположим теперь, что мы изучаем некоторый определенный процесс, например химическую реакцию, в ходе которой освобождается тепло и скорость которой зависит от температуры. В широком диапазоне параметров и начальных условий получается вполне определенный тип решения — распространение пламени. Химическая реакция происходит в относительно тонкой области, отделяющей холодное горючее вещество от горячих продуктов сгорания; эта область движется относительно горючего вещества со скоростью, практически не зависящей от начальных условий (разумеется, само осуществление подобного хода реакции зависит от начальных условий).

Этот результат можно получить непосредственным численным интегрированием уравнений в частных производных, описывающих перенос тепла, диффузию, химические реакции и (в некоторых случаях) гидродинамику. Такой вычислительный подход труден; результат получается в виде записей величин температуры, концентрации и т. д., задаваемых в функции временных и пространственных координат. Выявить распространение пламени, т. е. извлечь из массы числового материала режим равномерного распро-

странения температуры  $T(x - ut)$ , — тоже непростая задача! Надо заранее знать тип решения, чтобы его найти: каждый, имеющий практический опыт в приложении математики к изучению природы, знает эту истину.

Был отчеканен термин «автомодельность», который сейчас стал широко распространенным: решение  $T(x, t_1)$  в некоторый момент  $t_1$  подобно решению  $T(x, t_0)$  в некоторый более ранний момент. В случае равномерного распространения, рассмотренном выше, подобие заменяется параллельным переносом. Подобие связано с изменением масштабов:

$$T = (t_1/t_0)^n T [x (t_1/t_0)^m, t_0],$$

или

$$T = \varphi(t) \psi[x/\xi(t)].$$

В геометрии такое преобразование называется афинным преобразованием. Именно существование функции  $\psi$ , не изменяющейся со временем, позволяет установить подобие распределений в различные моменты времени.

Книга Г. И. Баренблatta содержит много примеров аналитических решений различных задач. Список этих задач включает распространение тепла от источника в линейном случае (при постоянной теплопроводности) и в нелинейном случае, а также при наличии потерь тепла. Рассматривается также задача гидродинамического распространения энергии от локализованного взрыва. В обоих случаях задачи в обычной постановке, без потерь, были решены много лет назад; размерности констант, характеризующих среду (ее плотность, уравнение состояния, теплопроводность), и размерность энергии однозначно диктовали в этих задачах показатели степени автомодельных переменных.

Однако задачи с должным образом введенными потерями оказались существенно иными.

Если

$$dE/dt = -\alpha E^{3/2}/R^{5/2}; \quad dR/dt = \beta E^{1/2}/R^{3/2}$$

( $E$  — энергия, отнесенная к начальной плотности газа,  $R$  — радиус возмущенной области,  $t$  — время), так что  $dE/dR = -\gamma E/R$ , то сохранение энергии уже не имеет места:

$$E \sim R^{-\gamma}; \quad E \sim E_0 R_0^\gamma R^{-\gamma} \neq \text{const},$$

однако автомодельность остается.

Безразмерные числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  зависят от функций, описывающих решение, но уравнения, определяющие эти решения, содержат неопределенные показатели степени. Математически мы должны определять некоторые характеристические числа — их можно называть собственными значениями — из обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и краевых условий к ним.

Новые показатели степени в задаче уже не обязательно представляют собой целые числа и рациональные дроби; как правило, это трансцендентные числа, непрерывно зависящие от параметров задачи, в том числе от параметров потерь. Так появляется новая ветвь, новый тип автомодельных задач; мы называем их вторым типом, сохраняя название первого типа за случаем, когда работает анализ размерностей.

Важным моментом здесь является то, что решения не описывают асимптотику точечного источника: если  $R_0$  (значение  $R$  при  $t = 0$ ) берется равным нулю, то по необходимости  $E_0 = \infty$  при  $t = 0$ , что нефизично.

Поэтому новые решения рассматриваются как промежуточные асимптотики. Предположим, что до некоторого конечного момента времени  $t_0$  потери не имеют места. В этот момент, когда радиус возмущенной области достигает конечной величины  $R_0$ , мы включаем потери. Или, более общим образом, можно начать с уже распространившейся до конечной величины  $R_0$  конечной энергии  $E_0$ , созданной какими-то другими способами.

Предполагается, что за достаточное время асимптотически решение выйдет на автомодельную форму, отвечающую данным потерям.

Мы здесь хотим подчеркнуть именно асимптотический характер автомодельных решений при  $t \gg t_0$ .

В нелинейных задачах точные частные решения иногда кажутся бесполезными: поскольку нет принципа суперпозиции, нельзя непосредственно найти решение задачи с произвольными начальными условиями.

Асимптотическое поведение является ключом, который частично играет роль, утраченную принципом суперпозиции. Но для произвольно заданных начальных условий это асимптотическое поведение должно быть доказано! Задача трудна и во многих случаях численные расчеты дают лишь суррогат строгого аналитического доказательства.

Может быть, предыдущие рассуждения необычны для предисловия, но я хотел, используя простейшие примеры, возможно скорее ввести читателя в преимущества и затруднения нового мира решений второго рода.

Имеются и другие типы решений, среди которых сходящиеся сферические ударные волны являются наиболее важным примером. Здесь уже нет внешних потерь; просто область, в которой имеет место автомодельность, сужается: уже нельзя предполагать, что *вся* энергия всегда сконцентрирована в сужающейся области. На самом деле эта энергия убывает по степенному закону, так как часть энергии остается во внешних областях газа. И снова показатели степени надо находить как собственные значения нелинейного оператора.

Специфический характер этого класса уравнений связан с конечностью скорости звука: точка, где фазовая скорость распростране-

ранения автомодельной переменной равна скорости звука, играет решающую роль при построении решения.

Г. И. Баренблatt в своей книге тоже рассказывает об одной задаче подобного типа — задаче короткого сильного удара по полупространству, заполненному газом. Эта задача изобилует парадоксами, в частности: почему законы сохранения энергии и импульса не дают в данном случае возможность определить показатели степени? Ответ на этот вопрос содержится в главе 4 и было бы против правил привести его здесь, в предисловии.

Замечательный пример представляют собой задачи нелинейного распространения волн на поверхности тяжелой жидкости, описываемые уравнением Кортевега—де Фриза. Имеются хорошо и давно известные решения, описывающие уединенные волны (иначе солитоны), распространяющиеся со скоростью, зависящей от амплитуды. Существуют теоремы, доказывающие устойчивость солитонов даже после их столкновения, и теоремы, определяющие асимптотическое поведение начальных распределений общего типа, превращающихся в последовательность солитонов. Подсказанные численными расчетами, эти свойства теперь строго доказаны аналитическими средствами необычайной красоты. В этих решениях проявляются все свойства идеального автомодельного решения второго рода.

Вернемся теперь к общей характеристике книги в целом; мы не постесняемся здесь повторить применительно к общей ситуации некоторые моменты, уже изложенные выше в связи с простыми примерами.

Задачи выбраны тщательно; в решении многих задач роль автора книги была существенной, и это придает изложению привкус сопереживания.

Но я настаиваю на том, что важность этой книги далеко превосходит ее ценность как суммы интересных частных примеров: из рассмотрения частных задач развиваются общие идеи.

Еще раз спросим себя: подавляющее большинство задач нелинейно; что за польза от частного решения, если нет принципа суперпозиции?

Дело в том, что, как правило, эти частные решения представляют собой асимптотики широкого класса других решений, отвечающих другим начальным условиям. В этом случае значение точных частных решений возрастает в сильнейшей степени. И эта часть вопроса отражена в заглавии книги, в словах «промежуточные асимптотики». Значение решений как асимптотик зависит от их устойчивости. Вопросы устойчивости и поведения решений при малых возмущениях также рассматриваются в этой книге; в частности, излагается предложенный в совместной работе Г. И. Баренблatta и моей простой метод исследования устойчивости инвариантных решений.

Идея автомодельности связана с группой преобразования решений. Эти группы, как правило, уже представлены в дифференциальных (или интегро-дифференциальных) уравнениях процесса.

Группы преобразований уравнений определяются размерностями входящих в них величин: преобразование единиц измерения времени, длины, массы и т. д. представляет собой простейший пример.

Этот тип автомодельности характеризуется степенными законами с показателями степени, которые представляют собой простые дроби и элементарно определяются из соображений размерности.

Такой ход рассуждений привел к результатам громадной и непреходящей важности; достаточно вспомнить теорию турбулентности и число Рейнольдса, линейное и нелинейное распространение тепла от точечного источника, точечный взрыв. Тем не менее мы видим, что анализ размерности определяет лишь часть проблем, верхнюю часть айсберга; соответствующие решения мы называем решениями первого рода.

Название решений второго рода мы резервируем за большим и все растущим классом решений, для которых степени находятся в процессе решения задачи, подобно собственным значениям для линейных уравнений. Для этого случая законов сохранения и соображений размерности оказывается недостаточно.

Важным шагом оказалось установление внутренней связи между нелинейными задачами распространения с решениями типа  $f(x - ut)$  и автомодельными задачами с решениями вида  $t^m f(x/t^m)$ . Процедуры отыскания параметра скорости  $u$  и степеней  $n, m$  имеют, как оказалось, много точек соприкосновения. Тем самым автомодельности соприкасаются с новым потоком задач, идущих от теории горения, от приложений к химической технологии.

Первое издание книги вышло в 1978 г. в Гидрометеоиздате. После выхода в свет первого издания мы были свидетелями дискуссий и обсуждений, новых работ и постановок вопроса, идеально связанных с проблемами автомодельности и промежуточной асимптотики. Значение, глубина и жизненность этого круга идей получили веские подтверждения. В настоящее время трудно себе представить человека, который бы активно работал в области математической физики, игнорируя идеи автомодельности и промежуточной асимптотики.

Второе издание предлагаемой книги пополнено рассмотрением ряда новых вопросов.

Чрезвычайно интересна связь автомодельности второго рода с понятием фракталей, развиваемых Мандельбротом. Следует особенно отметить значение развивающихся в книге представлений для геофизики, в частности гидрометеорологических наук.

В науках о природе — геофизике, гидрометеорологии — мы никогда не имеем дела с идеализированными точными решениями. Однако это не исключает необходимости и плодотворности научного исследования. Возникают полезные понятия и с ними проблема распознавания образов, распознавания элементарных типов движения: циклонов и антициклонов, тектоники литосферных плит и т. д. Но эти задачи самым непосредственным образом связаны

с идеями промежуточной асимптотики. Поэтому предлагаемая книга будет полезна для наук о Земле.

Книга содержит конкретное детальное рассмотрение определенных задач, дающее богатую информацию. Она содержит также обобщения и предвидения, касающиеся развития предмета в будущем.

Вы можете прочесть эту книгу и изучить ее, но Вы можете использовать ее и как источник вдохновения. Быть может, это и есть лучший комплимент книге, заглавие которой звучит так специально.

Академик Я. Б. Зельдович

## ВВЕДЕНИЕ

1. Явление, развивающееся во времени, называется *автомодельным*, если распределения его характеристик в разные моменты времени получаются одно из другого преобразованием подобия.<sup>1</sup> Установление автомодельности всегда было успехом исследователя: автомодельность упрощала вычисление и представление характеристик явления. При обработке опытных данных автомодельность приводила к тому, что, казалось бы, беспорядочное в обычных координатах облако опытных точек ложилось на единую кривую или поверхность, построенную в некоторых специальным образом выбранных автомодельных координатах. Автомодельность позволяла во многих случаях свести задачу математической физики к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, что существенно упрощало исследование. Поэтому при помощи автомодельных решений исследователи пытались увидеть характерные свойства новых явлений. Кроме того, автомодельные решения использовались как эталоны при оценке приближенных методов решения более сложных задач.

Появление вычислительных машин изменило отношение к автомодельным решениям, но не уменьшило интереса к ним. Раньше считалось, что переход от уравнений в частных производных к обыкновенным уравнениям упрощает дело. В связи с этим автомодельные решения привлекали внимание прежде всего из-за простоты их получения и анализа. Постепенно ситуация усложнялась. Во многих случаях оказалось, что наиболее простым способом численного счета краевых задач для систем обыкновенных уравнений, к которым приводилось построение автомодельных решений, становится счет методом установления решений уравнений в частных производных. Автомодельность же по-прежнему продолжала привлекать внимание как глубокий физический факт, свидетельствующий о наличии определенного типа стабилизации исследуемых процессов, имеющего место для достаточно широкого круга условий. Кроме того, автомодельные решения стали использоваться как первая ступень при начале численного счета на машинах. По всем этим причинам поиск автомодельностей в последнее время начинался сразу, как только открывалась новая область исследования.

---

<sup>1</sup> То, что одну из независимых переменных мы здесь отождествляем со временем, не имеет значения: она может иметь любой физический смысл.

2. Показательные примеры автомодельностей дают некоторые сильно идеализированные задачи математической теории теплопроводности. Пусть в начальный момент  $t = 0$  в некоторой точке бесконечного пространства, занятого теплопроводящей средой, мгновенно выделяется конечная порция тепла  $E$ . Тогда в момент  $t$  приращение температуры  $u$  в произвольной точке пространства определяется, как доказывается в математической теории теплопроводности, соотношением

$$u = [E/c(2\sqrt{\pi\kappa t})^3] \exp(-r^2/4\kappa t). \quad (1)$$

Здесь  $c$  — теплоемкость среды и  $\kappa$  — ее температуропроводность. Эти характеристики среды предполагаются постоянными. Далее,  $r$  — расстояние от точки, в которой производится наблюдение, до центра — точки, в которой в начальный момент было выделено тепло.

Структура выражения (1) показательна: существуют масштаб температуры  $u_0(t)$  и линейный масштаб  $r_0(t)$ , зависящие от времени:

$$u_0(t) = E/c(\sqrt{\kappa t})^3; \quad r_0(t) = \sqrt{\kappa t}, \quad (2)$$

и такие, что распределение температуры в пространстве, представленное в этих масштабах, перестает зависеть от времени:

$$\frac{u}{u_0} = f\left(\frac{r}{r_0}\right); \quad f(\xi) = \frac{1}{8\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right); \quad \xi = \frac{r}{r_0}. \quad (3)$$

Приведенный пример типичен. Пусть перед нами задача математической физики с двумя независимыми переменными  $r$  и  $t$ , приводящая к решению системы уравнений в частных производных. В этой задаче автомодельность означает, что можно так выбрать переменные масштабы  $u_0(t)$  и  $r_0(t)$ , что представленные в новых масштабах характеристики явления выражаются через функции одной переменной:

$$u = u_0(t) U(\xi); \quad \xi = r/r_0(t). \quad (4)$$

Решение задачи при этом приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $U(\xi)$ .

3. Естественной была попытка выяснить природу автомодельностей. Здесь на определенном этапе существенную роль сыграло привлечение анализа размерностей. Под этим названием кроется весьма простая система понятий и правил, которая заслуживает, однако, того, чтобы в ней разобраться.

Пусть имеется какая-то зависимость, определяющая величину  $a$  в функции  $n$  параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (5)$$

Если эта зависимость имеет физическое содержание, то соотношение (5) должно отражать тот бесспорный факт, что хотя

числа  $a, a_1, \dots, a_n$  выражают значения соответствующих величин в определенной системе единиц измерения, физическая закономерность, которую это соотношение представляет, от произвола при выборе единиц измерения не зависит. Для того чтобы выяснить, что отсюда следует, разобьем величины  $a, a_1, a_2, \dots, a_n$  на две группы. В первую группу  $(a_1, \dots, a_k)$  включаются определяющие величины с независимыми размерностями (например, некоторая длина, скорость, плотность и т. д.). Во вторую группу  $(a, a_{k+1}, \dots, a_n)$  входят величины, размерности которых можно выразить через размерности величин первой группы. Таким образом, например, величина  $a$  имеет (подробнее см. п. 1 главы 1) размерность произведения  $a_1^p a_2^q \dots a_k^r$ , величина  $a_{k+1}$  — размерность произведения  $a_1^{p_{k+1}} a_2^{q_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}$  и т. д. Степени  $p, q, \dots$  получаются простым подсчетом. При этом величины

$$\Pi = \frac{a}{a_1^p a_2^q \dots a_k^r}; \quad \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} a_2^{q_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}}, \dots \quad (6)$$

оказываются безразмерными, так что их значения будут одними и теми же при любом выборе единиц измерения. Независимость закономерности, имеющей физический смысл, от выбора единиц измерения означает в действительности, что соответствующее ей соотношение (5) можно представить в виде

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (7)$$

Это соотношение связывает безразмерную величину  $\Pi$  с безразмерными же величинами  $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ , которых, однако, на  $k$  меньше, чем исходных размерных определяющих параметров  $a_1, \dots, a_n$ . Если теперь в соотношении (7) вернуться к прежним размерным переменным  $a, a_1, \dots, a_n$  и сравнить получающееся соотношение с (5), то окажется, что функция  $n$  аргументов  $f(a_1, \dots, a_n)$  на самом деле может быть представлена через функцию меньшего числа аргументов. Число аргументов меньше исходного на столько, сколько среди величин  $a_1, \dots, a_n$  имеется величин с независимыми размерностями. Уменьшение числа аргументов упрощает исследование, иногда — существенно.

4. Применим теперь анализ размерности к рассмотренной выше тепловой задаче. Приращение температуры  $u$ , которое мы ищем, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\partial_t u = \kappa r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u \quad (8)$$

при следующих условиях: температура на бесконечности и в начальный момент везде, кроме центра, невозмущена:

$$u(r, 0) = 0 \text{ при } r \neq 0; \quad u(\infty, t) = 0, \quad (9)$$

в начальный момент в центре сосредоточено количество тепла  $E$ :

$$4\pi \int_0^{r_*} r^2 u(r, 0) dr = E/c = Q. \quad (10)$$

Здесь  $r_*$  — как угодно малый радиус, значение которого несущественно, поскольку в начальный момент все тепло сосредоточено в точке. Разумеется, такое начальное распределение температуры  $u(r, 0)$  представляет собой обобщенную функцию. Как видно, приращение температуры  $u$  зависит от момента времени  $t$ , температуропроводности  $\kappa$ , величины  $Q = E/c$ , а также от расстояния  $r$  точки наблюдения от центра. Все эти величины размерны, и их численные значения зависят от выбора единиц измерения длины, времени и температуры. При этом температуропроводность  $\kappa$  имеет размерность квадрата длины, деленного на время; величина  $Q$  — размерность температуры, умноженной на куб длины. Это следует из того, что левая и правая части соотношений (8) и (10) должны иметь одинаковую размерность. Поэтому величина  $\sqrt{\kappa t}$  имеет размерность длины, величина  $Q/(\sqrt{\kappa t})^3$  — размерность температуры, а величины

$$\Pi = u/Q (\sqrt{\kappa t})^{-3}; \quad \Pi_1 = r/\sqrt{\kappa t}$$

безразмерны. Параметр  $\Pi_1$  — единственный независимый безразмерный параметр, который можно составить из величин  $t, \kappa, Q, r$ . (Очевидно, что параметры  $t, \kappa, Q$  имеют независимую размерность.) Зависимость

$$u = f(t, \kappa, Q, r),$$

определяющая искомое решение, должна, в согласии со сказанным, представляться в виде соотношения между безразмерными величинами

$$\Pi = \Phi(\Pi_1). \quad (11)$$

Из соотношения (11) получаем

$$u = [Q/(\sqrt{\kappa t})^3] f(\xi); \quad \xi = \Pi_1 = r/\sqrt{\kappa t}, \quad (12)$$

т. е. соотношение (3). Таким образом, в данном случае удалось установить автомодельность решения и определить масштабы  $u_0(t)$  и  $r_0(t)$ , опираясь только на анализ размерностей.

Дифференцируя соотношение (12), находим:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \frac{Q}{(\sqrt{\kappa t})^3} \left\{ -\frac{3}{2t} f - \frac{1}{2t} \xi \frac{df}{d\xi} \right\}; \\ \partial_r u &= \frac{Q}{(\sqrt{\kappa t})^3} \frac{1}{\sqrt{\kappa t}} \frac{df}{d\xi}; \quad \partial_{rr} u = \frac{Q}{(\sqrt{\kappa t})^3} \frac{1}{\kappa t} \frac{d^2 f}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя эти выражения в уравнение в частных производных (8), получаем для функции  $f$  обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{3}{2} f = 0. \quad (14)$$

Далее, из условия на бесконечности (9) получается  $u(\infty, t) = Q(\sqrt{\nu t})^{-3}f(\infty) = 0$ , откуда  $f(\infty) = 0$ . Ограниченнное решение уравнения (14) при условии  $f(\infty) = 0$  легко находится с точностью до константы:

$$f = A \exp(-\xi^2/4). \quad (15)$$

Константа  $A$  определяется следующим образом. В рассматриваемой задаче имеет место закон сохранения во времени суммарного количества тепла, которое должно быть равно количеству тепла, сосредоточенному в начальный момент в центре:

$$4\pi c \int_0^\infty r^2 u(r, t) dr = \text{const} = E = cQ. \quad (16)$$

Из соотношения (12) получаем

$$\int_0^\infty r^2 u(r, t) dr = QA \int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi^2/4} d\xi = 2QA\sqrt{\pi}.$$

Отсюда, используя уравнение (16), находим значение константы  $A = 1/8\pi^{3/2}$ , что и завершает решение задачи.

Во многих других случаях соображений анализа размерности также оказывается вполне достаточно, чтобы обосновать автомодельность решения исходя из формулировки математической задачи и получить выражения для масштабов и автомодельных переменных. Известная книга Л. И. Седова [97] содержит много примеров, иллюстрирующих применение анализа размерностей для установления автомодельности и определения автомодельных переменных. В ней содержится также изложение применимого в таких случаях общего подхода. Дальше мы увидим, однако, что решения, для установления автомодельности которых достаточно анализа размерности, среди прочих автомодельных решений относительно редки; как правило, дело обстоит сложнее.

5. Автомодельности, даже понятые с точки зрения анализа размерностей, оставались в представлении большинства исследователей лишь изолированными точными решениями частных задач — изящными, иногда в меру полезными, но все же весьма ограниченными по своему значению атрибутами физических теорий. Только постепенно осознавалось, что значение этих решений много шире. На самом деле они описывают не только поведение физических систем в некоторых частных условиях, но и промежуточно-асимптотическое поведение решений более широких классов за-

дач в той области, где эти решения перестают зависеть от деталей начальных и (или) граничных условий, но система еще далека от предельного состояния.

Для рассмотренного примера это означает, что решение (1) описывает не только распределение температуры в бесконечном пространстве под действием *мгновенного точечного* источника. Оно описывает также и распределение температуры, возникающее в *конечной* области размером  $\Lambda$ , если сосредоточить в начальный момент ту же порцию тепла не в точке, а в *конечной области*  $\Omega$  размером  $\lambda \ll \Lambda$  (даже не обязательно симметричной).<sup>1</sup> При этом наблюдать надо на расстояниях от центра  $\Omega$ , много больших  $\lambda$ , и, вместе с тем, много меньших  $\Lambda$ , в моменты времени, для которых размер прогретой области значительно больше  $\lambda$  и все же много меньше  $\Lambda$ . Это *промежуточно-асимптотическое* свойство решения типа мгновенного источника строго доказывается в математической теории теплопроводности.

Именно рассмотрение автомодельностей как промежуточных асимптотик позволяет правильно понять роль анализа размерностей при установлении автомодельности и определении автомодельных переменных. Как оказывается, соображений размерности далеко не всегда достаточно для установления автомодельности. Более того, можно даже утверждать, что, как правило, это не так.

Я. Б. Зельдович [42] впервые явно выделил в особый класс автомодельные решения, для которых анализ размерности недостаточен для установления автомодельности и определения автомодельных переменных. Он назвал эти решения *автомодельными решениями второго рода*<sup>2</sup>. Следует отметить, что подобные решения рассматривались еще ранее Гудерлеем [134], Л. Д. Ландау и К. П. Станюковичем [100], Вейцзеккером [213]. В известной книге Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [48], а также в статье К. В. Брушлинского и Я. М. Каждана [28] был проведен подробный анализ известных к тому времени решений этого типа.

6. Понять, в чем состоит внутренняя природа классификации автомодельностей в простейшем случае, можно, несколько расширив рассмотренную выше задачу теплопроводности. Пусть теперь теплоемкость среды равна одной постоянной  $c$ , если среда нагревается, и равна другой постоянной  $c_1$ , если среда остывает, а теплопроводность среды по-прежнему постоянна. При этом уравнение теплопроводности (8) заменится уравнением<sup>3</sup>

$$\partial_t u = \kappa r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u \text{ при } \partial_t u \geqslant 0; \quad \partial_t u = \kappa_1 r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u \text{ при } \partial_t u \leqslant 0, \quad (17)$$

<sup>1</sup> Символ  $a \ll b$  означает, что существует диапазон таких значений величины  $x$ , что  $x \gg a$ , но  $x \ll b$ .

<sup>2</sup> Сам термин «автомодельность второго рода» употреблялся Зельдовичем в его ранних работах в более узком смысле, чем он употребляется здесь.

<sup>3</sup> Уравнения вида (17) встречаются в теории фильтрации жидкости в пористых средах (см. главу 3) и других областях.

где  $\kappa$ ,  $\kappa_1$  — константы, вообще говоря, различные. Казалось бы, применяя анализ размерностей, можно построить решение типа мгновенного точечного источника для уравнения (17) при  $\kappa_1 \neq \kappa$  совершенно так же, как это было только что проделано для классического уравнения теплопроводности ( $\kappa_1 = \kappa$ ). Действительно, к параметрам  $t$ ,  $\kappa$ ,  $Q$ ,  $r$ , определяющим решение, в этом случае добавляется постоянный параметр  $\kappa_1$  той же размерности, что и  $\kappa$ . Следовательно, на первый взгляд, решение должно представляться в той же форме (12), а дополнительный постоянный безразмерный параметр  $\kappa_1/\kappa$  не меняет дела. Можно показать, однако, что при  $\kappa_1 \neq \kappa$  такого решения просто не существует!

Разрешение возникшего парадокса состоит в следующем. Нас интересует в действительности не решение задачи о мгновенном точечном источнике тепла, а поведение при больших временах решения, отвечающего выделению в начальный момент конечной порции тепла в области малого, но конечного диаметра  $\lambda$ . В классическом случае ( $\kappa_1 = \kappa$ ) это одно и то же, поэтому мы и искали сначала по инерции решение типа точечного источника также и при  $\kappa_1 \neq \kappa$ . Если, однако, тепло в начальный момент сосредоточено в области конечного размера  $\lambda$ , то в задаче появляется новый параметр  $\lambda$  размерности длины и новый безразмерный параметр

$$\Pi_2 = \lambda / \sqrt{\kappa t} = \eta. \quad (18)$$

Параметр  $\eta$  сразу же портит автомодельность, так как решение перестает выражаться через функцию одной переменной, а имеет вид

$$u = [Q / (\sqrt{\kappa t})^3] \Phi(\xi, \eta, \kappa_1/\kappa). \quad (19)$$

Как и при  $\kappa_1 = \kappa$  нас интересует поведение решения при малых  $\eta$ . Однако при  $\kappa_1 \neq \kappa$  просто перейти в (19) к предельной форме решения, отвечающей  $\eta = 0$ , нельзя. Причина этого тривиальна: при малых  $\eta$  функция  $\Phi$  ведет себя следующим образом:

$$\Phi = \eta^\alpha \varphi(\xi, \kappa_1/\kappa), \quad (20)$$

где  $\varphi$  — конечная величина,  $\alpha$  — постоянная, зависящая от  $\kappa_1/\kappa$  и не равная нулю при  $\kappa_1 \neq \kappa$ , а при  $\kappa_1 = \kappa$  обращающаяся в нуль. Если попытаться перейти к пределу, то в правой части получится либо нуль, либо бесконечность, в зависимости от знака  $\alpha$ , т. е. получится бессодержательное соотношение. Не переходя к пределу, подставим поэтому выражение (20), считая  $\eta$  малым, т. е. время большим или  $\lambda$  малым, в общее представление решения (19). При этом получится автомодельное представление решения исходной неавтомодельной задачи, справедливое при малых  $\lambda$  и (или) больших временах:

$$u = [A / (\sqrt{\kappa t})^{3+\alpha}] \varphi(\xi, \kappa_1/\kappa), \quad A = \text{const } Q \lambda^\alpha. \quad (21)$$

Выражение (21) показывает, что представление решения при больших временах дается уже не решением типа точечного источника, а другим автомодельным решением. Как видно, это решение таково, что при уменьшении размера области начального выделения тепла  $\lambda$ , следует для сохранения асимптотического поведения решения при больших временах неизменным менять мощность источника  $Q$  так, чтобы произведение  $Q\lambda^\alpha$  оставалось постоянным.

Если теперь подставить выражение решения (21) в уравнение (17), то получим для функции  $\varphi$  обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое величина  $\alpha$  входит как параметр. Оказывается, что при произвольном  $\alpha$  это уравнение не имеет решения, обладающего необходимыми свойствами. Однако для каждого значения параметра  $x_1/x$  имеется значение  $\alpha$ , при котором нужное решение обыкновенного дифференциального уравнения существует. Таким образом, для определения  $\varphi$  и параметра  $\alpha$  получается *нелинейная задача на собственные значения*. Константа  $A'$  при таком непосредственном построении автомодельной промежуточной асимптотики остается неопределенной. Найти ее из интегрального закона сохранения типа (16) при  $x_1 \neq x$  нельзя, поскольку в этом случае суммарное уравнение баланса тепла принимает неинтегрируемую форму:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} r^2 u(r, t) dr = (x_1 - x) (r^2 \partial_r u)_{r=r_0}, \quad (22)$$

где  $r = r_0(t)$  — координата точки, в которой в данный момент производная  $\partial_r u$  обращается в нуль.

7. Таким образом, поведение решения при больших временах оказалось автомодельным и при  $x_1 \neq x$ , но автомодельность здесь не такая, как при  $x_1 = x$ . Прежде всего параметр размерности длины  $\lambda$ , нарушавший автомодельность исходной задачи, из предельного решения не исчез. Далее, анализ размерности в этом случае не позволяет найти автомодельные переменные и установить автомодельность предельного решения исходя из математической формулировки задачи. Действительно, размерность постоянной  $A$  заранее неизвестна и должна быть найдена в ходе решения. Наконец, сама константа  $A$  оказалась неопределенной. Для ее нахождения следует «срастить» построенное решение с решением исходной неавтомодельной задачи, например, путем численного счета. (В главе 3 будет показано, что численный счет подтверждает выход решения неавтомодельной задачи на построенную автомодельную асимптотику.)

Своеобразная ситуация возникает и с законами подобия. Анализ размерности позволяет получить с точностью до константы закон затухания температуры в центре в классическом случае  $x_1 = x$ . Действительно, приращение температуры в центре  $u_{\max}$  зависит от величин  $Q$ ,  $x$  и  $t$ , из которых можно составить только

одну величину размерности температуры:  $Q(\sqrt{xt})^{-3}$  и нельзя составить безразмерную комбинацию, так как их размерности независимы. Ясно, что

$$u_{\max} = \text{const } Q/(\sqrt{xt})^3. \quad (23)$$

Согласно приведенному выше решению,  $\text{const} = 1/8\pi^{3/2}$ . Традиционное применение анализа размерностей в предположении о выделении тепла в точке привело бы к такому же закону подобия и при  $\kappa_1 \neq \kappa$ , хотя в этом последнем случае такой закон подобия, как видно из (21), не имеет места. На самом деле

$$u_{\max} = \text{const } Q\lambda^\alpha/(\sqrt{xt})^{3+\alpha}, \quad (24)$$

так что хотя закон затухания тоже степенной, но степень уже не может быть получена анализом размерности. Своебразие ситуации состоит в том, что заранее, до решения полной задачи, нельзя сказать, можно ли при анализе законов подобия использовать соображения размерности или нет.

Теперь уже легко понять, что происходит в общем случае. Автомодельные решения всегда получаются для так называемых вырожденных задач, в которых параметры задачи, имеющие размерность независимых переменных (характерная длина, характерное время и т. д.), равны нулю или бесконечности. В противном случае среди аргументов фигурировали бы отношения независимых переменных к этим параметрам и автомодельности бы не было. Это значит, что при переходе от невырожденных постановок задач, отвечающих конечным значениям параметров, к вырожденным некоторые безразмерные параметры (обозначим их  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ ) стремятся к нулю или к бесконечности. При этом функция  $\Phi$  в соотношении (7) может:

- 1) стремиться к конечному пределу, отличному от нуля;
- 2) стремиться к нулю, к бесконечности или вообще не стремиться ни к какому пределу, но иметь при малых (больших)  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  степенную асимптотику:

$$\Phi = \Pi_1^\alpha \Phi_1 (\Pi_2/\Pi_1^\beta, \dots); \quad (25)$$

- 3) не стремиться к конечному пределу и не иметь при малых (больших)  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  степенной асимптотики.

В первом случае при достаточно больших (малых)  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  можно просто заменить функцию  $\Phi$  ее предельным выражением, отвечающим значениям параметров  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  равным нулю (бесконечности). При этом число аргументов функции соответственно уменьшается, а соответствующие размерные параметры (например, размер области начального выделения тепла при  $\kappa_1 = \kappa$ ) оказываются несущественными и выпадают из рассмотрения. Этот случай называется полной автомодельностью по параметрам  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$

Во втором случае соотношение (7) при малых (больших)  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2, \dots$  можно переписать, используя (25), в виде

$$\Pi^* = \Phi_1(\Pi^{**}, \Pi_3, \dots); \quad \Pi^* = \Pi \Pi_1^{-\alpha}; \quad \Pi^{**} = \Pi_2 \Pi_1^{-\beta}. \quad (26)$$

Таким образом, и в этом случае число аргументов зависимости (7) уменьшается. Параметры  $\Pi^*$  и  $\Pi^{**}$  вполне аналогичны по своей структуре обычным параметрам подобия — это степенные комбинации определяемых и определяющих параметров. Разница состоит, однако, в том, что, во-первых, величины  $\Pi^*$ ,  $\Pi^{**}$  содержат размерные параметры  $a_{k+1}$ ,  $a_{k+2}$ , портившие автомодельность исходной задачи, и, во-вторых, они не могут быть получены анализом размерности. Примером таких параметров является в модифицированной задаче теплопроводности величина

$$u (\sqrt{\pi t})^{3+\alpha} / Q \lambda^\alpha;$$

в ней содержится размер области начального тепловыделения  $\lambda$  в степени  $\alpha$ , которую нельзя определить из соображений размерности. В случаях, подобных рассматриваемому, говорят о *неполной автомодельности по параметрам*  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$

Наконец, в третьем случае параметры  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  продолжают оставаться существенными, как бы велики или малы они ни были, и никакая автомодельность по ним не наступает. Природа классификации автомодельных решений теперь становится прозрачной. Если предельный переход от решения неавтомодельной исходной задачи к автомодельной промежуточной асимптотике отвечает полной автомодельности по безразмерному параметру, нарушающему автомодельность исходной задачи, автомодельное решение представляет собой решение первого рода. Если предельный переход соответствует неполной автомодельности, автомодельное решение является решением второго рода. Трудность на самом деле состоит в том, что методы подобия обычно применяются, когда решение полной задачи неизвестно. Поэтому априори нельзя указать, с каким типом автомодельности мы имеем дело и практически поступают так: сначала предполагают полную автомодельность и пробуют построить соответствующее автомодельное решение — решение первого рода. Если это предположение приводит к противоречию, то возвращаются к исходной невырожденной задаче, предполагают неполную автомодельность и пробуют построить автомодельное решение второго рода. Если и это предположение приводит к противоречию, автомодельность вообще не имеет места.

8. Поучительные примеры автомодельных решений второго рода доставляют решения даже таких простых и общеизвестных задач, как плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в углах. Проиллюстрируем указанный выше подход на одной такой простой задаче. Выясним поведение плоского течения идеальной несжимаемой жидкости, возникающего при обтекании поступательным потоком клина, вблизи острия клина. Предположим сначала, что продольный размер клина  $L$  несуществен, так как

его отношение к расстоянию от острия  $r$  очень велико, и попытаемся построить, используя метод анализа размерностей, автомодельное решение первого рода — решение задачи обтекания бесконечного клина с углом раствора  $2\alpha$  потоком со скоростью  $U$  на бесконечности (рис. 1 а). Очевидно, что течение потенциально,  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$  и потенциал  $\varphi$  может зависеть только от следующих величин:  $U$ ,  $r$ ,  $\theta$ ,  $a$ . Здесь  $r$ ,  $\theta$  — полярные координаты с центром в вершине клина. Анализ размерностей приводит по указанной выше процедуре к соотношению  $\varphi = Ur\Phi(\theta, \alpha)$ .

Из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  и потенциальности поля скорости получим уравнение Лапласа для потенциала

$$\Delta\varphi = r^{-1}\partial_r r\partial_r\varphi + r^{-2}\partial_{\theta\theta}\varphi = 0.$$

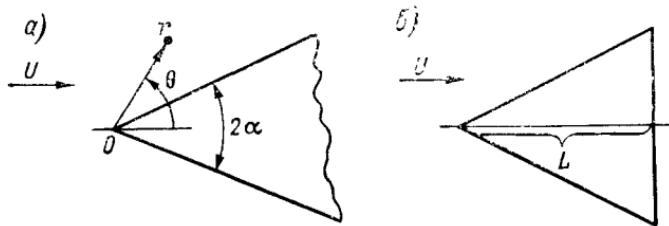


Рис. 1. Обтекание клина идеальной несжимаемой жидкостью.  
а — бесконечный клин, б — клин конечных размеров.

Подставляя в это уравнение соотношение  $\varphi = Ur\Phi(\theta, \alpha)$ , можно легко получить, что  $\Phi = A \cos \theta + B \sin \theta$ . Таким образом  $\varphi$  оказывается равным потенциальному поступательного потока:  $\varphi = Ax + By$ , который, очевидно, не удовлетворяет условиям на боковых сторонах клина: получилось явное противоречие. Для разрешения противоречия обратимся по указанному выше правилу к невырожденной задаче обтекания плоским потоком идеальной жидкости клина *конечных* размеров (рис. 1 б). В этом случае решение заведомо существует, но среди определяющих параметров появляется еще один — размер клина  $L$ , и решение перестает быть автомодельным. В самом деле, анализ размерности дает

$$\varphi = Ur\Phi(\eta, \theta, \alpha); \quad \eta = r/L. \quad (27)$$

Предположение о полной автомодельности по  $\eta$ , т. е. о существовании конечного предела решения при  $L \rightarrow \infty$  — решения задачи для бесконечного клина, оказалось неправильным. На самом деле имеет место неполная автомодельность по  $\eta$ , т. е. существует такое  $\lambda \neq 0$ , что  $\Phi(\eta, \theta, \alpha) = \eta^\lambda \Phi_1(\theta, \alpha)$  при малых  $\eta$ . Отсюда следует, что при малых  $\eta$ , т. е. вблизи вершины клина, или при увеличении размера клина  $L$  предельное выражение для потенциала  $\varphi$  имеет вид  $\varphi = UL^{-\lambda}r^{1+\lambda}\Phi_1(\theta, \alpha)$ . Подставляя это выражение в уравнение Лапласа и решая его, получаем:

$$\varphi = Ar^{1+\lambda} \cos [(\lambda + 1)\theta + \gamma], \quad (28)$$

где  $A = \beta UL^{-\lambda}$ ;  $\beta$ ,  $\gamma$  — безразмерные постоянные. Собственное значение  $\lambda$  определяется из условия существования автомодельного решения в целом, в данном случае из условия обращения в нуль окружной компоненты скорости на щеках клина  $\theta = \alpha$  и  $\theta = 2\pi - \alpha$ , линии симметрии  $\theta = \pi$ , и только на этих линиях. Отсюда находим  $\lambda = \alpha/(\pi - \alpha)$ ,  $\gamma = -\pi^2/(\pi - \alpha)$ . Константа  $\beta$  может быть найдена срашиванием с решением исходной невырожденной задачи, которое без труда получается применением конформного отображения. Мы построили автомодельное решение второго рода, представляющее асимптотику поля потока вблизи вершины клина. Заметим, что ставя задачу обтекания бесконечного клина, мы на самом деле интересовались именно этой асимптотикой!

Приведенный здесь пример достаточно прост, чтобы можно было построить полное решение невырожденной задачи. Вместе с тем он ясно показывает те сложности, которые могут появиться в тяжелых нелинейных задачах, когда решение невырожденных задач недоступно.

9. Выяснению природы автомодельностей второго рода помогло установление тесной связи классификации автомодельностей и нелинейных бегущих волн [19, 109]. Бегущие волны представляют собой решения вида

$$u = f(\zeta - \lambda\tau + c). \quad (29)$$

Здесь  $\zeta$  и  $\tau$  — пространственная и временная переменные,  $\lambda$  — постоянная скорость распространения волны,  $c$  — константа. Для таких решений распределения характеристик в разные моменты времени получаются одно из другого простым сдвигом. Хорошо известно, что бегущие волны подразделяются на два типа. Для волн первого типа скорость распространения  $\lambda$  находится только из законов сохранения и не зависит от внутренней структуры волны. Примером таких волн являются ударные волны в газодинамике и детонационные волны. Для волн другого типа скорость распространения  $\lambda$  находится из условия существования в целом решения, описывающего внутреннюю структуру волны, и полностью этой структурой определяется. Примером волн этого типа является волна пламени или волна распространения гена, имеющего преимущество в борьбе за существование. Следует отметить, что рассмотрение последней задачи в классической работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [54] было первым примером строгого анализа промежуточной асимптотики нелинейных задач.

Положим теперь в выражении (29)  $\zeta = \ln x$ ;  $\tau = \ln t$ ;  $c = -\ln A$ . Тогда это выражение преобразуется к автомодельному виду  $f(\zeta - \lambda\tau + c) = f(\ln(x/At^\lambda)) = F(x/At^\lambda)$ . (30)

Этим преобразованием разделение автомодельных решений на решения первого и второго рода ставится в однозначное соответствие классификации бегущих волн, о которой было сказано выше.

10. Автомодельность связывается [19, 109] с нелинейной, вообще говоря, задачей на собственные значения, существование решения которой обеспечивает существование автомодельной промежуточной асимптотики в целом. Оказывается нетривиальным вопрос о множестве собственных значений в этой задаче — спектре, определяющем возможные значения показателей степени в автомодельных переменных. Все просто, если спектр состоит из одной точки, как в рассмотренной выше модифицированной задаче теплопроводности. Если же спектр состоит более чем из одной точки, в частности, если он непрерывен, показатели степени в автомодельных переменных зависят от начальных условий исходной неавтомодельной задачи. Замечательный пример здесь доставляет автомодельная интерпретация известного уравнения Кортевега—де Фриза (см. главу 7).

В последнее время идеи, связанные с концепцией неполной автомодельности и автомодельных решений второго рода, были использованы для решения многих важных задач, представляющих самостоятельный, неиллюстративный интерес. Некоторые из этих задач рассматриваются ниже. Особое место занимает анализ неполных автомодельностей в теории турбулентности, где полная математическая постановка задачи до сих пор отсутствует и решающее значение при оценке автомодельности принадлежит сопоставлению законов подобия с данными эксперимента.

Соображения автомодельности широко использовались физиками в квантовой теории поля и теории фазовых переходов (физики называют автомодельность «скелингом»). В этих теориях нет точно сформулированных краевых задач, и поэтому предлагаемые рецепты и высказываемые утверждения носят в значительной мере интуитивный характер. На самом деле скелинг это в точности то, что мы сегодня понимаем под неполной автомодельностью. Мне кажется, что тем, кто интересуется скелингом, полезно взглянуть, как работает это понятие в других ситуациях, где действительно имеются точные формулировки краевых задач и возникновение автомодельной асимптотики можно непосредственно проследить.

Сказанное определяет содержание книги; более полное и точное представление о нем дает оглавление. Краткое изложение анализа размерности и подобия, данное в главе 1, оказалось необходимым, поскольку анализ размерности существенно используется во всем дальнейшем изложении. Наше изложение анализа размерностей и подобия в целом существенно отличается от имеющихся в литературе, хотя в основных идеях следует превосходной и незаслуженно забываемой в последнее время книге Бриджмена [116].

## АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЕ

### 1.1. Размерность

Физические величины выражаются числами, которые получаются путем *измерения* — прямого или косвенного сравнения с соответствующими *единицами измерения*. Единицы измерения разделяются на *основные* и *производные*. Основные единицы измерения задаются произвольно в виде тех или иных эталонов, искусственных или природных; производные единицы измерения получаются из основных в силу определения физической величины, которое всегда является указанием способа ее измерения, по крайней мере мысленного. Так, скорость, по определению, представляет собой отношение расстояния, проходимого за определенный промежуток времени, к величине этого промежутка времени. Следовательно, за единицу скорости можно (но не обязательно!) принять отношение единицы длины к единице времени в данной системе. Точно так же плотность, по определению, — отношение некоторой массы к заключающему ее объему, поэтому за единицу плотности можно принять отношение единицы массы к единице объема, т. е. к кубу единицы длины.

*Совокупность основных единиц измерения, достаточная для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений, называется системой единиц измерения.* Так, в механике часто употребляется система единиц измерения СГС, в которой за единицу массы принят 1 грамм(г) — 1/1000 массы некоторого специально изготовленного и тщательно сохраняемого эталона, за единицу длины — 1 сантиметр (см) — 1/100 длины другого эталона<sup>1</sup> и за единицу времени — 1 секунда (с) — 1/86400 доля средних солнечных суток<sup>2</sup>. Единицей скорости в этой системе является 1 см/с, единицей ускорения — 1 см/с<sup>2</sup>, единицей силы — 1 дина == = 1 г · см/с<sup>2</sup>. Подчеркнем, что в определении системы единиц измерения не содержится требования ее минимальности. Можно рассматривать, например, систему, в которой единицей массы является 1 г, единицей длины — 1 см, единицей времени — 1 с, а единицей скорости — 1 узел ( $\approx 0,5$  м/с).

Назовем классом систем единиц измерения совокупность систем единиц измерения, отличающихся между собой только величиной основных единиц измерения. Упомянутая только что си-

<sup>1</sup> Более точное определение этого эталона: 1 650 763, 73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона-86.

<sup>2</sup> Более точное определение секунды: 1/31 556 925,9747 часть тропического года на 0 января 1900 г. в 12 ч эфемеридного времени.

система единиц измерения СГС входит в класс систем единиц измерения, в котором основными единицами измерения являются

$$\text{г}/M, \text{ см}/L, \text{ с}/T, \quad (1.1)$$

где  $M, L, T$  — отвлеченные положительные числа, показывающие, во сколько раз уменьшаются основные единицы массы, длины, времени при переходе от исходной системы СГС к другой системе данного класса. Этот класс обозначается  $MLT^1$ . К классу  $MLT$  принадлежит, в частности, широко внедряемая в последнее время в употребление система СИ, в которой единицей массы считается 1 килограмм (кг) = 1000 г — полная масса упомянутого выше эталона массы; за единицу длины принимается 1 м = 100 см — полная длина упомянутого выше эталона длины; за единицу времени — 1 с. Таким образом, при переходе от системы СГС к системе СИ  $M = 1 : 1000, L = 1 : 100, T = 1$ . Часто употребляются также системы класса  $FLT$ , в котором основные единицы измерения имеют вид

$$\text{kgs}/F, \text{ см}/L, \text{ с}/T. \quad (1.2)$$

Единица силы кгс — килограмм-сила — сила, сообщающая массе, равной массе эталона килограмма, ускорение равное 9,80665 м/с<sup>2</sup>.

Размерностью физической величины называется функция, определяющая, во сколько раз изменится численное значение этой величины при переходе от исходной системы единиц измерения к другой системе внутри данного класса. Размерность величины  $\phi$  принято, по предложению Максвелла, обозначать через  $[\phi]$ . Специально подчеркнем, что размерность зависит от класса систем единиц измерения. Величины, численное значение которых одинаково во всех системах единиц измерения внутри данного класса, называются безразмерными; все остальные величины называются размерными. Размерность безразмерной величины равна единице.<sup>2</sup>

Укажем несколько примеров. Если единицу массы уменьшить в  $M$  раз, единицу длины в  $L$  раз, единицу времени в  $T$  раз, то численное значение любой измеряемой силы возрастает в  $MLT^{-2}$  раз. Таким образом, для размерности силы в классе систем  $MLT$  имеем

$$[F] = MLT^{-2}. \quad (1.3)$$

Аналогично, размерность массы в классе  $FLT$  имеет вид  $[M] = FT^2L^{-1}$ ; размерность энергии в классе  $MLT$  имеет вид  $[E] = ML^2T^{-2}$  и т. д.

<sup>1</sup> Обозначение класса систем единиц измерения получается последовательным выписыванием символов величин, единицы измерения которых приняты за основные. Одновременно эти символы обозначают число раз, во сколько уменьшается соответствующая единица измерения при переходе от исходной системы к другой системе данного класса.

<sup>2</sup> Обычно принято называть размерностью выражение единицы измерения данной величины через основные единицы. Определение, данное выше, является по существу уточнением этого.

Во всех этих случаях размерность представляется степенным одночленом и это не случайно, *размерность всегда представляет собой степенной одночлен*. Этот факт следует из естественно формулируемого, но глубокого на самом деле утверждения (являющегося следствием фундаментального общефизического принципа ковариантности): *внутри данного класса все системы равноправны*, так что выбор исходной системы для характеристики данного класса не имеет значения.

Покажем это. Рассмотрим некоторый класс систем единиц измерения  $P, Q, \dots$  ( $P, Q, \dots$  обозначают символы  $M, L, T$  и(или) другие им подобные). В силу равноправия систем внутри данного класса размерность любой величины  $a$  зависит только от величин  $P, Q, \dots$ , т. е.

$$[a] = \varphi(P, Q, \dots). \quad (1.4)$$

Если бы существовала некоторая избранная система внутри данного класса, то в число аргументов функции размерности входили бы также отношения величин основных единиц исходной системы к соответствующим единицам избранной системы. В силу принятого принципа равноправия систем единиц измерения внутри данного класса это не так. Аргументами функции размерности являются поэтому только величины  $P, Q, \dots$ , независимо от того, какая система принята за исходную.

Выберем в классе  $P, Q, \dots$  три системы единиц: (0), (1) и (2), причем система (1) получается из системы (0) уменьшением основных единиц измерения в  $P_1, Q_1, \dots$  раз, а система (2) получается из системы (0) уменьшением основных единиц измерения в  $P_2, Q_2, \dots$  раз. В согласии со сказанным, при переходе от системы (0) к системе (1) численное значение рассматриваемой величины  $a$  увеличивается в  $\varphi(P_1, Q_1, \dots)$  раз, при переходе от системы (0) к системе (2) — в  $\varphi(P_2, Q_2, \dots)$  раз. Отсюда следует, что численные значения величины  $a$  в системах (1) и (2) отличаются в  $\varphi(P_1, Q_1, \dots)/\varphi(P_2, Q_2, \dots)$  раз. Далее, в силу равноправия систем внутри данного класса результат перехода от системы (2) к системе (1) зависит только от этих систем и не зависит от того, какая система принята за нулевую. Отношения же основных единиц измерения в системах (2) и (1) составляют соответственно  $P_1/P_2, Q_1/Q_2, \dots$ , поэтому численное значение величины  $a$  должно при этом переходе увеличиться в  $\varphi(P_1/P_2, Q_1/Q_2, \dots)$  раз. Итак, мы вычислили изменение численного значения величины  $a$  при переходе от системы (2) к системе (1) двумя способами. Приравнивая результаты, получаем функциональное уравнение для функции размерности  $\varphi$ :

$$\frac{\varphi(P_1, Q_1, \dots)}{\varphi(P_2, Q_2, \dots)} = \varphi\left(\frac{P_1}{P_2}, \frac{Q_1}{Q_2}, \dots\right). \quad (1.5)$$

Это уравнение в естественном предположении, что размерность — гладкая функция, решается просто. Продифференцировав обе части по  $P_1$  и положив  $P_1 = P_2 = P$ ,  $Q_1 = Q_2 = Q, \dots$ , получим:

$$\frac{\varphi'_P(P, Q, \dots)}{\varphi(P, Q, \dots)} = \frac{1}{P} \varphi'_P(1, 1, \dots) = \frac{a}{P}, \quad (1.6)$$

где  $a$  — постоянная, т. е. не зависящая от  $P, Q, \dots$  величина. Интегрируя (1.6), находим:

$$\varphi(P, Q, \dots) = P^a \varphi_1(Q, \dots), \quad (1.7)$$

причем функция  $\varphi_1$  от  $P$  уже не зависит. Повторяя рассуждение для остальных переменных, получаем:

$$\varphi = [a] = P^\alpha Q^\beta \dots \quad (1.8)$$

(постоянный множитель, получающийся в конце концов в правой части, равен единице, поскольку при  $P = Q = \dots = 1$  система единиц измерения не меняется и изменения численного значения величины  $a$  также не происходит).

Итак, размерность физической величины всегда выражается степенным одночленом. Говорят, что величины  $a_1, \dots, a_k$  имеют независимую размерность, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин. Например, размерности плотности  $ML^{-3}$ , скорости  $LT^{-1}$  и силы  $MLT^{-2}$  независимы. Напротив, размерности плотности, скорости и давления  $ML^{-1}T^{-2}$  зависимы. Покажем, что всегда можно перейти к такой системе единиц измерения внутри данного класса  $PQ\dots$ , чтобы любая величина из набора величин с независимыми размерностями  $a_1, \dots, a_k$ , для определенности  $a_1$ , изменила свое численное значение, увеличившись в произвольное число  $A$  раз, а остальные остались неизменными.

В самом деле, пусть размерности величин  $a_1, \dots, a_k$  в выбранном классе единиц измерения  $PQ\dots$  имеют вид

$$[a_1] = P^{\alpha_1} Q^{\beta_1} \dots, \dots, [a_k] = P^{\alpha_k} Q^{\beta_k} \dots \quad (1.9)$$

Мы строим по определению такую систему (ищем такие числа  $P, Q, \dots$ ), чтобы выполнялись соотношения

$$P^{\alpha_1} Q^{\beta_1} \dots = A, \quad P^{\alpha_2} Q^{\beta_2} \dots = 1, \quad \dots, \quad P^{\alpha_k} Q^{\beta_k} \dots = 1. \quad (1.10)$$

Логарифмируя, находим, что для логарифмов переходных множителей  $\ln P, \ln Q, \dots$  получается система линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_1 \ln P + \beta_1 \ln Q + \dots = \ln A;$$

$$\alpha_2 \ln P + \beta_2 \ln Q + \dots = 0;$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\alpha_k \ln P + \beta_k \ln Q + \dots = 0. \quad (1.11)$$

Эта система всегда имеет по крайней мере одно решение. Действительно, число неизвестных  $\ln P, \ln Q, \dots$  в ней заведомо не меньше числа уравнений, так как в противном случае размерности величин  $a_1, \dots, a_k$ , выражющиеся через  $P, Q, \dots$  были бы, очевидно, зависимыми. Если число неизвестных больше

числа уравнений, то разрешимость системы (1.11) очевидна. Если же число неизвестных равно числу уравнений, то однозначная разрешимость системы (1.11) вытекает из того, что определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \dots \\ \alpha_2 & \beta_2 \dots \\ \dots & \dots \\ \alpha_k & \beta_k \dots \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

отличен от нуля, поскольку в противном случае размерности величин  $a_1, \dots, a_k$  снова не были бы независимыми.

## 1.2. Анализ размерностей

Закономерности, определяемые в физической теории или в эксперименте, всегда можно представить в виде

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (1.13)$$

где величины  $a_1, \dots, a_n$  носят название *определяющих параметров*, причем аргументы  $a_1, \dots, a_k$  имеют независимые размерности, а размерности аргументов  $a_{k+1}, \dots, a_n$  выражаются через размерности определяющих параметров  $a_1, \dots, a_k$ :

$$\begin{aligned} [a_{k+1}] &= [a_1]^{p_{k+1}} \dots [a_k]^{r_{k+1}}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ [a_n] &= [a_1]^{p_n} \dots [a_k]^{r_n}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В конце концов любое исследование сводится к определению одной или нескольких зависимостей вида (1.13).

Размерность определяемой величины  $a$  должна выражаться через размерности определяющих параметров  $a_1, \dots, a_k$ :

$$[a] = [a_1]^p \dots [a_k]^r. \quad (1.15)$$

В самом деле, если бы это было не так, то размерности величин  $a, a_1, \dots, a_k$  были бы независимыми и, согласно предыдущему, можно было бы, меняя систему единиц измерения внутри данного класса, произвольно менять величину  $a$ , оставляя неизменными величины  $a_1, \dots, a_k$  (а следовательно, и все определяющие параметры  $a_1, \dots, a_n$ ). Это означало бы, что величина  $a$  зависит не только от параметров  $a_1, \dots, a_n$ , т. е. что список определяющих параметров в зависимости (1.13) заведомо неполон. Таким образом, существуют такие числа  $p, \dots, r$ , что имеет место формула (1.15). Положим поэтому

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}}, \dots, \quad \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{p_n} \dots a_k^{r_n}}; \\ \Pi &= \frac{a}{a_1^p \dots a_k^r}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Величины  $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$ , очевидно, безразмерны, и при переходе от одной системы единиц к другой внутри данного класса их численные значения остаются неизменными. Зависимость (1.13), используя величины (1.16), можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{f(a_1, \dots, a_n)}{a_1^{\rho_1} \dots a_k^{\rho_k}} = \frac{1}{a_1^{\rho_1} \dots a_k^{\rho_k}} f(a_1, \dots, a_k, \\ &\quad \Pi_1 a_1^{r_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}, \dots, \Pi_{n-k} a_1^{r_n} \dots a_k^{r_n}) = \\ &= F(a_1, \dots, a_k, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Как было показано, можно перейти к такой системе единиц измерения, что любой из параметров  $a_1, \dots, a_k$ , например  $a_1$ , изменится в произвольное число раз, а остальные сохранятся неизменными. При таком переходе в зависимости (1.17) меняется, и притом произвольно, первый аргумент, а все остальные аргументы функции  $F$  остаются неизменными, так же как ее значение  $\Pi$ . Отсюда следует, что  $\partial F / \partial a_1 = 0$  и аналогично  $\partial F / \partial a_2 = 0, \dots, \partial F / \partial a_k = 0$ . Следовательно, зависимость (1.17) представляется на самом деле через функцию  $n - k$  аргументов:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}),$$

или, что то же самое, функция  $f$  имеет специальный вид

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) &= \\ &= a_1^{\rho_1} \dots a_k^{\rho_k} \Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{r_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{r_n} \dots a_k^{r_n}}\right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Этот факт составляет содержание центрального (и, по существу, единственного содержательного) утверждения анализа размерностей, П-теоремы, явно сформулированной и доказанной, по-видимому, впервые Э. Бакингхамом:

*Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной, вообще говоря, величины от размерных же определяющих параметров. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями.*

Следует отметить, что П-теорема интуитивно вполне очевидна и ее неявное использование началось задолго до того, как она была явно сформулирована и формально доказана; в этой связи следует прежде всего назвать имена Галилея, Ньютона, Фурье, Максвелла, Рейнольдса и Релея. Использование анализа размерностей при построении специальных решений систем уравнений в частных производных будет ниже предметом подробного рассмотрения. Здесь же заметим, что анализ размерностей с боль-

шой пользой применяется при предварительном анализе физических явлений и при обработке данных экспериментов. В самом деле, принято считать, что для выяснения зависимости той или иной величины от некоторого определяющего параметра надо измерить эту величину как минимум при десяти значениях данного аргумента (разумеется, число десять вполне условно). Таким образом, для экспериментального определения величины  $a$  в функции  $n$  определяющих параметров надо было бы произвести  $10^n$  экспериментов. Согласно П-теореме, дело сводится к определению функции  $n - k$  безразмерных аргументов  $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ , для нахож-

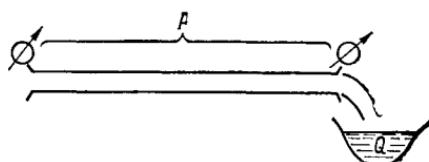
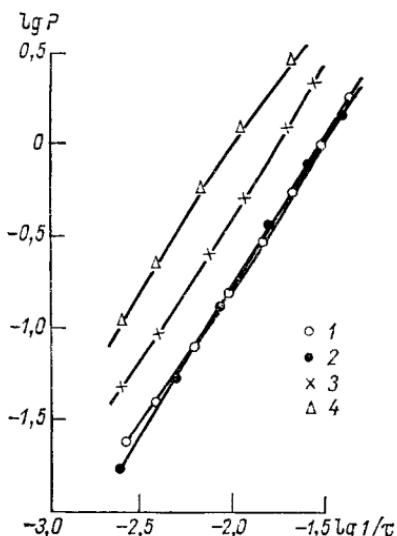


Рис. 1.1. Схема опытов Э. Бозе, Д. Рауэрта и М. Бозе.

Рис. 1.2. Результаты опытов Э. Бозе, Д. Рауэрта и М. Бозе в исходном виде для различных жидкостей.  
1 — вода, 2 — хлороформ, 3 — бромоформ, 4 — ртуть.



дения которой достаточно  $10^{n-k}$  опытов, т. е. в  $10^k$  раз меньше. Стало быть, трудоемкость определения искомой функции сокращается на столько порядков, сколько среди определяющих параметров величин с независимыми размерностями.

Показательный пример. В 1909—1911 гг. физико-химики Э. Бозе, Д. Рауэрт и М. Бозе [115, 114] опубликовали серию экспериментальных исследований (рис. 1.1). Ими измерялось время  $\tau$  заполнения сосуда данного объема  $Q$  и перепад давления  $P$  на концах трубки при стационарном протекании через трубку различных жидкостей: воды, хлороформа, бромоформа, ртути, этилового спирта и др. Результаты опытов были, как полагается, представлены в виде серии зависимостей перепада давления от времени заполнения для разных жидкостей, подобных представленным на рис. 1.2. Эти работы были замечены Карманом [147, 148], который подверг результаты обработке с точки зрения, если пользоваться современной терминологией, анализа размерностей.

Рассуждения Кармана можно представить следующим образом. Перепад давления  $P$  на концах трубки должен зависеть от

времени заполнения сосуда  $\tau$ , объема сосуда  $Q$  и свойств жидкости: коэффициента вязкости  $\mu$  и плотности  $\rho$ :

$$P = f(\tau, Q, \mu, \rho). \quad (1.19)$$

Как видно, в данном случае  $n = 4$ . Размерности параметров, для определенности, в классе  $MLT$ , выражаются следующими соотношениями:

$$[P] = \frac{M}{LT^2}; \quad [\tau] = T; \quad [Q] = L^3; \quad [\mu] = \frac{M}{LT}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}. \quad (1.20)$$

Легко видеть, что первые три определяющих параметра  $\tau$ ,  $Q$ ,  $\mu$  имеют независимые размерности, размерность же четвертого опре-

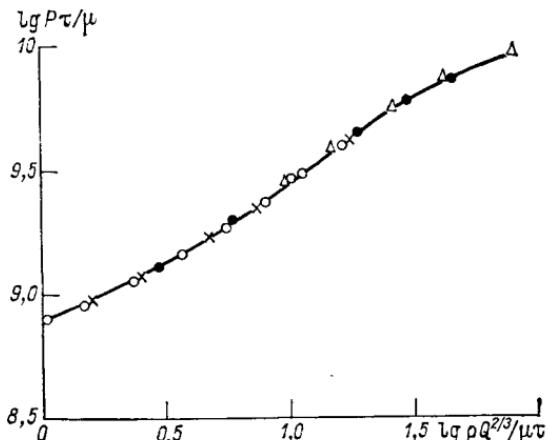


Рис. 1.3. Результаты опытов Э. Бозе, Д. Рауэрта и М. Бозе в интерпретации Кармана.

Обозначения см. рис. 1.2.

деляющего параметра  $\rho$  выражается через размерности первых трех:  $[\rho] = [\mu][\tau][Q]^{-2/3}$ .

Таким образом,  $k = 3$ , так что  $n = k = 1$ , и анализ размерностей дает

$$\Pi = \Phi(\Pi_1), \quad \Pi = P/\mu\tau^{-1}, \quad \Pi_1 = \rho/\mu\tau Q^{-2/3}. \quad (1.21)$$

Следовательно, согласно (1.21), в координатах  $\Pi_1$ ,  $\Pi$  все опытные точки должны лежать на единую кривую. Как показывает рис. 1.3, это подтвердилось. Ясно, что заранее проведенный анализ размерностей мог бы сократить объем экспериментальной работы физико-химиков во много раз.

Интересен следующий пример.<sup>1</sup> При атомном взрыве в области, настолько малой, что ее можно считать точкой, быстро (можно считать мгновенно) выделяется значительная энергия  $E$ . От центра взрыва распространяется мощная ударная волна, давление за которой вначале составляет сотни тысяч атмосфер. Это

<sup>1</sup> Приводимое ниже рассуждение принадлежит Дж. И. Тейлору [201]. Теоретическое исследование соответствующей задачи газодинамики дано в работах Л. И. Седова [96] и Дж. И. Тейлора [201] и будет подробнее рассмотрено в главе 2.

давление много больше, чем начальное давление воздуха, влиянием которого на первой стадии взрыва можно пренебречь. Таким образом, радиус фронта ударной волны  $r_f$  через промежуток времени  $t$  после взрыва зависит от  $E$ ,  $t$  и начальной плотности воздуха  $\rho_0$ :

$$r_f = r_f(E, t, \rho_0).$$

Таким образом,  $n = 3$ . Размерности определяющих параметров в классе  $MLT$  суть соответственно,  $[E] = ML^2T^{-2}$ ;  $[t] = T$ ;  $[\rho_0] = ML^{-3}$ . Легко видеть, что  $k$  тоже равно трем, т. е.  $n - k = 0$ , так что функция  $\Phi$  в выражении (1.18) не зависит ни от одного аргумента, т. е. превращается в данном случае в константу:  $\Phi \equiv C$ . Далее, как нетрудно показать,

$$\Pi = r_f (Et^2/\rho_0)^{-1/5},$$

откуда

$$r_f = C (Et^2/\rho_0)^{1/5}.$$

Эта формула показывает, что если измерять тем или иным способом радиус ударной волны в разные моменты времени, то в логарифмических координатах  ${}^{5/2} \lg r_f$ ,  $\lg t$  экспериментальные точки должны лежать на прямую

$${}^{(5/2)} \lg r_f = {}^{(5/2)} \lg CE^{1/5} \rho_0^{-1/5} + \lg t,$$

имеющую наклон, равный единице. Это подтвердил Тейлор, обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый во время американских ядерных испытаний Дж. Маком (рис. 1.4). Как показывает более детальный расчет (см. следующую главу), значение  $C$  близко к единице. Зная это, по экспериментальной зависимости радиуса фронта от времени можно определить энергию взрыва. Публикация Тейлором этой величины, оказавшейся равной примерно  $10^{21}$  эрг ( $10^{14}$  Дж), вызвала в свое время, по его словам, немалое смущение в американских правительственные кругах, поскольку эта цифра считалась весьма секретной, хотя фильм Мака секретным не был.

Приведем еще один, скорее забавный, пример применения анализа размерностей: «докажем» с его помощью теорему Пифагора (см. также книгу А. Б. Мигдала [66]). Площадь прямоугольного треугольника  $S$  определяется величиной его гипотенузы  $c$  и, для определенности, меньшим из острых углов  $\phi$ :  $S = f(c, \phi)$ . Очевидно, анализ размерностей дает:  $S = c^2 \Phi(\phi)$ . Высота, перпендикулярная гипотенузе (рис. 1.5), разбивает основной треугольник на два подобных ему прямоугольных треугольника, гипотенузами которых являются уже соответственно катеты  $a$  и  $b$  основного треугольника. Стало быть, их площади равны  $S_1 = a^2 \Phi(\phi)$ ,  $S_2 = b^2 \Phi(\phi)$ , где  $\Phi(\phi)$  — то же, что и в случае основного треугольника. Сумма площадей  $S_1$  и  $S_2$  равна площади основного треугольника  $S$ :  $S = S_1 + S_2$ , откуда  $c^2 \Phi(\phi) = a^2 \Phi(\phi) + b^2 \Phi(\phi)$ , так что  $c^2 = a^2 + b^2$ , что и требовалось доказать. Видно, что теорема существенно опирается на евклидовость геометрии: в римановой гео-

метрии и геометрии Лобачевского имеется внутренний параметр  $\lambda$  размерности длины и приведенное доказательство теряет силу, поскольку к числу аргументов функции  $\Phi$  добавляется отношение гипотенузы к  $\lambda$ .

Рассмотренные примеры показывают, что тривиальные, казалось бы, соображения анализа размерностей могут дать вполне содержательные результаты. Важнейшим элементом при этом

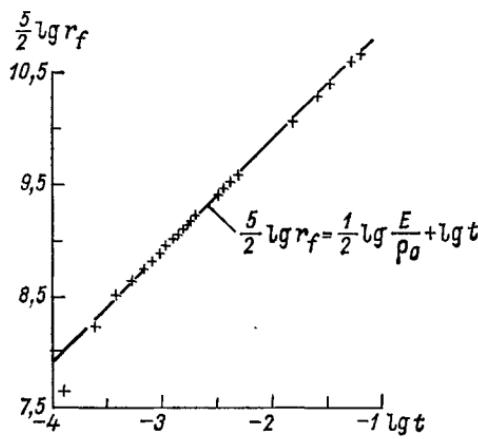


Рис. 1.4. Распространение ударной волны при ядерном взрыве.

Опытные точки, определенные по кинофильму Мака, в координатах  $(5/2) \lg r_f$ ,  $\lg t$ , на большом промежутке времени легли на прямую линию с наклоном, равным единице.

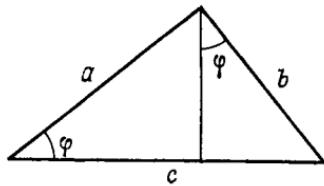


Рис. 1.5. Доказательство теоремы Пифагора при помощи анализа разномерностей.

является правильный выбор совокупности определяющих параметров. Совокупность определяющих параметров находится просто, если имеется математическая формулировка задачи. Это множество независимых переменных и параметров задачи, входящих в уравнения, граничные, начальные и т. п. условия, определяющие, и притом единственным образом, решение задачи. Правильный выбор определяющих параметров в задаче, не имеющей явной математической формулировки, связан прежде всего с интуицией исследователя. Успех здесь зависит от правильного понимания того, какие параметры на самом деле важны, а какими можно пренебречь. Подробно этот вопрос будет обсуждаться ниже.

### 1.3. Подобие

В большинстве случаев, прежде чем изготавливать какое-либо дорогостоящее и крупное сооружение, например корабль или самолет, для получения лучших его характеристик в предстоящих условиях работы прибегают к испытаниям на моделях — мо-

*делированию.* При моделировании надо знать, как пересчитать результаты опыта на модели на природу: если этого не знать, моделирование бесполезно. Для рационального моделирования основным является понятие *подобных явлений*.

Понятие физического подобия естественно обобщает понятие геометрического подобия. Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих параметров и при этом так, что для них соответствующие безразмерные величины  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$  совпадают.

В связи с данным определением подобных явлений безразмерные величины  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$  называются *параметрами подобия*.

Рассмотрим два подобных явления, одно из которых будем называть *натурным*, а другое — *модельным*; разумеется, эти названия условны. Для обоих явлений имеет место некоторая зависимость вида

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (1.22)$$

причем функция  $f$  в обоих случаях, по определению подобных явлений, одна и та же, но численные значения определяющих параметров  $a_1, \dots, a_n$  у них разные. Таким образом,

$$a^{(p)} = f(a_1^{(p)}, \dots, a_n^{(p)}), \quad a^{(m)} = f(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}), \quad (1.23)$$

где индексами  $p$  и  $m$  обозначены величины, относящиеся соответственно к натуральному и модельному явлениям. Используя анализ размерностей, находим для обоих явлений:

$$\Pi_1^{(p)} = \Phi(\Pi_1^{(p)}, \dots, \Pi_{n-k}^{(p)}); \quad \Pi_1^{(m)} = \Phi(\Pi_1^{(m)}, \dots, \Pi_{n-k}^{(m)}), \quad (1.24)$$

где функция  $\Phi$  для модельного инского явления одна и та же. Поскольку, по определению подобных явлений,

$$\Pi_1^{(m)} = \Pi_1^{(p)}, \dots, \Pi_{n-k}^{(m)} = \Pi_{n-k}^{(p)};$$

отсюда следует, что

$$\Pi_1^{(m)} = \Pi_1^{(p)}. \quad (1.25)$$

Возвращаясь снова к размерным переменным, в соответствии с (1.16), получаем из соотношения (1.25) простое *правило пересчета результатов измерений с подобной модели на натурное явление*:

$$a^{(p)} = a^{(m)} (a_1^{(p)} / a_1^{(m)})^p \dots (a_k^{(p)} / a_k^{(m)})^r, \quad (1.26)$$

для которого непосредственное измерение может быть по тем или иным причинам трудно выполнимым.

Условия подобия модели натуральному явлению — равенство параметров подобия  $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$  для обоих явлений — указывают,

как надо выбрать определяющие параметры модели  $a_{k+1}^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}$ , чтобы обеспечить подобие модели натуры:

$$\begin{aligned} a_{k+1}^{(m)} &= a_{k+1}^{(p)} (a_1^{(m)}/a_1^{(p)})^{p_{k+1}} \dots (a_k^{(m)}/a_k^{(p)})^{r_{k+1}}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_n^{(m)} &= a_n^{(p)} (a_1^{(m)}/a_1^{(p)})^{p_n} \dots (a_k^{(m)}/a_k^{(p)})^{r_n}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

причем параметры модели  $a_1^{(m)}, \dots, a_k^{(m)}$  могут быть выбраны произвольно.

Рассмотрим простые иллюстративные примеры.

1. Моделируется установившееся движение тела в безграничной вязкой несжимаемой жидкости. Тело-модель геометрически подобно телу-натуре, они отличаются только размерами; направления скоростей в модели и натуре одинаковы. Определяющими параметрами являются: характерный размер тела, например диаметр поперечного сечения  $l$ , скорость движения  $V$ , вязкость жидкости  $\mu$ , ее плотность  $\rho$ . Эти величины в классе  $MLT$  имеют следующие размерности:

$$[l] = L; \quad [V] = LT^{-1}; \quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1}; \quad [\rho] = ML^{-3}.$$

Таким образом,  $n = 4$ ,  $k = 3$ ,  $n - k = 1$ , так что помимо очевидных геометрических параметров подобия имеется только один динамический

$$\Pi_1 = \rho V l / \mu. \quad (1.28)$$

Этот параметр был назван А. Зоммерфельдом числом Рейнольдса (общепринятое обозначение  $\Pi_1 = Re$ ) в честь английского исследователя О. Рейнольдса, с исключительным успехом применившего одним из первых идеи подобия в гидродинамике. Для обеспечения подобия необходимо равенство этого параметра для модели и натуры.

Аналогичная система определяющих параметров, а следовательно, и тот же динамический параметр подобия имеют место в условиях внутренней задачи, например, для течения вязкой жидкости в трубе. В этом случае за характерный размер можно принять диаметр трубы  $D$ , а в качестве характерной скорости  $V$  взять среднюю по сечению трубы скорость потока.

Естественно определяются безразмерная сила сопротивления тела

$$\Pi = F / \left( \frac{1}{2} \rho V^2 S \right) \quad (1.29)$$

( $F$  — сила сопротивления движению тела,  $S \sim l^2$  — площадь поперечного сечения) и безразмерный перепад давления в трубе, приходящийся на единицу длины,

$$\Pi = \frac{dp}{dx} / \left( \frac{1}{2} (\rho V^2 / D) \right). \quad (1.30)$$

На рис. 1.6 представлены зависимости этих величин от числа Рейнольдса для случаев обтекания цилиндра и движения жидкости в круглой цилиндрической гладкой трубе. Графики, построенные по данным многочисленных экспериментов, превосходно подтверждают существование для каждого случая единой зависимости  $\Pi = \Phi(Re)$ . Как видно, эти кривые имеют довольно сложный характер: участки плавного изменения  $\Pi$  сменяются резким уменьшением или нарастанием, имеются участки на которых  $\Pi$  почти не зависит от  $Re$  и т. д. Все это свидетельствует об изменении режимов течения с изменением числа Рейнольдса, которое представ-

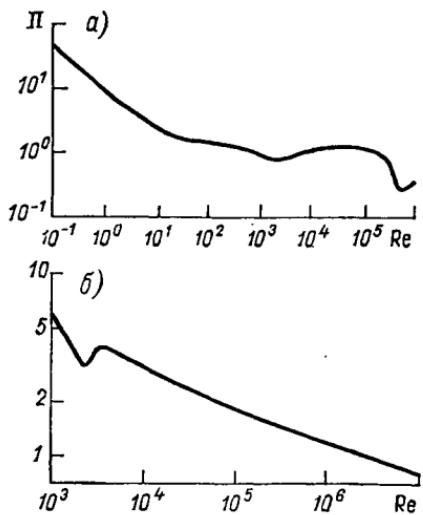


Рис. 1.6. Зависимость от числа Рейнольдса безразмерной силы сопротивления при обтекании цилиндра (а) и безразмерного перепада давления на единицу длины трубы при движении жидкости в трубе (б).

ляет собой единственный параметр, определяющий глобальную структуру потока.

Обычно моделирование движения тела ведется в той же жидкости, что и натурное движение. В этом случае произведения  $Vl$  для модели и для натуры должны совпадать, т. е. скорость движения подобной модели растет пропорционально уменьшению размера модели по сравнению с натурой. Нетрудно показать, что силы сопротивления модели и натурного тела совпадают, так что пересчетный коэффициент равен единице.

2. По поверхности жидкости быстро движется хорошо обтекаемый корабль. Основной вклад в сопротивление быстро движущегося корабля дают создаваемые им при движении волны на поверхности жидкости. Рассматривается идеализированный случай, когда вклад вязкого сопротивления для корабля хорошо обтекаемой формы в грубом первом приближении можно считать малым. Сила сопротивления корабля  $F$  определяется его размером  $l$ , скоростью движения  $V$ , плотностью жидкости  $\rho$  и ускорением силы тяжести  $g$ ; последний параметр существен, так как сила тяжести оказывает определяющее влияние на волны. Вхо-

дящие в рассмотрение величины имеют в классе  $MLT$  следующие размерности:

$$[F] = MLT^{-2}; \quad [l] = L; \quad [V] = LT^{-1}; \quad [\rho] = ML^{-3}; \quad [g] = LT^{-2}.$$

Снова  $n = 4$ ,  $k = 3$ ,  $n - k = 1$ , и динамический параметр подобия имеет вид

$$\Pi_1 = V/\sqrt{lg}. \quad (1.31)$$

Он называется числом Фруда (общепринятое обозначение  $\Pi_1 = Fr$ ) по имени известного английского инженера-кораблестроителя В. Фруда. Таким образом, для модели и натуры величина  $V^2/l$  должна быть одинаковой (параметр  $g$  можно менять лишь с большим трудом при помощи тонких ухищрений, обычно не применяемых), так что отношение скоростей модели и натуры должно быть пропорционально квадратному корню из масштаба моделирования  $l^{(m)}/l^{(p)}$ . Правило пересчета силы сопротивления с модели на натуру в той же жидкости имеет вид

$$F^{(p)} = F^{(m)} \left( \frac{V^{(p)}}{V^{(m)}} \right)^2 \left( \frac{l^{(p)}}{l^{(m)}} \right)^2 = F^{(m)} \left( \frac{l^{(p)}}{l^{(m)}} \right)^3, \quad (1.32)$$

т. е. сила сопротивления пропорциональна кубу масштаба моделирования.

Если не пренебречь ролью вязкости, то появится второй параметр подобия — число Рейнольдса  $Re = \rho V l / \mu$ . Моделирование с одновременным учетом обоих параметров подобия в одной и той же жидкости оказывается невозможным. Действительно, при этом требуется, чтобы для модели и натуры были равны произведения  $Vl$  и отношения  $V^2/l$ , а это возможно лишь при тождестве модели и натуры, что делает моделирование бессмысленным. В связи с этим мы ограничились для иллюстрации случаем, когда вязкое сопротивление мало по сравнению с волновым; на самом же деле вклад вязкого сопротивления моделируется отдельно от волнового при помощи специально разработанных для этой цели практических приемов.

3. Следующий пример относится к моделированию планетных атмосфер, привлекшему сейчас широкое внимание [34]. Подчеркнем, что речь идет не о моделировании конкретных течений в атмосфере той или иной планеты, а о параметрах подобия, определяющих глобальные динамические и термические свойства планетной атмосферы.

Глобальные свойства планетной атмосферы определяются:

- 1) средней поверхностной плотностью поступающей в атмосферу за единицу времени солнечной энергии  $q$ ;
- 2) радиусом планеты  $r$ ;
- 3) постоянной Стефана—Больцмана  $\sigma$ , определяющей при заданной температуре уходящий поток излучения;
- 4) теплоемкостью газа планетной атмосферы при постоянном давлении  $c_p$  (газ планетной атмосферы считается термически и калорически идеальным);
- 5) теплоемкостью газа атмосферы при постоянном объеме

$c_v$ ; 6) угловой скоростью вращения планеты  $\omega$ ; 7) ускорением силы тяжести планеты  $g$ ; 8) массой  $m$  столба газа планетной атмосферы, имеющего единичную площадь основания. Размерности этих параметров в классе систем  $MLT\theta$  ( $\theta$  — размерность температуры) таковы:

$$[q] = MT^{-3}; \quad [r] = L; \quad [\sigma] = MT^{-3}\theta^{-4}; \quad [g] = LT^{-2}; \\ [c_p] = [c_v] = L^2 T^{-2} \theta^{-1}; \quad [\omega] = T^{-1}; \quad [m] = ML^{-2}.$$

Как видно, в данном случае  $n = 8$ ,  $k = 4$ . Таким образом, в задаче имеются четыре параметра подобия:

$$\Pi_1 = \omega/r^{-1} c_p^{1/2} q^{1/8} \sigma^{-1/8}; \quad \Pi_2 = g/r^{-1} c_p q^{1/4} \sigma^{-1/4}; \\ \Pi_3 = m/r c_p^{-3/2} q^{5/8} \sigma^{3/8}; \quad \Pi_4 = c_p/c_v = \gamma.$$

Первый параметр — вращательное число Маха — с точностью до множителя порядка единицы равен отношению скорости вращения планеты на экваторе к скорости звука. В самом деле, скорость звука  $c$  при равновесной температуре  $T_e = (q/\sigma)^{1/4}$  равна  $\sqrt{c_p T_e (\gamma - 1)}$ . Далее по традиции вместо параметров  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  рассматриваются обратные им величины  $\Pi_g = \Pi_2^{-1}$  и  $\Pi_M = \Pi_3^{-1}$ . Параметр  $\Pi_g$  представляет собой с точностью до множителя  $\gamma/(\gamma - 1)$  отношение «высоты однородной атмосферы» для данной планеты  $(c_p - c_v) T_e/g$  к ее радиусу  $r$ . Параметр  $\Pi_M$  — так называемый энергетический критерий подобия — определяет меру тепловой инерции атмосферы планеты.

Таким образом, основными критериями подобия, определяющими глобальные свойства планетных атмосфер являются параметры  $\Pi_1$ ,  $\Pi_g$  и  $\Pi_M$ . Значения этих параметров для планет Солнечной системы приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Планета	$\Pi_1$	$\Pi_g$	$\Pi_M$
Меркурий		Атмосфера отсутствует	
Венера	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 3 \cdot 10^{-4}$	$10^{-5}$
Земля	1,43	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$
Марс	1,05	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$
Юпитер	15,6	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$
Сатурн	14,7	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$
Уран	7,5	$10^{-3}$	$10^{-5}$
Нептун	6	$6 \cdot 10^{-4}$	$10^{-5}$

Из таблицы видно, что значения  $\Pi_g$  и  $\Pi_M$  для всех планет малы. Поэтому Г. С. Голицын [34] сделал предположение, что значения этих параметров несущественны для глобальной характеристики планетной атмосферы. Напротив, параметр  $\Pi_1$  меняется в широких пределах: для Венеры он мал, для Земли и Марса —

около единицы и, наконец, для планет-гигантов Юпитера и Сатурна велик. Поэтому считается [34], что именно по величине вращательного параметра подобия  $\Pi_1$  следует классифицировать планетные атмосферы.

Для медленно вращающихся планет с плотной атмосферой (Венера, в известном приближении Земля) все три определяющие параметра подобия малы:  $\Pi_1 \ll 1$ ;  $\Pi_g \ll 1$ ;  $\Pi_M \ll 1$ . Поэтому Голицын [34] полагает, что соответствующие размерные параметры  $g$ ,  $\omega$ ,  $m$  несущественны. Это позволило ему предложить простую формулу для полной кинетической энергии атмосферной циркуляции  $E$ . Действительно, поскольку при сделанных предположениях  $E = f(q, c_p, r, \sigma, \gamma)$ , анализ размерностей дает по стандартной процедуре

$$E = 2\pi^3 c_p^{-1/2} q^{7/8} \sigma^{1/8} \Phi(\gamma), \quad (1.33)$$

где множитель  $2\pi$  введен для удобства. Формула Голицына (1.33) позволяет оценить среднюю скорость атмосферных движений. Действительно,  $E = 2\pi r^2 m U^2$ , откуда с учетом (1.33) находим

$$U = (E/2\pi r^2 m)^{1/2} = [\Phi(\gamma)/(\gamma - 1)]^{1/2} \Pi_M^{1/2} c, \quad (1.34)$$

где  $c$  — скорость звука. Как видно, с точностью до множителя, зависящего от  $\gamma$ , параметр  $\Pi_M$  для медленно вращающихся планет с плотной атмосферой равен квадрату числа Маха. В книге Голицына [34] приведены данные, показывающие, что формулы (1.33) и (1.34) дают правильный порядок величины скорости ветра для Венеры, Земли и Марса.

Приведенные примеры показывают, что соображения размерности играют определяющую роль в установлении правил моделирования и критерии подобия. При моделировании, как и при любом применении анализа размерностей, в тех случаях, когда отсутствует точная математическая формулировка задачи, самое главное — правильно выбрать систему определяющих параметров. Нередко (см., в частности, последний пример) поступают так: берут в качестве определяющих параметров все величины, которые могут, по мнению исследователя, оказывать влияние на явление, хотя бы гипотетически. В качестве определяющих параметров с независимыми размерностями берут заведомо существенные определяющие параметры, а при выборе остальных смотрят на численное значение соответствующих параметров подобия  $\Pi_i$ . Если эти значения очень малы или очень велики, соответствующий размерный параметр  $a_{k+i}$  считается несущественным и выбрасывается.

Действительно, во многих случаях так поступать можно. Однако важно, что это, вообще говоря, не так, и к подобному способу рассуждения нужно относиться с большой осторожностью. Нужно видеть в нем не доказательство возможности пренебрежения тем или иным параметром, а сильную гипотезу. Последнее утверждение по сути тривиально: ниоткуда не следует, что при малых или больших значениях аргумента  $\Pi_i$  функция  $\Phi(\Pi_1, \dots)$

$\dots, \Pi_i, \dots, \Pi_{n-k}$ ) стремится к определенному и притом конечному пределу. Существование такого предела (на самом деле еще и достаточно быстрое к нему стремление) только и может оправдать отбрасывание определяющего параметра, если соответствующий ему параметр подобия очень велик или очень мал. Дальнейшее изложение покажет нам, что подобная грубость в анализе может привести к крупным просчетам.

## Глава 2

---

### ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ К ПОСТРОЕНИЮ ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

---

#### 2.1. Сильные тепловые волны

Анализ размерностей позволяет в определенных случаях получить при помощи вполне стандартного приема точные частные решения сложных задач математической физики, приводящих к начальным, краевым или смешанным задачам для уравнений или систем уравнений в частных производных. Эти решения выражаются через решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Представление об общем методе применения анализа размерностей к получению точных частных решений можно получить на примере явлений, возникающих на начальных стадиях ядерного взрыва в газе — тепловой и газодинамической<sup>1</sup>. Мы изложим здесь решения соответствующих предельно схематизированных задач, хотя эти решения хорошо известны и не раз излагались, и сделаем это по двум причинам. Во-первых, на этих решениях хорошо демонстрируется применение метода анализа размерности. Во-вторых, и это наиболее важно, мы явно укажем здесь на некоторые, обычно не оговариваемые, а на самом деле очень существенные предположения, которые делаются при формулировке соответствующих задач. Эти предположения справедливы для конкретных задач, рассматриваемых в настоящей главе. Однако, как мы увидим дальше, небольшое усложнение рассматриваемых задач, казалось бы, на первый взгляд, оставляющее соображения анализа размерности неизменными, сделает эти предположения неприме-

<sup>1</sup> Подробное рассмотрение физики газодинамических явлений при сильном взрыве можно найти в монографии Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [48]. О таких же явлениях, происходящих при воздействии на вещество сфокусированного лазерного импульса, см. в монографии Ю. П. Райзера [89].

нимыми, и мы столкнемся с парадоксом, разрешение которого приведет нас к автомодельным решениям нового типа.

Итак, на самой начальной стадии ядерного взрыва — тепловой — непосредственно следующей за выделением энергии, газ еще неподвижен. В неподвижном газе распространяются сильные тепловые волны. Перенос энергии излучением на этой стадии происходит со скоростью, во много раз превышающей скорость звука; именно поэтому гидродинамическим перемещением вещества на этой стадии можно пренебречь. Теплопроводность газа при этом определяется в основном излучением — коэффициент теплопроводности  $\lambda$  можно считать степенной функцией температуры  $u$ :

$$\lambda = \lambda_0 u^n. \quad (2.1)$$

Величина  $n$  равна примерно пяти. Зависимость теплоемкости  $c$  от температуры существенно слабее, и в первом приближении ею можно пренебречь. Запишем уравнение баланса энергии в виде

$$c \partial_t u + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0,$$

где  $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} u$  — поток тепла,  $t$  — время. Преобразуя, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} &= -\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} u = -\lambda_0 \operatorname{div} u^n \operatorname{grad} u = \\ &= -[\lambda_0/(n+1)] \operatorname{div} \operatorname{grad} u^{n+1} = -[\lambda_0/(n+1)] \Delta (u^{n+1}), \end{aligned}$$

где  $\Delta$  — символ оператора Лапласа.

В интересующем нас в силу геометрии задачи случае сферически симметричного распространения тепловых волн  $\Delta(u^{n+1}) = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u^{n+1}$  ( $r$  — расстояние от центра), и уравнение баланса тепла окончательно принимает форму

$$\partial_t u = \kappa r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u^{n+1}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\kappa = \lambda_0/(n+1)c$  — константа.

Решение этого уравнения при начальном условии и условии на бесконечности

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= 0 \text{ при } r \neq 0; \quad 4\pi c \int_0^{r_*} u(r, 0) r^2 dr = E; \\ u(\infty, t) &= 0 \text{ при } t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $r_*$  — произвольное положительное число, отвечает мгновенному выделению в начальный момент в точке — центре взрыва — определенного конечного количества тепла  $E$  и начальной температуре, равной нулю везде кроме центра взрыва.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Асимптотический смысл решения при таком начальном условии будет детально рассмотрен ниже. Параметр  $r_*$  — произвольное положительное число, поскольку  $u(r, 0) = 0$  при  $r \neq 0$ .

Для решения  $u$  определяющими параметрами будут независимые переменные  $r$  и  $t$  и постоянные параметры  $\kappa$ ,  $Q = E/c$  (параметры  $E$  и  $c$  входят только в отношении), входящие в уравнение и начальное условие:

$$u = f(t, \kappa, Q, r). \quad (2.4)$$

Размерности определяющих параметров суть:

$$[r] = L; [t] = T; [\kappa] = L^2 T^{-1} \theta^{-n}; [Q] = \theta L^3, \quad (2.5)$$

где  $\theta$  — символ размерности температуры.

Применим анализ размерностей. В данном случае  $n = 4$ ,  $k = 3$ . Выбирая в качестве определяющих параметров с независимыми размерностями  $t$ ,  $\kappa$  и  $Q$ , получаем в силу П-теоремы:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Phi(\Pi_1); \quad \Pi = u/[Q^2 (\kappa t)^{-3}]^{1/(3n+2)}; \\ \Pi_1 &= r/[Q^n \kappa t]^{1/(3n+2)} = \xi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

откуда находим

$$u = [Q^2 (\kappa t)^{-3}]^{1/(3n+2)} \Phi(\xi). \quad (2.7)$$

Вычисляя при помощи (2.7) необходимые производные от  $u$  по  $r$  и  $t$  и подставляя в (2.2) и (2.3), получаем для определения функции  $\Phi(\xi)$  обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \Phi^{n+1}}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\Phi^{n+1}}{d\xi} + \frac{1}{3n+2} \xi \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{3}{3n+2} \Phi = 0. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.7) показывает, что при любом  $t$

$$4\pi c \int_0^\infty u(r, t) r^2 dr = 4\pi E \int_0^\infty \xi^2 \Phi(\xi) d\xi = \text{const},$$

откуда, учитывая (2.3), получаем условия:

$$\int_0^\infty \xi^2 \Phi(\xi) d\xi = 1/4\pi; \quad \Phi(\infty) = 0. \quad (2.9)$$

К этому добавляется также требование непрерывности функции  $\Phi$  и производной  $d\Phi^{n+1}/d\xi \sim \Phi^n d\Phi/d\xi$ , вытекающее из условий непрерывности в любой момент времени  $t > 0$  температуры, пропорциональной  $\Phi$ , и потока тепла  $q = -\lambda \operatorname{grad} u = -[\lambda_0/(n+1)] \operatorname{grad} u^{n+1}$ , пропорционального  $d\Phi^{n+1}/d\xi$ . Последнее требование нетривиально; оно показывает, что при  $\Phi \neq 0$  производная  $d\Phi/d\xi$  должна быть непрерывной. В то же время в точке, где  $\Phi$  обращается в нуль, производная  $d\Phi/d\xi$  может претерпевать разрыв, конечный или даже бесконечный, лишь бы была непрерывной производная  $d\Phi^{n+1}/d\xi$ .

Интегрирование уравнения (2.8) дает решение, удовлетворяющее второму условию (2.9), в виде

$$\Phi = K (\xi_0^2 - \xi^2)^{1/n} \text{ при } \xi \leq \xi_0; \quad \Phi \equiv 0 \text{ при } \xi \geq \xi_0, \quad (2.10)$$

где  $K = [n/2(n+1)(3n+2)]^{1/n}$ . Для определения оставшейся константы  $\xi_0$  применим первое условие (2.9); в результате получаем

$$K \int_0^{\xi_0} (\xi_0^2 - \xi^2)^{1/n} \xi^2 d\xi = K \xi_0^{\frac{3n+2}{n}} \int_0^1 (1 - \zeta^2)^{1/n} \zeta^2 d\zeta = 1/4\pi, \quad (2.11)$$

откуда, используя выражение интеграла через бета-функции [106], находим:

$$\xi_0 = [2\pi K B(3/2, (n+1)/n)]^{-n/(3n+2)}. \quad (2.12)$$

Здесь  $B$  — символ бета-функции Эйлера.

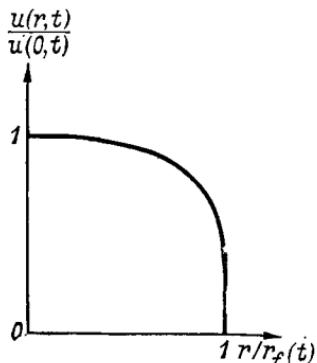


Рис. 2.1. Распределение температуры за сильной тепловой волной в автомодельных переменных  $u(r, t)/u(0, t)$ ,  $r/r_f(t)$ .

Таким образом, распределение температуры окончательно представляется в виде

$$u = [E^2/c^2 n^3 t^3]^{1/(3n+2)} K \left( \xi_0^2 - r^2 / (E^n c^{-n} n t)^{2/(3n+2)} \right)^{1/n} \quad (2.13)$$

при  $r \leq r_f(t) = \xi_0(n) [(E/c)^n n t]^{1/3n+2}$ ;  $u \equiv 0$  при  $r \geq r_f(t)$ .

Из (2.13) следует простая зависимость

$$\frac{u}{u(0, t)} = \left( 1 - \frac{r^2}{r_f^2} \right)^{1/n} \text{ при } r \leq r_f(t); \quad u \equiv 0 \text{ при } r \geq r_f(t).$$

На рис. 2.1 представлена эта зависимость для  $n = 5$ . Любопытно, что при  $n > 0$  в отличие от линейного случая ( $n = 0$ ) имеет место «конечная скорость распространения тепла» — зона возмущения ограничена,  $r_f(t) < \infty$  при любом конечном  $t$ . При  $n = 0$  предельным переходом получается уже известное (см. введение) решение типа мгновенного точечного источника для линейного уравнения теплопроводности. В этом случае  $r_f(t) = \infty$  при

любом  $t > 0$ . Изложенное выше решение было получено в работах Я. Б. Зельдовича, А. С. Компанейца [46], Г. И. Баренблatta [4]; в последней работе рассматривалась математически эквивалентная задача фильтрации газа.

Разумеется, в случае одномерного распространения тепла все рассуждения проводятся вполне аналогично; с помощью подобных рассуждений из соображений анализа размерностей можно получить классическое решение типа мгновенного источника для линейного уравнения теплопроводности в одномерном случае. Поскольку это решение и, главное, этот вывод нам скоро понадобятся, кратко на нем остановимся. Итак, ищется решение уравнения

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u \quad (2.14)$$

при начальном условии и условии на бесконечности

$$u(x, 0) = Q\delta(x); \quad u(\infty, t) \equiv 0,$$

т. е.

$$u(x, 0) \equiv 0 \text{ при } x \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = Q;$$

$$u(\infty, t) = 0. \quad (2.15)$$

Искомое решение зависит, очевидно, от определяющих параметров  $t$ ,  $\kappa$ ,  $Q$ ,  $x$ , размерности которых суть соответственно:  $T$ ,  $L^2 T^{-1}$ ,  $\theta L$ ,  $L$  ( $\theta$  — размерность температуры  $u$ ). В качестве определяющих параметров с независимыми размерностями берем первые три. В данном случае  $n = 4$ ,  $k = 3$  и анализ размерностей дает

$$\Pi = \Phi(\Pi_1); \quad \Pi = u/Q(\gamma t)^{-1/2}; \quad \Pi_1 = x/\sqrt{\kappa t},$$

откуда

$$u = (Q/\sqrt{\kappa t}) f(x/\sqrt{\kappa t}).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.14) и используя условия (2.15), получим хорошо известное решение

$$u = (Q/2\sqrt{\pi\kappa t}) \exp(-x^2/4\kappa t). \quad (2.16)$$

Можно пожелать получить из соображений анализа размерностей закон убывания температуры в точке максимума; те же рассуждения дают с точностью до константы

$$u_{\max} \sim Q/\sqrt{\kappa t},$$

из соотношения (2.16) находим

$$u_{\max} = Q/2\sqrt{\pi\kappa t}.$$

Следует обратить внимание на приведенный вывод решения (2.16): он типичен и кажется вполне прозрачным. На самом деле этот вывод содержит подводные камни, которые полностью проявятся при, казалось бы, небольшой и нечувствительной модификации задачи (см. следующую главу).

## 2.2. Сильные взрывные волны

Полученное в п. 2.1 решение описывает явление сильного взрыва на самой начальной, тепловой стадии. С течением времени скорость переноса энергии излучением убывает и быстро становится малой по сравнению со скоростью звука. В разогретом газе возникает мощная ударная волна, которая обгоняет тепловую, и происходит переход к следующей, газодинамической стадии. На этой стадии необходимо рассматривать движение газа; это движение можно считать адиабатическим. Напомним хорошо известные [59, 63] уравнения адиабатического движения газа в интересующем нас случае сферической симметрии. Первое уравнение — закон Ньютона, записанный для единицы объема газа:

$$dv/dt = \partial_t v + v \partial_r v = -\partial_r p/\rho,$$

где  $v$  — радиальная компонента скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность газа,  $r$  — координата, отсчитываемая от центра взрыва,  $t$  — время. Действительно, единственной действующей силой является перепад давления в радиальном направлении, а масса единицы объема равна плотности газа. Далее, выполняется закон сохранения массы газа:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho v = 0.$$

В случае сферической симметрии, когда единственная отличная от нуля компонента скорости — радиальная,  $\operatorname{div} \rho v = r^{-2} \partial_r r^2 \rho v = = (2/r) \rho v + \partial_r \rho v$ . Наконец, в силу адиабатичности движения справедливо уравнение сохранения энтропии в жидкой частице

$$ds/dt = \partial_t s + v \partial_r s = 0,$$

где  $s$  — энтропия единицы массы, в рассматриваемом случае термодинамически идеального газа  $s = c_v \ln(p/\rho^\gamma)$ ;  $c_v$  — теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\gamma$  — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к его теплоемкости при постоянном объеме.

Таким образом, основные уравнения движения газа записываются в виде

$$\partial_t v + v \partial_r v + \partial_r p/\rho = 0;$$

$$\partial_t \rho + \partial_r (\rho v) + 2\rho v/r = 0;$$

$$\partial_t (p/\rho^\gamma) + v \partial_r (p/\rho^\gamma) = 0. \quad (2.17)$$

Мы рассмотрим здесь точное решение задачи о движении газа, возникающем при мгновенном выделении в центре взрыва конечной порции энергии  $E$ . Газ вначале предполагается покоящимся, его давление — равным нулю, начальная плотность газа — равной  $\rho_0$  везде, кроме центра взрыва.<sup>1</sup> Классического, т. е. гладкого решения этой задачи не существует. Мы будем искать кусочно-гладкое решение, так что возмущенная область, внутри которой решение меняется непрерывно и описывается уравнениями (2.17), ограничена ударной волной — сферой радиуса  $r_f(t)$ . На фронте волны характеристики движения — давление, плотность, скорость — меняются скачкообразно. Вне этой сферы сохраняется состояние покоя газа и начальное давление газа также по условию равно нулю. При этом условия сохранения (непрерывности потока) массы, импульса и энергии на фронте ударной волны записываются в виде

$$\rho_f(v_f - D) = -\rho_0 D; \quad \rho_f(v_f - D)^2 + p_f = \rho_0 D^2;$$

$$\rho_f(v_f - D)[\gamma p_f/(\gamma - 1) \rho_f + (v_f - D)^2/2] = -\rho_0 D^3/2.$$

Здесь  $D = dr_f/dt$  — скорость распространения ударной волны по покоящемуся газу, а индексом  $f$  обозначены значения величины за фронтом ударной волны, т. е. при  $r = r_f = 0$ . (Напомним, что поток энергии равен произведению потока массы на сумму кинетической энергии единицы массы и энтальпии — тепловой функции — единицы массы.) Последние два соотношения удобно записать следующим образом:

$$\rho_f(v_f - D)v_f + p_f = 0;$$

$$\rho_f(v_f - D)[p_f/(\gamma - 1)\rho_f + v_f^2/2] + p_f v_f = 0.$$

Разрешая соотношения непрерывности потока массы, импульса и энергии относительно плотности, давления и скорости за фронтом, находим:

$$p_f = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D^2; \quad \rho_f = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0; \quad v_f = \frac{2}{\gamma + 1} D. \quad (2.18)$$

Далее, энергия единицы объема газа равна  $\rho(v^2/2 + c_v T) = \rho(v^2/2 + p/(\gamma - 1)\rho)$ , где  $T$  — абсолютная температура, поэтому начальное условие для задачи о точечном взрыве можно записать в виде

$$\rho(r, 0) \equiv \rho_0; \quad p(r, 0) \equiv 0; \quad v(r, 0) \equiv 0 \text{ при } r \neq 0,$$

$$4\pi \int_0^{r_*} \rho \left[ \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right] r^2 dr = E \text{ при } t = 0, \quad (2.19)$$

где  $r_*$  — произвольная положительная величина<sup>2</sup>,  $E$  — энергия,

<sup>1</sup> Асимптотический смысл этого решения также будет рассмотрен ниже.

<sup>2</sup> Поскольку  $v(r, 0) = 0$  и  $p(r, 0) = 0$  при  $r \neq 0$ .

выделившаяся в центре взрыва в начальный момент. Наконец, имеет место очевидное условие отсутствия притока вещества и энергии в центре при  $t > 0$ :

$$v(0, t) \equiv 0 \text{ при } t > 0. \quad (2.20)$$

Анализ уравнений (2.17) и условий (2.18) — (2.20) показывает, что характеристики движения газа  $\rho$ ,  $\rho$ ,  $v$  зависят от определяющих параметров

$$t, E, \rho_0, r, \gamma, \quad (2.21)$$

размерности которых в классе систем единиц измерения  $MLT$  суть соответственно:

$$T, ML^2T^{-2}, ML^{-3}, L, 1. \quad (2.22)$$

Радиус фронта зависит от тех же определяющих параметров (2.21), за исключением  $r$ . Таким образом,  $n = 5$ ,  $k = 3$  и, выбирая в качестве определяющих параметров с независимыми размерностями первые три, получаем:

$$\Pi_1 = r (Et^2/\rho_0)^{-1/5} = \xi; \quad \Pi_2 = \gamma, \quad (2.23)$$

откуда и из анализа размерностей следует:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} p &= \rho_0 (r^2/t^2) P(\xi, \gamma); \quad \rho = \rho_0 R(\xi, \gamma); \quad v = (r/t) V(\xi, \gamma); \\ r_f &= \xi_0(\gamma) (Et^2/\rho_0)^{1/5}; \quad D = (2/5)\xi_0(\gamma) (Et^{-3}/\rho_0)^{1/5}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в уравнения (2.17), получаем для функций  $P$ ,  $V$ ,  $R$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(V - \frac{2}{5}\right) R \frac{dV}{d \ln \xi} + \frac{dP}{d \ln \xi} - RV + RV^2 + P &= 0; \\ \frac{dV}{d \ln \xi} + \left(V - \frac{2}{5}\right) \frac{d \ln R}{d \ln \xi} + 3V &= 0; \\ \frac{d}{d \ln \xi} \left(\ln \frac{P}{R^\gamma}\right) - \frac{2(1-V)}{V - 2/5} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставляя (2.24) в граничные условия (2.18), находим:

$$\begin{aligned} P(\xi_0 - 0) &= \frac{8}{25(\gamma+1)}; \quad V(\xi_0 - 0) = \frac{4}{5(\gamma+1)}; \\ R(\xi_0 - 0) &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

<sup>1</sup> Здесь, следуя традиции, мы несколько отступили от формального рецепта применения анализа размерностей. Например, для давления следовало бы написать

$$p = E^{2/5} t^{-6/5} \rho_0^{3/5} \Phi(\Pi_1, \Pi_2).$$

Выражение для  $p$  в (2.24) получается, если обозначить  $\Phi = \Pi_1^2 P$ . Аналогично и для скорости.

Далее, из (2.24) следует, что полная энергия газа в возмущенной области постоянна во времени, т. е. является интегралом движения:

$$4\pi \int_0^{r_f} \rho \left[ \frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right] r^2 dr = \\ = 4\pi \rho_0 \frac{E}{\rho_0} \int_0^{\xi_0} R(\xi) \left[ \frac{V^2(\xi)}{2} + \frac{P(\xi)}{(\gamma - 1)R(\xi)} \right] \xi^4 d\xi = \text{const.} \quad (2.27)$$

В силу начального условия (2.19) постоянная в правой части (2.27) равна  $E$ , откуда

$$\int_0^{\xi_0} R(\xi) \left[ \frac{V^2(\xi)}{2} + \frac{P(\xi)}{(\gamma - 1)R(\xi)} \right] \xi^4 d\xi = \frac{1}{4\pi}. \quad (2.28)$$

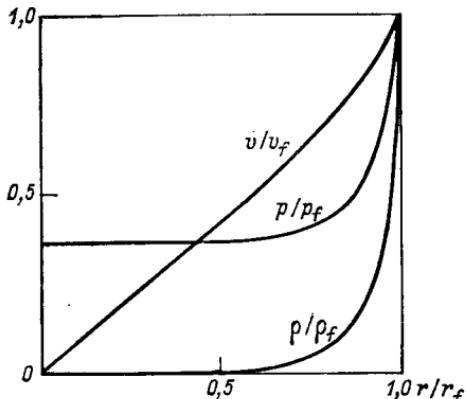


Рис. 2. 2. Распределение давления, плотности и скорости газа за сильной ударной волной в автомодельных переменных  $\rho/\rho_f$ ,  $p/p_f$ ,  $v/v_f$ ;  $r/r_f$ .

Решение системы уравнений (2.25) при условиях (2.26) находится, как и в задаче о сильных тепловых волнах, в конечном виде

$$\left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^5 = C_1 V^2 \left( 1 - \frac{3\gamma - 1}{2} V \right)^{v_1} \left( \frac{5}{2} \gamma V - 1 \right)^{v_2}; \\ R = C_2 \left( \frac{5}{2} \gamma V - 1 \right)^{v_3} \left( 1 - \frac{3\gamma - 1}{2} V \right)^{v_4} \left( 1 - \frac{5}{2} V \right)^{v_5}; \\ P = C_3 R \left( 1 - \frac{5}{2} V \right) V^2 \left( \frac{5}{2} \gamma V - 1 \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

Здесь

$$C_1 = \left[ \frac{5}{4} (\gamma + 1) \right]^2 \left[ \frac{5(\gamma + 1)}{7 - \gamma} \right]^{v_1} \left[ \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right]^{v_2}; \\ C_2 = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{v_3 + v_4 + 1} \left( \frac{5(\gamma + 1)}{7 - \gamma} \right)^{v_4}; \quad C_3 = \frac{\gamma - 1}{2}; \\ v_1 = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)}; \quad v_2 = -\frac{5(\gamma - 1)}{2\gamma + 1}; \quad v_3 = \frac{3}{2\gamma + 1}; \\ v_4 = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2 - \gamma)(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)}; \quad v_5 = -\frac{1}{2 - \gamma}. \quad (2.30)$$

Как нетрудно проверить, решение (2.29) удовлетворяет также условию (2.20). Зависимость  $\xi_0$  от  $\gamma$  определяется подстановкой (2.29) в (2.28) в принципе вполне аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче. Расчет показывает, например, что  $\xi_0 = 1,033$  при  $\gamma = 1,4$ .

На рис. 2.2 представлено распределение давления, плотности и скорости в виде зависимости универсальных (т. е. одинаковых для всех моментов времени) функций

$$p/p_f, \rho/\rho_f, v/v_f \quad (2.31)$$

(где  $p_f, \rho_f, v_f$  — значения величин на фронте ударной волны) от  $r/r_f$  при  $\gamma = 1,4$  (воздух).

Изложенное решение было получено Л. И. Седовым [96] и с несколько меньшей полнотой<sup>1</sup> Дж. И. Тейлором [201].

### 2.3. Автомодельность. Промежуточная асимптотика

Решение задачи о сильном взрыве, как и ранее рассмотренные решения задач о сильной тепловой волне и о мгновенном тепловом источнике, обладает весьма важным свойством *автомодельности*. Заключается это свойство в том, что пространственные распределения всех характеристик в обеих задачах (температуры в первой задаче, давления, плотности и скорости во второй задаче) в различные моменты времени подобны, т. е. получаются одно из другого преобразованием подобия. Таким образом, если выбрать зависящие от времени масштаб пространственной переменной  $r_0(t)$  и масштаб  $u_0(t)$  любой характеристики явления  $u$ , то ее распределение в различные моменты представляется в виде  $u_0(t) \times f(r/r_0(t))$ . Отсюда следует, что все эти распределения в «автомодельных координатах»  $u/u_0(t)$ ,  $r/r_0(t)$  в различные моменты времени представляются единой кривой. Так, в задаче о сильной тепловой волне пространственный масштаб  $r_0(t) = [(E/c)^n \pi t]^{1/(3n+2)}$ , масштаб температуры  $u_0(t) = [(E/c)^2 (\pi t)^{-3}]^{1/(3n+2)}$ ; в задаче о сильном взрыве  $r_0(t) = (Et^2/\rho_0)^{1/5}$ , масштаб плотности  $u_0(t) = \rho_0$ , масштаб давления  $u_0(t) = \rho_0^{3/5} E^{2/5} t^{-8/5}$ , масштаб скорости  $u_0(t) = (Et^{-3}/\rho_0)^{1/5}$ . Мы уже сталкивались с возможностью такого приведения ранее и говорили о связанных с ним преимуществах.

Как уже отмечалось во введении, автомодельные решения встречаются во многих областях математической физики. Их отыскание привлекало значительное внимание, поскольку в сложных нелинейных задачах получение таких решений, сводящихся к краевым задачам для обыкновенных уравнений, было зачастую единственным средством пробиться через аналитические трудно-

<sup>1</sup> В частности, возможность получения решения в конечном виде связана с указанным Седовым законом сохранения во времени энергии не только внутри всей возмущенной области, но и внутри любой сферы, ограниченной радиусом  $\xi = \text{const} < \xi_0$ , т. е.  $r = \text{const} (Et^2/\rho_0)^{1/5}$ .

сти и обрести качественное понимание явления. Кроме того, автомодельные решения широко использовались как эталоны при оценке всевозможных приближенных методов вне зависимости от непосредственной актуальности соответствующих задач. Для нас сейчас существенно подчеркнуть, что автомодельные решения представляют основную ценность не только и не столько как точные решения отдельных, пусть даже актуальных конкретных задач, но прежде всего как промежуточно-асимптотические представления решений неизмеримо более широкого круга задач.

Рассмотрим это на примере задачи о сильных тепловых волнах. На самом деле выделение энергии при ядерном взрыве происходит, разумеется, не в точке, а в конечной области некоторого размера  $d$ ; оно не является сферически симметричным; начальная температура  $T_0$  не равна нулю. Поэтому, строго говоря, в число определяющих параметров в соотношение (2.4) следует дополнительно включить параметры  $d$ ,  $T_0$  и полярные углы  $\varphi$ ,  $\psi$ . Отсюда следует, что помимо параметра  $\Pi_1$  функция  $\Phi$  в (2.6) будет определяться еще четырьмя безразмерными параметрами:

$$\Pi_2 = d / [(E/c)^n \kappa t]^{1/(3n+2)}; \quad \Pi_3 = T_0 / [(E/c)^2 (\kappa t)^{-3}]^{1/(3n+2)}; \\ \Pi_4 = \varphi; \quad \Pi_5 = \psi. \quad (2.32)$$

Интуитивно ясно, однако, и хорошо подтверждается численными расчетами, что асимметрия первоначальной области тепловыделения существенна лишь в самые первые мгновения, когда тепловая волна распространяется на расстояние порядка одного-двух размеров начальной области тепловыделения. На этих расстояниях существенны различные, меняющиеся от случая к случаю детали начального тепловыделения, на самом деле никак не регистрируемые и не представляющие интереса. Откажемся от их рассмотрения, т. е. будем интересоваться распространением сильных тепловых волн только на том этапе, когда тепловая волна прошла расстояние  $r_f(t)$ , большое по сравнению с размером начальной области тепловыделения. Это означает, что  $r_f(t) \gg d$ . Отсюда с учетом того, что  $r_f(t)$  имеет порядок  $[(E/c)^n \kappa t]^{1/(3n+2)}$ , следует, что при этом должно быть  $t \gg d^{3n+2} / \kappa (E/c)^n$ . Но при таких  $t$  параметр  $\Pi_2$  много меньше единицы. Обычно считается, что если значение некоторого параметра подобия много меньше или много больше единицы, то зависимостью от этого параметра, а следовательно, и от соответствующего размерного параметра можно пренебречь. В данном конкретном случае это оказывается правильным, так что при  $r \gg d$  и  $t \gg d^{3n+2} / \kappa (E/c)^n$  зависимость решения от параметров  $\Pi_2$ ,  $\Pi_4$ ,  $\Pi_5$  несущественна.

Далее, поскольку взрыв сильный, температура в области, охваченной тепловой волной, вначале очень велика — много больше начальной температуры  $T_0$ . Однако температура вблизи центра волны имеет порядок  $[(E/c)^2 (\kappa t)^{-3}]^{1/(3n+2)}$ , откуда следует, что при  $t \ll (E/c)^{2/3} / \kappa T_0^{(3n+2)/3} = T_2$  параметр  $\Pi_3 \ll 1$  и, таким образом, несущий

щественна начальная температура. Имея в виду, что при таких  $t$   $r_f \ll (E/cT_0)^{1/3}$ , получаем, что при достаточно сильном и достаточно сосредоточенном (большие  $E$  и малые  $d$ ) взрыве характерные временные масштабы задачи

$$T_1 = d^{3n+2}/\kappa(E/c)^n; \quad T_2 = (E/c)^{2/3}/\kappa T_0^{(3n+2)/3}$$

и пространственные масштабы задачи

$$L_1 = d; \quad L_2 = (E/cT_0)^{1/3}$$

далеко «разнесены» друг от друга, т. е. таковы, что  $T_1 \ll T_2$  и  $L_1 \ll L_2$ .<sup>1</sup> Полученное автомодельное решение хорошо описывает явление при временах и на расстояниях от центра сильного и сосредоточенного взрыва достаточно больших, чтобы исчезло влияние асимметрии начальных условий и размера области начального тепловыделения, и вместе с тем достаточно малых, чтобы можно было пренебречь отличием начальной температуры от нуля:

$$\begin{aligned} d^{3n+2}/\kappa(E/c)^n &\ll t \ll (E/c)^{2/3}/\kappa T_0^{(3n+2)/3}, \\ d &\ll r \ll (E/cT_0)^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Говорят поэтому, что автомодельное решение представляет собой *промежуточную асимптотику* при описании явления. Под *промежуточными асимптотиками* понимается в общем случае следующее. Пусть в задаче имеются две характерные постоянные величины размерности независимой переменной  $x_i$ :  $X_i^{(1)}$  и  $X_i^{(2)}$ . Промежуточной асимптотикой называется асимптотическое представление решения при  $x_i/X_i^{(1)} \rightarrow \infty$ , но  $x_i/X_i^{(2)} \rightarrow 0$ .

Вполне аналогично обстоит дело и в задаче описания газодинамической стадии сильного взрыва. В этом случае следует учитывать, что выделение энергии на самом деле происходит не в точке, а в сфере радиусом  $R_0$  (радиус  $R_0$  соответствует моменту, когда мощная ударная волна обгоняет тепловую). Вне этой сферы — покоящийся газ плотностью  $\rho_0$ , находящийся не под нулевым, а под конечным давлением  $p_0$ . Изложенное выше решение представляет собой промежуточную асимптотику, описывающую стадию взрыва при

$$\begin{aligned} T_1 &= (\rho_0 R_0^5/E)^{1/2} \ll t \ll (\rho_0 E^{2/3}/p_0^{5/3})^{1/2} = T_2; \\ L_1 &= R_0 \ll r \ll (E/p_0)^{1/3} = L_2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

т. е. при временах и на расстояниях от центра взрыва, достаточно больших, чтобы исчезло влияние размера области начального

<sup>1</sup> На самом деле масштабы  $T_2$  и  $L_2$  ограничены также и возникновением движения газа.

выделения энергии, и вместе с тем достаточно малых, чтобы еще не чувствовалось влияние противодавления. Приведем несколько цифр. Для условий первого американского ядерного взрыва в Аламогордо  $\rho_0 \sim 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $E \sim 10^{21}$  эрг,  $p_0 \sim 10^8$  дин/см<sup>2</sup>,  $R_0 \approx 10^3$  см = = 10 м, откуда для временных и пространственных границ области применимости автомодельной промежуточной асимптотики находим:  $T_1 \sim 10^{-4}$  с,  $T_2 \sim 1$  с,  $L_1 \sim 10^3$  см,  $L_2 \sim 10^5$  см. Следует отметить, что на самом деле верхняя граница применимости автомодельной промежуточной асимптотики лежит ниже вследствие влияния вязкого размывания фронта.

Точно так же дело обстоит и в общем случае. Автомодельные решения всегда представляют собой решения вырожденных задач, в которых входящие в задачу параметры размерности независимых переменных принимают нулевые или бесконечные значения, так что, как правило, автомодельные решения отвечают сингулярным начальным или краевым и т. п. условиям, таким, как в только что рассмотренных примерах. Таким образом, автомодельные решения всегда представляют собой промежуточные асимптотики решений невырожденных задач.<sup>1</sup>

Широко распространено представление о том, что получение автомодельных решений всегда связано с анализом размёрностей, т. е. с подобием, так что применением анализа размерностей из постановки вырожденной задачи, точным решением которой является та или иная автомодельность, всегда может быть получена форма решения, т. е. выражение автомодельных переменных. После получения точного решения нетрудно найти класс невырожденных задач, для которого рассматриваемое автомодельное решение является промежуточной асимптотикой. Для некоторых решений дело действительно обстоит так; рассмотренные в настоящей главе примеры это продемонстрировали и показали общий подход, применимый в подобных случаях. Существенно, однако, что случаи, когда построение автомодельных решений исчерпывается анализом размерности, составляют, как говорят иногда, лишь видимую часть айсберга. Как правило, дело обстоит иначе: существуют обширные классы задач, для которых хотя и имеет место автомодельная промежуточная асимптотика, но эту асимптотику нельзя получить из исходной постановки задачи путем применения соображений размерностей. Форма автомодельных переменных определяется в этих случаях из решения нелинейных задач на собственные значения и иногда даже из некоторых дополнительных соображений. Подчеркнем еще раз, что речь идет не об исключениях, а скорее, о правиле: множество автомодельных решений, не получаемых из соображений подобия, гораздо богаче множества автомодельных решений, форма которых вполне определяется соображениями подобия. Последующее рассмотрение покажет, в чем здесь дело. Слегка, казалось бы, модифицировав

<sup>1</sup> Точнее, устойчивые автомодельные решения (см. главу 7).

задачи, рассмотренные в этой главе, и притом так, что, на первый взгляд, все использованные соображения подобия, а следовательно, и выводы из них должны оставаться в силе, мы придем к противоречию. Разрешение противоречия обнаружит, что предельный переход от некоторой неавтомодельной задачи к ее автомодельной промежуточной асимптотике далеко не всегда бывает равномерным. Исследование неравномерных предельных переходов приведет нас к новому классу автомодельных решений.

## Глава 3

---

### МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА О МГНОВЕННОМ ТЕПЛОВОМ ИСТОЧНИКЕ: АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОГО РОДА

---

#### 3.1. Модифицированная задача о мгновенном тепловом источнике

Рассмотрение задач, к которым мы теперь перейдем, покажет, что на самом деле простейшая ситуация, с которой мы встретились на примере автомодельных решений предыдущей главы, представляет собой редкое исключение, и, как правило, дело обстоит существенно сложнее.

Начнем с модифицированной задачи о мгновенном тепловом источнике. Модификация состоит в том, что меняется уравнение, которому удовлетворяет функция  $u$  в тех точках, где тело остывает. Вместо классического уравнения теплопроводности (2.14) эта функция удовлетворяет уравнению с разрывным коэффициентом температуропроводности:

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \geq 0; \quad \partial_t u = \kappa_1 \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \leq 0, \quad (3.1)$$

где  $\kappa_1$  — константа, отличная, вообще говоря, от  $\kappa$ , так что коэффициент температуропроводности зависит от того, нагревается тело в данной точке или остывает. Такое уравнение встречается в теории движений жидкости в пористой среде, для которых его вывод будет дан в следующем параграфе, а также в других областях математической физики. Существенно, что подобное ступенчатое поведение коэффициента температуропроводности связано с различием при нагреве и остывании именно теплоемкости. Теплопроводность же не зависит от направления изменения температуры, так что условие непрерывности теплового потока требует непрерывности производной  $\partial_x u$ . Нас интересует, таким образом, решение уравнения (3.1), непрерывное, с непрерывными производными по обеим независимым переменным.

Было строго доказано, что решение начальной задачи для уравнения (3.1) при произвольной достаточно гладкой, монотонно и притом достаточно быстро убывающей с ростом  $|x|$  функции  $u(x, 0)$  существует, единственно и обладает непрерывной производной по  $t$  и двумя непрерывными производными по  $x$ .

### 3.2. Вывод основного уравнения

Это уравнение встречается в теории фильтрации упругой жидкости в упруго-пластической пористой среде. Ниже приводится его краткий вывод. Читатель, не интересующийся конкретной физикой модифицированной задачи, может пропустить этот параграф без ущерба для понимания последующего.

Уравнение сохранения вещества при фильтрации жидкости в пористой среде имеет вид

$$\partial_t(m\rho) + \operatorname{div} \rho v = 0.$$

Здесь  $m$  — пористость среды, т. е. относительный объем, занятый в среде порами, по которым идет фильтрация жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $v$  — скорость фильтрации, равная объемному расходу жидкости через единицу площади нормального к потоку сечения пористой среды;  $t$  — время. Скорость фильтрации пропорциональна градиенту давления; это составляет содержание основного для теории фильтрации закона Дарси, аналогичного по своей формулировке закону Фурье в теории теплопроводности:

$$v = -(k/\mu) \operatorname{grad} p,$$

где  $k$  — так называемый коэффициент проницаемости, определяющий сопротивление пористой среды просачиванию сквозь нее жидкости;  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости. Предполагается, что жидкость слабосжимаема, т. е. ее плотность линейно возрастает с ростом давления:

$$\rho/\rho_0 = 1 + \beta_f(p - p_0),$$

где  $\beta_f$  — коэффициент сжимаемости жидкости;  $p_0$ ,  $\rho_0$  — отсчетные давление и плотность жидкости. Пористая среда также считается слабосжимаемой. Ее пористость  $m$ , как показывает опыт, в первом приближении можно считать зависящей только от  $\sigma$  — первого инварианта тензора напряжений<sup>1</sup> (одной трети суммы главных напряжений), действующих в скелете пористой среды:  $m = m(\sigma)$ . Если пористая среда упругая, то

$$m/m_0 = 1 - \beta_r(\sigma - \sigma_0),$$

где  $\beta_r$  — коэффициент сжимаемости пористой среды,  $\sigma_0$  — отсчетное значение  $\sigma$  (при увеличении напряжений среда спрессовы-

<sup>1</sup> Здесь удобно считать положительными сжимающие напряжения.

вается, так что  $\beta_r > 0$ ),  $m_0$  — соответствующее значение пористости. В условиях глубоко лежащего пористого пласта суммарное напряженное состояние системы жидкость — пористая среда неизменно, так как жидкость и пористый скелет вместе удерживают вышележащие породы. Следовательно,  $\sigma + p = \sigma_0 + p_0$ , откуда  $\sigma = \sigma_0 = -(p - p_0)$ . Подставляя эти соотношения в уравнение сохранения вещества и отбрасывая малые величины высшего порядка по  $\beta_i(p - p_0)$ , причем  $i = r, f$ , получаем (подробнее см. [103, 122, 17]), что при фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде в условиях глубоко лежащего пористого пласта давление жидкости  $p(r, t)$ , где  $r$  — радиус-вектор точки пласта, удовлетворяет классическому линейному уравнению теплопроводности

$$\partial_t p = \kappa \Delta p. \quad (3.2)$$

Здесь  $\kappa$  — так называемый коэффициент пьезопроводности, аналог коэффициента температуропроводности, равный  $k/\mu(m_0\beta_f + \beta_r)$ .

Пусть теперь, как это часто бывает, пористая среда деформируется необратимо. Тогда (подробнее см. [20, 17]) при увеличении  $\sigma$  (уменьшении давления жидкости, так как суммарное напряженное состояние системы жидкость — пористая среда неизменно:  $\sigma + p = \sigma_0 + p_0$ ,  $\partial_t \sigma = -\partial_t p$ )

$$\partial_t m = -m_0\beta_r, \quad \partial_t \sigma = m_0\beta_r, \quad \partial_t p,$$

а при уменьшении  $\sigma$  (увеличении давления жидкости)

$$\partial_t m = -m_0\beta_{r1}, \quad \partial_t \sigma = m_0\beta_{r1}, \quad \partial_t p,$$

причем  $\beta_{r1}$  не равно  $\beta_r$ . Таким образом, уравнение для избыточного давления жидкости, т. е. разности начального и мгновенного давлений  $u(r, t) = p_0 - p(r, t)$ , принимает вид

$$\partial_t u = \kappa (\partial_t u) \Delta u, \quad (3.3)$$

где  $\kappa(\partial_t u)$  — ступенчатая функция:  $\kappa(\partial_t u) = \kappa$  при  $\partial_t u \geq 0$  и  $\kappa(\partial_t u) = \kappa_1$  при  $\partial_t u \leq 0$ . Коэффициенты  $\kappa$  и  $\kappa_1$  определяются свойствами жидкости и деформационными свойствами среды, различными при нагружении среды весом вышележащей толщи пород (падении давления жидкости) и разгрузке (последующем увеличении давления жидкости)<sup>1</sup>:

$$\kappa = k/\mu(m_0\beta_f + \beta_r); \quad \kappa_1 = k/\mu(m_0\beta_f + \beta_{r1}).$$

Таким образом, аналог теплопроводности  $k/\mu$  одинаков при нагружении и разгрузке, в то время как аналог теплоемкости  $m_0\beta_f + \beta_r$  при нагружении и разгрузке различен.

<sup>1</sup> Предполагается, что в каждой точке пористой среды процесс нагружения и разгрузки происходит однократно. Можно рассмотреть и более сложные процессы; мы этого здесь делать не будем.

В частности, для одномерной задачи прямолинейно-параллельного движения жидкости (фильтрация к дренажной галерее или от нее) уравнение (3.3) принимает вид основного уравнения (3.1). Уравнение (3.3) впервые было получено в работе [20].

### 3.3. Прямое применение анализа размерностей в модифицированной задаче о мгновенном тепловом источнике

Попробуем теперь найти решение задачи о мгновенном отборе из малой области упруго-пластического пласта конечной массы жидкости. Казалось бы, получение этого решения сводится ввиду линейной зависимости плотности жидкости от ее давления к построению решения задачи типа мгновенного точечного источника для уравнения (3.1). Мы попытаемся построить такое решение при помощи анализа размерности, но дальнейший анализ покажет, что в действительности дело обстоит сложнее. Итак, ищется решение уравнения (3.1), удовлетворяющее начальному условию и условию на бесконечности

$$u(x, 0) \equiv 0 \text{ при } x \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = Q; \quad u(\pm\infty, t) \equiv 0. \quad (3.4)$$

Как хорошо известно и уже отмечалось выше, для случая  $\kappa_1 = \kappa$  (классическое уравнение теплопроводности, фильтрация в упругой пористой среде) такое решение существует, автомодельно и представляется в виде (2.16). Казалось бы, соображения анализа размерности при  $\kappa_1 \neq \kappa$  должны проходить совершенно так же, как и в случае  $\kappa_1 = \kappa$ , поскольку список определяющих параметров в модифицированной задаче дополняется по сравнению с классической задачей о мгновенном тепловом источнике только безразмерным постоянным параметром  $\varepsilon = \kappa_1/\kappa$ . На первый взгляд, следовательно, искомое решение должно представляться в виде

$$u = (Q/\sqrt{\kappa t}) \Phi(\xi, \varepsilon); \quad \xi = x/\sqrt{\kappa t}, \quad (3.5)$$

причем функция  $\Phi$  — непрерывная с непрерывной производной по  $\xi$  и четная,  $\Phi(-\xi, \varepsilon) = \Phi(\xi, \varepsilon)$ . Для области нагружения ( $\partial_t u \geq 0$ ) в силу автомодельности задачи должно быть

$$|x| \geq x_0(t) \equiv \xi_0 \sqrt{\kappa t},$$

где  $\xi_0$  — постоянная, зависящая от  $\varepsilon$ ; для области разгрузки ( $\partial_t u \leq 0$ )

$$0 \leq |x| \leq x_0(t).$$

Однако при  $\kappa_1 \neq \kappa$  решения уравнения (3.1) в форме (3.5), непрерывного и обладающего непрерывной производной по  $x$  (непрерывность потока жидкости) и удовлетворяющего естественным условиям симметрии и обращения в нуль на бесконечности, не су-

ществует. Чтобы в этом убедиться, подставим (3.5) в уравнение (3.1) и получим для  $\Phi$  обыкновенное уравнение с разрывным коэффициентом при старшей производной

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi \Phi &= 0 \text{ при } 0 \leq |\xi| \leq \xi_0; \quad \varepsilon = \frac{\kappa_1}{\kappa}; \\ \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi \Phi &= 0 \text{ при } \xi_0 \leq |\xi| < \infty, \end{aligned} \quad (3.6)$$

причем точка  $\xi = \xi_0$  соответствует обращению в нуль величины  $d(\xi\Phi)/d\xi$ , которой, как легко получить из (3.5), пропорциональна производная  $d_t u$ . Интегрируя, находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi \Phi &= c_1 \text{ при } 0 \leq |\xi| \leq \xi_0; \\ \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi \Phi &= c_2 \text{ при } \xi_0 \leq |\xi| < \infty. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу симметрии и отсутствия притока при  $x = 0$  в моменты  $t > 0$   $d\Phi/d\xi = 0$  при  $\xi = 0$ ; при  $\xi \rightarrow \infty$  стремится к нулю функция  $\xi\Phi$  (суммарное количество отобранной жидкости в каждый момент конечно и функция  $\Phi$  должна быть интегрируемой). Отсюда  $c_1 = c_2 = 0$ . Интегрируя предыдущие уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi &= c_3 \exp(-\xi^2/4\varepsilon) \text{ при } 0 \leq |\xi| \leq \xi_0; \\ \Phi &= c_4 \exp(-\xi^2/4) \text{ при } \xi_0 \leq |\xi| < \infty, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $c_3$  и  $c_4$  — новые константы. Условия непрерывности функции  $u(x, t)$  и ее производной по  $x$  приводят к требованию непрерывности  $\Phi$  и  $d\Phi/d\xi$  при  $\xi = \xi_0$ , откуда и из предыдущих уравнений получается линейная система однородных алгебраических уравнений для определения  $c_3$  и  $c_4$ :

$$\begin{aligned} c_3 \exp(-\xi_0^2/4\varepsilon) &= c_4 \exp(-\xi_0^2/4); \\ c_3 (\xi_0/\varepsilon) \exp(-\xi_0^2/4\varepsilon) &= c_4 \xi_0 \exp(-\xi_0^2/4). \end{aligned} \quad (3.9)$$

При  $\varepsilon \neq 1$ , т. е. при  $\kappa_1 \neq \kappa$ , эта система, очевидно, не имеет нетривиального решения ни при каком конечном  $\xi_0$ , поскольку ее определитель отличен от нуля. Тем самым доказано, что решения поставленной задачи в виде (3.5) не существует: тривиальное решение, очевидно, не удовлетворяет начальному условию (3.4).

### 3.4. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика

Для того чтобы разобраться в возникшем парадоксе, обратимся к результатам численного эксперимента<sup>1</sup>. Уравнение (3.1) интегрировалось при различных начальных условиях для разных значений параметра  $\varepsilon = \kappa_1/\kappa$ . Начальные условия (3.4) представ-

<sup>1</sup> Численные расчеты были выполнены В. М. Уроевым.

ляются обобщенной функцией и непосредственно в машинный счет заложены быть не могут. Поэтому они имитировались различными

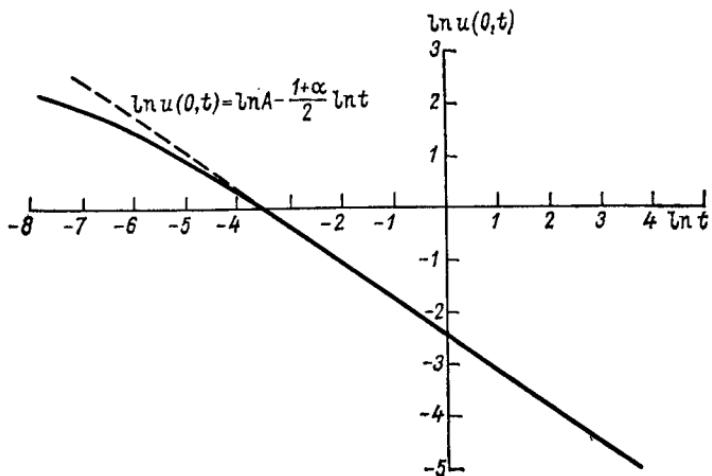


Рис. 3.1. Закон затухания максимума функции  $u(x, t)$  быстро становится степенным.

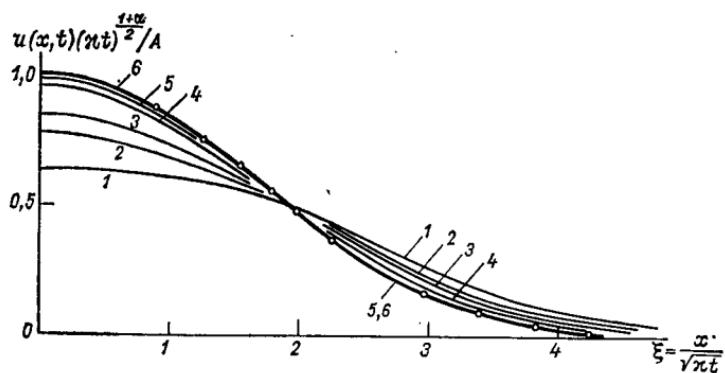


Рис. 3.2. Выход на автомодельную промежуточную асимптотику решения неавтомодельной начальной задачи для уравнения (3.1) при  $\epsilon=2$  и начальных данных  $u(x, 0)=10$  ( $0 \leq x \leq 0,1$ ),  $u(x, 0) \equiv 0$  ( $x > 0,1$ ).

1)  $t=0,001$ ; 2)  $t=0,002$ ; 3)  $t=0,003$ ; 4)  $t=0,015$ ; 5)  $t=0,040$ ; 6)  $t \geq 0,225$ .

«сосредоточенными» в малой, но конечной области вблизи  $x=0$ , начальными распределениями  $u(x, 0)$ , например,

$$u(x, 0) = 10 \text{ при } -0,1 \leq x \leq 0,1;$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ при } 0,1 \leq |x| < \infty.$$

Результаты численного эксперимента получились весьма показательными. Прежде всего оказалось, что закон затухания величины  $u(0, t)$  — максимума функции  $u(x, t)$  — быстро становится

степенным (рис. 3.1). Точнее, спустя некоторый промежуток времени после начала счета выполняется соотношение

$$u(0, t) = u_{\max} = A / (\kappa t)^{(1+\alpha)/2},$$

где  $A$  и  $\alpha$  — некоторые константы. Численные расчеты показали, что при изменении начальных условий менялась только константа  $A$ , константа же  $\alpha$  оставалась неизменной: оказалось, что она зависит только от  $\varepsilon = \kappa_1/\kappa$ .

Величина  $u_0(t) = A / (\kappa t)^{(1+\alpha)/2}$  может служить естественным масштабом для переменной  $u(x, t)$ . Возьмем в качестве линейного масштаба  $\sqrt{\kappa t}$  и построим график зависимости величины

$$u(x, t) / u_0(t) = u(x, \sqrt{\kappa t}) (\kappa t)^{(1+\alpha)/2} / A$$

от  $x / \sqrt{\kappa t}$  для разных моментов времени  $\chi$  (рис. 3.2). Оказывается, что с увеличением времени эти кривые быстро стремятся к совпадению, так что их зависимость от времени исчезает.

Таким образом, численный эксперимент показал, что решение задачи Коши для уравнения (3.1) быстро выходит на автомодельную промежуточную асимптотику

$$u(x, t) = [A / (\kappa t)^{(1+\alpha)/2}] \Phi(x / \sqrt{\kappa t}, \varepsilon), \quad (3.10)$$

где показатель  $\alpha$  зависит только от  $\varepsilon = \kappa_1/\kappa$  — отношения коэффициентов в уравнении (3.1), тогда как  $A$  зависит и от начальных условий.

### 3.5. Автомодельное предельное решение

Разберемся теперь, как могла появиться у решения задачи Коши асимптотика (3.10), хотя и тоже автомодельная, но отличающаяся от предсказанной анализом размерности формы (3.5).

Как уже было отмечено, начальное условие (3.4), которое привело нас к решению в форме (3.5), имеет предельный характер, описывается обобщенной функцией и в машинный счет непосредственно заложено быть не может. На самом деле в ходе численного эксперимента на машине считалось решение, удовлетворяющее начальным условиям (рис. 3.3), описываемым обычными функциями вида

$$u(x, 0) = (Q/l) u_0(x/l), \quad (3.11)$$

где  $l$  — некоторый пространственный масштаб, характеризующий размер области, из которой в начальный момент была удалена жидкость:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\zeta) d\zeta = 1.$$

Здесь  $u_0(\xi)$  — безразмерная, четная, финитная (обращающаяся в тождественный нуль для достаточно больших значений абсолютной величины своего безразмерного аргумента) функция. Для таких начальных условий уже можно быть уверенным, что решение задачи Коши существует, единственно и обладает непрерывными производными по  $x$  до второго порядка и непрерывной производной по  $t$ ; это следует из доказанных общих теорем. Однако в этой задаче появился новый размерный определяющий параметр  $l$ , и ее решение уже не будет автомодельным. В самом деле, стандарт-

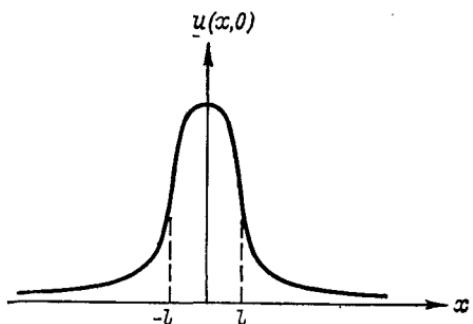


Рис. 3.3. Начальное условие неавтомодельной задачи Коши, решения которой заведомо существует.

ная процедура, основанная на анализе размерностей и продемонстрированная выше на нескольких задачах, дает здесь

$$u = (Q/\sqrt{\pi t}) F(\xi, \eta, \varepsilon); \quad \eta = l/\sqrt{\pi t}. \quad (3.12)$$

Рассмотренное выше автомодельное точное частное решение типа мгновенного источника для случая  $x_1 = x$  отвечало сингулярному начальному условию, получающемуся из (3.11) при  $l = 0$ . Но это решение типа мгновенного источника шире, чем просто точное частное решение отдельной задачи. Действительно, соотношение (3.12), справедливое и при  $\varepsilon = 1$ , показывает, что  $\eta \rightarrow 0$  не только при  $l \rightarrow 0$ , но и при  $t \rightarrow \infty$  и любом  $l = \text{const} > 0$ . Выбирая соответственно  $x$ , можно этот предельный переход осуществлять так, чтобы  $\xi = x/\sqrt{\pi t}$  оставалось постоянным; в пределе получается известное автомодельное решение, указанное выше. Таким образом, как уже отмечалось, автомодельное решение задачи с сингулярными начальными данными при  $x_1 = x$  представляет собой асимптотику широкого класса решений начальной задачи при больших временах. Решение задачи с сингулярными начальными данными (3.4) при  $x_1 \neq x$ , в согласии со сказанным, не существует. Это означает, что при  $x_1 \neq x$  не существует конечного, отличного от нуля предела функции  $F(\xi, \eta, \varepsilon)$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Тем не менее, как показали численные расчеты, автомодельная асимптотика решения (3.12) все же существует, хотя и не в форме (3.5), а в форме (3.10). Наличие у решения (3.12) автомодельной асимп-

тотики (3.10) при  $t \rightarrow \infty$  подсказывает, что при  $\eta \rightarrow 0$  для функции  $F(\xi, \eta, \varepsilon)$  справедливо асимптотическое представление<sup>1</sup>

$$F(\xi, \eta, \varepsilon) = \eta^\alpha f(\xi, \varepsilon) + o(\eta^\alpha).$$

Именно поэтому при  $t \rightarrow \infty$  асимптотическая форма решения рассматриваемой задачи уже не представляется в виде (3.5), но имеет форму

$$u = [Ql^\alpha / (\pi t)^{(1+\alpha)/2}] f(\xi, \varepsilon), \quad (3.13)$$

где функция  $f(\xi, \varepsilon)$  конечна и отлична от нуля.

Заметим теперь, что стремление  $\eta$  к нулю при конечном  $\xi$  может осуществляться также путем предельного перехода при  $l \rightarrow 0$  и неизменных  $x$  и  $t$ . Как хорошо известно, при таком предельном переходе в классическом случае  $x_1 = x$ ,  $\varepsilon = 1$  снова получается решение типа мгновенного источника. Выражение (3.13) показывает, что если выполнять этот предельный переход, оставляя  $Q$  неизменным, то при  $\alpha \neq 0$  предел решения будет равен нулю или бесконечности в зависимости от того, положительно  $\alpha$  или отрицательно. Для того чтобы при  $\alpha \neq 0$  получить с помощью предельного перехода  $l \rightarrow 0$  и неизменных  $x$  и  $t$  то самое предельное выражение решения задачи, которое получается при конечном  $l$  и  $t \rightarrow \infty$ , нужно переходить к пределу при  $l \rightarrow 0$ , устремляя одновременно  $Q$  к бесконечности или нулю в зависимости от знака  $\alpha$  и притом так, чтобы оставалось конечным произведение  $Ql^\alpha$ . Получающееся при таком предельном переходе автомодельное предельное решение имеет уже не форму (3.5), но представляется в виде

$$u = [A / (\pi t)^{(1+\alpha)/2}] \Phi(\xi, \varepsilon); \quad A = \beta \lim Ql^\alpha; \quad x_0(t) = \xi_0 \sqrt{\pi t}. \quad (3.14)$$

Здесь  $\beta$  — безразмерная постоянная, которая зависит от нормировки функции  $\Phi(\xi, \varepsilon)$ , а параметр  $\alpha$  — «след» исчезнувших при предельном переходе параметров  $Q$  и  $l$ . Параметр  $\alpha$  можно определить, выполняя, например, при помощи численного счета, предельный переход от решения неавтомодельной задачи к автомодельной асимптотике. При прямом построении автомодельного предельного решения подстановкой (3.14) в основное уравнение и начальные условия параметр  $\alpha$  неизвестен и подлежит определению. Таким образом, определение параметра  $\alpha$  явно фигурирует в формулировке задачи, составляя часть определения автомодельного предельного решения.

Заметим теперь, что для решения (3.14) «момент»

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha u(x, t) dx \quad (3.15)$$

<sup>1</sup> Символом  $O(x)$  обозначается, как обычно, величина порядка  $x$ ; символом  $o(x)$  — величина, малая по сравнению с  $x$ .

конечен, отличен от нуля и сохраняется во времени, если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\alpha} \Phi(\xi, \varepsilon) d\xi \quad (3.16)$$

конечен и отличен от нуля. Само решение (3.14) отвечает сингулярным начальным данным, однако эта сингулярность уже не есть классическая  $\delta$ -функция, как в случае  $\varepsilon = 1$ .

Функцию  $\Phi(\xi, \varepsilon)$  удобно нормировать следующим образом:

$$\Phi(0, \varepsilon) = 1, \quad (3.17)$$

при этом выполняется соотношение  $u(0, t) = A(xt)^{-(1+\alpha)/2}$ .

Подставляя (3.14) в основное уравнение (3.1), получаем для функции  $\Phi(\xi, \varepsilon)$  обыкновенное уравнение с разрывным коэффициентом при старшей производной:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1+\alpha}{2} \Phi &= 0 \text{ при } 0 \leq \xi \leq \xi_0; \\ \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1+\alpha}{2} \Phi &= 0 \text{ при } \xi_0 \leq \xi < \infty. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь  $\xi_0$  — точка, в которой обращается в нуль производная  $d^2\Phi/d\xi^2$ , или, что в силу (3.18) то же, выполняется соотношение

$$\xi \frac{d\Phi}{d\xi} + (1+\alpha) \Phi = 0. \quad (3.19)$$

В самом деле, левой части этого соотношения пропорциональна производная  $\partial_t u$ . Функция  $\Phi(\xi, \varepsilon)$  в силу естественной симметрии решения — четная. Вследствие отсутствия притока при  $x = 0$  в моменты  $t > 0$  справедливо граничное условие

$$\frac{d\Phi(0, \varepsilon)}{d\xi} = 0. \quad (3.20)$$

Кроме того, функция  $\Phi(\xi, \varepsilon)$  и ее первая производная по  $\xi$  должны быть непрерывны повсюду, и в частности при  $\xi = \xi_0$  (напомним, что это вытекает из того, что давление и поток жидкости непрерывны). Решение уравнения с разрывным коэффициентом при старшей производной (3.18) просто выражается через хорошо известные специальные функции — так называемые вырожденные гипергеометрические функции или родственные им функции параболического цилиндра [106]. При  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  решение уравнения (3.18), удовлетворяющее условию (3.20), имеет вид

$$\Phi = C \exp(-\xi^2/8\varepsilon) [D_\alpha(\xi/\sqrt{2\varepsilon}) + D_\alpha(-\xi/\sqrt{2\varepsilon})], \quad (3.21)$$

где  $C$  — константа,  $D_\alpha$  — символ функции параболического цилиндра. Из условия (3.17) получаем

$$C = 1/2D_\alpha(0) = \Gamma[(1-\alpha)/2]/2^{1+\alpha/2}\sqrt{\pi}.$$

Здесь  $\Gamma$  — символ гамма-функции.

При  $\xi \geq \xi_0$  решение уравнения (3.18), для которого сходится интеграл (3.16), представляется в виде

$$\Phi = F \exp(-\xi^2/8) D_\alpha(\xi/\sqrt{2}), \quad (3.22)$$

где  $F$  — константа. Второе линейно-независимое решение убывает на бесконечности, как  $\xi^{-\alpha-1}$ , и интеграл (3.16) для него расходится.<sup>1</sup> Требуя выполнения условия

$$\xi \frac{d\Phi}{d\xi} + (1+\alpha)\Phi = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_0 \pm 0,$$

и используя рекуррентные соотношения для производных функций параболического цилиндра и выражение функций параболического цилиндра через вырожденные гипергеометрические функции [106], получаем:

$$D_{\alpha+2}(\xi_0/\sqrt{2}) = 0, \quad M(-\alpha/2 - 1, 1/2, \xi_0^2/4\varepsilon) = 0, \quad (3.23)$$

где  $M(a, b, z)$  — символ вырожденной гипергеометрической функции.

Эти уравнения должны определять параметр  $\alpha$  и величину  $\xi_0$  в зависимости от  $\varepsilon$ . Далее, условие непрерывности функции  $\Phi$  при  $\xi = \xi_0$  определяет константу  $F$ :

$$\begin{aligned} F &= C [D_\alpha(\xi_0/\sqrt{2\varepsilon}) + D_\alpha(-\xi_0/\sqrt{2\varepsilon})] \times \\ &\times \exp[\xi_0^2(1 - 1/\varepsilon)/8] [D_\alpha(\xi_0/\sqrt{2})]^{-1} = [\Gamma((1-\alpha)/2)/2^{1+\alpha/2}\sqrt{\pi}] \times \\ &\times [D_\alpha(\xi_0/\sqrt{2\varepsilon}) + D_\alpha(-\xi_0/\sqrt{2\varepsilon})] \times \\ &\times \exp[\xi_0^2(1 - 1/\varepsilon)/8] [D_\alpha(\xi_0/\sqrt{2})]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Требование непрерывности производной  $d\Phi/d\xi$  в силу (3.19) удовлетворяется при этом автоматически.

Таким образом, предположив существование автомодельного предельного решения в форме (3.14), мы пришли к классической ситуации нелинейной задачи на собственные значения (нелинейной потому, что координата  $\xi_0$  точки разрыва коэффициента при старшей производной в уравнении (3.18) заранее неизвестна и должна быть найдена в ходе решения задачи). Действительно, при произвольном  $\alpha$  основное уравнение (3.18) нужного по гладкости решения, удовлетворяющего условию (3.17) не имеет. Однако если система (3.23) разрешима, то для  $\alpha$ , удовлетворяющего условиям (3.23), решение удовлетворяет всем требованиям.

Для полного исследования решения нам осталось выяснить разрешимость системы трансцендентных уравнений (3.23), определяющей  $\alpha$  и  $\xi_0$ . Решая первое уравнение относительно  $\xi_0/\sqrt{2}$ ,

<sup>1</sup> Аналогично решению такой же начальной задачи для классического уравнения теплопроводности решение рассматриваемой задачи должно убывать на бесконечности быстрее любой степени  $x$ , поэтому интеграл (3.16) для него обязан сходиться.

получаем монотонно возрастающую функцию  $\alpha$  (рис. 3.4, кривая 1). Решая второе уравнение относительно  $\xi_0/\sqrt{2\epsilon}$ , получаем монотонно убывающую функцию  $\alpha$  (кривая 2). При каждом данном  $\epsilon$  соответствующая зависимость  $\xi_0/\sqrt{2}$  от  $\alpha$  получается простым растяжением или сжатием кривой 2 вдоль оси ординат. При  $\epsilon = 1$ , т. е. при  $x_1 = x$ , кривые 1 и 2 пересекаются при  $\alpha = 0$ , в соответствии с известными результатами для классического случая; точка их пересечения дает координату точки перегиба функции  $\Phi(\xi, 1) = \exp(-\xi^2/4)$ ,  $\xi_0 = \sqrt{2}$ . При  $\epsilon \neq 1$  точка пересечения

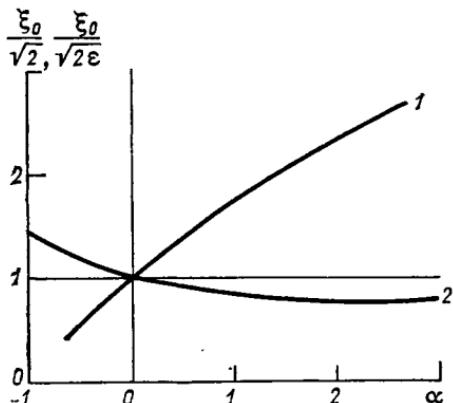


Рис. 3.4. Исследование разрешимости системы трансцендентных уравнений (3.23).

1 — зависимость  $\xi_0/\sqrt{2}$  от  $\alpha$ , определенная из первого уравнения (3.23), 2 — зависимость  $\xi_0/\sqrt{2\epsilon}$  от  $\alpha$ , определенная из второго уравнения (3.23).

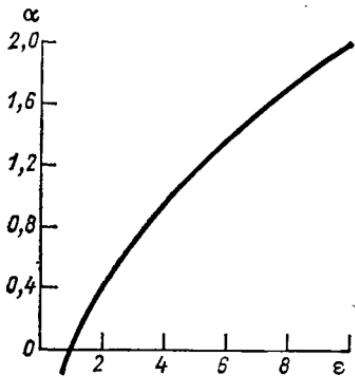


Рис. 3.5. Зависимость собственного значения  $\alpha$  от отношения  $\epsilon = x_1/x$ : при  $\epsilon < 1$   $\alpha$  отрицательно, при  $\epsilon > 1$   $\alpha$  положительно, при  $\epsilon = 1$  (классическое линейное уравнение теплопроводности)  $\alpha = 0$ .

кривых 1 и 2 единственна. Соответствующая зависимость  $\alpha$  от  $\epsilon$  представлена на рис. 3.5. Как видно, при  $\epsilon > 1$  величина  $\alpha$  положительна, при  $\epsilon < 1$  — отрицательна. Зависимость  $\alpha(\epsilon)$ , полученная в результате решения нелинейной задачи на собственные значения, хорошо совпала с зависимостью, полученной при численном счете неавтомодельных задач Коши.

Заметим, что кривые 1 и 2 на рис. 3.4 при больших значениях  $\epsilon$  имеют также и другие ветви. Вторая ветвь кривой 1 начинается в точке  $\xi_0 = 0$ ,  $\alpha = 1$  и идет, монотонно возрастающая, ниже первой ветви. Вторая ветвь кривой 2 двузначна и располагается выше первой ветви этой кривой. Точки, соответствующие пересечениям кривой 1 с этими ветвями, существующие при достаточно больших  $\epsilon$ , физически нереальны.

На рис. 3.2 точками показаны значения функции  $\Phi(\xi, \epsilon)$ , полученные решением нелинейной задачи на собственные значения. Как и должно быть, эти точки хорошо ложатся на кривую  $u(x, t)(xt)^{(1+\alpha)/2}/A$ , соответствующую  $t \rightarrow \infty$ . Это подтверждает,

что автомодельное решение (3.14) действительно является асимптотическим представлением решения задачи Коши.

Итак, построение автомодельного предельного решения — асимптотики решения задачи Коши (3.11) для уравнения (3.1) при больших временах — приводится к решению нелинейной задачи на собственные значения. Решение этой последней задачи определяет автомодельную асимптотику только с точностью до константы  $A = \beta Q l^\alpha$ , или, что то же, с точностью до безразмерной константы  $\beta$ . В классическом случае ( $\epsilon = 1, \alpha = 0$ ) эта константа (см. введение) находится из интегрального закона сохранения

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = Q, \quad (3.25)$$

справедливого и для неавтомодельного движения. Этот закон сохранения при  $x_1 \neq x$  ( $\epsilon \neq 1$ ) не имеет места, он заменяется неинтегрируемым соотношением

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 2(x_1 - x) (\partial_x u)_{x=x_0(t)} \neq 0, \quad (3.26)$$

которое легко получается, если проинтегрировать уравнение (3.1) по  $x$  от  $x = -\infty$  до  $x = \infty$  и учесть, что  $x$  претерпевает разрыв при  $x = \pm x_0(t)$ . Таким образом, определить константу  $A$  по начальным условиям, используя интегральный закон сохранения, не удается: константа  $A$  является более сложным функционалом начального распределения давления, т. е. функции  $u(x, 0)$ . Заметим, что если вместо  $u(x, 0)$  взять в качестве начального распределения функцию  $u(x, t_1)$ , соответствующую любому моменту времени  $t = t_1 > 0$ , то константа  $A$  не изменится. В этом смысле  $A$  является «интегралом» уравнения (3.1). Для того чтобы фактически определить величину  $A$  при  $\epsilon \neq 1$ , мы можем в настоящее время предложить только численный расчет задачи исходя из неавтомодельных начальных условий.

Автомодельное предельное решение (3.14) уже не представляет собой решение задачи о мгновенном точечном источнике. Действительно, количество жидкости  $Q$ , которое нужно отобрать в начальный момент из области с характерным размером  $l$ , следует менять с уменьшением этого размера, желая получить одно и то же предельное представление решения при больших временах:  $Q$  возрастает при  $\epsilon > 1$  и убывает при  $\epsilon < 1$ , причем так, что произведение  $Q l^\alpha$  постоянно.

Было бы весьма важно строго доказать, что решение любой задачи с начальными условиями вида (3.11) при достаточно быстро убывающей на бесконечности (пусть даже финитной, т. е. обращающейся в тождественный нуль при достаточно больших значениях аргумента) функции  $u(x, 0)$  «выходит» при больших временах на построенную автомодельную асимптотику, т. е. что  $u(x, t)$  действительно стремится при  $t \rightarrow \infty$  к автомодельному ре-

шению вида (3.14) с нужным  $\alpha$ . Тем самым была бы строго доказана правильность сделанного нами по результатам численного эксперимента основного вывода о существовании такого числа  $\alpha$ , что предел

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-\alpha} F(\xi, \eta, \epsilon) = f(\xi, \epsilon)$$

существует, конечен и отличен от нуля. Аналитически это пока не выполнено.

Сделаем еще одно важное замечание о законах подобия. Полученное решение дает для координаты точки разрыва температуропроводности

$$x_0(t) = \xi_0 \sqrt{\pi t} \quad (3.27)$$

и для величины  $u$  в точке максимума

$$u_{\max} = A/(\pi t)^{(1+\alpha)/2}. \quad (3.28)$$

Первое из этих соотношений легко получается из традиционных соображений подобия, т. е. применением анализа размерностей исходя из представления о мгновенном точечном источнике. Для второго соотношения этого принципиально нельзя сделать, несмотря на то что закон подобия (3.28) имеет степенную форму и вполне определится, если знать размерность величины  $A$ . Дело в том, что размерность величины  $A$  заранее неизвестна и для ее определения надо решить сформулированную выше нелинейную задачу на собственные значения.

## Глава 4

---

### **ЗАДАЧА О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ С ПОТЕРЯМИ ИЛИ ПРИТОКОМ ЭНЕРГИИ НА ФРОНТЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ И ЗАДАЧА О КОРОТКОМ УДАРЕ: АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА**

---

#### **4.1. Модифицированная задача о сильном взрыве**

Сделаем теперь незначительную, на первый взгляд, модификацию рассмотренной в главе 2 задачи о сильном взрыве.

Предположим, что на фронте сильной ударной волны происходят по тем или иным причинам потери энергии (например, вследствие излучения) или приток энергии (например, вследствие химической реакции). В этом случае поток энергии на фронте уже не сохраняется и уравнение баланса энергии на фронте принимает вид

$$\rho_f (v_f - D) [\gamma p_f / (\gamma - 1) \rho_f + (v_f - D)^2 / 2] - \rho_f (v_f - D) \epsilon = -\rho_0 D^3 / 2.$$

Здесь в дополнительном по сравнению с аналогичным уравнением для обычного сильного взрыва (см. главу 2) втором члене левой части  $\epsilon$  — интенсивность потерь ( $\epsilon < 0$ ) или притока ( $\epsilon > 0$ ) энергии за единицу времени в единице массы газа, проходящей через фронт. Как и раньше,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость газа,  $D$  — скорость распространения ударной волны, индексом  $f$  обозначены величины за фронтом волны, т. е. при  $r = r_f = 0$ . Мы по-прежнему считаем также, что перед фронтом газ находится в покое при нулевом давлении и имеет плотность  $\rho_0$ : асимптотический смысл такого начального условия уже выяснен в главе 2.

Выполняя те же преобразования, что и в главе 2 при рассмотрении обычного сильного взрыва, запишем уравнение баланса энергии на фронте волны в виде

$$\rho_f(v_f - D)[p_f/(\gamma - 1)\rho_f + v_f^2/2] + p_f v_f - \rho_f(v_f - D)\epsilon = 0. \quad (4.1)$$

В рассматриваемой модельной задаче предполагается, что интенсивность потерь или притока энергии на фронте, приходящаяся на единицу массы газа, пропорциональна температуре:

$$\epsilon = \tilde{A}T_f = Cp_f/\rho_f,$$

где  $\tilde{A}$ ,  $C$  — константы (это необходимо, чтобы получающаяся асимптотика была автомодельной). Подчеркнем сразу, что речь здесь идет скорее о математической модели, нежели о вполне адекватном анализе физического явления. Удобно ввести новое обозначение

$$C = (\gamma_1 - \gamma)/(\gamma_1 - 1)(\gamma - 1).$$

При  $\gamma_1 = 1$  получается  $C = -\infty$ ; это означает, что вся тепловая энергия частиц газа теряется на фронте. При возрастании  $\gamma_1$  от единицы до  $\gamma$  константа  $C$  возрастает от  $-\infty$  до нуля: доля теряемой энергии уменьшается. Случай  $\gamma_1 = \gamma$  соответствует отсутствию потерь или притока энергии на фронте — нормальному сильному взрыву. При  $\gamma_1 > \gamma$  имеет место приток энергии на фронте ударной волны.

Условие (4.1), используя принятые выражение для  $\epsilon$  и новое обозначение, можно записать в виде

$$\rho_f(v_f - D)[p_f/(\gamma_1 - 1)\rho_f + v_f^2/2] + p_f v_f = 0, \quad (4.2)$$

т. е. в том же виде, что и в обычной задаче о сильном взрыве (см. главу 2), но с измененным показателем адиабаты: вместо показателя адиабаты  $\gamma$  в (4.2) входит величина  $\gamma_1$ , которая представляет собой эффективный показатель адиабаты на фронте, учитывающий потери или приток энергии. Условия непрерывности потоков массы и импульса на фронте волны, как и в обычной задаче о сильном взрыве, имеют вид

$$\rho_f(v_f - D) = -\rho_0 D; \quad \rho_f(v_f - D)v_f + p_f = 0, \quad (4.3)$$

Эти условия показателя адиабаты  $\gamma$  не содержат.

Условия на фронте (4.2), (4.3) так же, как и в обычной задаче о сильном взрыве (глава 2), приводятся к виду

$$p_f = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \rho_0 D^2; \quad v_f = \frac{2}{\gamma_1 + 1} D; \quad \sigma_f = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \rho_0. \quad (4.4)$$

Уравнения движения газа в области непрерывного движения также остаются неизменными:

$$\begin{aligned} \partial_t v + v \partial_r v + \partial_r p / \rho &= 0; \\ \partial_t \rho + \partial_r (\rho v) + 2\rho v / r &= 0; \\ \partial_t (p / \rho^{\gamma}) + v \partial_r (p / \rho^{\gamma}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сохраняет свою форму и условие отсутствия притока вещества и энергии в центре взрыва при  $t > 0$ :

$$v(0, t) = 0. \quad (4.6)$$

Мы получили, таким образом, почти ту же задачу, что и раньше, с той, однако, разницей, что показатели адиабаты в условиях на фронте ударной волны и в уравнениях движения газа в непрерывной области различны.

## 4.2. Прямое применение анализа размерности в модифицированной задаче о точечном сильном взрыве

Попробуем теперь построить такое же, как и ранее, автомодельное решение этой задачи, отвечающее мгновенному выделению в точке — центре взрыва — конечной порции энергии  $E$ . Казалось бы, ничто в наших рассуждениях не должно измениться. Действительно, единственным новым определяющим параметром в рассматриваемой нами задаче по сравнению с обычной задачей о сильном взрыве является постоянный безразмерный параметр  $\gamma_1$ , так что соображения анализа размерности остаются прежними, и искомое решение должно, на первый взгляд, по тем же причинам, что и в главе 2, представляться в виде

$$\begin{aligned} p &= \rho_0 (r^2/t^2) P(\xi, \gamma, \gamma_1); \quad \rho = \rho_0 R(\xi, \gamma, \gamma_1); \quad v = (r/t) V(\xi, \gamma, \gamma_1); \\ \xi &= r(Et^2/\rho_0)^{-1/2}; \quad r_f(t) = \xi_0(\gamma, \gamma_1)(Et^2/\rho_0)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Функции  $P$ ,  $V$ ,  $R$  должны удовлетворять той же системе обычных уравнений, что и в обычной задаче о сильном взрыве, поскольку уравнения движения газа в области непрерывного движения не изменились и по существу той же осталась форма автомодельного решения, которое мы ищем.

Далее, в силу (4.7),  $D = dr_f/dt = 2r_f/5t$ . Подставляя в (4.4) остальные выражения (4.7), получаем:

$$\begin{aligned} P(\xi_0, \gamma, \gamma_1) &= 8/25(\gamma_1 + 1); \quad R(\xi_0, \gamma, \gamma_1) = (\gamma_1 + 1)/(\gamma_1 - 1); \\ V(\xi_0, \gamma, \gamma_1) &= 4/5(\gamma_1 + 1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Эти выражения — граничные значения функций  $P$ ,  $V$ ,  $R$  на фронте  $\xi = \xi_0$  — отличаются от соответствующих граничных значений для случая обычного сильного взрыва (2.26) только тем, что вместо показателя адиабаты  $\gamma$  в них входит  $\gamma_1$ .

Однако решения нашей новой задачи, имеющего форму (4.7), при  $\gamma_1 \neq \gamma$  в разумном классе функций не существует. Для того чтобы в этом убедиться, заметим, что если бы решение имело форму (4.7), то полная энергия газа в возмущенной области  $\mathcal{E}$  была бы постоянна, что доказывается точно так же, как и раньше (см. соотношение (2.27)). Однако при  $\gamma_1 \neq \gamma$  полная энергия газа в возмущенной области должна изменяться за счет потерь или притока энергии на фронте волны:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}/dt &= -4\pi r_f^2 \rho_f (v_f - D) \epsilon = \\ &= -4\pi r_f^2 \rho_f (v_f - D) (\gamma_1 - \gamma) p_f / (\gamma_1 - 1) (\gamma - 1) \rho_f \neq 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Получившееся противоречие доказывает несуществование решения нашей задачи, имеющего форму (4.7) при  $\gamma_1 \neq \gamma$ .

#### 4.3. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика

Для того чтобы разобраться в возникшем противоречии, снова, как и в аналогичной ситуации, описанной в предыдущей главе, отступим от строгой формулировки вырожденной автомодельной задачи. Вспомним, что решение, отвечающее точечному взрыву, имеет смысл, если оно представляет собой асимптотику для решения, отвечающего выделению энергии в малой, но конечной области. Обратимся поэтому к рассмотрению задачи, в которой энергия в момент  $t = 0$  выделяется не в точке, а в сфере радиусом  $R_0$ . В остальном же задачи совпадают. По этим соображениям в поставленном численном эксперименте решалась следующая задача. Имеется безграничное пространство, заполненное газом. В начальный момент вне сферы радиуса  $R_0$  плотность газа постоянна и равна  $\rho_0$ , давление равно нулю. Внутри же сферы распределение характеристик движения газа (давления  $p$ , скорости  $v$  и плотности  $\rho$ ) соответствует решению обычной задачи о сильном взрыве при энергии взрыва  $E$  и тех же значениях прочих параметров в некоторый момент  $t = t_0$  после взрыва, отвечающий достижению ударной волной радиуса  $R_0$ . Таким образом, считалось, что при  $-t_0 \leq t < 0$  происходит обычный сильный взрыв без излучения и выделения энергии на фронте, а при  $t = 0$  включается излучение или выделение энергии на фронте. При дальнейшей эволюции движения характеристики потока в области непрерывного движения описываются системой уравнений адиабатического движения газа (4.5). На фронте ударной волны условия имеют вид (4.4). Это те же условия, что и в обычной задаче о сильном взрыве; однако подчеркнем еще раз, эффективный показатель

адиабаты  $\gamma_1$  в условиях на фронте отличается от показателя адиабаты  $\gamma$  в области непрерывного движения, фигурирующего в уравнении сохранения энтропии. Кроме того, выполняется условие отсутствия притока вещества и энергии в центре взрыва при  $t > 0$ .

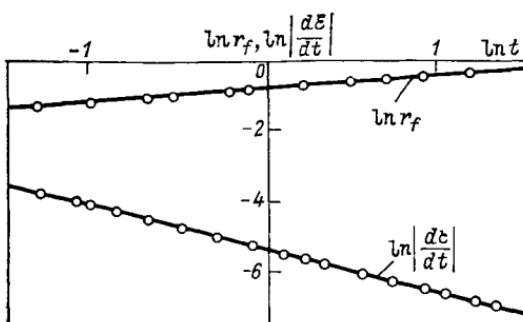


Рис. 4.1. Зависимости  $\ln r_f(t)$ ,  $\ln \left| \frac{d\epsilon}{dt} \right|$ , полученные численным счетом неавтомодельной задачи.

Результаты численного расчета представлены на рисунках 4.1 и 4.2, а также в табл. 4.1. Вычисления проводились для двух зна-

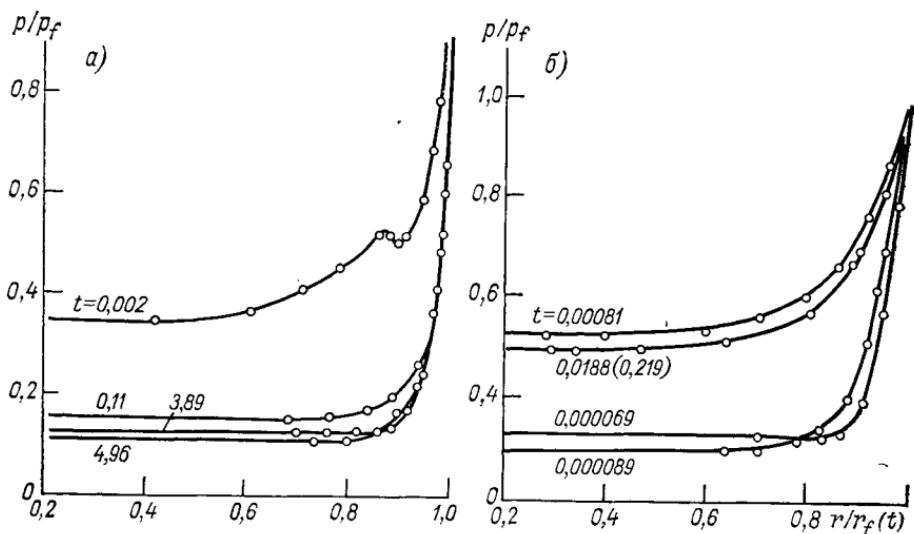


Рис. 4.2. Зависимости  $p/p_f$  от  $r/r_f$ , полученные численным счетом неавтомодельной задачи.

a)  $\gamma=1.9$ ,  $\gamma_1=1.1$ ; б)  $\gamma=1.1$ ,  $\gamma_1=1.9$ .

чений  $\gamma$ : значения, близкого к единице ( $\gamma = 1.1$ ), и значения, близкого к двум ( $\gamma = 1.9$ ). В каждом случае расчеты проделаны для нескольких значений  $\gamma_1$  в интервале  $1 \leq \gamma_1 \leq 2\gamma + 1$ . Наряду с величинами  $p$ ,  $\rho$ ,  $v$ ,  $r_f$  считалась также суммарная энергия газа в возмущенной области  $\mathcal{E}$ . Основной результат заключается в том,

что решение быстро выходит на автомодельную асимптотику следующего вида:

$$p = \rho_0 (r^2/t^2) P(r/r_f, \gamma, \gamma_1); \quad \rho = \rho_0 R(r/r_f, \gamma, \gamma_1); \\ v = (r/t) V(r/r_f, \gamma, \gamma_1); \quad r_f = (At^2/\rho_0)^{\alpha/2}, \quad (4.10)$$

где  $A$  и  $\alpha$  — некоторые постоянные. При этом оказалось, что постоянная  $\alpha$  зависит только от  $\gamma$  и  $\gamma_1$  и не зависит от начальных ус-

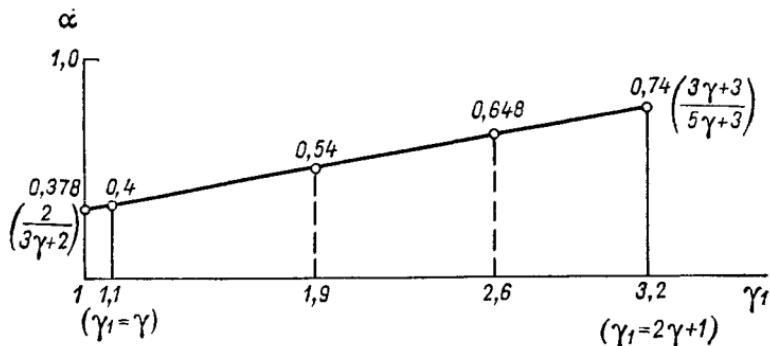


Рис. 4.3. Зависимость собственного значения  $\alpha$  от эффективного показателя адиабаты на фронте волны  $\gamma_1$  при  $\gamma=1,1$ .

При  $\gamma_1 < \gamma$   $\alpha < 2/5$ ; при  $\gamma_1 > \gamma$   $\alpha > 2/5$ ; при  $\gamma_1 = \gamma$  (адиабатический сильный взрыв)  $\alpha = 2/5$ ; при  $\gamma_1 = 2\gamma + 1$   $\alpha = (3\gamma + 3)/(5\gamma + 3)$  (детонация с переменной скоростью распространения детонационной волны; удовлетворяется условие Чепмена—Жуке).

ловий (брались разные  $t_0$ ,  $E$ ,  $\rho_0$ ). Зависимость  $\alpha(\gamma_1)$  при  $\gamma = 1,1$  приведена на рис. 4.3. Постоянная  $A$  получилась зависящей также и от начальных условий (начальный момент  $t_0$ , начальная энергия  $E$ , начальная плотность  $\rho_0$ ). Выход на автомодельный режим показан на графике зависимости  $\ln r_f$  от  $\ln t$ , которая быстро выходит на прямую  $\ln r_f \sim \alpha \ln t$ , и на графике зависимости

Таблица 4.1

$\gamma$	$\gamma_1$	Неавтомо- дельная задача	Задача на собственные значения
1,1	1,9	0,54	0,54
1,9	1,1	0,29	0,28

$\ln |d\mathcal{E}/dt|$  от  $\ln t$ , которая так же быстро выходит на прямую  $\ln |d\mathcal{E}/dt| \sim (5\alpha - 3)\ln t$  (для  $\gamma = 1,9$ ;  $\gamma_1 = 1,1$  см. рис. 4.1), а также на графиках зависимости величины  $p/p_f$  от  $r/r_f$  для разных моментов времени (рис. 4.2).

#### 4.4. Автомодельное предельное решение

Выясним теперь, каким образом в численном эксперименте появилась автомодельная промежуточная асимптотика (4.10).

По сравнению со случаем точечного взрыва (начальные условия (2.19)) в задаче, решавшейся в численном эксперименте, к определяющим параметрам задачи добавляется еще  $R_0$ , так что появляется не одна, а две безразмерные независимые переменные:

$$\xi = r(Et^2/\rho_0)^{-1/5}; \quad \eta = R_0(Et^2/\rho_0)^{-1/5}, \quad (4.11)$$

и скорость, плотность и давление газа, согласно анализу размерностей, выражаются в виде

$$v = (r/t) V(\xi, \eta, \gamma, \gamma_1); \quad \rho = \rho_0 R(\xi, \eta, \gamma, \gamma_1); \\ p = \rho_0 (r^2/t^2) P(\xi, \eta, \gamma, \gamma_1). \quad (4.12)$$

Решение задачи о сильном точечном взрыве при  $\gamma = \gamma_1$  представляет собой, с одной стороны, решение сингулярной предельной задачи, соответствующей  $R_0 = 0$ , с другой стороны,— асимптотику решения (4.12) при  $t \rightarrow \infty$ . Как мы выяснили, при  $\gamma_1 \neq \gamma$  решения предельной задачи, соответствующей  $R_0 = 0$ , не существует. Нас, однако, интересует не решение предельной задачи, а асимптотическое представление решения неавтомодельной задачи с  $R_0 \neq 0$  при больших  $t$ . При возрастании же  $t$  и фиксированном  $r$  к нулю стремятся как  $\xi$ , так и  $\eta$ . Появление у решения автомодельной промежуточной асимптотики (4.10) объясняется тем, что существует такое положительное число  $\beta$ , зависящее от  $\gamma$  и  $\gamma_1$ , что при  $\xi, \eta \rightarrow 0$  главные члены асимптотических представлений функций  $P, V, R$  имеют вид

$$P = P(\xi/\eta^\beta); \quad V = V(\xi/\eta^\beta); \quad R = R(\xi/\eta^\beta). \quad (4.13)$$

Именно поэтому предельное движение автомодельно, так как

$$\xi/\eta^\beta = r/Bt^\alpha,$$

$$\text{где } B = (E/\rho_0)^{(1-\beta)/5}; \quad \alpha = 2(1-\beta)/5.$$

Класс автомодельных решений уравнений газодинамики, к которому принадлежит предельное решение исследуемой задачи (4.13), был указан К. Бехертом [110] и Г. Гудерлеем [134] и в дальнейшем рассматривался Л. И. Седовым [95] и другими авторами.

Для дальнейшего анализа удобно перенормировать автомодельную независимую переменную и взять ее в виде

$$\zeta = \text{const}(\xi/\eta^\beta) = r(A t^2/\rho_0)^{-(1-\beta)/5}; \quad A = \sigma E R_0^{5\beta/(1-\beta)}, \quad (4.14)$$

где постоянный параметр  $\sigma$  выбран так, чтобы на фронте ударной волны значение автомодельной независимой переменной было равно единице ( $\zeta = 1$ ). При этом асимптотический закон распро-

странения ударной волны записывается в виде, согласующемся с (4.10):

$$r_f = (A/\rho_0)^{(1-\beta)/5} t^{2(1-\beta)/5}. \quad (4.15)$$

Заметим теперь, что стремление  $\xi$  и  $\eta$  к нулю можно осуществлять иначе: потребовать, чтобы при фиксированных  $r$  и  $t$  величина  $E$  стремилась к бесконечности (или нулю), а  $R_0$  — к нулю. Однако чтобы получилась та же асимптотика, что и для рассматриваемого неавтомодельного решения при больших временах, произведение  $ER_0^{5\beta/(1-\beta)}$  должно при этом оставаться постоянным:

$$ER_0^{5\beta/(1-\beta)} = \text{const.} \quad (4.16)$$

Таким образом, при  $\gamma_1 \neq \gamma$  автомодельное предельное движение соответствует не точечному взрыву, т. е. не выделению в начальный момент в центре взрыва конечной порции энергии, а выделению в конечной области радиусом  $R_0$  порции энергии  $E$ , стремящейся при  $R_0 \rightarrow 0$  к нулю или бесконечности, в зависимости от знака  $\beta$ .

Параметр  $\beta$ , или, что то же,  $\alpha$ , при данных  $\gamma$  и  $\gamma_1$  можно определить двумя способами. Во-первых, можно проследить, (например, численно) эволюцию неавтомодельного решения исходной задачи до ее выхода на автомодельную асимптотику: этот способ был продемонстрирован в предыдущем разделе. Во-вторых, можно воспользоваться тем, что автомодельная асимптотика сама является решением уравнений газодинамики, удовлетворяющим определенным условиям, и попытаться построить это решение и попутно определить показатель  $\alpha$ .

Рассмотрим теперь второй способ. Итак, искомое предельное решение ищется в виде

$$\begin{aligned} p &= \rho_0(r^2/t^2) P(\zeta, \gamma, \gamma_1); \quad \rho = \rho_0 R(\zeta, \gamma, \gamma_1); \\ v &= (r/t) V(\zeta, \gamma, \gamma_1); \quad \zeta = r/r_f; \quad r_f = (A/\rho_0)^{\alpha/2} t^\alpha. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подставим это решение в уравнения газодинамики (4.5). Получаем, следуя обычной технике [134, 97], одно уравнение первого порядка

$$\frac{dz}{dV} = -\frac{z}{V-\alpha} \left\{ \frac{[2(V-1) + 3(\gamma-1)V][(V-\alpha)^2-z]}{[(3V-\kappa)z-V(V-1)(V-\alpha)]} + \gamma - 1 \right\}, \quad (4.18)$$

где

$$\kappa = 2(1-\alpha)/\gamma; \quad z = \gamma P/R,$$

и два других уравнения первого порядка

$$\frac{d \ln \zeta}{dV} = \frac{z - (V-\alpha)^2}{V(V-1)(V-\alpha) + (\kappa-3V)z}; \quad (4.19)$$

$$(V-\alpha) \frac{d \ln R}{d \ln \zeta} = -3V - \frac{V(V-1)(V-\alpha) + (\kappa-3V)z}{z - (V-\alpha)^2}. \quad (4.20)$$

Как видно, если построено нужное решение уравнения (4.18), решение уравнений (4.19) и (4.20) сводится к квадратурам.

Существенно, что искомое решение уравнения первого порядка (4.18) должно проходить через две точки: точку — образ фронта ударной волны и точку — образ центра симметрии. Подставляя (4.17) в условия на фронте (4.9), находим:

$$P(1, \gamma, \gamma_1) = \frac{2\alpha^2}{\gamma_1 + 1}; \quad V(1, \gamma, \gamma_1) = \frac{2\sigma}{\gamma_1 + 1};$$

$$R(1, \gamma, \gamma_1) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}, \quad (4.21)$$

откуда следует, что образом фронта в плоскости  $z$ ,  $V$  будет точка

$$V = 2\alpha/(\gamma_1 + 1); \quad z = 2\alpha^2\gamma(\gamma_1 - 1)/(\gamma_1 + 1)^2. \quad (4.22)$$

Образом центра симметрии ( $\zeta = 0$ ) в плоскости  $z$ ,  $V$  будет особая точка типа седла уравнения (4.18)

$$V = 2(1 - \alpha)/3\gamma; \quad z = \infty. \quad (4.23)$$

Здесь использовано условие отсутствия притока вещества и энергии в центре взрыва при  $t > 0$ . При этом автомодельная переменная  $\zeta$  в ходе перемещения от образа центра симметрии к образу фронта должна монотонно возрастать от нуля до единицы. Вообще говоря, при произвольном  $\alpha$  удовлетворить этим условиям невозможно: нельзя провести интегральную кривую уравнения первого порядка через две произвольные точки. Мы увидим, однако, что существуют такие исключительные значения  $\alpha$ , для которых это возможно. Таким образом, мы снова пришли к нелинейной задаче на собственные значения: построить интегральную кривую уравнения первого порядка (4.18), проходящую через две точки (4.22) и (4.23), и определить значение параметра  $\alpha$ , при котором такое решение существует, т. е. собственное значение задачи.

#### 4.5. Качественное исследование нелинейной задачи на собственные значения

Рассмотрим фазовый портрет — картину интегральных кривых в первом квадранте — интересующей нас части плоскости  $zV$ . В случае  $\gamma < 2$ ,  $1 \leq \gamma_1 < 2\gamma + 1$  фазовый портрет представлен на рис. 4.4, где кривые 1—3 соответствуют уравнениям

$$z = -\gamma V(V - \alpha) \quad (4.24)$$

(геометрическое место точек фронта) и

$$z = (V - \alpha)^2; \quad z = V(V - 1)(V - \alpha)(3V - \alpha)^{-1}. \quad (4.25)$$

Точки пересечения кривых (4.25) представляют собой особые точки уравнения (4.18). При  $\gamma_1 < 2\gamma + 1$  все эти особые точки рас-

полагаются под кривой (4.24). Используя стандартную технику качественной теории дифференциальных уравнений, которая будет детально продемонстрирована в главе 6 на другом примере, можно показать, что при таких  $\gamma_1$  найдется такое  $\alpha$  (причем для каждой пары  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  только одно), что точка  $M$  (образ фронта) и

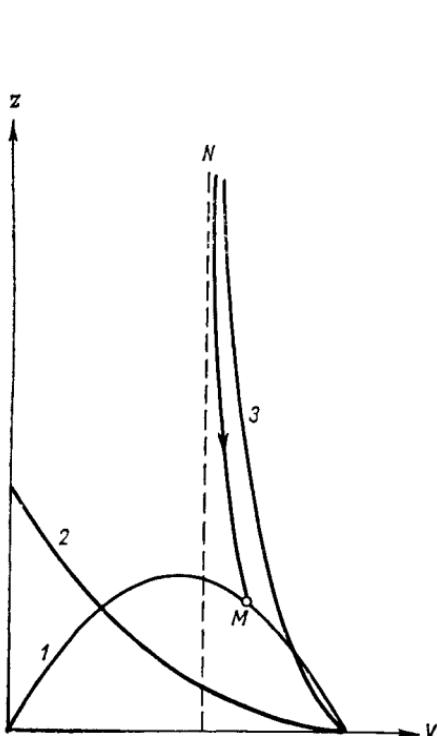


Рис. 4.4. Фазовый портрет уравнения первого порядка (4.18) при  $1 < \gamma_1 < 2\gamma + 1$ .

1 — кривая (4.24); 2, 3 — кривые (4.25).

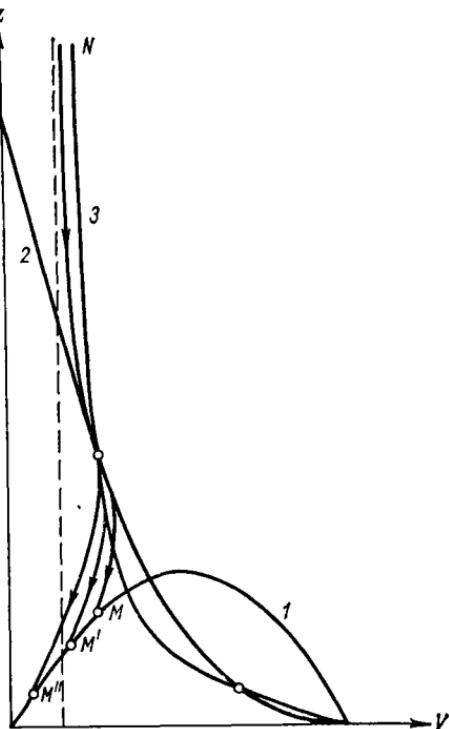


Рис. 4.5. Фазовый портрет уравнения (4.18) при  $\gamma_1 > 2\gamma + 1$ .

Обозначения см. рис. 4.4.

точка  $N$  (образ центра симметрии) будут лежать на одной интегральной кривой — сепаратрисе двух семейств интегральных кривых, единственной кривой, входящей в образ центра симметрии — особую точку типа седла уравнения (4.18). График функции  $\alpha(\gamma_1)$  (для  $\gamma = 1,1$  см. рис. 4.3) — монотонно возрастающая кривая, проходящая через следующие точки:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2/(3\gamma + 2), \quad \gamma_1 = 1; \quad \alpha = 2/5, \quad \gamma_1 = \gamma; \\ \alpha &= \alpha_* = (3\gamma + 3)/(5\gamma + 3), \quad \gamma_1 = 2\gamma + 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

При  $\gamma_1 > 2\gamma + 1$  особая точка (типа узла) располагается выше кривой (4.24) (рис. 4.5), вследствие чего получается целый интер-

вал возможных значений  $\alpha$ . Как будет показано, при таких  $\gamma_1$  становится неединственным также решение исходной неавтомодельной задачи. Следовательно, для выделения единственного решения при таких  $\gamma_1$  требуется дополнительное условие и в неавтомодельной задаче.

Точки (4.26) представляют специальный интерес. Первая из них соответствует движению с полной потерей тепловой энергии на фронте волны. Сжатие на фронте (отношение плотности за фронтом к исходной плотности газа) получается в этом случае бесконечным, относительная скорость газа и фронта — равной нулю. Вторая точка отвечает обычному сильному взрыву. Третья точка весьма любопытна. Она соответствует притоку энергии на фронте и выполнению так называемого условия Чепмена—Жуге: равенству скорости газа относительно фронта местной скорости звука. Действительно, скорость звука на фронте ударной волны равна

$$V \sqrt{\gamma p_f / \rho_f} = D \sqrt{2\gamma(\gamma_1 - 1)/(\gamma_1 + 1)},$$

где  $D$  — скорость фронта. Скорость же газа относительно фронта составляет  $|v_f - D| = (\gamma_1 - 1)D/(\gamma_1 + 1)$ . При  $\gamma_1 = 2\gamma + 1$  эти две скорости совпадают, а поскольку  $\alpha = \alpha_*$ , образ фронта в плоскости  $zV$  совпадает с особой точкой типа узла, лежащей при этом  $\gamma_1$  на кривой (4.24). Таким образом, искомая интегральная кривая соединяет в этом случае две особые точки уравнения (4.18): седловую точку (образ центра симметрии) и узел (образ фронта). Итак, при потере энергии на фронте ( $\gamma_1 < \gamma$ ) и малом выделении энергии на фронте ( $\gamma < \gamma_1 < 2\gamma + 1$ ) исследуемое решение мало отличается по своему характеру от решения, отвечающего обычному сильному взрыву ( $\gamma_1 = \gamma$ ): особая точка типа узла располагается под геометрическим местом точек фронта, движение в возмущенной области всюду дозвуковое и т. д. При  $\gamma_1 = 2\gamma + 1$ ,  $\alpha = \alpha_*$  построенное решение представляет собой движение детонационного типа, но с переменной скоростью распространения фронта:

$$r_f \sim t^{(3\gamma + 3)/(5\gamma + 3)}.$$

На фронте волны достигается скорость звука, узел становится образом фронта. При этом приток энергии и температура на фронте оказываются зависящими от времени. Замечательно, что при  $\gamma_1 = 2\gamma + 1$  полученное решение также определяется неоднозначно. В частности, обычное решение задачи о сферической детонационной волне [40, 47], отвечающее  $\alpha = 1$ , т. е. постоянной скорости распространения волны, постоянному притоку энергии на фронте и постоянной температуре на фронте, также удовлетворяет всем условиям поставленной задачи; существует и целое семейство решений с промежуточными  $\alpha$ :  $(3\gamma + 3)/(5\gamma + 3) < \alpha < 1$ .

Действительно, при  $\gamma_1 = 2\gamma + 1$  и таких  $\alpha$  особая точка типа узла уже не совпадает с образом фронта и располагается выше

кривой (4.24). Образ фронта, как нетрудно проверить, лежит на пересечении кривой (4.24) и первой кривой (4.25). Существует интегральная кривая, проходящая от образа фронта к особой точке типа узла и оттуда — в особую точку типа седла. Следует отметить, что среди всех решений, отвечающих  $\alpha_* \leq \alpha \leq 1$ , только построенное выше решение, отвечающее  $\alpha = \alpha_*$ , дает конечное ускорение частиц газа на фронте. Для решений, отвечающих остальным значениям  $\alpha$ , это ускорение бесконечно.

При  $\gamma_1 > 2\gamma + 1$  скорость звука на фронте ударной волны становится меньше скорости газа относительно фронта. Поэтому при  $\gamma_1 > 2\gamma + 1$  на фронте ударной волны следует задать еще одно дополнительное условие, и без такого условия решение сформулированной выше исходной задачи становится неединственным.

Итак, построено автомодельное предельное решение, которое является промежуточной асимптотикой решения исходной неавтомодельной задачи. Неопределенной осталась только постоянная  $A$ , или, что то же, безразмерная постоянная  $\sigma$ . В случае  $\gamma_1 = \gamma$  величина  $A = \sigma E$  и константа  $\sigma$  находятся из закона сохранения полной энергии

$$\mathcal{E} = 4\pi \int_0^{\infty} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)} \right) r^2 dr = \text{const},$$

справедливого и для неавтомодельной стадии движения. При  $\gamma_1 \neq \gamma$  такой закон не имеет места: уравнение баланса энергии принимает неинтегрируемую форму

$$d\mathcal{E}/dt = -4\pi r_f^2 D_{\rho_0} (\gamma - \gamma_1) p_f / (\gamma - 1) (\gamma_1 - 1) \rho_f \neq 0. \quad (4.27)$$

Единственным способом определения константы  $\sigma$  остается в настоящее время прослеживание эволюции решения неавтомодельной задачи к автомодельной промежуточной асимптотике.

Для целей сравнения с асимптотикой численного решения неавтомодельной задачи решение сформулированной выше нелинейной задачи на собственные значения для системы обыкновенных уравнений также было найдено численно. Система обыкновенных уравнений (4.18) — (4.20) решалась численно при начальных условиях (4.21), причем показатель  $\alpha$  подбирался методом проб так, чтобы удовлетворялось условие отсутствия притока вещества и энергии в центре при  $t > 0$ . Счет прекращался, когда величину  $P\xi^2 = R\xi^2/\gamma$  вблизи  $\xi = 0$  с точностью до 1 % можно было считать постоянной. Результаты сопоставления значений показателя  $\alpha$ , определенных численным счетом неавтомодельной задачи для системы уравнений в частных производных и счетом нелинейной задачи на собственные значения, приведены в табл. 4.1.

Сопоставление собственных функций нелинейной задачи на собственные значения с предельными распределениями, получившимися при установлении решения неавтомодельной задачи, также обнаружило их хорошее совпадение: относительное расхождение не превышает 2 %.

Таким образом, численное интегрирование при взятых нами начальных условиях подтверждает, что асимптотикой решения исходной неавтомодельной задачи действительно является автомодельное решение, рассмотренное в предыдущем и этом параграфах.

Как и для автомодельного решения, рассмотренного в главе 3, для этого автомодельного предельного решения характерны два свойства. Во-первых, показатель  $\alpha$  степени времени в выражении для автомодельной переменной не находится из соображений подобия, а требует для своего определения решения нелинейной задачи на собственные значения, т. е. находится из условия существования автомодельного решения не в малом, а в целом. Далее, все решение определяется при этом лишь с точностью до некоторой постоянной, входящей в автомодельную переменную, которая может быть найдена только сращиванием автомодельной промежуточной асимптотики с неавтомодельным решением исходной задачи: интегрального закона сохранения, позволяющего непосредственно определить значение этой постоянной по начальным данным исходной задачи, здесь не существует.

Другим способом пришли к автомодельному решению задачи, рассмотренной в этом параграфе, в частном случае  $\gamma_1 = 2\gamma + 1$ , когда удовлетворяется условие Чепмена—Жуге, Я. Г. Сапунков [93] и А. К. Оппенгейм с соавторами [175—177]. Численные расчеты были выполнены в работе [3].

#### 4.6. Задача о коротком ударе

Весьма поучительными особенностями обладает принадлежащая к тому же типу задача о коротком ударе, изученная в работах К. Вейцзеккера, Я. Б. Зельдовича и их сотрудников [213, 136, 135, 165, 42, 1]. Для иллюстрации этих особенностей мы кратко изложим здесь задачу о коротком ударе (более подробно она рассмотрена в монографии Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [48]).

Представим себе пространство, разделенное непроницаемой плоской стенкой  $x = 0$  на две половины ( $x$  — координата, отсчитываемая от стенки по нормали к ней). Полупространство  $x \geq 0$  занято покоящимся идеальным газом плотности  $\rho_0$ , находящимся под нулевым давлением; в полупространстве  $x \leq 0$  — вакуум. В начальный момент  $t = 0$  на стенке справа создается (например, путем взрыва) давление  $p = p_0$ , которое меняется по некоторому закону  $p = p_0 f(t/t)$  до момента  $t = \tau$ , после чего стенка мгновенно убирается. Задача состоит в исследовании возникающего при  $t > \tau$  движения. В этом движении вправо по покоящемуся газу распространяется плоская ударная волна  $x = x_f(t)$ . В некоторой области за волной сжатый газ продолжает двигаться вправо. В какой-то плоскости  $x = x_0(t)$  мгновенная скорость частиц газа становится равной нулю, и все частицы газа, расположенные левее этой плоскости, движутся налево: там происходит расширение сжатого ударной волной газа в вакуум.

Решение сформулированной задачи приводится к решению той же, что и в задаче о сильном взрыве, системы уравнений газодинамики, но уже для плоского случая:

$$\begin{aligned}\partial_t v + v \partial_x v + \partial_x p / \rho &= 0; \\ \partial_t \rho + \partial_x \rho v &= 0; \\ \partial_t (p / \rho^\gamma) + v \partial_x (p / \rho^\gamma) &= 0.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Границные условия на ударной волне  $x = x_f(t)$  те же, что и в задаче о сильном взрыве:

$$\begin{aligned}\rho_f (v_f - D) &= -\rho_0 D; \quad \rho_f (v_f - D) v_f + p_f = 0; \\ \rho_f (v_f - D) [v_f^2 / 2 + p_f / (\gamma - 1) \rho_f] + p_f v_f &= 0.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Здесь  $D = dx_f/dt$ . Начальные условия в момент  $t = \tau$  соответствуют при  $x < 0$  вакууму. При  $x > 0$  начальные условия соответствуют состоянию движения, возникающему в момент  $t = \tau$  в полу-пространстве при поддержании на границе в течение промежутка времени  $\tau$  давления, меняющегося по закону  $p(0, t) = p_{0f}(t/\tau)$ . При этом предполагается, что полу-пространство в начальный момент заполнено покоящимся газом плотности  $\rho_0$  при нулевом давлении. Очевидно, что область возмущения при  $t = \tau$  конечна.

Таким образом, плотность, давление и скорость газа зависят от следующих размерных величин:

$$t, \rho_0, \rho_0, \tau, x, \tag{4.30}$$

а координата фронта — от всех этих величин, кроме последней. Применяя стандартную процедуру анализа размерностей, получаем:

$$x_f = \sqrt{p_0 / \rho_0} \tau \xi_f(\Pi_1); \tag{4.31}$$

$$\Pi_\rho = \Phi_\rho(\Pi_1, \Pi_2); \quad \Pi_p = \Phi_p(\Pi_1, \Pi_2), \quad \Pi_v = \Phi_v(\Pi_1, \Pi_2). \tag{4.32}$$

где

$$\Pi_1 = t/\tau; \quad \Pi_2 = x / \sqrt{p_0 / \rho_0} \tau; \quad \Pi_\rho = \rho / \rho_0; \quad \Pi_p = p / p_0; \quad \Pi_v = v / \sqrt{p_0 / \rho_0}. \tag{4.33}$$

Как видно, решение поставленной задачи оказалось неавтомодельным. Это объясняется тем, что в задаче имеются характерное время  $\tau$  и характерный линейный размер  $\sqrt{p_0 / \rho_0} \tau$ .

#### 4.7. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика

Численные расчеты обнаруживают, однако, что, аналогично предыдущим задачам, решение сформулированной задачи обладает замечательным свойством: зависимость координаты фронта волны от времени быстро (через время порядка  $\tau$  после начала

процесса расширения в вакуум) выходит на степенную асимптоту, так что

$$\xi_f(\Pi_1) = \xi_0(\gamma) \Pi_1^\alpha, \quad (4.34)$$

где  $\xi_0(\gamma)$  — некоторая функция  $\gamma$ , а показатель  $\alpha$  также зависит от  $\gamma$ . Далее, величина плотности на фронте быстро приближается

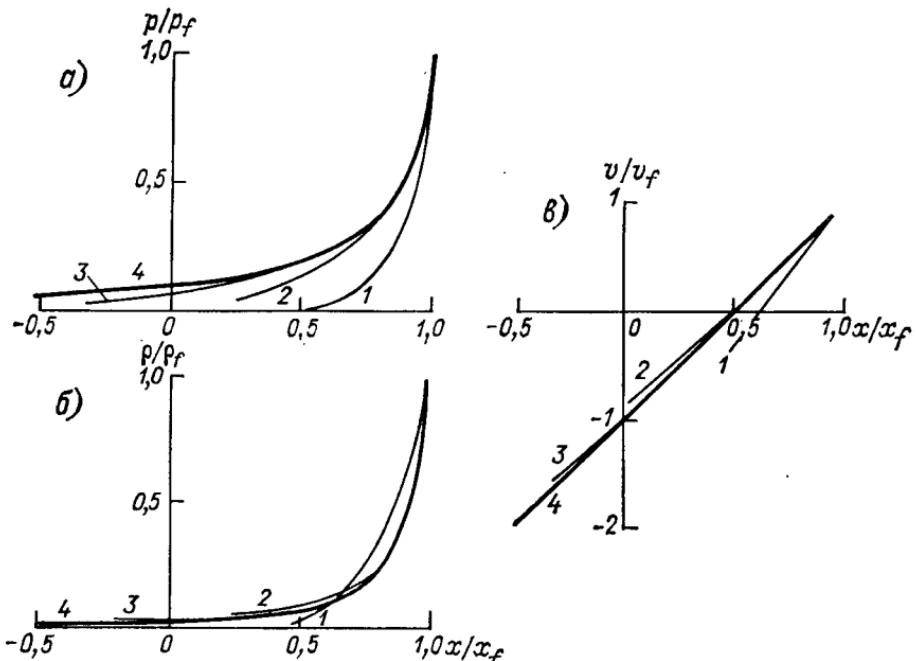


Рис. 4.6. Зависимости  $p/p_f$  (а),  $\rho/\rho_f$  (б),  $v/v_f$  (в) от  $x/x_f$ , полученные численным счетом неавтомодельной задачи о коротком ударе при  $\gamma=1,4$  [38].

1)  $t=1,6$ ; 2)  $t=5,0$ ; 3)  $t=15,0$ ; 4) автомодельная промежуточная асимптотика.

к постоянному значению, а давление и скорость газа на фронте быстро начинают меняться по степенным законам:

$$p_f/p_0 \sim \Pi_1^{-2(1-\alpha)}; \quad v_f/\sqrt{p_0/\rho_0} \sim \Pi_1^{-(1-\alpha)}. \quad (4.35)$$

Наконец, оказалось, что если построить распределение плотности, давления и скорости в относительных координатах, взяв за масштаб длины  $x_f$ , а за масштабы характеристик движения  $p_f$ ,  $v_f$  и  $\rho_f$ , то эти распределения столь же быстро перестают зависеть от времени (рис. 4.6). Иными словами, оказывается, что решение задачи быстро выходит на автомодельную асимптотику:

$$\begin{aligned} \xi_f &= \xi_0(\gamma) \Pi_1^\alpha; \quad \Phi_\rho = \Phi_{1\rho}(\Pi_2 \Pi_1^{-\alpha}); \\ \Phi_\rho &= \Pi_1^{-2(1-\alpha)} \Phi_{1\rho}(\Pi_2 \Pi_1^{-\alpha}); \quad \Phi_v = \Pi_1^{-(1-\alpha)} \Phi_{1v}(\Pi_2 \Pi_1^{-\alpha}), \end{aligned} \quad (4.36)$$

Выход решения на автомодельную асимптотику происходит не равномерно по области движения  $-\infty < x \leq x_f(t)$ , а лишь вблизи фронта ударной волны  $x_f(t)$  в области тем большей, чем больше прошло времени с начала расширения. Численный счет [38] показал, что на автомодельную асимптотику вида (4.36) с одним и тем же показателем степени  $\alpha$  решение выходило независимо от того, было ли давление на стенке в промежуток времени  $0 < t < \tau$  постоянным или менялось по различным законам.

#### 4.8. Автомодельное предельное решение

Естественно попытаться построить автомодельное предельное решение непосредственно. Снова ищем его в классе решений Бехерта—Гудерлея:

$$p = p_0(x^2/t^2) P(\xi, \gamma); \quad \rho = \rho_0 R(\xi, \gamma); \quad v = (x/t) V(\xi, \gamma); \\ \xi = x/x_f = x/At^\alpha; \quad x_f = At^\alpha. \quad (4.37)$$

Здесь  $A, \alpha$  — постоянные. Для функций  $P, V, R$  получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, распадающаяся на одно обыкновенное уравнение первого порядка

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z}{\Delta} \{ [2(V-1) + (\gamma-1)V](V-\alpha)^2 - \\ - (\gamma-1)V(V-1)(V-\alpha) - [2(V-1) + \kappa(\gamma-1)]z \}, \quad (4.38)$$

где

$$\Delta = (V-\alpha)[V(V-1)(V-\alpha) + (\kappa-V)z]; \\ \kappa = 2(1-\alpha)/\gamma; \quad z = \gamma P/R, \quad (4.39)$$

и два уравнения первого порядка

$$\frac{d \ln \xi}{dV} = \frac{z - (V-\alpha)^2}{V(V-1)(V-\alpha) + (\kappa-V)z}; \quad (4.40)$$

$$\frac{d \ln R}{d \ln \xi} = - \frac{V(V-1)(V-\alpha) + (\kappa-V)z}{(V-\alpha)[z - (V-\alpha)^2]} - \frac{V}{V-\alpha}. \quad (4.41)$$

Таким образом, если известно искомое решение уравнения (4.38), то решения уравнений (4.40) и (4.41) приводятся к квадратурам.

Искомое решение уравнения (4.38) должно проходить через две точки: образ фронта

$$V = 2\alpha/(\gamma+1); \quad z = 2\alpha^2\gamma(\gamma-1)/(\gamma+1)^2 \quad (4.42)$$

и образ свободной границы (особую точку типа седла)

$$V = \kappa; \quad z = \infty, \quad (4.43)$$

причем переменная  $\xi$  при перемещении от особой точки (4.43) к образу фронта (4.42) должна монотонно возрастать. Таким образом, математическая задача оказывается в этом случае близкой

к модифицированной задаче о сильном взрыве, рассмотренной в начале этой главы.<sup>1</sup> Мы снова пришли к необходимости провести интегральную кривую уравнения первого порядка того же типа через две точки, одна из которых — особая точка типа седла. Вообще говоря, это невозможно, но, как и в предыдущей задаче, можно показать, что для каждого значения  $\gamma$  существует значение  $\alpha$  — собственное значение задачи, для которого интегральная кривая уравнения (4.38), проходящая через образ фронта, входит в седло — образ свободной границы. Для различных  $\gamma$  во всем диапазоне  $1 \leq \gamma \leq \infty$  были получены следующие значения  $\alpha$ :

$\gamma$	1,0	1,1	$7/5$	$5/3$	2,8	$\infty$
$\alpha$	$1/2$	0,569	$3/5$	0,611	0,627	0,642

Как видно, для всех  $\gamma$  в интервале  $1 < \gamma < \infty$  справедливо неравенство

$$1/2 < \alpha < 2/3.$$

Как и в предыдущих задачах, здесь оказалось, что значения показателя степени  $\alpha$ , определенные при непосредственном построении автомодельного предельного решения задачи о коротком ударе, хорошо согласуются со значениями, полученными численным счетом асимптотики решения неавтомодельной задачи.

Автомодельное предельное решение (4.37) непосредственным построением определилось с точностью до постоянной  $A$ ; из (4.37) и (4.34) видно, что

$$A = \xi_0(\gamma) \sqrt{p_0/\rho_0} \tau^{1-\alpha}. \quad (4.44)$$

Таким образом, если мы хотим получать одну и ту же асимптотику, уменьшая время  $\tau$  воздействия импульса на газ, мы должны соответственно увеличивать давление по закону

$$p_0 = \text{const } \tau^{-2(1-\alpha)}. \quad (4.45)$$

#### 4.9. Законы сохранения энергии и импульса в задаче о коротком ударе

Количество газа, вовлеченного в каждый момент в движение, приходящееся на единицу площади границы, конечно. Поэтому в задаче имеют место законы сохранения импульса и энергии, справедливые и на неавтомодельной стадии движения. Естественно, приходит мысль воспользоваться этими законами для определения показателя степени  $\alpha$  и постоянной  $A$  автомодельного предельного решения, подобно тому, как это было сделано в главе 2 для рассмотренных там автомодельных решений первого рода.

<sup>1</sup> Напомним, что решение задачи о коротком ударе было получено значительно раньше решения модифицированной задачи о сильном взрыве.

Действительно, газ вначале покоятся и находится при нулевом давлении, поэтому его импульс и энергия нулевые. Суммарный импульс газа  $J$ , охваченного движением, равен в любой момент импульсу давления при ударе:

$$J = \beta p_0 \tau; \quad \beta = \int_0^1 f(\lambda) d\lambda, \quad (4.46)$$

откуда получается соотношение

$$\beta p_0 \tau = \int_{-\infty}^{x_f} \rho v dx. \quad (4.47)$$

С возрастанием времени решение стремится к автомодельному. Переходя к пределу под знаком интеграла и подставляя в (4.47) выражения для плотности и скорости из автомодельного решения (4.37), находим:

$$\beta p_0 \tau = \rho_0 A^2 t^{2\alpha-1} \int_{-\infty}^1 R(\xi, \gamma) V(\xi, \gamma) d\xi. \quad (4.48)$$

Поскольку интеграл в правой части от времени не зависит, для независимости левой части от времени необходимо, чтобы выполнялось соотношение  $\alpha = 1/2$ , после чего, казалось бы, из (4.48) можно найти константу  $A$ .

Однако работа на единицу площади, совершаемая при ударе по газу, равна

$$\int_0^{\tau} p(0, t) v(0, t) dt = \delta p_0^{3/2} \rho_0^{-1/2} \tau, \quad (4.49)$$

где  $\delta$  — численная постоянная. В то же время энергия газа, вовлекаемого в движение, нулевая, так как его скорость и давление равны нулю. Следовательно, энергия газа, охваченного движением, в любой момент равна работе, совершаемой при ударе:

$$\delta p_0^{3/2} \rho_0^{-1/2} \tau = \int_{-\infty}^{x_f} \rho \left( \frac{v^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1) \rho} \right) dx. \quad (4.50)$$

Снова переходя к пределу под знаком интеграла и подставляя туда выражения скорости, плотности и давления из автомодельного предельного решения, получаем:

$$\delta p_0^{3/2} \rho_0^{-1/2} \tau = \rho_0 A^3 t^{3\alpha-2} \int_{-\infty}^1 R \left( \frac{V^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1) R} \right) \xi^2 d\xi. \quad (4.51)$$

На первый взгляд, отсюда следует, что  $\alpha = 2/3$  и что соотношение (4.51) также позволяет определить постоянную  $A$ . Таким образом, возникает парадокс, заключающийся в том, что показатели

степени автомодельной переменной  $\alpha$ , определяемые из законов сохранения импульса ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) и энергии ( $\alpha = \frac{2}{3}$ ), не согласуются между собой и с показателем степени  $\alpha$  ( $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$ ), определенным при непосредственном построении автомодельного предельного решения.

Разрешение этого парадокса тривиально и вместе с тем показательно. Дело в том, что интеграл в уравнении импульса (4.48) равен нулю, а интеграл в уравнении энергии (4.51) — бесконечности, так что из этих соотношений нельзя определить ни показателей степени, ни постоянной  $A$ . Сам же предельный переход под знаком интеграла в уравнениях законов сохранения (4.47) и (4.50) был не законным, так как стремление подынтегральных выражений к пределу неравномерно по области интегрирования.

Действительно, автомодельное предельное движение получается предельным переходом во всей области  $-\infty < x \leq x_f$  при длительности импульса  $t \rightarrow 0$  и давлении на границе, стремящемся к бесконечности по закону  $p_0 = \text{const } t^{-2(1-\alpha)}$ . При этом полный импульс  $\rho_0 t$  стремится к нулю как  $\text{const } t^{2\alpha-1}$ , а энергия  $\delta p_0^{3/2} \times \rho_0^{-1/2} t$  — к бесконечности как  $\text{const } t^{3\alpha-2}$  (напомним, что  $\alpha$  лежит между  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{2}{3}$ ), так что автомодельное предельное движение имеет нулевой импульс и бесконечную энергию. Далее, автомодельное решение является предельным для решения исходной неавтомодельной задачи при конечных  $p_0$  и  $t$  и стремящемся к бесконечности  $t$ . Однако, как уже упоминалось, стремление к предельному решению по области  $-\infty < x \leq x_f$  неравномерно. Импульс области сжатия  $x_0(t) \leq x \leq x_f(t)$  неограниченно растет со временем. Импульс области расширения  $-\infty < x \leq x_0(t)$  имеет противоположный знак и также неограниченно растет со временем по абсолютной величине. Их алгебраическая сумма, равная  $\rho_0 t$ , становится все меньше сравнительно с импульсом каждой из упомянутых областей, она отлична от нуля только за счет отличия движения от автомодельного.

Рассмотрим теперь энергию  $\mathcal{E}$ , приходящуюся на единицу площади границы, в любой области  $x_1(t) = \xi_1 A t^\alpha \leq x \leq x_f(t)$ , в которой движение стало близким к автомодельному начиная с некоторого момента времени:

$$\mathcal{E} = \int_{x_1}^{x_f} \rho \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1) \rho} \right) dx = \rho_0 A^3 t^{3\alpha-2} \int_{\xi_1}^1 R \left( \frac{V^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1) R} \right) \xi^2 d\xi. \quad (4.52)$$

Как видно, энергия  $\mathcal{E}$  с ростом  $t$  стремится к нулю, так что вклад автомодельной области в суммарную энергию становится со временем все меньшим и основной вклад в энергию определяется движением вблизи свободной границы, где оно всегда остается неавтомодельным, сколько бы времени ни прошло с начала движения.

#### 4.10. Задача о взрыве на плоской границе раздела — промежуточные асимптотики

Рассматриваемое здесь движение отличается от движения газа при коротком ударе (п. 4.6) только тем, что в полупространстве слева от непроницаемой стенки не вакуум; оно заполнено тем же газом. Предполагается при этом, что плотность  $\rho_1$  газа во всем левом полупространстве  $x < 0$  в начальный момент постоянна и много меньше плотности  $\rho_0$  газа справа, а давление газа и слева, и справа равно нулю.

Очевидно, что асимптотикой при достаточно больших временах решения этой задачи должно быть решение задачи о мгновенном сосредоточенном взрыве на границе двух полупространств, заполненных газом различной плотности, находящимся под нулевым давлением. Последнее представляет собой автомодельное решение первого рода, оно было построено Р. И. Нигматулиным [77] комбинацией решений обычных симметричных задач о «плоском» сильном взрыве, изученных Л. И. Седовым [96, 97], отвечающих начальным плотностям газа  $\rho_0$  и  $\rho_1$  и некоторым определяемым в ходе решения задачи энергиям  $2E_1$  и  $2E_2$ .

Действительно, пусть начальная энергия, выделившаяся в результате взрыва, в расчете на единицу площади поверхности раздела составляет  $E$ . Размерность величины  $E$  равна  $MT^{-2}$ . В данном случае (ср. примечание на стр. 47) удобно записать автомодельное решение в виде

$$v = v_{f2} f(\zeta, \gamma); \quad \rho = \rho_{f2} g(\zeta, \gamma); \quad p = p_{f2} h(\zeta, \gamma), \quad (4.53)$$

где  $v_{f2}$ ,  $\rho_{f2}$ ,  $p_{f2}$  — скорость, плотность и давление газа за правой ударной волной  $x = x_{f2}$ , распространяющейся по газу высокой плотности (в положительном направлении оси  $x$ ). Далее, согласно анализу размерности,

$$\zeta = x/x_{f2}; \quad x_{f2} = \xi_0 (Et^2/\rho_0)^{1/3}, \quad (4.54)$$

где  $\xi_0$  — постоянная, зависящая только от  $\gamma$ . Для левой ударной волны, распространяющейся по газу малой плотности в отрицательном направлении оси  $x$ , получаем из анализа размерностей

$$x_{f1} = \zeta_1 x_{f2}, \quad (4.55)$$

так что фронт левой волны отвечает некоторому постоянному значению  $\zeta = \zeta_1 < 0$ . Из условий на сильных ударных волнах, идущих от места взрыва влево и вправо, имеем

$$p_{f1} = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D_1^2; \quad p_{f2} = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D_2^2, \quad (4.56)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  — скорости распространения левой и правой ударных волн:

$$D_1 = \frac{2}{3} \zeta_1 \xi_0 \left( \frac{E}{\rho_0} \right)^{1/3} \frac{1}{t^{1/3}} = \zeta_1 D_2; \quad D_2 = \frac{2}{3} \xi_0 \left( \frac{E}{\rho_0} \right)^{1/3} \frac{1}{t^{1/3}}. \quad (4.57)$$

Движение, возникающее в каждом из полупространств  $x \leq 0$ , отвечает обычному симметричному плоскому сильному взрыву с энергиями  $2E_1$  и  $2E_2$  и начальными плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_0$ . Однако при симметричном взрыве давление  $p(0, t)$  в плоскости  $x = 0$  составляет определенную часть давления на фронте, зависящую только от  $\psi$ . Это элементарно вытекает из анализа размерностей. Отсюда и из непрерывности давления при  $x = 0$  следует, что  $p_{f1} = p_{f2}$ . Из этого равенства и соотношений (4.56) — (4.57) находим

$$\zeta_1 = -\sqrt{\rho_0/\rho_1}. \quad (4.58)$$

Простой подсчет показывает также, что  $E_2/E_1 = \sqrt{\rho_1/\rho_0}$ . Таким образом, для сосредоточенного взрыва в пределе при  $\rho_1/\rho_0 \rightarrow 0$  получается, что вся энергия мгновенно уходит в пустоту.

Ясно, однако, что асимптотика, отвечающая сосредоточенному взрыву на границе полупространств, устанавливается не сразу. Действительно, как и в п. 4.6, мы приняли, что в момент  $t = \tau$  вся энергия сосредоточена в некотором слое более плотного газа, имеющем конечную толщину. С началом движения начинается перераспределение энергии между полупространствами. Естественно думать, что при малых  $\rho_1/\rho_0$  в начальный период, когда скорость распространения левой волны, идущей по менее плотному газу, много больше характерной скорости  $\sqrt{\rho_0/\rho_0}$ , движение вблизи правой волны будет близко к движению газа при коротком ударе, рассмотренному в предыдущих параграфах. Выше было показано, что это движение выходит на автомодельную асимптотику за время порядка  $\tau$ . Это хорошо подтверждает численный расчет неавтомодельной задачи с начальными условиями:

$$\begin{aligned} v &= 0; \quad \rho = \rho_1 = 0,1; \quad p = 0 \quad \text{при } x < 0; \\ v &= 0; \quad \rho = \rho_0 = 1; \quad p = 1 \quad \text{при } 0 < x < 1; \\ v &= 0; \quad \rho = \rho_0 = 1; \quad p = 0 \quad \text{при } x > 1; \end{aligned} \quad (4.59)$$

Результаты расчета представлены на рис. 4.7, на котором приводится относительное распределение давления  $p/p_{f2}$  в функции  $\zeta = x/x_{f2}$  для разных моментов времени  $t$ . Кривые I и II соответствуют автомодельным распределениям для короткого удара и сосредоточенного сильного взрыва. Как видно, существует определенный интервал времен  $t_1 < t < t_2$  (для рассчитанного примера  $t_1 = 2,5$ ;  $t_2 = 40$ ), настолько больших, чтобы движение с достаточной точностью стало автомодельным и, вместе с тем, настолько малых, чтобы влияние конечности плотности газа слева было пре-небрежимым. В этом интервале времен в области существенного изменения давления вблизи правой волны действует автомодельная промежуточная асимптотика короткого удара. При  $t > t_2$  (в рассмотренном примере  $t_3 = 100$ ) область существенного изменения давления описывается автомодельной промежуточной асим-

птиотикой сильного взрыва, пока не начинает сказываться (ср. главу 2) начальное давление невозмущенного газа.

Анализ промежуточных асимптотик в задаче о взрыве вблизи границы раздела, изложенный выше, и численные эксперименты

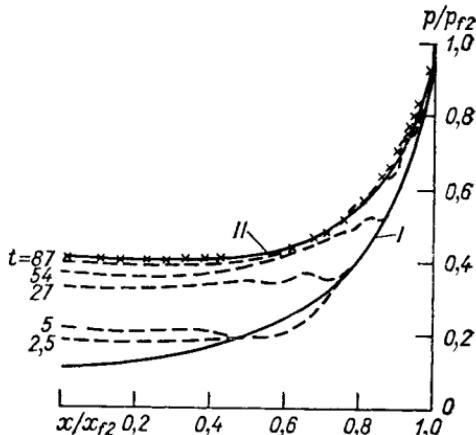


Рис. 4.7. Решение задачи о взрыве на границе раздела выходит на промежуточные асимптотики сначала короткого удара (I), потом сильного взрыва (II).

Крестики соответствуют  $t=100$ .

были проведены И. О. Власовым, А. И. Державиной и О. С. Рыжовым [31]. В. П. Пархоменко, С. П. Поповым и О. С. Рыжовым [83, 84] был проведен соответствующий анализ и для задач с осевой и сферической симметрией. Вместо решения типа короткого удара, которого для таких симметрий не существует, в этих задачах появляются другие промежуточные асимптотики — автомодельные решения второго рода, отвечающие течениям со стоками переменной интенсивности на оси или в центре симметрии.

## Глава 5

# КЛАССИФИКАЦИЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ И АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

## 5.1. Полная и неполная автомодельность

В главах 2—4 было рассмотрено несколько показательных и принципиально различных автомодельных задач. В задачах о распространении сильных тепловых и сильных взрывных волн и в задаче о мгновенном точечном тепловом источнике ситуация оказалась относительно простой. Для этих задач существует некоторая предельно схематизированная вырожденная постановка (выделение энергии в точке, равенство нулю начальных температуры и давления). Оказалось, что, рассматривая эту постановку задачи и

стандартным образом применяя к ней процедуру анализа размерностей, можно обнаружить автомодельность решения, выяснить строение автомодельных переменных и благодаря наличию некоторого интеграла получить решение в конечном виде:

Более глубокое рассмотрение показывает, однако, что эта простота иллюзорна, и, например, делая предположение о точечном выделении энергии, мы, что называется, ходили по краю пропасти. Действительно, слегка, на первый взгляд, изменив постановки задач и притом так, что, казалось бы, все те же соображения подобия должны сохранить силу, мы пришли к противоречию. Как оказалось, в модифицированных задачах нужных нам решений просто не существует. Более детальный анализ показал, что при попытке поиска решений модифицированных задач тем же стандартным способом исходя из формулировки вырожденной задачи оказалась неправильной сама постановка вопроса. На самом деле нам были нужны не точные решения упрощенно сформулированных вырожденных задач, соответствующих мгновенному отбору в точке конечной массы жидкости или мгновенному выделению в точке конечной порции энергии. Нас интересуют асимптотики решений невырожденных задач при больших временах. Мы применили анализ размерности к невырожденным задачам, существование и единственность решений которых либо строго доказаны, либо не вызывали сомнений; невырожденные задачи, естественно, перестали быть автомодельными.

Предельный переход при стремлении к нулю дополнительного параметра, делавшего задачи неавтомодельными, оказался в модифицированных задачах нерегулярным: в одном случае предел получился равным нулю или бесконечности в зависимости от условий задачи, в другом случае выяснилось, что его просто не существует. Тем не менее оказалось, что в обоих случаях осмысленные промежуточные асимптотики существуют и, более того, они автомодельны. Выяснилось, что именно эти асимптотики и есть то, что нам на самом деле нужно. Оказывается, отбор массы при фильтрации в упругопластической пористой среде и выделение энергии при сильном взрыве с притоком или потерями энергии на фронте нельзя считать точечными. Уменьшая размер области, где происходит первоначальное выделение энергии или отбор массы жидкости, необходимо для получения правильной асимптотики решения исходной невырожденной задачи при больших временах соответствующим образом увеличивать или уменьшать отбираемую массу или выделяемую энергию так, чтобы был постоянным некоторый «момент» начального распределения массы или энергии. Существенно, что степень, в которой длина входит в выражение этого момента, заранее не задана, и ее принципиально нельзя определить из соображений размерности, а нужно найти в ходе решения задачи определения автомодельной асимптотики. Таким образом, мы столкнулись с существованием автомодельных решений двух типов.

Могло показаться, что различие типов автомодельных решений связано с наличием или отсутствием интегрального закона сохранения, справедливого и на неавтомодельной стадии. Рассмотренная в главе 4 задача о коротком ударе показала, что это не так — дело в характере предельного перехода от неавтомодельного решения к автомодельной асимптотике.

Дадим теперь формальную классификацию автомодельных зависимостей, и в частности автомодельных решений задач математической физики. Напомним (см. главу 1), что, согласно анализу размерностей ( $\Pi$ -теореме), любая зависимость между  $n+1$  размерной величиной вида

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (5.1)$$

может быть представлена в виде

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (5.2)$$

где параметры  $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$  безразмерны:

$$\Pi = \frac{a}{a_1^p \dots a_k^r}, \quad \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}}, \dots, \quad \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{p_n} \dots a_k^{r_n}}. \quad (5.3)$$

Здесь предполагается, что определяющие параметры  $a_1, \dots, a_k$  имеют независимые размерности и размерности остальных определяющих параметров  $a_{k+1}, \dots, a_n$  выражаются через размерности параметров  $a_1, \dots, a_k$ .

Рассмотрим теперь некоторый определяющий параметр  $a_{k+i}$ . В традиционных рассуждениях «на физическом уровне» параметр считается существенным, т. е. на самом деле определяющим явление, если соответствующий безразмерный определяющий параметр  $\Pi_i$  не слишком велик и не слишком мал, скажем, сугубо условно, лежит между одной десятой и десятью. В противном случае считается возможным влиянием этого параметра пренебречь.

Такое рассуждение действительно справедливо, если существует конечный отличный от нуля предел функции  $\Phi$  в соотношении (5.2) при стремлении параметра  $\Pi_i$  к нулю или бесконечности и постоянных остальных параметрах подобия. Это, вообще говоря, совершенно необязательно. На самом деле для справедливости приведенного рассуждения требуется даже нечто большее: функция  $\Phi$  должна достаточно быстро стремиться к пределу при  $\Pi_i$ , стремящемся к нулю или бесконечности, чтобы при  $\Pi_i < 0,1$  или  $\Pi_i > 10$  эта функция принимала значения, достаточно близкие к предельным. Если все эти условия действительно выполнены, то при достаточно малых или достаточно больших  $\Pi_i$  функцию  $\Phi$  в (5.2) можно с нужной точностью заменить функцией на единицу меньшего числа аргументов:

$$\Pi = \Phi_0(\underbrace{\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{n-k}}_{n-k-1 \text{ аргумент}}, \quad (5.4)$$

где  $\Phi_0(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{n-k})$  — предел функции  $\Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_i, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{n-k})$  при  $\Pi_i$ , стремящемся к нулю (бесконечности). В таких случаях говорят о *полной автомодельности*<sup>1</sup> явления по параметру  $\Pi_i$ .

Однако в общем случае функция  $\Phi$  при возрастании или убывании параметра подобия  $\Pi_i$ , очевидно, не обязательно стремится к пределу и притом конечному и отличному от нуля, так что, вообще говоря, параметр  $a_{k+i}$  может оставаться существенным, как бы мал или велик ни был соответствующий безразмерный параметр  $\Pi_i$ .

Пусть, например, при  $\Pi_i \rightarrow 0$  или  $\Pi_i \rightarrow \infty$  функция  $\Phi$  стремится к нулю или бесконечности. Разумеется, в этом случае величина  $\Pi_i$  остается существенной, как бы мала или велика она ни была: замена функции  $\Phi$  в (5.2) ее предельным значением при  $\Pi_i \rightarrow 0, \infty$  приведет к бессодержательному соотношению  $\Pi = 0$  или  $\Pi = \infty$ . Следовательно, вообще говоря, просто выбросить параметр  $\Pi_i$  из числа определяющих и заменить в (5.1) и (5.2) функции  $f$  и  $\Phi$  функциями на единицу меньшего числа аргументов в этом случае нельзя: полной автомодельности по параметру  $\Pi_i$  нет. Тем не менее и здесь существует ситуация, когда уменьшить число аргументов и получить соотношение вида (5.4) можно. Именно, предположим, что для рассматриваемой зависимости существует такое число  $\alpha$ , что при  $\Pi_i \rightarrow 0$  или  $\Pi_i \rightarrow \infty$  справедливо степенное асимптотическое представление функции  $\Phi$ :

$$\Phi = \Pi_i^\alpha \Phi_1(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{n-k}) + o(\Pi_i^\alpha), \quad (5.5)$$

где функция  $\Phi_1$  снова зависит от  $n - k - 1$  аргументов, а второе слагаемое как угодно мало по сравнению с первым при достаточно малых (больших)  $\Pi_i$ . В этом случае при достаточно малых (больших)  $\Pi_i$  с необходимой точностью справедливо соотношение вида (5.4):

$$\Pi^* = \underbrace{\Phi_1(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{n-k})}_{n - k - 1 \text{ аргумент}}, \quad (5.6)$$

где безразмерный параметр  $\Pi^*$  определяется соотношением

$$\Pi^* = \Pi \Pi_i^{-\alpha} = a/a_1^{p-\alpha p_{k+i}} \dots a_k^{r-\alpha r_{k+i}} a_{k+i}^\alpha. \quad (5.7)$$

Таким образом, в этом случае зависимость (5.1) снова записывается через функцию  $n - k - 1$  аргумента, как и в случае полной автомодельности. Однако, во-первых, вид безразмерного параметра  $\Pi^*$  уже не может быть получен из соображений анализа размерностей, поскольку величина  $\alpha$  этими соображениями не определяется. Во-вторых, в параметр  $\Pi^*$  входит аргумент  $a_{k+i}$ , который, таким образом, не перестает быть существенным.

<sup>1</sup> Первоначально введенное А. А. Гухманом еще в 1928 г. [35] понятие автомодельности отвечает по принятой здесь терминологии полной автомодельности по параметру.

Далее, пусть малыми или большими являются два безразмерных параметра подобия  $\Pi_i$  и  $\Pi_j$ . Пусть при этом для рассматриваемой зависимости при  $\Pi_i$  и  $\Pi_j$ , независимо стремящихся к нулю или бесконечности, функция  $\Phi$  стремится к нулю или бесконечности либо вообще ни к какому пределу не стремится. В этом случае, так же как и в предыдущем, параметры  $\Pi_i$  и  $\Pi_j$  остаются существенными, как бы малы или велики они не были, а следовательно, остаются существенными и соответствующие размерные параметры  $a_{k+i}$  и  $a_{k+j}$ . Имеется, однако, и здесь исключительный случай, когда число аргументов функции в (5.2) сокращается и получается соотношение вида (5.4). В самом деле, пусть существуют такие числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что при  $\Pi_i, \Pi_j$ , стремящихся к нулю или бесконечности, функция  $\Phi$  имеет степенное асимптотическое представление:

$$\Phi = \Pi_i^\alpha \Phi_2(\Pi_j/\Pi_i^\beta, \Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{j-1}, \Pi_{j+1}, \dots, \Pi_{n-k}) + o(\Pi_i^\alpha), \quad (5.8)$$

где последнее слагаемое как угодно мало по сравнению с первым при достаточно малых (больших)  $\Pi_i, \Pi_j$ . В этом случае при достаточно малых (больших)  $\Pi_i, \Pi_j$  справедливо соотношение вида (5.4)

$$\Pi^* = \Phi_2(\underbrace{\Pi^{**}, \Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{j-1}, \Pi_{j+1}, \dots, \Pi_{n-k}}_{n-k-1 \text{ аргумент}}, \quad (5.9)$$

где  $\Pi^*$  по-прежнему определяется соотношением (5.7), а безразмерный параметр  $\Pi^{**}$  — соотношением

$$\Pi^{**} = \Pi_j \Pi_i^{-\beta} = a_{k+j}/a_1^{p_{k+j}-\beta p_{k+i}} \dots a_k^{r_{k+j}-\beta r_{k+i}} a_{k+i}^\beta. \quad (5.10)$$

В этом случае точно так же, как и в случае полной автомодельности, зависимость (5.1) записывается через функцию  $n-k-1$  аргументов, но уже форма двух безразмерных параметров  $\Pi^*$  и  $\Pi^{**}$  не может быть получена из соображений анализа размерности, поскольку эти соображения принципиально не могут дать величин  $\alpha$  и  $\beta$ . Кроме того, в параметр  $\Pi^*$  входит аргумент  $a_{k+i}$ , а в параметр  $\Pi^{**}$  — оба аргумента  $a_{k+j}, a_{k+i}$ , которые, таким образом, не перестают быть существенными. Аналогичные подклассы можно выделить, когда стремятся к нулю или бесконечности три и более безразмерных определяющих параметра. Таким образом, в указанных исключительных случаях, несмотря на то что полной автомодельности по параметрам подобия  $\Pi_i, \Pi_j, \dots$  нет и определяющие параметры  $a_{k+i}, a_{k+j}, \dots$  остаются существенными, как бы малы или велики ни были эти параметры подобия, происходит уменьшение количества аргументов функции  $\Phi$ , определяющей интересующую нас зависимость; при этом получается такое же, как в случае полной автомодельности, соотношение вида (5.4).

Мы будем говорить в подобных случаях о *неполной автомодельности* явления по параметрам  $\Pi_i, \Pi_j, \dots$

Таким образом, мы приходим к весьма естественному выводу. Если значения некоторых безразмерных параметров подобия малы или велики, то осуществляется одна из трех возможностей.

1. При  $\Pi_i \rightarrow 0, \infty$  пределы соответствующих функций  $\Phi$  существуют, конечны и отличны от нуля. Соответствующие определяющие параметры: размерные  $a_{k+i}$  и безразмерные  $\Pi_i$  — могут быть исключены из рассмотрения; число аргументов функции  $\Phi$  уменьшается. Все параметры подобия могут быть определены при помощи регулярной процедуры анализа размерности. Этот случай отвечает полной автомодельности явления по параметрам подобия  $\Pi_i$ .<sup>1</sup>

2. При  $\Pi_i, \Pi_j, \dots \rightarrow 0, \infty$  конечных пределов функций  $\Phi$  не существует, но имеет место один из исключительных случаев, указанных выше: функции  $\Phi$  имеют степенное асимптотическое представление.<sup>2</sup> В этом случае уменьшение числа аргументов функций  $\Phi$  тоже имеет место, но не все параметры  $\Pi, \Pi_i, \dots$  можно получить из анализа размерности и определяющие параметры  $a_{k+i} \dots$  остаются существенными, как бы малы (велики) ни были соответствующие параметры подобия. Этот случай отвечает неполной автомодельности явления по параметрам подобия  $\Pi_i, \Pi_j, \dots$ .

3. При  $\Pi_i \rightarrow 0, \infty$  конечных пределов функций  $\Phi$  не существует, и указанные исключения не имеют места. Этот случай соответствует неавтомодельности явления по параметрам подобия  $\Pi_i$ . Уже было отмечено, что как бы велики (малы) ни были значения параметров  $\Pi_i$ , в этом случае не получается соотношение вида (5.4) между степенными комбинациями определяемых и определяющих параметров с меньшим числом аргументов функции  $\Phi$ . Целесообразно выделить специальный случай, когда при больших (малых) значениях параметров  $\Pi_i$  один из них «отделяется», хотя и не степенным образом. Это значит, что при таких значениях параметров подобия функция  $\Phi$  представляется в виде

$$\Phi = \Psi(\Pi_i) \Phi_3 + \text{малая величина},$$

где  $\Psi$  — функция аргумента  $\Pi_i$ , отличная от степенной, например  $\lg \Pi_i$ , а число аргументов функции  $\Phi_3$  меньше  $n - k$ .

<sup>1</sup> Напомним, что автомодельными называются явления, для которых распределения характеристик в разные моменты времени получаются одно из другого преобразованием подобия. Это понятие не следует смешивать с понятием автомодельности по параметру подобия.

<sup>2</sup> Может возникнуть вопрос, почему в качестве исключений рассматриваются только асимптотические представления степенного вида (5.5) и (5.8) и нельзя ли вынести перед функцией  $\Phi$  другую функцию  $\Pi_i$ , например  $\lg \Pi_i$ . На самом деле при этом уже не получается соотношения между степенными комбинациями определяемых и определяющих параметров вида (5.4) с меньшим числом аргументов. Величины  $\Pi, \Pi_i, \Pi_j$  представляют собой степенные комбинации размерных определяющих параметров, и только произведения их степеней при перемножении дают степенные комбинации того же вида.

Трудность заключается в том, что мы априори, до получения неавтомодельного решения полной невырожденной задачи<sup>1</sup>, не знаем с каким случаем мы имеем дело независимо от того, имеется ли явная математическая формулировка проблемы или нет. Поэтому на практике можно рекомендовать лишь последовательно предполагать возможные ситуации при малых (больших) величинах параметров подобия: полную автомодельность, неполную автомодельность, неавтомодельность — и сравнивать соотношения, полученные при том или ином предположении, с данными численного счета, эксперимента или результатами аналитического исследования.

## 5.2. Автомодельные решения первого и второго рода

Рассмотрим теперь некоторую задачу математической физики, описывающую то или иное явление и имеющую единственное решение. Пусть величины  $a$  представляют собой в этой задаче неизвестные, величины  $a_1, \dots, a_n$  — независимые переменные и параметры, входящие в уравнения, граничные, начальные и другие условия, выделяющие единственное решение.

Автомодельные решения представляют собой всегда решения вырожденных задач, которые получаются, если некоторые параметры  $a_{k+i}$  и соответствующие им безразмерные параметры  $\Pi_i$  принимают нулевые или бесконечные значения. Они представляют собой одновременно точные решения вырожденных задач и асимптотические (вообще говоря, промежуточно-асимптотические) представления решений более широких классов невырожденных неавтомодельных задач при стремлении указанных параметров к нулю или бесконечности.

Ясно, что если асимптотики автомодельны и автомодельные переменные — степенные одночлены, то обязательно имеет место один из двух первых случаев сформулированной в п. 5.1 альтернативы. В зависимости от того, какой из первых двух случаев альтернативы имеет место для данной автомодельности, автомодельные решения делятся на решения первого и второго рода.

Автомодельные решения первого рода получаются, когда предельный переход от неавтомодельной невырожденной задачи к автомодельной вырожденной задаче регулярен в том смысле, что имеет место полная автомодельность по параметрам подобия, делавшим задачу невырожденной и ее решение неавтомодельным. Выражения для всех автомодельных переменных, как зависимых, так и независимых, могут быть при этом получены применением анализа размерности.

Автомодельные решения второго рода получаются в случае, когда вырождение исходной задачи нерегулярно, но имеет место

<sup>1</sup> Этого, как правило, не случается. Если решение полной задачи известно, применять методы подобия незачем.

неполная автомодельность по указанным выше параметрам подобия. Выражения для автомодельных переменных при этом, вообще говоря, не могут быть получены из соображений размерности.

Итак, если для данной постановки задачи математической физики в целом (начальной, краевой, смешанной и т. п.) существуют автомодельные решения со степенными автомодельными переменными, они получаются из неавтомодельных решений предельным переходом при стремлении некоторого параметра (параметров), делающего решение неавтомодельным, к нулю или бесконечности. Если этот предельный переход дает конечный предел, отличный от нуля, то автомодельное решение называется решением первого рода. Если конечного отличного от нуля предела не существует, но по указанному параметру (параметрам), стремящемуся к нулю (бесконечности), имеется степенная асимптотика, которая и обеспечивает автомодельность предельного решения, то автомодельное решение называется решением второго рода.

Существуют также автомодельные решения нестепенного типа, для которых автомодельные переменные уже не представляют собой степенные одночлены. Эти решения обязаны своим существованием специальному случаю, указанному в п. 5.3. Показательным примером таких решений служат предельные автомодельные решения, которые будут рассмотрены в главе 7.

При непосредственном построении автомодельных решений второго рода определение показателей степени в автомодельных переменных приводит к нелинейной задаче на собственные значения. Постоянный множитель  $A$ , входящий в автомодельные переменные, при непосредственном построении автомодельных решений второго рода не определяется. Константу  $A$  можно найти, проследив, например, при помощи численных расчетов, процесс эволюции решения невырожденной задачи к автомодельной асимптотике.

Если константу  $A$  можно найти из интегральных законов сохранения, то это означает, что при надлежащем выборе определяющих параметров задачу можно переформулировать и привести к задаче первого рода. Например, классические задачи о тепловом источнике и сильном взрыве можно представить как автомодельные решения второго рода, если «неудачно» выбрать определяющие параметры невырожденной, доавтомодельной задачи. Возможность получения решений этих задач как автомодельных решений первого рода связана с выбором в качестве определяющих параметров энергии взрыва и суммарного тепла, которые в силу соответствующих интегральных законов сохранения не меняются во времени.

Примером автомодельных решений первого рода являются рассмотренные в главе 2 решения задач о распространении сильных тепловых и сильных взрывных волн и задачи о мгновенном тепловом источнике.

Действительно, вернемся к решению задачи о мгновенном точечном тепловом источнике — автомодельному решению уравнения

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u \quad (5.11)$$

при условиях

$$u(x, 0) \equiv 0 \text{ при } x \neq 0; \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = Q; \quad u(\infty, t) = 0. \quad (5.12)$$

Если перейти от вырожденных условий (5.12), соответствующих сосредоточению в начальный момент конечной порции тепла в точке, к условиям

$$u(x, 0) = \frac{Q}{l} u_0\left(\frac{x}{l}\right); \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\zeta) d\zeta = 1; \quad u(\infty, t) = 0 \quad (5.13)$$

( $u_0(\zeta)$  — монотонно быстро убывающая с ростом абсолютного значения аргумента четная функция), отвечающим сосредоточению в начальный момент той же порции тепла в области конечного размера  $l$ , то решение перестает быть автомодельным. Для него анализ размерности дает

$$u = f(t, \kappa, Q, l, x); \quad \Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2), \quad (5.14)$$

где безразмерные параметры  $\Pi$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  определяются соотношениями

$$\Pi = u \sqrt{\kappa t}/Q; \quad \Pi_1 = x/\sqrt{\kappa t}; \quad \Pi_2 = l/\sqrt{\kappa t}.$$

При стремлении  $\Pi_2$  к нулю, т. е. стремлении  $t$  к бесконечности, или, что то же самое, стягивании в точку области начального сосредоточения тепла ( $l \rightarrow 0$ ), функция  $\Phi$  стремится к конечному пределу. В самом деле, приводя к безразмерному виду известные соотношения математической теории теплопроводности [85, 119], легко показать, что

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\zeta) e^{-(\Pi_1 - \Pi_2 \zeta)^2/4} d\zeta.$$

При  $\Pi_2 \rightarrow 0$  функция  $\Phi$  стремится к конечному пределу, равному  $\exp(-\Pi_1^2/4)/2\sqrt{\pi} = \Phi(\Pi_1, 0)$ . Поэтому автомодельность по параметру  $\Pi_2$ , делающему задачу невырожденной, полная, и при достаточно малых  $\Pi_2$  можно с любой заданной точностью заменить функцию  $\Phi$  в (5.14) на  $\Phi(\Pi_1, 0) = \Phi_0(\Pi_1)$ . Однако функция  $\Phi_0$  отвечает решению вырожденной задачи, которое уже автомодельно.

Полная автомодельность дает возможность не только получить выражения для автомодельных переменных, как это было продемонстрировано в главе 2, но и указать содержательные законы

подобия. В самом деле, пусть мы хотим определить закон затухания максимума температуры. Максимум температуры достигается, очевидно, при  $x = 0$ , так что для вырожденной задачи (тепло в начальный момент сосредоточено в точке  $x = 0$ ) находим

$$u_{\max} = f(t, \kappa, Q); \quad \Pi_{\max} = u_{\max} \sqrt{\kappa t}/Q = \text{const}, \quad (5.15)$$

откуда

$$u_{\max} = \text{const } Q/\sqrt{\kappa t}. \quad (5.16)$$

Такое рассуждение в данном случае обоснованно, потому что для невырожденной задачи

$$u_{\max} = f(t, \kappa, Q, l); \quad \Pi_{\max} = \Phi_{\max}(\Pi_2) = \Phi(0, \Pi_2), \quad (5.17)$$

а при  $\Pi_2 \rightarrow 0$  функция  $\Phi_{\max}$  стремится к конечному пределу, равному  $1/2\sqrt{\pi}$ .

Вполне аналогично обстоит дело и в случае сильных тепловых и сильных взрывных волн. Так, переходя в задаче о сильных взрывных волнах от вырожденной постановки задачи, отвечающей выделению энергии в точке, к невырожденной постановке задаче, отвечающей выделению энергии в сфере конечного радиуса  $R_0$ , получаем для давления, плотности, скорости и радиуса ударной волны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p &= (E^2 \rho_0^3 / t^6)^{1/5} \Phi_p(\Pi_1, \Pi_2); \quad \Pi_1 = r / (Et^2 / \rho_0)^{1/5}; \\ \Pi_2 &= R_0 / (Et^2 / \rho_0)^{1/5}; \quad \rho = \rho_0 \Phi_p(\Pi_1, \Pi_2); \\ v &= (Et^{-3} / \rho_0)^{1/5} \Phi_v(\Pi_1, \Pi_2); \quad r_f = (Et^2 / \rho_0)^{1/5} \Phi_f(\Pi_2). \end{aligned} \quad (5.18)$$

При стремлении к нулю  $\Pi_2$ , т. е. стягивании в точку области начального выделения энергии, все функции  $\Phi_p$ ,  $\Phi_\rho$ ,  $\Phi_v$ ,  $\Phi_f$  стремятся к конечному отличному от нуля пределу. (Аналитически это обстоятельство никем не доказано, но проверено численным счетом и сомнений не вызывает.) Таким образом, автомодельность по параметру  $\Pi_2$ , из-за которого задача стала невырожденной, полная и при достаточно малых  $\Pi_2$  с любой заданной точностью можно заменить функции  $\Phi_p$ ,  $\Phi_\rho$ ,  $\Phi_v$  в (5.18) соответственно на  $\Phi_p(\Pi_1, 0) = \Phi_{p0}(\Pi_1)$ ;  $\Phi_\rho(\Pi_1, 0) = \Phi_{\rho0}(\Pi_1)$ ;  $\Phi_v(\Pi_1, 0) = \Phi_{v0}(\Pi_1)$ , а функцию  $\Phi_f(\Pi_2)$  на константу  $C = \Phi_f(0)$ . Однако функции  $\Phi_{p0}$ ,  $\Phi_{\rho0}$ ,  $\Phi_{v0}$  и константа пропорциональности  $C$  в формуле для радиуса ударной волны отвечают автомодельному решению вырожденной задачи (см. главу 2).

Полная автомодельность и в этом случае позволяет получить содержательные законы подобия, например, для характеристик движения на фронте:

$$\begin{aligned} p_f &= \text{const}_1 \left( \frac{E^2 \rho_0^3}{t^6} \right)^{1/5}; \quad v_f = \text{const}_2 \left( \frac{Et^{-3}}{\rho_0} \right)^{1/5}; \\ r_f &= \text{const}_3 \left( \frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Примером автомодельных решений второго рода являются рассмотренные в главах 3 и 4 решения модифицированных задач о мгновенном тепловом источнике и сильном взрыве и задачи о коротком ударе.

В самом деле, решение модифицированной задачи о мгновенном тепловом источнике представляет собой автомодельную асимптотику при больших временах решения задачи с теми же начальными условиями (5.13), но уже для модифицированного уравнения:

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \geq 0; \quad \partial_t u = \kappa_1 \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \leq 0, \quad (5.20)$$

которое при  $\kappa_1 \neq \kappa$  нелинейно. Для этого решения анализ размерностей дает:

$$u = f(t, Q, \kappa, x, l, \kappa_1); \quad \Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3), \quad (5.21)$$

где

$$\Pi_1 = x/\sqrt{\kappa t}; \quad \Pi_2 = l/\sqrt{\kappa t}; \quad \Pi_3 = \kappa_1/\kappa; \quad \Pi = u \sqrt{\kappa t}/Q.$$

Разница в общем случае  $\kappa_1 \neq \kappa$ ,  $\Pi_3 \neq 1$  по сравнению с классическим случаем  $\kappa_1 = \kappa$ ,  $\Pi_3 = 1$  состоит в том, что при  $\Pi_3 \neq 1$  и  $\Pi_2 \rightarrow 0$  функция  $\Phi$  в (5.21) уже не стремится к конечному отличному от нуля пределу, но стремится к нулю или бесконечности в зависимости от того, больше или меньше единицы параметр подобия  $\Pi_3$ .

При этом имеет место первый тип неполной автомодельности по параметру: при  $\Pi_2 \rightarrow 0$  для функции  $\Phi$  справедлива степенная асимптотика:

$$\Phi = \Pi_2^\alpha \Phi_1(\Pi_1, \Pi_3),$$

где  $\alpha$  — некоторое число, зависящее от  $\Pi_3$ , равное нулю при  $\Pi_3 = 1$ , положительное при  $\Pi_3 > 1$  и отрицательное при  $\Pi_3 < 1$ .

В согласии со сказанным выше, при малых  $\Pi_2$  соотношение (5.21) записывается в автомодельном виде

$$\Pi^* = \Phi_1(\Pi_1, \Pi_3); \quad \Pi^* = u (\kappa t)^{(1+\alpha)/2} / Q l^\alpha, \quad (5.22)$$

но зависимая автомодельная переменная  $\Pi^*$  уже не может быть найдена из соображений размерности: постоянная  $\alpha$  находится решением нелинейной задачи на собственные значения, а все решение находится с точностью до постоянной. Кроме того, в эту автомодельную переменную явно входит размер  $l$ , делающий исходную задачу неавтомодельной. Из (5.22) получаем, в частности, закон затухания максимума величины  $u$ :

$$\Pi_{\max}^* = \Phi_1(0, \Pi_3) = F(\Pi_3); \quad u_{\max} = Q l^\alpha F(\Pi_3) / (\kappa t)^{(1+\alpha)/2}. \quad (5.23)$$

Существенно, что хотя этот закон и имеет степенную форму, его нельзя получить с помощью анализа размерностей. Дело в том, что закон затухания величины  $\eta_{\max}$  определяется размерностью постоянной  $Ql^\alpha$ . Эта размерность заранее неизвестна и определяется после построения автомодельного решения в целом, т. е. из решения нелинейной задачи на собственные значения. Однако, поскольку мы в данном случае имеем дело с неполной автомодельностью первого типа, независимая автомодельная переменная — в данном случае  $\Pi_1$  — находится из анализа размерностей. Следовательно, в частности, для закона распространения «волны разгрузки» — границы областей с разными  $\chi$  — получается закон подобия

$$x_0(t) = \xi_0(\Pi_3) \sqrt{\chi t}, \quad (5.24)$$

который может быть установлен из соображений размерности.

Обратимся к модифицированной задаче о сильных взрывных волнах. Искомое автомодельное решение представляет собой автомодельную асимптотику при больших временах решения уравнений адиабатического движения газа с показателем адиабаты  $\gamma$  при условиях на фронте сильной ударной волны, в которых фигурирует эффективный показатель адиабаты  $\gamma_1 \neq \gamma$ , и начальных условиях, соответствующих выделению в начальный момент энергии  $E$  в сфере радиусом  $R_0$ .

Применение анализа размерности к этой невырожденной задаче снова приводит нас к соотношениям (5.18), причем подразумевается, что в числе аргументов функций  $\Phi_p$ ,  $\Phi_\rho$ ,  $\Phi_v$  и  $\Phi_f$  фигурируют также постоянные параметры  $\Pi_3 = \gamma$ ,  $\Pi_4 = \gamma_1$ .

Однако в случае  $\gamma_1 \neq \gamma$  полной автомодельности по параметру подобия  $\Pi_2$ , делающему задачу невырожденной, при  $\Pi_2 \rightarrow 0$  нет: функции  $\Phi_p$ ,  $\Phi_\rho$ ,  $\Phi_v$  и  $\Phi_f$  не стремятся к конечным и отличным от нуля пределам. При этом функции  $\Phi_p$ ,  $\Phi_v$ ,  $\Phi_f$  при  $\Pi_2 \rightarrow 0$  стремятся к нулю или бесконечности, в зависимости от того, меньше или больше  $\gamma_1$ , чем  $\gamma$ , а функция  $\Phi_\rho$  вообще ни к какому пределу не стремится. В действительности здесь имеет место неполная автомодельность второго типа: при  $\Pi_1 \rightarrow 0$ ,  $\Pi_2 \rightarrow 0$  для функций  $\Phi_p$ ,  $\Phi_\rho$ ,  $\Phi_v$  и  $\Phi_f$  имеют место степенные асимптотики

$$\Phi_p = \Pi_2^{2\beta} \Phi_{p2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2^\beta} \right); \quad \Phi_\rho = \Phi_{\rho2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2^\beta} \right);$$

$$\Phi_v = \Pi_2^\beta \Phi_{v2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2^\beta} \right); \quad \Phi_f = \text{const} \Pi_2^\beta. \quad (5.25)$$

Следовательно, в согласии со сказанным выше, при малых  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  соотношение (5.18) снова записывается в автомодельном виде

$$\Pi_p^* = \Phi_{p2}(\Pi^{**}); \quad \Pi_\rho^* = \Phi_{\rho2}(\Pi^{**}); \quad \Pi_v^* = \Phi_{v2}(\Pi^{**}); \quad \Pi_f^* = \text{const}, \quad (5.26)$$

где безразмерные параметры  $\Pi_p^*$ ,  $\Pi_\rho^*$ ,  $\Pi_v^*$ ,  $\Pi_f^*$  и  $\Pi^{**}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\Pi_p^* &= \frac{p}{(E^2 \rho_0^3 / t^6)^{1/5} \Pi_2^{2\beta}}; & \Pi_\rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0}; & \Pi_v^* &= \frac{v}{(E/\rho_0 t^3)^{1/5} \Pi_2^\beta}; \\ \Pi_f^* &= \frac{r_f}{(Et^2/\rho_0)^{1/5} \Pi_2^\beta}; & \Pi^{**} &= \frac{\Pi_1}{\Pi_2^\beta} = -\frac{r}{(Et^2/\rho_0)^{(1-\beta)/5} R_0^\beta}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Однако уже не только зависимые автомодельные переменные  $\Pi_p^*$ ,  $\Pi_v^*$ ,  $\Pi_t^*$ , но и независимую автомодельную переменную нельзя определить из соображений размерности, так как постоянная  $\beta$  заранее неизвестна и находится из решения нелинейной задачи на собственные значения. Кроме того, во все автомодельные переменные явно входит радиус сферы  $R_0$ , в которой произошло выделение энергии в начальный момент. Из соотношений (5.26) получаются законы подобия для давления и скорости на фронте ударной волны и радиуса ударной волны:

$$\begin{aligned}p_f &= \text{const}_1 (E/\rho_0)^\alpha R_0^{2\beta} t^{-2(1-\alpha)}; & \alpha &= 2(1-\beta)/5; \\ v_f &= \text{const}_2 (E/\rho_0)^{\alpha/2} R_0^\beta t^{-(1-\alpha)}; & r_f &= \text{const}_3 (Et^2/\rho_0)^{\alpha/2} R_0^\beta. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Как видно, несмотря на то что эти законы имеют степенной вид, их нельзя получить из анализа размерностей. Дело в том, что размерность константы  $A = \sigma E R_0^{5\beta/(1-\beta)}$ , которая определяет эти законы подобия может быть найдена только после решения нелинейной задачи на собственные значения, к которой сводится построение автомодельного решения в целом.

Рассмотренные примеры показательны. Обращаясь к решению некоторой задачи, и в частности к отысканию ее автомодельных решений, мы не знаем заранее, к какому типу принадлежат решения соответствующих ей вырожденных задач. Сопоставление рассмотренных выше обычных и модифицированных постановок задачи показывает, что ситуация может быть довольно коварной: с точки зрения возможности применения анализа размерностей эти задачи внешне никак не различаются. В связи с этим, например, весьма соблазнительно начать с получения законов подобия, не обращаясь к решению уравнений. Рассуждая как обычно, мы и в модифицированных задачах могли бы предположить, что поскольку начальный отбор массы или выделение энергии происходит в малой области, размер этой области несуществен, т. е. предположить полную автомодельность по параметру подобия, отвечающему начальному размеру. Отсюда уже автоматически следуют отвечающие полной автомодельности законы подобия (5.16), (5.19). На самом же деле, как мы убедились, законы подобия здесь совсем другие, хотя тоже степенные. Таким

образом, нужно иметь в виду, что предположение о простой несущественности тех или иных параметров, делающих задачу невырожденной (в рассмотренных примерах — размеры  $l$  и  $R_0$ ), представляет собой очень сильную гипотезу. Эти определяющие параметры могут быть существенными, а автомодельность, тем не менее, иметь место. Различие возможных случаев автомодельности требует в действительности достаточно глубокого математического исследования, которое для серьезных нелинейных задач недоступно. Итак, получая автомодельные решения или законы подобия на основе анализа размерностей, следует обязательно позаботиться о проверке, хотя бы путем численного счета: действительно ли найденные решения или законы подобия отражают асимптотическое поведение решений рассматриваемой задачи. Положение неизмеримо усложняется, если математическая формулировка задачи отсутствует; в этом случае для проверки основных предположений следует обращаться к эксперименту. Рассматриваемые в последующих главах примеры подтверждают необходимость такой предосторожности.

## Глава 6

### АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

#### 6.1. Решения типа бегущих волн

В разнообразных проблемах математической физики важную роль играют инвариантные решения типа бегущих волн. Так называются решения, для которых распределения характеристик движения в разные моменты времени получаются одно из другого сдвигом, а не преобразованием подобия, как в случае автомодельных решений. Иными словами, всегда можно выбрать подвижную декартову систему координат так, что распределение характеристик движения типа бегущей волны в этой системе будет стационарно. К рассмотрению бегущих волн сводится исследование структуры фронта ударных волн в газодинамике [59, 46] и магнитной гидродинамике [60—62], структуры верхнего термоклина в океане [14, 209], структуры фронта пламени [41, 45], уединенных и периодических волн в плазме и на поверхности тяжелой жидкости [51, 145], а также многие другие задачи. В последнее время были исследованы различные процессы, включающие в себя эффекты распространения плазменных фронтов в электрических, электромагнитных, световых (лазерных) полях, так называемые волны распространения разрядов [30, 29, 87, 89]. Эти процессы также приводят к рассмотрению решений типа бегущих волн [89].

В соответствии с данным выше определением, решения типа бегущих волн представляются в виде

$$v = V(x - X(t)) + V_0(t). \quad (6.1)$$

где  $v$  — рассматриваемая характеристика явления;  $x$  — пространственная декартова координата — независимая переменная задачи;  $t$  — независимая переменная, отождествляемая со временем;  $X(t)$ ,  $V_0(t)$  — зависящие от времени сдвиги по осям  $x$  и  $v$ . В частности, если свойства процесса от времени непосредственно не зависят, так что определяющие процесс уравнения не содержат времени явно, бегущая волна распространяется равномерно:

$$v = V(x - \lambda t + c) + \mu t + v. \quad (6.2)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $c$  — постоянные, причем  $\lambda$  и  $\mu$  имеют смысл скоростей сдвига по осям  $x$  и  $v$ . Для важного класса стационарных бегущих волн скорость сдвига вдоль оси  $v$  равна нулю,  $\mu = 0$ :

$$v = V(x - \lambda t + c). \quad (6.3)$$

Именно стационарные бегущие волны описывают, в частности, структуры верхнего термоклина в океане, ударных волн и пламени.

Решения типа бегущих волн тесно связаны с автомодельными. В самом деле, положим в (6.1)

$$\begin{aligned} v &= \ln u; \quad t = \ln \tau; \quad V_0(t) = \ln u_0(\tau); \quad V = \ln U; \\ x &= \ln \xi; \quad X(t) = \ln \xi_0(\tau), \end{aligned} \quad (6.4)$$

При этом получается представление бегущей волны в автомодельном виде:

$$u = u_0(\tau) U[\xi/\xi_0(\tau)]. \quad (6.5)$$

В частности, выражение (6.2) для равномерно распространяющейся бегущей волны приводится к не раз встречавшемуся в предыдущих главах автомодельному виду со степенными автомодельными переменными:

$$u = B\tau^\mu U(\xi/A\tau^\lambda), \quad (6.6)$$

где  $A$ ,  $B$  — константы. Огченная здесь простая связь автомодельных решений и бегущих волн хорошо известна; она использовалась для упрощения исследования некоторых автомодельных решений (см., например, [100]). Удивительно, однако, что долго оставалась незамеченной связь классификации автомодельных решений, рассмотренной в предыдущей главе, с известной классификацией стационарных бегущих волн.

Действительно, как уже упоминалось, стационарные бегущие волны описывают структуры фронта ударных волн, пламени и иных подобных областей быстрого изменения плотности, скорости

и прочих характеристик движения, которые без учета диссипативных процессов описываются поверхностями разрыва. При этом различаются (см., например, [98]) два типа таких фронтов. Для одних (ударные волны в сжимаемом газе, детонационные волны и др.) скорость распространения фронта находится только из законов сохранения массы, импульса и энергии. Структура фронта приспосабливается к законам сохранения в том смысле, что при одной и той же скорости распространения фронта, диктуемой законами сохранения, его ширина может быть различной в зависимости от характера диссипативных процессов в переходной области и диссипативных коэффициентов. Разумеется, анализ структуры ударных волн позволяет отнести нереализуемые ситуации типа ударных волн разрежения, для которых нельзя построить структуру, но в остальном скорость распространения фронта определяется независимо от структуры переходной области.

Для фронтов второго типа (пламя, газовый разряд и др.) при определении скорости фронта одних законов сохранения становится недостаточно. Скорость фронта для волн второго типа находится как некоторое собственное значение при построении структуры фронта, т. е. при построении решения типа бегущей волны уравнений, описывающих диссипативные процессы в переходной области.

Оказывается, что эта классификация бегущих волн соответствует приведенной выше классификации автомодельных решений. Мы здесь рассмотрим простейшие примеры стационарных бегущих волн обоих типов, после чего убедимся в соответствии обеих классификаций.

## 6.2. Ударная волна Бюргерса — стационарная бегущая волна первого рода

Уравнение Бюргерса

$$\partial_t v + v \partial_x v = v \partial_{xx}^2 v \quad (6.7)$$

представляет собой удачную, хотя и упрощенную модель движения вязкого сжимаемого газа. Здесь  $v$  — скорость,  $v$  — кинематическая вязкость,  $x$  — пространственная координата,  $t$  — время. Если пренебречь вязкостью, уравнение (6.7) примет вид простейшего модельного уравнения газодинамики

$$\partial_t v + v \partial_x v = 0. \quad (6.8)$$

Последнее уравнение имеет решение типа равномерно распространяющейся ударной волны  $v = V(\xi)$ ,  $\xi = x - \lambda t + c$ , где  $V(\xi)$  — ступенчатая функция, равная  $v_1$  при  $\xi > 0$  и  $v_2$  при  $\xi \leq 0$ , причем  $v_1 < v_2$ . Значение скорости распространения  $\lambda = \lambda_0$  получается из

закона сохранения импульса на фронте разрыва, соответствующего уравнению (6.8):

$$-\lambda_0(v_1 - v_2) + (v_1^2 - v_2^2)/2 = 0, \quad (6.9)$$

откуда находим

$$\lambda_0 = (v_1 + v_2)/2. \quad (6.10)$$

Учтем теперь диссипативные процессы, т. е. вязкость, и вернемся к уравнению Бюргерса (6.7). Построим решение уравнения (6.7) типа бегущей волны:

$$v = V(\zeta), \quad \zeta = x - \lambda t + c.$$

Подставляя это выражение для  $v$  в (6.7), получаем:

$$-\lambda \frac{dV}{d\zeta} + V \frac{dV}{d\zeta} = v \frac{d^2V}{d\zeta^2}, \quad (6.11)$$

откуда, интегрируя и используя условие  $V = v_1$  при  $\zeta = \infty$ , находим:

$$v dV/d\zeta = -\lambda(V - v_1) + (V^2 - v_1^2)/2. \quad (6.12)$$

Для удовлетворения условия на левом конце  $V(-\infty) = v_2$  нужно принять

$$\lambda = (v_1 + v_2)/2 = \lambda_0. \quad (6.13)$$

Интегрируя (6.12) с учетом (6.13), получаем решение в виде

$$\zeta/v = [2/(v_2 - v_1)] \ln(v_2 - V)/(V - v_1). \quad (6.14)$$

Не уменьшая общности, константу интегрирования мы приняли равной нулю, поскольку выражение для независимой переменной  $\zeta$  уже включает произвольную аддитивную постоянную.

Это решение и описывает структуру переходной области в характерном для этой области пространственном масштабе  $v/(v_2 - v_1)$ . Мы видим, что поставленное выше условие  $v_2 > v_1$  существенно, поскольку решения, описывающего структуру переходной области волны, для которой  $V(-\infty) = v_2 < v_1 = V(\infty)$ , не существует. Действительно, уравнение (6.12) с учетом (6.13) принимает форму

$$v dV/d\zeta = -(v_2 - V)(V - v_1)/2. \quad (6.15)$$

Поскольку  $V$  лежит между  $v_1$  и  $v_2$ , правая часть (6.15) отрицательна всегда, а левая часть отрицательна лишь при  $v_2 > v_1$ .

Решения типа бегущей волны с  $\lambda = \lambda_0$  служат асимптотическими представлениями решений начальных задач для уравнения Бюргерса с начальными данными «переходного» типа:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &\equiv v_2 \text{ при } x \leq a; \quad v_1 < v(x, 0) < v_2 \text{ при } a < x < b; \\ v(x, 0) &\equiv v_1 \text{ при } x \geq b, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где  $a, b$  — произвольные действительные числа ( $a < b$ ), а функция  $v(x, 0)$  — монотонно невозрастающая:  $\partial_x v(x, 0) \leq 0$ . Это было

строго показано О. А. Олейник [81]. Как видно, в данном случае величина скорости распространения  $\lambda_0$  получается из закона сохранения и не зависит от структуры волны, т. е. от вязкости  $v$ . От вязкости зависит, как показывает соотношение (6.14), только пространственный масштаб переходной области, т. е. «ширина фронта».

Вполне аналогично обстоит дело также в случае ударных волн в газе и детонационных волн: скорости распространения этих волн определяются из законов сохранения массы, импульса и энергии и не требуют для своего определения привлечения структуры волн. Структура волн определяет ширину переходной области.

### 6.3. Пламя — стационарная бегущая волна второго рода

Рассмотрим теперь бегущие волны другого типа, для которых скорость распространения не может быть найдена только из законов сохранения и определяется из анализа их структуры.

Математически строгое исследование бегущих волн в нелинейных задачах с диссипацией было впервые предпринято в фундаментальной работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [57], выполненной в связи с биологической проблемой определения скорости распространения гена, имеющего преимущество в борьбе за существование.<sup>1</sup> Для описания структуры переходной зоны вблизи границы областей обитания генов обоих типов ими было получено нелинейное уравнение диффузии

$$\partial_t v - \kappa \partial_{xx}^2 v = F(v), \quad (6.17)$$

где  $v$  — концентрация гена, имеющего преимущество в борьбе за существование, а  $F(v)$  — скорость порождения гена, непрерывная и нужное число раз дифференцируемая функция, определенная в интервале  $0 \leq v \leq 1$  и обладающая в согласии с физическим смыслом задачи следующими свойствами:

$$F(0) = F(1) = 0; \quad F(v) > 0 \text{ при } 0 < v < 1; \quad F'(0) = \alpha > 0; \\ F'(v) < \alpha \text{ при } 0 < v < 1. \quad (6.18)$$

Уравнение (6.17) при таких условиях имеет решения типа бегущих волн:  $v = V(\xi)$ ;  $\xi = x - \lambda t + c$ , удовлетворяющие условиям  $v(-\infty) = 1$ ,  $v(\infty) = 0$  при любой скорости распространения, большей или равной  $\lambda_0 = 2\sqrt{\kappa\alpha}$ , и любых  $c$ . Наиболее существенно то, что среди этих решений только решения, отвечающие крайней нижней точке интервала возможных скоростей распространения, могут быть асимптотическими представлениями при  $t \rightarrow \infty$  реше-

<sup>1</sup> Следует отметить, что близкое по результатам исследование было одновременно и независимо выполнено Р. А. Фишером [127] (см. также книгу Дж. Мюррея [170]).

ний начальных задач с условиями такого же переходного типа, что и в (6.16):

$$v(x, 0) \equiv 1 \text{ при } x \leq a; \quad 0 < v(x, 0) < 1 \text{ при } a < x < b; \\ v(x, 0) \equiv 0 \text{ при } x \geq b. \quad (6.19)$$

Другими словами, оказалось, что непосредственное рассмотрение решений типа бегущих волн дает непрерывный спектр возможных скоростей распространения  $\lambda \geq \lambda_0 = 2\sqrt{\kappa a}$ , и только решение, соответствующее нижней точке этого спектра  $\lambda = \lambda_0$ , может быть при  $t \rightarrow \infty$  асимптотикой решения начальной задачи с условиями переходного типа: остальные бегущие волны неустойчивы. Величина  $\lambda_0$  определяет искомую скорость распространения гена, имеющего преимущество в борьбе за существование.

Заметим, что условие  $F'(v) < \alpha$  не является необходимым для установления волны, имеющей скорость распространения  $\lambda_0 = 2\sqrt{\kappa a}$ . Это было показано численным экспериментом и аналитическим исследованием в работе А. П. Алдушина, Я. Б. Зельдовича и С. И. Худяева [2].

Мы рассмотрим здесь более детально близкую задачу о тепловом распространении пламени в газовых смесях [41, 45, 49, 124, 198, 199]. Сформулируем простейшую схематизацию задачи. Пусть в ходе реакции уничтожается компонента газовой смеси, концентрацию которой мы обозначим через  $n$ . Скорость реакции  $q$ , т. е. масса горючего вещества, сгорающего в единице объема за единицу времени, зависит от концентрации  $n$  и температуры  $u$ . Введем обозначение

$$q = (1/\tau) \Phi(n, u), \quad (6.20)$$

где  $\Phi$  — функция, имеющая размерность плотности, а  $\tau$  — некоторая постоянная размерности времени (характерное время реакции), величина обычно весьма малая. Из физической химии известно, что зависимость скорости реакции от температуры очень сильная: небольшое изменение температуры сильно меняет скорость реакции. Мы будем считать, что реакция необратима, так что  $\Phi \geq 0$ . Далее, исходное состояние газовой смеси  $n = 1$ ,  $u = u_1$  предполагается равновесным и устойчивым. Для этого достаточно, чтобы функция  $\Phi(n, u)$  была равна нулю не только при начальной температуре  $u = u_1$ , но и в некотором интервале температур  $u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta$  (смысл этого условия будет пояснен ниже). Очевидно также, что реакция не идет в отсутствие горючего вещества. Таким образом, предполагается, что функция  $\Phi(n, u)$  удовлетворяет условиям

$$\Phi(n, u) \geq 0; \quad \Phi(n, u) = 0 \text{ при } 0 \leq n \leq 1, \\ u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta; \quad \Phi(0, u) = 0. \quad (6.21)$$

Скорости газа при распространении пламени малы сравнительно со скоростью звука, поэтому можно сжимаемостью газа

пренебречь и считать плотность газовой смеси зависящей только от температуры<sup>1</sup>:  $\rho = \rho(u)$ . Наконец, реакция считается экзотермической: при сгорании происходит тепловыделение. Тепловой эффект реакции, т. е. количество тепла, выделяющееся при сгорании единицы массы горючего газа, обозначим через  $Q$ . Согласно сказанному, система основных уравнений движения смеси горючего газа и образующихся в ходе реакции продуктов сгорания записывается в виде

$$\begin{aligned} \partial_t \rho v_i + \partial_{\alpha} \rho v_i v_{\alpha} &= -\partial_i p; \quad \partial_t \rho + \partial_{\alpha} \rho v_{\alpha} = 0; \quad \rho = \rho(u); \\ \partial_t \rho n + \partial_{\alpha} \rho n v_{\alpha} &= \partial_{\alpha} \rho D \partial_{\alpha} n - (1/\tau) \Phi(n, u); \\ \partial_t \rho \sigma u + \partial_{\alpha} \rho \sigma u v_{\alpha} &= \partial_{\alpha} k \partial_{\alpha} u + (Q/\tau) \Phi(n, u). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Первые три уравнения — обычные уравнения движения несжимаемой жидкости, плотность которой зависит от температуры (по повторяющемуся индексу  $\alpha$  предполагается суммирование от  $\alpha = 1$  до  $\alpha = 3$ ). Далее идут уравнение баланса массы горючего газа и уравнение энергии. В этих уравнениях  $v_i$  — компоненты вектора скорости смеси,  $p$  — давление газа,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $D$  — коэффициент диффузии,  $\sigma$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении; два последних коэффициента мы будем считать постоянными.

Рассматриваемая задача имеет два линейных масштаба, сильно отличающихся между собой: внутренний масштаб  $L_1 = \sqrt{D\tau}$ , характеризующий размер области, в которой происходят процессы химической реакции, диффузии и теплопередачи, и внешний масштаб  $L_2 = L$  — размер сосуда, камеры сгорания, диаметр горелки и т. д. Ввиду сильного различия этих двух масштабов естественно применить в рассматриваемой задаче метод сращиваемых асимптотических разложений [211, 120, 157]. Рассмотрим сперва «внешнее» асимптотическое разложение решения, для чего перейдем к безразмерным переменным, в которых за масштаб длины принят внешний масштаб  $L$ , а за масштаб времени  $L/\sqrt{D/\tau}$ . При этом уравнения переноса вещества и энергии — последние два уравнения системы (6.22) — примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon (\partial_{\theta} \rho n + \partial_{\alpha} \rho n V_{\alpha}) &= \varepsilon^2 \partial_{\alpha} \rho \partial_{\alpha} n - \Phi(n, u); \\ \varepsilon (\partial_{\theta} \rho \sigma u + \partial_{\alpha} \rho \sigma u V_{\alpha}) &= \varepsilon^2 \partial_{\alpha} (k/D) \partial_{\alpha} u + Q \Phi(n, u), \end{aligned} \quad (6.23)$$

где  $\theta$  — безразмерное «медленное» время,  $\theta = t \sqrt{D/\tau}/L$ ;  $V_{\alpha} = v_{\alpha}/\sqrt{D/\tau}$ ; оператор  $\partial_{\alpha}$  берется по безразмерным пространственным переменным, отнесенными к  $L$ ;  $\varepsilon^2 = L_1^2/L^2 \ll 1$ . Таким образом, везде, кроме узких областей, в которых градиенты температуры и

<sup>1</sup> Мы пренебрегаем также различием плотности горючего газа и плотности продуктов сгорания при одной и той же температуре. Это предположение не принципиально и принимается для упрощения вычислений.

концентрации велики (порядка  $1/\varepsilon$ ), можно считать скорость реакции равной нулю. Промежуточные, переходные области должны быть узкими, относительной шириной не более  $\varepsilon$ , так как изменение температуры и концентрации в них ограничено, а градиенты имеют порядок  $1/\varepsilon$ . Отсюда следует, что вся область, занятая газом (рис. 6.1), распадается на: 1) области, занятые не сгоревшим холодным газом, где реакция еще не идет, так как газ не успел разогреться; 2) области, занятые горячими продуктами сгорания, где реакция уже не идет, так как все горючее вещество там сгорело, и узкие переходные области, где идет реакция горения и происходят процессы переноса — диффузии и теплопроводности. Если перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е. в первом внешнем приближении, переходные области становятся поверхностями разрыва, на которых претерпевает разрыв скорость, плотность, температура и концентрация, но не давление. Скорость распространения по

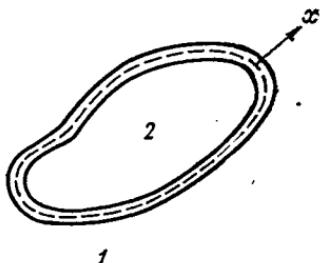


Рис. 6.1. Область движения разбивается на область, занятую свежей горючей смесью (1), область, занятую продуктами сгорания (2), и узкую переходную область, в которой протекает химическая реакция, процессы диффузии и теплопроводности.

газу поверхностей разрыва — пламен (нормальная скорость пламени) — из уравнений движения и условий баланса массы, импульса и энергии на поверхностях разрыва не определяется. Можно считать эту величину физико-химической константой, задаваемой независимо, например, определяемой из эксперимента. При этом получается замкнутая система соотношений так называемой газодинамической теории горения [63]. Для аналитического определения нормальной скорости распространения пламени следует обратиться к «внутреннему» асимптотическому представлению решения и рассмотреть явления в переходной зоне, взяв за характерный масштаб  $L_1 = \sqrt{D\tau}$ , а за характерное время  $\tau$ . Выберем направление нормали к средней линии переходной зоны (см. рис. 6.1) за направление координаты  $x$ , отсчитываемой от средней линии, и перейдем к безразмерной переменной  $\xi = x/\sqrt{D\tau}$ , отвечающей масштабу  $L_1$ . Из-за узости переходной зоны только производные по  $\xi$  имеют порядок единицы. Производные по остальным пространственным переменным, имеющие, если брать в качестве характерного внешний масштаб  $L$ , порядок единицы, в новом масштабе пренебрежимо малы.

Оставляя в уравнениях баланса горючего вещества и энергии только главные члены, запишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} \rho \partial_{\xi} n + \rho V \partial_{\xi} u &= \partial_{\xi} \rho \partial_{\xi} n - \Phi(n, u), \\ \rho \sigma \partial_{\xi} u + \rho \sigma V \partial_{\xi} u &= \partial_{\xi} (k/D) \partial_{\xi} u + Q\Phi(n, u). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Здесь  $V = v_x / \sqrt{D/\tau}$ ;  $v_x$  — компонента скорости смеси вдоль оси  $x$ ;  $\vartheta = t/\tau$  — «быстрое» время, т. е. безразмерное время, отнесенное к масштабу  $\tau$ . Далее, в том же приближении уравнение сохранения массы запишется в виде

$$\partial_{\vartheta} \rho + \partial_{\xi} V = 0. \quad (6.25)$$

Будем искать решение уравнений (6.24) — (6.25) типа бегущей волны:

$$n = N(\xi); \quad u = U(\xi); \quad V = V(\xi); \quad \xi = \xi - \lambda \vartheta + c, \quad (6.26)$$

где  $c$  — произвольная постоянная,  $\lambda$  — неизвестная и подлежащая определению скорость распространения бегущей волны. Подставляя (6.26) в (6.24) и (6.25) и имея в виду, что

$$\rho = \rho(U(\xi)) = R(\xi),$$

получаем для определения неизвестных функций  $N$ ,  $U$ ,  $V$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\lambda R \frac{dN}{d\xi} + RV \frac{dN}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} R \frac{dN}{d\xi} - \Phi(N, U), \\ -\lambda R \sigma \frac{dU}{d\xi} + RV \sigma \frac{dU}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} R \frac{dU}{d\xi} + Q \Phi(N, U), \\ -\lambda \frac{dR}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} RV &= 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$-\lambda R + RV = \text{const}. \quad (6.28)$$

Распределения температуры, концентрации и скорости в переходной зоне должны удовлетворять очевидным краевым условиям: с одной стороны переходной зоны, там, где она граничит со свежей горючей смесью, горение еще не началось, газ покоятся и его температура задана; с другой стороны переходной области горючее сгорело полностью. В соответствии со стандартной асимптотической процедурой, ввиду малости внутреннего масштаба  $L_1$  по сравнению с внешним  $L$ , первое граничное условие следует ставить при  $\xi = \infty$ , второе — при  $\xi = -\infty$ :

$$N(\infty) = 1; \quad U(\infty) = u_1; \quad N(-\infty) = 0; \quad V(\infty) = 0. \quad (6.29)$$

Подставляя условия (6.29) в (6.28), приводим это соотношение к виду

$$\lambda(\rho_0 - R) + RV = 0. \quad (6.30)$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность свежей горючей смеси. Подставляя (6.30) в первые два уравнения (6.27), находим:

$$\begin{aligned} -\lambda \rho_0 \frac{dN}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \rho \frac{dN}{d\xi} - \Phi(N, U), \\ -\lambda \rho_0 \frac{dU}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} R \frac{dU}{d\xi} + \frac{Q}{\sigma} \Phi(N, U). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Из физической химии известно, что если горючее вещество и продукты сгорания имеют близкий молекулярный вес, можно считать величину  $k/\rho\sigma D$  равной единице. При этом предположении, умножая первое уравнение (6.31) на  $Q/\sigma$  и складывая оба уравнения, находим, что система (6.31) имеет интеграл

$$(Q/\sigma) N(\zeta) + U(\zeta) = \text{const}, \quad (6.32)$$

называемый в теории горения законом подобия полей концентрации и температуры Льюиса—Эльбе. Из условий (6.29) находим  $\text{const} = u_1 + Q/\sigma$ , откуда и из интеграла (6.32) получаем

$$U(-\infty) = u_1 + Q/\sigma = u_2. \quad (6.33)$$

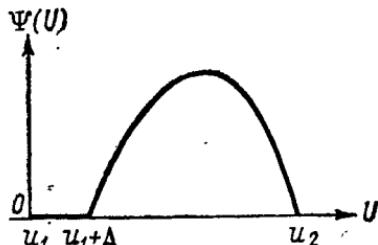


Рис. 6.2. Функция  $\Psi(U)$  обращается в нуль на некотором интервале вблизи  $U=u_1$ .

Используя закон подобия (6.32), можно расщепить систему (6.31) и свести ее к одному уравнению для температуры

$$\lambda \frac{dU}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \frac{\rho(U)}{\rho_0} \frac{dU}{d\xi} + \Psi(U) \frac{\rho_0}{\rho(U)} = 0, \quad (6.34)$$

где

$$\Psi(U) = (Q/\rho_0\sigma) \Phi[1 - \sigma(U - u_1)/Q, U] \rho(U)/\rho_0. \quad (6.35)$$

По предположению  $\Phi(n, u) \equiv 0$  при  $u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta^1$ . Следовательно, поскольку величина  $\rho(U)$  положительна и ограничена, функция  $\Psi(U)$  тождественно равна нулю на отрезке  $u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta$ , обращается в нуль при  $U = u_2$  и положительна при  $u_1 + \Delta < u < u_2$  (рис. 6.2). Полагая  $p = (\rho(U)/\rho_0) dU/d\xi$  и считая  $U$  независимой переменной, приводим уравнение (6.34) к виду

$$p dp/dU + \lambda p + \Psi(U) = 0. \quad (6.36)$$

Из условия (6.29) следует, что интересующее нас решение уравнения (6.36) удовлетворяет очевидному условию обращения в нуль потоков тепла на границах переходной зоны:

$$dU/d\xi = 0 \text{ при } \xi = \pm\infty, \quad (6.37)$$

<sup>1</sup> Как отмечалось выше, это условие обеспечивает устойчивость исходного состояния. Действительно, положим в уравнениях (6.24)  $\partial_\xi p$  и  $\partial_\xi u$  тождественно равными нулю, т. е.  $p$  и  $u$  будут зависеть только от времени. Тогда, если принятое условие выполняется, при малом изменении температуры не начинается реакция. Как будет показано ниже, это условие не является необходимым.

откуда и из (6.29) получаем граничные условия для функции  $p(U, \lambda)$ :

$$p = 0, \quad U = u_1; \quad p = 0, \quad U = u_2. \quad (6.38)$$

#### 6.4. Нелинейная задача на собственные значения

Мы снова, как и в случае автомодельных решений второго рода, получили нелинейную задачу на собственные значения: уравнение (6.36) — уравнение первого порядка, в то время как граничных же условий (6.38) два. Покажем, следуя Я. Б. Зельдовичу [41], что имеется, и притом единственное, собственное зна-

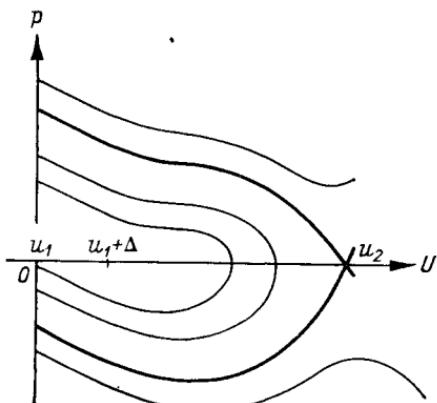


Рис. 6.3. Фазовый портрет уравнения первого порядка (6.36).

чение  $\lambda = \lambda_0$ , для которого существует искомое решение. Рассмотрим фазовый портрет уравнения (6.36) в интересующей нас области плоскости  $Up$  (рис. 6.3). При  $U = u_2, p = 0$  уравнение (6.36) имеет особую точку типа седла. Через эту точку проходят две сепаратрисы с наклонами  $-\lambda/2 \pm \sqrt{\lambda^2/4 - \Psi'(u_2)}$ ; поскольку  $\Psi'(u_2) < 0$ , наклон одной из сепаратрис положительный, другой — отрицательный. Ясно, что удовлетворить второму условию (6.38) могут только сепаратрисы. Далее, при  $\lambda = 0$  уравнение (6.36) интегрируется в конечном виде: решения, удовлетворяющие условию (6.38) при  $U = u_2$  имеют вид

$$p = \pm \sqrt{2 \int_{U_1}^{u_2} \Psi(u) du}, \quad (6.39)$$

так что ординаты точек пересечения соответствующих интегральных кривых с осью ординат равны соответственно

$$p_1 = \sqrt{2 \int_{u_1}^{u_2} \Psi(u) du} > 0; \quad p_2 = -\sqrt{2 \int_{u_1}^{u_2} \Psi(u) du} < 0. \quad (6.40)$$

Рассмотрим теперь функцию  $q(U, \lambda) = \partial_\lambda p$  для всех решений уравнения (6.36), удовлетворяющих второму условию (6.38). Ясно, что  $q(u_2, \lambda) = 0$ , поскольку  $p(u_2, \lambda) \equiv 0$ . Дифференцируя (6.36), получаем для функции  $q$  уравнение

$$dq/dU = -1 + \Psi(U) q/p^2. \quad (6.41)$$

Вблизи точки  $U = u_2$  сепаратрисы ведут себя, согласно предыдущему, как

$$p = (U - u_2) \left( -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\lambda^2/4 - \Psi'(u_2)} \right).$$

Дифференцируя по  $\lambda$ , находим, что соответствующие кривые  $q(U, \lambda)$  вблизи  $U = u_2$  ведут себя, как  $q = K(U - u_2)$ , где коэффициент

$$K = \{-1/2 \pm \lambda/2 \sqrt{\lambda^2 - 4\Psi'(u_2)}\}$$

отрицателен для обеих сепаратрис, т. е.  $q > 0$  при  $U < u_2$ . Далее, кривые  $q(U, \lambda)$  не могут пересечь ось  $q = 0$  в некоторой промежуточной между  $u_1$  и  $u_2$  точке, так как в точке пересечения выполнялось бы соотношение  $dq/dU = -1$ , что геометрически невозможно. Таким образом,  $q(u_1 + \Delta, \lambda) > 0$ . Однако  $\Psi(U) \equiv 0$  при  $u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta$ , откуда и из (6.41) получаем  $q(u_1, \lambda) = q(u_1 + \Delta, \lambda) + \Delta > \Delta$ . Поскольку

$$p(u_1, \lambda) = p(u_1, 0) + \int_0^\lambda q(u_1, \lambda) d\lambda > -\sqrt{2 \int_{u_1}^{u_2} \Psi(u) du} + \lambda\Delta, \quad (6.42)$$

то, следовательно, найдется такое  $\lambda = \lambda_0$  и притом только одно, что нижняя сепаратриса войдет в точку  $p = 0$ ,  $U = u_1$ , т. е. удовлетворит всем условиям задачи.

Итак, существование и единственность решения нелинейной задачи на собственные значения доказаны. Используя методы, развитые в работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [57], Я.И. Канель [50] показал, что решение представляет собой асимптотику при  $t \rightarrow \infty$  решения некоторого естественным образом определенного класса начальных задач с условиями переходного типа. Заметим, что как в задаче о распространении гена, так и в задаче теории распространения пламени, непосредственное построение решения типа бегущей волны  $u = U(\xi - \lambda\vartheta + c)$  определяет это решение с точностью до константы  $c$ . Эта константа может быть найдена только сращиванием инвариантного решения с неинвариантным решением исходной задачи. При этом очевидно, что какое бы промежуточное состояние системы  $V(\xi, \vartheta)$ ,  $u(\xi, \vartheta)$ ,  $n(\xi, \vartheta)$  мы ни приняли за начальное, значение константы  $c$  не изменится. В этом смысле константа  $c$  является интегралом уравнений рассматриваемых задач (ср. [159]).

Полученное собственное значение  $\lambda_0$  и определяет, если возвратиться к исходным размерным переменным, скорость распространения пламени:

$$m = \lambda_0 \sqrt{D/\tau}. \quad (6.43)$$

Далее, поскольку в задаче определения скорости бегущей волны фигурировало «быстрое» время, ясно, что на самом деле, в естественном внешнем масштабе времени выход на асимптотику происходит весьма быстро и «доасимптотическая» эволюция решения на самом деле не имеет значения.

## 6.5. Распространение пламени по реагирующей смеси — промежуточная асимптотика

В предыдущем изложении мы предположили, что химическая реакция в смеси при начальной температуре не идет:  $\Phi(n, u_1) = 0$ . Более того, мы дополнительно потребовали выполнения сильного и несколько искусственного, на первый взгляд, условия обращения скорости реакции в нуль также в некотором интервале температур:  $\Phi(n, u) = 0, u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta$ . В то же время в физической химии для скорости реакции обычно принимается аррениусовская зависимость

$$\Phi(n, u) = An^p \exp(-E/Ru), \quad (6.44)$$

где постоянные  $A$ ,  $p$  — предэкспонент и порядок реакции; постоянная  $E$  — теплота активации химической реакции;  $R$  — универсальная газовая постоянная. Зависимость (6.44) дает для практически встречающихся начальных температур смеси хотя и очень малые, но все же отличные от нуля значения скорости реакции. Значит ли это, что решения нелинейной задачи на собственные значения теории распространения пламени не существует и промежуточной асимптотики типа бегущей волны в этой задаче нет?

На самом деле оба наложенных выше на скорость реакции условия не необходимы. Достаточно, чтобы скорость реакции при исходной температуре была бы много меньше максимальной для данного процесса скорости реакции. При этом промежуточной асимптотикой распределения температуры, концентрации горючего вещества и т. п. по-прежнему будет некоторое решение типа бегущей волны — распространяющееся пламя.

Покажем это. Для упрощения изложения сделаем некоторые непринципиальные предположения. Примем, во-первых, что закон подобия полей концентрации и температуры Льюиса—Эльбе имеет место и на стадии нестационарного распространения пламени:

$$Qn/\sigma + u = u_2 = \text{const}, \quad (6.45)$$

где  $u_2$ , по-прежнему, постоянная температура сгоревшей смеси. Далее, пренебрежем расширением газа при сгорании и возникаю-

щим при этом его движением, т.е. будем считать плотность газовой смеси не зависящей от температуры. Наконец, все теплофизические характеристики смеси также будем считать постоянными и примем, что  $k/\rho\sigma D = 1$ .

В этих предположениях уравнение энергии (6.24) переписывается в виде

$$\partial_{\vartheta} u = \partial_{\xi\xi}^2 u + f(u), \quad (6.46)$$

где

$$f(u) = (Q/\rho\sigma) \Phi[(u_2 - u)\sigma/Q, u]. \quad (6.47)$$

Рассмотрим для уравнения (6.46) «задачу о зажигании» с начальным условием при  $\vartheta = 0$ :

$$u(\xi, 0) = u_2 \text{ при } |\xi| \leq \xi_0; \quad u(\xi, 0) = u_{10} \text{ при } |\xi| > \xi_0. \quad (6.48)$$

Физический смысл задачи (6.48) очевиден: речь идет об инициировании распространения пламени некоторой массой сгоревшего газа. Постоянная  $\xi_0$  определяет величину этой массы, равную (на единицу площади)  $2\rho\xi_0\sqrt{D\tau}$ , постоянная  $u_{10}$  — начальная температура холодной газовой смеси. Из соображений симметрии можно рассматривать решение только при  $\xi \geq 0$  и поставить при  $\xi = 0$  условие тепловой изоляции

$$\partial_{\xi} u = 0. \quad (6.49)$$

Пусть теперь температура  $u_{10}$  настолько мала, что скорость реакции при этой температуре и величина  $\delta = f(u_{10})/u_{10}$  малы. Тогда и в некотором интервале температур вблизи  $u = u_{10}$  можно считать, что  $f(u) = \delta F(u)$ , где  $\delta \ll 1$ , а величина  $F(u)$  имеет порядок  $u$ .

Учет протекания реакции в области перед фронтом пламени означает, что условие  $\Phi(n, u_1) = 0$  заменяется соотношением

$$du_1/d\vartheta = f(u_1) = \delta F(u_1), \quad (6.50)$$

которое получается из основного уравнения баланса энергии (6.22) в реагирующей смеси, если градиенты температуры пренебрежимо малы. Введем теперь новое безразмерное «медленное» время  $T = \delta\vartheta$ , основанное на масштабе времени  $\tau/\delta$  реакции в области перед фронтом пламени. Тогда соотношение (6.50) записывается в виде системы

$$du_1/dT = F(u_1); \quad dT/d\vartheta = \delta. \quad (6.51)$$

Задавая начальную температуру смеси перед фронтом  $u_1 = u_{10}$  и интегрируя (6.51), получаем зависимость температуры перед фронтом от медленного времени  $T$ :  $u_1 = u_1(T)$ . Удобно ввести относительное изменение температуры внутри зоны реакции, согласно соотношению

$$\Theta = [u(\xi, \vartheta) - u_1(T)]/[u_2 - u_1(T)]. \quad (6.52)$$

Подставляя (6.52) в уравнение (6.46), получаем уравнение для  $\Theta$  в виде

$$\partial_\vartheta \Theta = \partial_{\xi\xi}^2 \Theta + f_1(\Theta, T), \quad (6.53)$$

где

$$f_1(\Theta, T) = [f(u_1 + (u_2 - u_1)\Theta) - f(u_1)(1 - \Theta)]/[u_2 - u_1(T)]. \quad (6.54)$$

Функция  $f_1(\Theta, T)$ , в отличие от  $f(u)$ , обращается в нуль как при  $\Theta = 0$ ,  $u = u_1$ , так и при  $\Theta = 1$ ,  $u = u_2$ .

В нулевом приближении по  $\delta$  второе соотношение системы (6.51) дает  $dT/d\vartheta = 0$ , и функция  $f_1(\Theta, T)$  перестает зависеть от

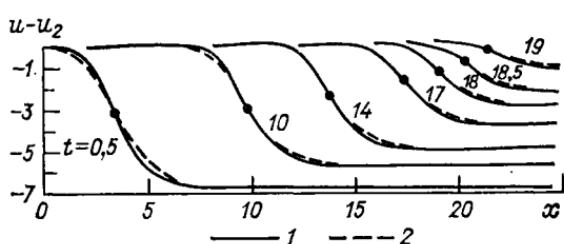


Рис. 6.4. Численный эксперимент показал хорошее согласие численного решения и промежуточных асимптотик типа бегущих волн в переходной области.

1 — численное решение в разные моменты времени, 2 — промежуточные асимптотики, полученные решением нелинейной задачи на собственные значения. Точками отмечены места совмещения.

времени  $\vartheta$  явно:  $T$  становится параметром. Таким образом, можно снова построить решение уравнения (6.53) типа бегущей волны

$$\Theta = \Theta(\zeta), \quad \zeta = \xi - \lambda(T)\vartheta + c(T), \quad (6.55)$$

которое представляет собой промежуточную асимптотику решения рассматриваемой неинвариантной задачи (6.46) — (6.48) в переходной области. Подставляя (6.55) в уравнение (6.53) и граничные условия  $\Theta = 1$  при  $\xi = -\infty$ ,  $\Theta = 0$  при  $\xi = \infty$ , получаем нелинейную задачу на собственные значения:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \lambda(T) \frac{d\Theta}{d\xi} + f_1(\Theta, T) = 0;$$

$$\Theta(-\infty) = 1; \quad \Theta(\infty) = 0, \quad (6.56)$$

решение которой определяет функции  $\Theta(\xi, T)$  и  $\lambda = \lambda_0(T)$ . Функция  $c(T)$  остается при непосредственном построении инвариантного решения типа бегущей волны (6.55) неопределенной. Ее можно найти численно срашиванием с асимптотикой исходного неинвариантного решения.

На рис. 6.4 приведены результаты сравнения численного решения задачи (6.46) — (6.48) с промежуточной асимптотикой — решением вида бегущей волны (6.55). Функция  $c(T)$  в решении (6.55), определялась совмещением точек, отвечающих  $\Theta = 0,5$  в инвариантном решении и численном решении неинвариантной

задачи. Как видно, промежуточная асимптотика в переходной области близка к решению, полученному численным расчетом.

Проведенный в этом параграфе анализ следовал с небольшими изменениями работам Я. Б. Зельдовича с сотрудниками [43, 2]. Любопытно, что, как показали численные расчеты, выполненные в работе [2], зависимость скорости распространения от медленного времени  $T$  хорошо согласуется на большом интервале температур с формулой Колмогорова—Петровского—Пискунова

$$\lambda_0(T) = 2\sqrt{f_1(0, T)}, \quad (6.57)$$

несмотря на то что условие  $f'_1(\Theta, T) < f'_1(0, T)$  здесь не удовлетворяется. Это обстоятельство получило в работе [2] также и аналитическое объяснение.

Оценим теперь, в каких случаях необходим учет реакции перед пламенем. В рассматриваемой задаче имеется два малых параметра: отношение толщины фронта к внешнему масштабу  $\varepsilon = \sqrt{Dt/L}$  и безразмерная скорость тепловыделения в смеси при начальной температуре  $\delta = f(u_{10})/u_{10}$ . Изменение состава смеси вдали от пламени происходит за время порядка  $\tau/\delta$ ; характерное время распространения пламени по сосуду составляет  $L/\sqrt{D/\tau}$ ; скорость пламени по порядку величины составляет  $\sqrt{D/\tau}$ . Реакцию в области перед пламенем необходимо учитывать, если второе характерное время имеет порядок первого или больше его:

$$\tau/\delta \leq L/\sqrt{D/\tau}, \text{ так что } \delta \geq \varepsilon. \quad (6.58)$$

Если  $\delta \ll \varepsilon$ , можно принимать условие  $\Phi(n, u_1) = 0$  и, более того, считать, что  $\Phi(n, u) \equiv 0$  в некотором интервале температур  $u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta$  вблизи исходной температуры. Это условие определяет область применимости сделанных выше предположений.

Мы продемонстрировали хорошо известный факт — существование двух типов стационарных бегущих волн. Как уже говорилось, для определения скорости распространения волн первого рода достаточно «внешних» законов сохранения; для определения скорости распространения волн второго рода внешних законов сохранения недостаточно и необходимо привлечь внутреннюю структуру волн. Скорость распространения бегущих волн второго рода определяется из условия существования внутренней структуры в целом, т. е. из условия существования решения типа бегущей волны уравнений движения в переходной области, удовлетворяющего краевым условиям на границах этой области.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Иногда (см. главу 7) скорость распространения определяется при рассмотрении структуры неоднозначно. Это значит, что она зависит от начальных условий исходной задачи, асимптотикой решения которой служит бегущая волна.

Эта ситуация в точности соответствует рассмотренной выше классификации автомодельных решений. Действительно, положим снова для решения типа бегущей волны

$$u = U(x - \lambda t + c), \\ x = \ln \xi; \quad t = \ln \tau; \quad c = -\ln A.$$

Тогда это решение записывается, как мы уже видели, в виде

$$U(x - \lambda t + c) = U(\ln \xi / A \tau^\lambda) = U_1(\xi / A \tau^\lambda), \quad (6.59)$$

т. е. в автомодельной форме. Очевидно, что сформулированная выше классификация решений типа бегущей волны переводится на язык автомодельных решений. В частности, показатель  $\lambda$  степени в выражении автомодельной переменной соответствует скорости распространения в решениях типа бегущей волны. Таким образом, разделение решений типа бегущей волны на решения, для которых скорость распространения может быть найдена из одних законов сохранения на фронте, и решения, для которых эта скорость получается из условия существования в целом внутренней структуры, соответствует разделению автомодельных решений на решения первого и второго рода. Соответствие автомодельных решений и бегущих волн будет не раз использоваться в дальнейшем.

## Глава 7

---

### АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ — СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

---

#### 7.1. Анализ размерностей и группы преобразований

Анализ размерностей, как уже упоминалось, имеет прозрачную групповую природу. Групповые соображения могут оказаться полезными и в тех случаях, когда для установления автомодельности и определения автомодельных переменных анализа размерностей становится недостаточно.

Напомним, прежде всего, определение группы преобразований. Пусть имеется множество преобразований с  $k$  параметрами

$$x'_v = f_v(x_1, \dots, x_n; A_1, \dots, A_k), \quad (7.1)$$

где  $f_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ) — гладкие функции своих переменных в некоторой области. Говорят, что это множество образует  $k$ -параметрическую группу преобразований, если выполнены следующие условия:

1) среди преобразований (7.1) имеется тождественное преобразование;

2) для каждого преобразования (7.1) существует обратное, также принадлежащее к множеству (7.1);

3) для каждой пары преобразований из множества (7.1) — преобразования  $A$  с параметрами  $A_1, \dots, A_k$  и преобразования  $B$  с параметрами  $B_1, \dots, B_k$  — некоторыми соотношениями

$$C_i = C_i(A_1, \dots, A_k; B_1, \dots, B_k), \quad i=1, \dots, n$$

единственным образом определяется преобразование  $C$  с параметрами  $C_1, \dots, C_k$ , также принадлежащее к множеству (7.1) и такое, что последовательное выполнение преобразований  $A$  и  $B$  равносильно преобразованию  $C$ . Преобразование  $C$  называется произведением преобразований  $A$  и  $B$ .

Анализ размерностей основан на П-теореме, подробно рассмотренной в главе 1. Эта теорема позволяет выразить функцию  $n$  переменных в зависимости между размерными величинами

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (7.2)$$

через функцию  $n - k$  переменных ( $k$  — число определяющих параметров с независимыми размерностями), представляя зависимость (7.2) в виде соотношения между безразмерными величинами

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}),$$

где

$$\Pi = a/a_1^p \dots a_k^r, \quad \Pi_i = a_{k+i}/a_1^{p_{k+i}} \dots a_k^{r_{k+i}}, \quad i = 1, \dots, n - k.$$

Заметим теперь, что при любых положительных  $A_1, A_2, \dots, A_k$  преобразование подобия определяющих параметров с независимыми размерностями

$$a'_1 = A_1 a_1, \quad a'_2 = A_2 a_2, \dots, \quad a'_k = A_k a_k \quad (7.3)$$

может быть получено при переходе от исходной системы единиц измерения к некоторой другой системе единиц измерения, принадлежащей к тому же классу. При этом значения остальных параметров  $a, a_{k+1}, \dots, a_n$  меняются в соответствии с их размерностью следующим образом:

$$a'_1 = A_1^p \dots A_k^r a; \\ a'_{k+1} = A_1^{p_{k+1}} \dots A_k^{r_{k+1}} a_{k+1}, \dots, \quad a'_n = A_1^{p_n} \dots A_k^{r_n} a_n. \quad (7.4)$$

Непосредственная проверка легко показывает, что преобразования (7.3), (7.4) образуют  $k$ -параметрическую группу. Величины  $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$  при всех преобразованиях группы (7.3), (7.4) остаются неизменными, т. е. они являются *инвариантами* этой группы. Таким образом, П-теорема представляет собой простое следствие принципа инвариантности имеющих физический смысл соотношений между размерными величинами вида (7.2) относительно группы преобразований подобия определяющих параметров

с независимыми размерностями (7.3), (7.4). Действительно, если инвариантность имеет место, все такие соотношения должны быть представимы в виде соотношений между инвариантами группы (7.3), (7.4). Число независимых инвариантов группы, очевидно, меньше общего числа определяющих и определяемых параметров на число  $k$  параметров группы.

Инвариантность постановки и, следовательно, решения любой физически осмысленной задачи относительно группы преобразований (7.3), (7.4) обязательна. Может оказаться, однако, что существует более богатая группа, относительно которой инвариантна постановка рассматриваемой задачи. Тогда число аргументов функции  $\Phi$  в универсальном (инвариантном) соотношении, полученном после применения анализа размерностей, в свою очередь должно уменьшиться на число параметров дополнительной группы, хотя из одного анализа размерностей (инвариантности относительно группы преобразований подобия величин с независимыми размерностями) эта автомодельность не вытекала. Рассмотрим несколько показательных примеров.

## 7.2. Пограничный слой на пластинке

Задача теории пограничного слоя при обтекании полубесконечной плоской пластинки направленным вдоль нее поступательным потоком вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса (задача Блазиуса) приводит к системе уравнений [59, 63]

$$u \partial_x u + v \partial_y u = v \partial_{yy}^2 u, \quad \partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (7.5)$$

где  $x$ ,  $y$  — продольная и поперечная координаты;  $u$ ,  $v$  — соответствующие компоненты скорости;  $x \geq 0$ ,  $y = 0$  — пластинка;  $x = y = 0$  — ее острие;  $v$  — кинематический коэффициент вязкости. Границные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$u(0, y) = U; \quad u(x, \infty) = U; \quad u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad (7.6)$$

Здесь  $x \geq 0$ ;  $U$  — постоянная скорость внешнего потока. При произвольных числах Рейнольдса задача обтекания полубесконечной пластинки направленным вдоль нее поступательным потоком приводится к решению полной системы уравнений Навье—Стокса и неразрывности

$$\begin{aligned} u \partial_x u + v \partial_y u &= -\partial_x p/\rho + v(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u); \\ u \partial_x v + v \partial_y v &= -\partial_y p/\rho + v(\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v); \\ \partial_x u + \partial_y v &= 0 \end{aligned}$$

при условиях

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x, 0) = 0 \text{ при } x \geq 0; \\ u(x, y) &\rightarrow U \text{ при } y^2 \rightarrow \infty \text{ и } x \rightarrow -\infty, y = 0; \\ v(x, y) &\rightarrow 0 \text{ при } y^2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Как видно, обе задачи имеют одни и те же определяющие параметры:  $v, x, U, y$ , среди которых только два имеют независимые размерности:  $[v] = L^2 T^{-1}$ ,  $[x] = L$ ,  $[U] = LT^{-1}$ ,  $[y] = L$ . Прямое применение анализа размерностей дает

$$u = U\Phi_1(\Pi_1, \Pi_2); \quad v = U\Phi_2(\Pi_1, \Pi_2); \\ \Pi_1 = \xi = Ux/v; \quad \Pi_2 = \eta = Uy/v, \quad (7.7)$$

и соотношения теории пограничного слоя (7.5), (7.6) приводятся к виду

$$\Phi_1 \partial_\xi \Phi_1 + \Phi_2 \partial_\eta \Phi_1 = \partial_{\eta\eta}^2 \Phi_1; \quad \partial_\xi \Phi_1 + \partial_\eta \Phi_2 = 0; \\ \Phi_1(0, \eta) = \Phi_1(\xi, \infty) = 1; \quad \Phi_1(\xi, 0) = \Phi_2(\xi, 0) = 0, \quad (7.8)$$

так что прямое применение анализа размерностей никаких упрощений в задачу не внесло. Пусть теперь  $\Phi_1(\xi, \eta)$  и  $\Phi_2(\xi, \eta)$  — решение системы теории пограничного слоя (7.8), по предположению существующее и единственное. Простая проверка показывает, что в отличие от полной системы Навье—Стокса при любом положительном  $\alpha$  функции  $\Phi_1(\alpha^2 \xi, \alpha \eta)$ ;  $\alpha \Phi_2(\alpha^2 \xi, \alpha \eta)$  также удовлетворяют уравнениям и всем условиям задачи.

Таким образом, постановка задачи теории пограничного слоя (7.8) оказалась инвариантной относительно однопараметрической группы преобразований:

$$\Phi'_1 = \Phi_1(\xi, \eta); \quad \Phi'_2 = \alpha^{-1} \Phi_2(\xi, \eta); \quad \xi' = \alpha^2 \xi; \quad \eta' = \alpha \eta,$$

так что подставляя предыдущие соотношения в (7.8), мы снова получаем ту же задачу в переменных  $\Phi'_1$ ,  $\Phi'_2$ ,  $\xi'$ ,  $\eta'$  при любом  $\alpha$ . Ввиду предполагаемой единственности и решение задачи теории пограничного слоя должно быть инвариантным относительно той же группы преобразований, т. е. при любом  $\alpha > 0$  функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  должны удовлетворять соотношениям

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \Phi_1(\alpha^2 \xi, \alpha \eta); \quad \Phi_2(\xi, \eta) = \alpha \Phi_2(\alpha^2 \xi, \alpha \eta). \quad (7.9)$$

Поскольку в соотношениях (7.9)  $\alpha$  можно взять равным любому положительному числу, полагая  $\alpha = 1/\sqrt{\xi}$ , получаем:

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \Phi_1(1, \eta/\sqrt{\xi}) = f_1(\eta/\sqrt{\xi}) = f_1(y/\sqrt{vx/U}), \\ \Phi_2(\xi, \eta) = (1/\sqrt{\xi}) \Phi_2(1, \eta/\sqrt{\xi}) = (1/\sqrt{\xi}) f_2(\eta/\sqrt{\xi}) = \\ = \sqrt{v/Ux} f_2(y/\sqrt{vx/U}). \quad (7.10)$$

Таким образом, автомодельность решения задачи доказана и выражения автомодельных переменных получены, но уже исходя не только из соображений размерности, а также из инвариантности постановки задачи относительно группы преобразований более широкой, нежели группа преобразований подобия величин с независимыми размерностями.

Рассматриваемый пример показателен также в том отношении, что применению более общих групповых соображений здесь можно придать форму использования анализа размерностей. Этот прием оказывается во многих случаях полезным. Именно, будем измерять разными единицами измерения длину в направлении  $x$  и длину в направлении  $y$ , т. е. введем две размерности длины  $L_x$  и  $L_y$ . Для уравнений пограничного слоя, в отличие от полных уравнений Навье—Стокса, так сделать можно. (В уравнениях Навье—Стокса член  $v\partial_{yy}^2 u$  входит в сумму с членом  $v\partial_{xx}^2 u$ , и, если измерять  $x$  и  $y$  разными единицами, эти члены будут иметь разные размерности.) При этом нужно принять

$$[u] = [U] = L_x T^{-1}; \quad [v] = L_y T^{-1}; \quad [v] = L_y T^{-1}; \\ [x] = L_x; \quad [y] = L_y, \quad (7.11)$$

тогда в уравнениях пограничного слоя и граничных условиях задачи все члены будут иметь одинаковую размерность. Таким образом, среди определяющих параметров уже не два, а три имеют независимую размерность, и единственным независимым безразмерным параметром подобия будет

$$\Pi' = y/\sqrt{vx/U} = \zeta, \quad (7.12)$$

откуда и следует автомодельность решения задачи:

$$u = U f_1(\zeta); \quad v = \sqrt{vU/x} f_2(\zeta).$$

Вводя новую функцию  $\varphi(\zeta) = \int_0^\zeta f_1(\zeta) d\zeta$ , из уравнений (7.5) и условий (7.6) легко получаем соотношения

$$f_2 = (\zeta\varphi' - \varphi)/2,$$

$$\varphi\varphi'' + 2\varphi''' = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 1,$$

т. е. нелинейную краевую задачу для обыкновенного уравнения третьего порядка. Для сопротивления  $R$  участка пластинки длиной  $l$ , обтекаемого продольным равномерным потоком со скоростью  $U$ , получаем из предыдущих соотношений, используя результаты численного расчета функции  $\varphi$  (детальнее см. [59, 63]):

$$R = 2 \int_0^l (\sigma_{xy})_{y=0} dx = 2U \sqrt{\frac{U}{v}} \rho v \int_0^l f_1'(0) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ = 4U^{3/2} \sqrt{l/v} \rho v \varphi''(0) = 1,328 \rho \sqrt{vU^3}.$$

Здесь  $(\sigma_{xy})_{y=0} = \rho v (\partial_y u)_{y=0}$  — напряжение трения на пластинке.

Вводя соответствующий  $R$  безразмерный параметр  $\Pi = R/\rho U^2 l$ , получаем:

$$\Pi = 1,328/\sqrt{\text{Re}}; \quad \text{Re} = Ul/v.$$

Заметим попутно, что на это хорошо известное соотношение можно тоже смотреть как на неполную автомодельность. Действительно, сопротивление  $R$  определяется следующими величинами: длиной  $l$  участка пластинки, скоростью потока  $U$ , а также плотностью  $\rho$  и вязкостью  $v$  жидкости. Применив стандартную процедуру анализа размерностей, получаем:

$$\Pi = \Phi(\text{Re}).$$

При характерных для пограничного слоя больших числах Рейнольдса полной автомодельности по числу Рейнольдса нет, так как не существует отличного от нуля предела функции  $\Phi = 1,328\text{Re}^{-1/2}$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Следовательно, как бы велики ни были числа Рейнольдса, нельзя ожидать выполнения соотношений

$$\Pi = \text{const}; \quad R = \text{const } \rho U^2 l,$$

которые должны были бы иметь место в случае полной автомодельности по числу Рейнольдса. Тем не менее выполняется соотношение

$$\Pi^* = R/\rho U^{3/2} (lv)^{1/2} = \text{const} = 1,328,$$

отвечающее неполной автомодельности: параметр  $\Pi^*$  не может быть получен анализом размерности и содержит размерный параметр  $v$ , явное введение которого в задачу нарушает автомодельность.

### 7.3. Предельные автомодельные решения

Интересный пример использования более общих групповых соображений для установления автомодельности доставляют так называемые *предельные автомодельные решения*<sup>1</sup>, т. е. решения вида  $e^{\alpha t} f(xe^{\beta t})$ , в которых и пространственный масштаб, и масштаб определяемой величины зависят от времени экспоненциально. Рассмотрим эти решения для уравнения нелинейной теплопроводности

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u^{n+1}. \quad (7.13)$$

Соответствующая вырожденная задача рассматривается в полубесконечной области  $x \geq 0$  при  $t > -\infty$ . Ищется решение уравнения (7.13), которое удовлетворяет условиям

$$u(x, -\infty) = 0, \quad u(0, t) = u_0 e^{\sigma t}. \quad (7.14)$$

<sup>1</sup> Иногда эти решения называют предельными к автомодельным, что, на наш взгляд, неудачно, поскольку они сами тоже автомодельны.

Применение анализа размерностей, как нетрудно показать, используя стандартную процедуру, дает

$$u = u_0 \Phi [x / (\kappa \sigma^{-1} u_0^n)^{1/2}, \rho t]. \quad (7.15)$$

Заметим теперь, что сформулированная задача инвариантна также относительно группы преобразований сдвига по времени, так что если  $u(x, t, u_0, \sigma)$  есть решение задачи (7.13), (7.14), то  $u(x, t - \tau, u_0 e^{\sigma\tau}, \sigma)$  тоже представляет собой решение той же задачи при любом действительном  $\tau$ . В самом деле, подставляя в (7.13) и (7.14)  $t = t' + \tau$ , мы получим для определения  $u$  в функции переменных  $x, t'$  ту же задачу, только вместо  $u_0$  будет фигурировать  $u'_0 = u_0 e^{\sigma\tau}$ . Отсюда, из единственности решения и из соотношения (7.15) следует, что при любом  $\tau$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 \Phi [x / (\kappa \sigma^{-1} u_0^n)^{1/2}, \sigma t] = \\ &= u_0 e^{\sigma\tau} \Phi [x / (\kappa \sigma^{-1} u_0^n e^{n\sigma\tau})^{1/2}, \sigma t - \sigma\tau]. \end{aligned}$$

Это означает, что функция  $\Phi$  удовлетворяет соотношению инвариантности

$$\Phi(\xi, \tau) = e^{\sigma\tau} \Phi[\xi \exp(-n\sigma\tau/2), \eta - \sigma\tau] \quad (7.16)$$

при любом  $\tau$ . Полагая  $\tau = \eta/\sigma$ , получаем:

$$\Phi(\xi, \eta) = e^{\eta\sigma} \Phi[\xi \exp(-n\eta/2), 0] = e^{\eta\sigma} f[\xi \exp(-n\eta/2)], \quad (7.17)$$

откуда уже следует автомодельность решения задачи (7.13), (7.14):

$$u = u_0 e^{\sigma t} f[x / (\kappa \sigma^{-1} u_0^n e^{n\sigma t})^{1/2}]. \quad (7.18)$$

Название этих решений — *пределные автомодельные* — объясняется следующим образом. Уравнение (7.13) имеет семейство автомодельных решений обычного степенного вида, удовлетворяющих условиям

$$u(x, t_0) = 0; \quad u(0, t) = \mu(t - t_0)^\alpha \quad \text{при } t > t_0. \quad (7.19)$$

Как нетрудно показать, используя стандартную процедуру анализа размерностей, эти решения представляются в виде

$$u = \mu(t - t_0)^\alpha f_\alpha [x / (\mu^n (t - t_0)^{\alpha n + 1} \kappa (\alpha + 1))^{1/2}] \quad (7.20)$$

( множитель  $(\alpha + 1)$  введен в автомодельную переменную для удобства), где функция  $f_\alpha$  является решением уравнения

$$\frac{d^2 f_\alpha}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{df_\alpha}{d\xi} - \frac{\alpha}{\alpha + 1} f_\alpha = 0 \quad (7.21)$$

при условиях  $f_\alpha(0) = 1$ ,  $f_\alpha(\infty) = 0$ , непрерывным, имеющим непрерывную производную  $df_\alpha/d\xi$ . В действительности это решение тождественно равно нулю при  $\xi$ , больших некоторого  $\xi_0(\alpha) < \infty$  (ср. главу 2).

Возьмем теперь  $t_0 = -\alpha/\sigma$ , где  $\sigma$  — постоянная размерности обратного времени и устремим  $\alpha$  к бесконечности, сохраняя  $\mu(\alpha/\sigma)^\alpha$

постоянным и равным  $u_0$ . Как нетрудно видеть, степени  $(t - t_0)^\alpha = (\alpha/\sigma)^\alpha (1 + \sigma t/\alpha)^\alpha$  при этом стремятся к экспонентам и решение (7.20) стремится к решению (7.18) как к своему пределу.

Решения вида  $e^{\alpha t} f(xe^{\beta t})$  появлялись в различных задачах механики начиная с работы С. Гольдштейна [130], посвященной теории пограничного слоя. Проведенный выше групповой анализ этих решений и выяснение их предельного характера были выполнены в работе [6].

#### 7.4. Вращение жидкости в цилиндрическом сосуде

Показательный пример автомодельного решения, для установления автомодельности которого соображений анализа размерности недостаточно, дает замечательная задача Соболева о малых возмущенных движениях при вращении жидкости в цилиндрическом сосуде [99]. Уравнение для возмущения давления  $p$  в этой задаче, как показано С. Л. Соболевым, имеет вид

$$\partial_{tt}^2 \Delta p + \omega^2 \partial_{zz}^2 p = 0. \quad (7.22)$$

Здесь  $t$  — время;  $z$  — координата, отсчитываемая вдоль оси вращения;  $\Delta = \partial_{\rho\rho}^2 + (1/\rho)\partial_\rho + \partial_{zz}^2$  — оператор Лапласа,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x, y$  — прямоугольные координаты в плоскости, перпендикулярной оси вращения;  $\omega$  — угловая скорость вращения.

Первым фундаментальным решением уравнения (7.22) называется решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$p(x, y, z, 0) = Q/r; \quad \partial_t p(x, y, z, 0) = 0, \quad (7.23)$$

где  $Q = \text{const}$ ,  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ . Искомое решение зависит от определяющих параметров:  $\rho, Q, z, \omega, t$ , размерности которых суть:

$$[Q] = [p]L; \quad [\rho] = [z] = L; \quad [\omega] = T^{-1}; \quad [t] = T. \quad (7.24)$$

Далее, как нетрудно показать, анализ размерностей дает:

$$p = Q\Phi(\xi, \eta)/\rho; \quad \xi = \rho/z; \quad \eta = \omega t. \quad (7.25)$$

Подставляя (7.25) в (7.22) и (7.23) и интегрируя с учетом условия регулярности решения на оси вращения<sup>1</sup>, приведем эти соотношения соответственно к виду

$$\xi^2 \partial_\xi \Psi + \partial_{\eta\eta\xi}^2 \partial_\xi (\Psi/\xi) = 0; \quad (7.26)$$

$$\Psi(\xi, 0) = \xi; \quad \partial_\eta \Psi(\xi, 0) = 0. \quad (7.27)$$

Здесь  $\xi = \xi/\sqrt{1 + \xi^2} = \rho/r$ ,  $\Psi(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta)$ .

<sup>1</sup> Требование регулярности включает в себя также обращение в нуль величины  $\partial_{\eta\eta}^2 \Phi(0, \eta)$  — коэффициента при «цилиндрической» обобщенной функции  $\Delta(1/\rho)$ , получающейся при подстановке (7.25) в уравнение (7.22). Решение (7.31) этому условию удовлетворяет.

Если  $\Psi(\zeta, \eta)$  — решение задачи, то, как нетрудно проверить,  $\alpha^{-1}\Psi(\alpha\zeta, \alpha^{-1}\eta)$  тоже удовлетворяет всем условиям задачи при произвольном положительном  $\alpha$ . В силу единственности решения отсюда следует, что функция  $\Psi(\zeta, \eta)$  при любом  $\alpha > 0$  удовлетворяет соотношению инвариантности

$$\Psi(\zeta, \eta) = \alpha^{-1}\Psi(\alpha\zeta, \alpha^{-1}\eta). \quad (7.28)$$

Положив теперь  $\alpha = 1/\zeta$ , получаем

$$\Psi(\zeta, \eta) = \zeta\Psi(1, \zeta\eta) = \zeta\Xi(\zeta\eta), \quad (7.29)$$

т. е. функция  $\Psi(\zeta, \eta)$  может быть представлена через функцию одной переменной. Подставляя (7.29) в (7.25) и возвращаясь к исходным переменным, находим:

$$p = Q\Xi(\omega t/r)/r. \quad (7.30)$$

Таким образом, первое фундаментальное решение уравнения Соболева (7.22) действительно оказывается автомодельным. Подстановка (7.30) в уравнение (7.22) и начальные условия (7.23) легко позволяет определить выражение для  $p$  через бесселевы функции:

$$\Xi = J_0(\omega t/r); \quad p = QJ_0(\omega t/r)/r. \quad (7.31)$$

Использованию инвариантности относительно более широкой группы для доказательства автомодельности и определения автомодельных переменных можно придать форму применения анализа размерности; применяемый здесь простой прием также часто бывает полезен.

Именно, запишем соотношения (7.26), (7.27) в виде

$$\begin{aligned} \zeta^2 \partial_\zeta \Psi + \lambda^2 \partial_{\eta\eta} \zeta \partial_\zeta (\Psi/\zeta) &= 0; \\ \Psi(\zeta, 0) = \mu\zeta; \quad \partial_\eta \Psi(\zeta, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

и на время забудем, что величины  $\Psi, \zeta, \eta$  безразмерные, а  $\lambda$  и  $\mu$  равны единице. Наоборот, предположим, что  $\zeta$  имеет какую-то размерность  $Z$ ,  $\eta$  — размерность  $H$ ,  $\Psi$  — размерность  $[\Psi]$ . Тогда, для того чтобы все члены уравнений (7.31) имели одинаковую размерность, нужно, чтобы размерности  $\lambda$  и  $\mu$  были следующими:

$$[\mu] = [\Psi] Z^{-1}; \quad [\lambda] = ZH. \quad (7.33)$$

Решение  $\Psi$ , как следует из (7.32), может зависеть только от  $\zeta, \eta, \lambda, \mu$ . Отсюда при помощи стандартной процедуры анализа размерностей находим

$$\Psi = \mu\zeta\Phi(\lambda/\zeta\eta) = \mu\zeta\Xi(\zeta\eta/\lambda). \quad (7.34)$$

Полагая  $\mu = \lambda = 1$ , получаем снова (7.29).

Приведенные примеры показывают, как установление инвариантности задачи относительно той или иной группы непрерывных преобразований позволяет сократить число аргументов функций так же, как и соображения анализа размерности, основанные на

инвариантности относительно подгруппы группы преобразования подобия. Поэтому фундаментальное значение имеет отыскание групп, относительно которых инвариантны уравнения тех или иных физических явлений, а также инвариантных относительно этих групп решений. Естественно встает вопрос об алгоритме отыскания максимально широкой группы преобразований, относительно которой данная система дифференциальных уравнений инвариантна. Основные идеи здесь принадлежат Софусу Ли; в последнее время был получен ряд результатов общего характера и указаны приложения к частным системам уравнений, встречающимся в различных задачах механики и физики (см. монографии Л. В. Овсяникова [80], Биркгофа [112], Блюмана и Коула [113]). В перечисленных монографиях можно найти изложение общего подхода и многочисленные примеры. Проведенное выше изложение имело своей целью продемонстрировать общую идею использования более широких групп для поиска автомодельных решений на показательных примерах и указать на полезную в ряде случаев возможность формального применения стандартной техники анализа размерностей при работе с более общими группами. Разумеется, анализ размерности можно применять и не зная математической формулировки задачи. Казалось бы, использовать инвариантность относительно группы более общей, нежели группа подобных преобразований величин с независимыми размерностями, можно только располагая математической формулировкой задачи. На самом деле это не так, и инвариантность относительно более широкой группы тоже может подсказываться физическими соображениями.

Заметим, что рассмотрение автомодельных решений как промежуточных асимптотических представлений тесно связано с получившим в последние двадцать лет широкое развитие и применение методом сингулярных возмущений [211, 120, 157].

Автомодельные решения являются по смыслу внутренними или внешними асимптотиками решения полной задачи в зависимости от того, какой из масштабов независимой переменной берется за основу при анализе промежуточной асимптотики. Таким образом, определение постоянных, входящих в автомодельные решения второго рода, может в ряде случаев осуществляться сращиванием автомодельного решения с дополнительной асимптотикой.

## 7.5. Спектр показателей степени в автомодельных переменных

При отыскании показателей степени времени в выражении автомодельных переменных для автомодельных решений второго рода или, что то же, скоростей распространения для решений типа бегущей волны мы пришли к своеобразным задачам на собственные значения для нелинейных операторов. Эти задачи по своей природе близки к классическим задачам на собственные значения для линейных дифференциальных операторов, и для них также

встает вопрос о структуре спектра — множества собственных значений.

Действительно, вспомним хорошо известную задачу колебаний струны, описываемую уравнением

$$\partial_{tt}^2 u = \partial_{xx}^2 u + q(x) u \quad (7.35)$$

( $u$  — смещение;  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль струны;  $t$  — время) при условиях закрепления на концах

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (7.36)$$

( $l$  — длина струны). Разделяя переменные, мы ищем решение в виде

$$u = \exp(i\sqrt{\lambda}t) \Psi(x, \lambda). \quad (7.37)$$

Для определения  $\Psi(x, \lambda)$  при этом получается краевая задача

$$\begin{aligned} \Psi''(x, \lambda) + [\lambda + q(x)] \Psi(x, \lambda) &= 0; \\ \Psi(0, \lambda) = \Psi(l, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Вообще говоря, при произвольном  $\lambda$ , нетривиального решения этой краевой задачи не существует. Имеются, однако, исключительные значения  $\lambda$  — собственные значения, при которых нетривиальное решение краевой задачи (7.38) существует. Эти собственные значения образуют множество (спектр) той или иной структуры: дискретный, непрерывный, смешанный и т. д. в зависимости от свойств функции  $q(x)$ .

Можно взглянуть на все это несколько иначе. Уравнение (7.35) и граничные условия (7.36) инвариантны относительно двухпараметрической группы преобразований

$$u' = au; \quad t' = t + \beta; \quad x' = x. \quad (7.39)$$

Это означает, что, подставляя соотношения (7.39) в (7.35) и (7.36), мы снова получаем ту же задачу в переменных  $u'$ ,  $x'$ ,  $t'$  при произвольных параметрах группы — постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ . Разделяя переменные, мы на самом деле ищем решения, инвариантные относительно некоторой однопараметрической подгруппы этой группы. Подгруппа соответствует следующей связи между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = \exp(-t\sqrt{\lambda}\beta), \quad (7.40)$$

а инвариантные решения имеют вид (7.37). Собственные значения  $\lambda$ , определяющие подгруппу, находятся из условия существования инвариантного решения (7.37) в целом, т. е. решения, удовлетворяющего условиям (7.36).

Вполне аналогичная ситуация имеет место и для решений типа стационарных бегущих волн. В самом деле, чтобы такое решение существовало, уравнения и граничные условия должны быть ин-

вариантны относительно двухпараметрической группы преобразований сдвига  $x' = x + a; t' = t + \beta; u' = u$ . (7.41)

Отыскивая решение типа бегущей волны, мы и здесь ищем однопараметрическую подгруппу этой группы преобразований, соответствующую  $\alpha = \lambda\beta + \text{const}$ , где  $\lambda$  — собственное значение, и решение, инвариантное относительно этой подгруппы:

$$u(x', t') = u(x, t).$$

Собственные значения  $\lambda$ , выделяющие из основной группы однопараметрическую подгруппу, также определяются из условия существования инвариантного решения в целом, т. е. удовлетворения инвариантным решением уравнению и граничным условиям. Спектр собственных значений и в этом случае может иметь различную природу. Так, в рассмотренной в предыдущей главе за-

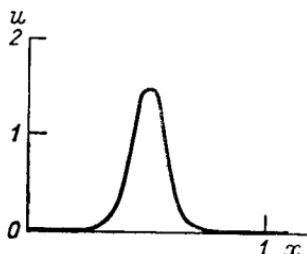


Рис. 7.1. Уединенная волна — солитон.

даче о распространении гена он непрерывен и полуограничен:  $\lambda \geqslant \lambda_0$ . В задаче о распространении пламени спектр состоит из одной точки. Любопытна ситуация с замечательным уравнением Кортевега—де Фриза, первоначально полученным в теории волн на поверхности мелкой воды и нашедшим затем многочисленные применения в других задачах (см. [51, 145]):

$$\partial_t u + u \partial_x u + \beta \partial_{xxx}^3 u = 0. \quad (7.42)$$

Здесь для задачи теории волн  $u$  с точностью до постоянного множителя — продольная компонента скорости, постоянная в данном приближении по глубине канала:  $\beta = c_0 h^2 / 6$ ,  $c_0 = \sqrt{gh}$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $h$  — глубина невозмущенного слоя жидкости;  $t$  — время;  $x$  — координата в системе, движущейся относительно покоящейся на бесконечности жидкости со скоростью  $c_0$ . Аналогичное уравнение справедливо в соответствующем приближении и для возвышения свободной поверхности над ее невозмущенным уровнем. Уравнение (7.42) имеет решения типа бегущей волны, так называемые солитоны (рис. 7.1):

$$u = u(\xi) = u_0 \operatorname{ch}^{-2} [\sqrt{u_0 / 12\beta} \xi], \quad (7.43)$$

где  $\xi = x - \lambda t + c$ ,  $u_0 = 3\lambda$ . Решение (7.43) при любых  $\lambda > 0$  удовлетворяет условиям

$$u(\infty) = u(-\infty) = 0. \quad (7.44)$$

Спектр собственных значений  $\lambda$  непрерывен и полуограничен:  $\lambda \geq 0$ . Имеется, однако, существенная разница между непрерывным спектром в задаче о распространении гена и в рассматриваемой задаче. В первой задаче только нижняя точка спектра  $\lambda = \lambda_0$  удовлетворяет требованию, чтобы решения начальных задач с начальными данными переходного типа стремились к данному решению типа бегущей волны при  $t \rightarrow \infty$ ; для всех остальных  $\lambda$  это не так, и поэтому соответствующие решения неустойчивы. Для уравнения Кортевега—де Фриза Гарднер, Грин, Крускал и Миура [129] (см. также [159]) сделали замечательное открытие: при  $t \rightarrow \infty$  и больших положительных  $x$  любое решение задачи Коши

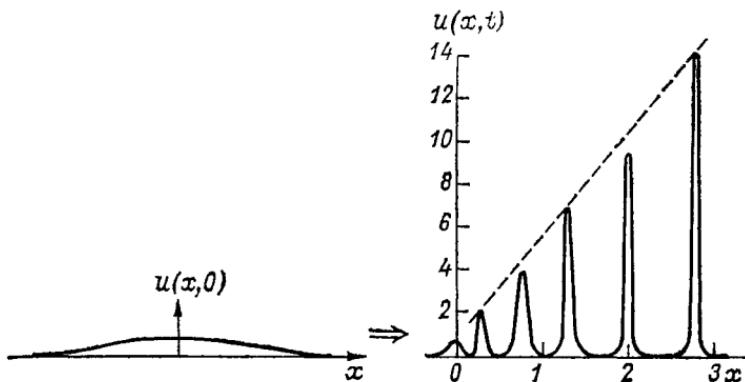


Рис. 7.2. Начальное возвышение свободной поверхности тяжелой жидкости в неглубоком канале порождает конечную серию единичных волн (солитонов).

при достаточно быстро убывающем на бесконечности начальном распределении  $u(x, 0)$  асимптотически представляется (рис. 7.2) конечной суммой решений вида (7.43)

$$u \sim \sum_{n=1}^N 2 |\mu_n| \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \sqrt{\frac{|\mu_n|}{6\beta}} \left( x - \frac{2}{3} |\mu_n| t + c_n \right) \right\}, \quad (7.45)$$

где  $\mu_n$  — дискретные собственные значения оператора Шредингера с потенциалом, равным  $-u(x, 0)$ :

$$d^2\Psi/dx^2 + (1/6\beta)[\mu + u(x, 0)]\Psi = 0; \quad \Psi(\pm\infty) = 0. \quad (7.46)$$

Таким образом, любое решение типа солитона может быть промежуточной асимптотикой решения задачи Коши при  $t \rightarrow \infty$ , но какое именно — определяется начальным условием, т. е. функцией  $u(x, 0)$ .

Для автомодельных решений имеет место аналогичная ситуация. Действительно, для существования автомодельного решения необходимо, чтобы уравнения и граничные условия задачи были инвариантны относительно некоторой группы — определенной под-

группы группы преобразований подобия независимых и зависимых переменных. При отыскании автомодельных решений ищется подгруппа этой группы и решения, которые эта подгруппа оставляет инвариантными. Здесь также, естественно, возникают собственные значения  $\lambda$ , которые определяются из условия существования в целом инвариантного (автомодельного) решения. Рассмотренные выше примеры иллюстрируют сказанное. Обратимся к задаче о растекании массы жидкости при фильтрации в упругопластической пористой среде, рассмотренной в главе 3. Основное уравнение

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \geq 0; \quad \partial_t u = \kappa_1 \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \leq 0, \quad (7.47)$$

и условие на бесконечности

$$u(\pm\infty, t) = 0 \text{ при } t \geq 0, \quad (7.48)$$

а также условия непрерывного с непрерывной производной по  $x$  сращивания в точках  $x = \pm x_0(t)$ , в которых величина  $\partial_t u$  обращается в нуль, инвариантны относительно двухпараметрической группы преобразований

$$u' = au; \quad t' = \beta^2 t; \quad x' = \beta x. \quad (7.49)$$

Группа (7.49) представляет собой подгруппу трехпараметрической группы преобразований подобия  $u' = A_1 u$ ;  $t' = A_2 t$ ;  $x' = A_3 x$ . Ищется однопараметрическая подгруппа группы (7.49), для которой  $a = \beta^{2\lambda}$ , и автомодельное решение  $u = t^\lambda f(x/\sqrt{t})$ , которое эта однопараметрическая подгруппа оставляет инвариантным. Собственное значение  $\lambda$  определяется из условия существования автомодельного решения в целом. В этой задаче спектр оказался дискретным, при  $\epsilon = x_1/\kappa$  не слишком больших, даже состоящим из одной точки.

Аналогично, уравнения сферически симметричного адиабатического движения идеального газа, условия на сильной ударной волне, условие симметрии и условие на бесконечности в задаче о сильном взрыве с излучением или притоком энергии на фронте волны (глава 4) инвариантны относительно двухпараметрической группы преобразований

$$p' = a^2 p; \quad \rho' = \rho; \quad v' = av; \quad r' = a\beta r; \quad t' = \beta t. \quad (7.50)$$

Ищется однопараметрическая подгруппа этой группы, для которой  $a = \beta^\lambda$ , и автомодельное решение

$$\rho = \rho_0 R(r/t^{1+\lambda}); \quad p = \rho_0 (r^2/t^2) P(r/t^{1+\lambda}); \quad v = (r/t) V(r/t^{1+\lambda}), \quad (7.51)$$

инвариантное относительно этой подгруппы. Спектр собственных значений  $\lambda$ , определяемых из условия существования автомодельного решения в целом, оказался при  $\gamma_1 < 2\gamma + 1$ ,  $\gamma < 2$  ( $\gamma$  и  $\gamma_1$  — показатели адиабаты соответственно в области непрерывного движения и на фронте), как мы видели, состоящим из одной точки.

В задаче о сходящейся сильной ударной волне, впервые рассмотренной Гудерлеем [134] и также приводящей к автомодельным решениям Бехерта—Гудерлея (7.51), но при других граничных условиях, спектр при значениях показателя адиабаты  $\gamma > \gamma_0 \approx 1,87$  оказался (см. [28]) непрерывным и полуограниченным. Имеется гипотеза И. М. Гельфандса, согласно которой, промежуточная асимптотика неавтомодельной задачи при  $t \rightarrow 0$  (моменту схлопывания) выделяет, как и в задаче о распространении гена, нижнюю точку спектра, но вопрос на самом деле остается открытым, поскольку численный счет этой гипотезы не подтвердил.

Поучительна автомодельная интерпретация изложенного выше результата для уравнения Кортевега—де Фриза (7.42). Если положить в этом уравнении  $x = \ln \xi$ ,  $t = \ln \tau$ , то уравнение (7.42) перепишется в виде

$$\tau \partial_t u + \xi u \partial_\xi u + \beta (\xi^3 \partial_{\xi\xi\xi}^3 u + 3\xi^2 \partial_{\xi\xi}^2 u + \xi \partial_\xi u) = 0. \quad (7.52)$$

Решение типа бегущей волны (7.43) примет при этом автомодельную форму

$$u = 12\lambda / [2 + \eta^{\sqrt{\lambda/\beta}} + \eta^{-\sqrt{\lambda/\beta}}]; \quad \eta = \xi/A\tau^\lambda, \quad (7.53)$$

где  $A = e^{-c}$  — постоянная. Заметим, что выражение (7.53) не мало только при  $\eta$  порядка единицы; если  $\eta$  велико или мало, выражение (7.53) мало. Спектр собственных значений  $\lambda$ , получающийся при непосредственном построении решений типа стационарной бегущей волны, непрерывен и полуограничен:  $\lambda \geq 0$ . Упомянутый выше результат Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [129] в автомодельной трактовке выражается следующим образом: асимптотика решения начальной задачи для уравнения (7.52) при  $\tau \rightarrow -\infty$  и больших  $\xi$  представляется в виде

$$u \sim \sum_{n=1}^N 12\lambda_n \left\{ 2 + (\xi/A_n \tau^{\lambda_n})^{\sqrt{\lambda_n/\beta}} + (\xi/A_n \tau^{\lambda_n})^{-\sqrt{\lambda_n/\beta}} \right\}^{-1}. \quad (7.54)$$

Таким образом, начальное распределение  $u(\xi, 0)$ , по предположению достаточно быстро убывающее при  $\xi \rightarrow 0, \infty$ , определяет  $N$  положительных констант  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  и  $N$  положительных констант  $A_1, \dots, A_N$  и выделяет  $N$  интервалов по  $\xi$ . При этом внутри каждого из интервалов  $\xi = O(\tau^{\lambda_n})$  асимптотика решения автомодельна и имеет вид

$$u \sim 12\lambda_n \left\{ 2 + (\xi/A_n \tau^{\lambda_n})^{\sqrt{\lambda_n/\beta}} + (\xi/A_n \tau^{\lambda_n})^{-\sqrt{\lambda_n/\beta}} \right\}^{-1}. \quad (7.55)$$

Вне упомянутых интервалов решение  $u$  мало:  $u = o(1)$ . Здесь показательно, что в автомодельной асимптотике от начальных условий исходной невырожденной задачи зависят не только постоянные  $A_n$ , как это обычно бывает, но и показатели степени  $\lambda_n$  в выражениях для автомодельных переменных. С аналогичной ситуацией мы столкнемся ниже при рассмотрении автомодельного вы-

рождения однородной изотропной турбулентности. Этот пример еще раз подчеркивает недостаточность в общем случае анализа размерности для определения показателей степени в автомодельных переменных.

Приведенные примеры демонстрируют разнообразие возможных структур спектра нелинейных задач на собственные значения, возникающих при построении автомодельных решений.

## 7.6. Устойчивость инвариантных решений

Постановка вопроса об устойчивости автомодельных решений отличается определенным своеобразием. В этом и следующем параграфах намечается и иллюстрируется на нескольких показательных примерах общий подход к исследованию устойчивости инвариантных, и в частности автомодельных, решений. Изложение большой массы накопленных в этой области конкретных результатов далеко вышло бы за рамки настоящей монографии.

Простой пример сразу введет нас в курс дела. Уравнение

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u + f(u), \quad (7.56)$$

где функция  $f(u)$  ограничена вместе со своей производной и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} f(u) &\equiv 0 \text{ при } u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta; \quad f(u_2) = 0; \\ f(u) &> 0 \text{ при } u_1 + \Delta < u < u_2, \end{aligned} \quad (7.57)$$

представляет собой простейшую модель теплового распространения пламени ( $u$  — температура), если плотность газовой смеси постоянна и концентрация горючего и температура в любой момент связаны законом подобия (это было показано в главе 6). Уравнение (7.56) имеет решения типа бегущей волны:

$$u = U(\zeta); \quad \zeta = x - \lambda t + c, \quad (7.58)$$

где  $c$  — произвольная постоянная, а скорость распространения единственным образом определяется решением нелинейной задачи на собственные значения — уравнения

$$\lambda dU/d\zeta + \kappa d^2U/d\zeta^2 + f(U) = 0, \quad (7.59)$$

получающегося подстановкой (7.58) в (7.56), при условиях

$$U(-\infty) = u_2; \quad U(\infty) = u_1. \quad (7.60)$$

Как нетрудно показать, решение (7.58) представляет собой монотонно убывающую функцию (рис. 7.3). Действительно, минимум функции  $U(\zeta)$ , лежащий между  $U = u_1$  и  $U = u_2$ , невозможен, так как в этой точке должны были бы выполняться соотношения  $dU/d\zeta = 0$ ,  $d^2U/d\zeta^2 > 0$ ,  $f(U) > 0$ , что в силу уравнения (7.59) не-

возможно. Максимум этой функции в тех же пределах тоже невозможен, поскольку при этом между  $U = u_1$  и  $U = u_2$  должен был бы существовать минимум, что невозможно.

Устойчивость решения (7.58) имеет первостепенное значение. Действительно, как уже не раз говорилось, инвариантное решение (7.58) представляет физический интерес прежде всего как асимптотическое представление определенного класса решений невырожденной начальной задачи для уравнения (7.56) с какими-то начальными данными переходного типа. Если бы это решение было неустойчивым, так что малые возмущения, наложенные на соответствующее ему распределение температуры в некоторый момент, приводили бы к большим отклонениям распределения тем-

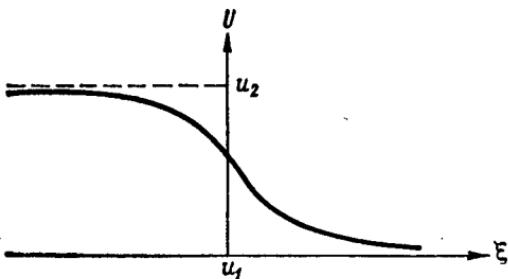


Рис. 7.3. Распределение температуры в бегущей волне монотонно.

пературы в последующие моменты, то оно (решение) было бы физически бессмысленным.

Здесь необходимо, однако, точно определить, что такое устойчивость и неустойчивость. Пусть в некоторый момент  $t = t_0$  распределение температуры определяется соотношением

$$u(x, t_0) = U(x - \lambda t_0 + c) + \delta\varphi(x), \quad (7.61)$$

где  $\delta$  — малый параметр, а  $\varphi(x)$  — функция, равная нулю вне некоторого конечного интервала, так что распределение температуры соответствует рассматриваемому решению типа бегущей волны плюс малая добавка. На первый взгляд, представляется естественным такое определение устойчивости бегущей волны: если решение любой «возмущенной» начальной задачи с данными типа (7.61) представляется при  $t > t_0$  в виде

$$u(x, t) = U(\zeta) + w(\zeta, t), \quad (7.62)$$

где функция  $w(\zeta, t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , то исходное решение устойчиво, в противном случае — нет.

Именно такое определение устойчивости и было принято Розеном [189], который пришел к выводу о возможности в рассматриваемой задаче неустойчивости, указал некоторый приближенный критерий устойчивости решения и т. д.

На самом деле такое определение устойчивости недостаточно и должно быть заменено другим. Это обстоятельство оказалось существенным для постановки вопроса об устойчивости бегущих

волн, автомодельных и вообще инвариантных решений; оно было выяснено в работе [18].

Действительно, как было показано ранее, решения типа бегущей волны инвариантны относительно однопараметрической группы сдвига по координате и времени. Поэтому решение (7.58) определяется соотношениями (7.59) и (7.60) с точностью до постоянной. Следовательно, и определение устойчивости бегущей волны тоже должно обладать соответствующей инвариантностью. В самом деле, если возмущенное решение стремится при  $t \rightarrow \infty$  не к исходному невозмущенному решению, а к сдвинутому (рис. 7.4), то нет оснований считать этот переход неустойчивостью. Инвариантное определение устойчивости бегущей волны (7.58) состоит, таким образом, в следующем: это решение устой-

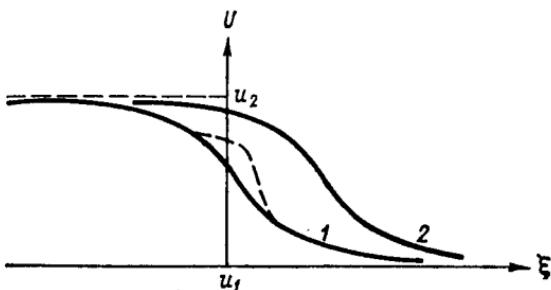


Рис. 7.4. Возмущенное решение (1) стремится к сдвинутому невозмущенному (2), и нет оснований считать это неустойчивостью.

чиво, если найдется такое постоянное  $a$ , что решение возмущенной задачи представляется при  $t > t_0$  в виде

$$u(x, t) = U(\xi + a) + w(\xi, t), \quad (7.63)$$

где  $w(\xi, t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . В противном случае решение считается неустойчивым.

В дальнейшем мы ограничимся исследованием устойчивости в линейном приближении. При малых  $\delta$  величина  $a$  должна быть мала. Разлагая  $U(\xi + a)$  в ряд и ограничиваясь в соответствии с принятым линейным приближением первым членом разложения, переформулируем определение устойчивости (7.63) так: если найдется такое постоянное  $a$ , стремящееся к нулю вместе с  $\delta$ , что решение возмущенной задачи представляется в виде

$$u(x, t) = U(\xi) + aU'(\xi) + w(\xi, t), \quad (7.64)$$

где  $w(\xi, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то невозмущенное решение устойчиво.

Докажем устойчивость бегущей волны (7.58) в указанном смысле при любых  $f(u)$ , удовлетворяющих условиям (7.57). Положим в уравнении (7.56)  $u(x, t) = U(\xi) + \delta v(\xi, t)$ . Отбрасывая члены порядка малости по  $\delta$  выше первого и используя то, что  $U(\xi)$  удовлетворяет уравнению (7.59), получаем для  $v(\xi, t)$

$$\partial_t v - \lambda \partial_\xi v = \kappa \partial_{\xi\xi}^2 v + f'[U(\xi)]v. \quad (7.65)$$

Применяя метод разделения переменных, строим решение начальной задачи для уравнения (7.65) с произвольным, но обра-

щающимся в нуль вне некоторого конечного интервала, начальным распределением возмущения  $v(\zeta, 0)$  в виде ряда Фурье

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\mu_n t} \Psi(\zeta, \mu_n), \quad (7.66)$$

где функция  $\Psi(\zeta, \mu_n)$  —  $n$ -я собственная функция оператора, определяемого уравнением

$$\lambda d\Psi/d\zeta + \kappa d^2\Psi/d\zeta^2 + \{\mu + f'[U(\zeta)]\} \Psi = 0 \quad (7.67)$$

и условиями стремления к нулю быстрее любой степени  $|\zeta|$  при  $\zeta = \pm\infty$ . Здесь  $\mu_n$  —  $n$ -е собственное значение.

Коэффициенты  $c_n$  в формуле (7.66) определяются разложением начального возмущения  $v(\zeta, 0)$  в ряд по функциям  $\Psi(\zeta, \mu_n)$ . Согласно формуле (7.66), если будет показано, что все собственные значения  $\mu_n$  неотрицательны, то будет доказана устойчивость бегущей волны в смысле соотношения (7.64).

Далее, продифференцировав (7.59) по  $\zeta$ :

$$\lambda \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{dU}{d\zeta} \right) + \kappa \frac{d^2}{d\zeta^2} \left( \frac{dU}{d\zeta} \right) + f'[U(\zeta)] \frac{dU}{d\zeta} = 0, \quad (7.68)$$

получаем, что  $dU/d\zeta$  удовлетворяет уравнению (7.67) при  $\mu = 0$ . Поскольку  $dU/d\zeta$  экспоненциально стремится к нулю при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ , мы видим, что  $dU/d\zeta$  с точностью до множителя совпадает с собственной функцией, отвечающей  $\mu = 0$ . Из проведенного выше доказательства монотонности функции  $U(\zeta)$  следует, что  $dU/d\zeta$  при конечных  $\zeta$  в нуль не обращается. Однако собственная функция оператора (7.67) имеет нули в числе, равном ее порядковому номеру.<sup>1</sup> Следовательно,  $dU/d\zeta$  отвечает нижнему собственному значению. Поскольку соответствующее собственное значение равно нулю, отрицательных собственных значений в задаче нет; все  $\mu_n \geq 0$ . Что же касается  $\mu_0 = 0$ , то это собственное значение, в согласии со сказанным выше, устойчивости не мешает, поскольку соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя равна  $dU/d\zeta$ , и вклад этой собственной функции как раз соответствует сдвигу бегущей волны. Таким образом, устойчивость бегущей волны (7.58) в сформулированном смысле доказана.<sup>2</sup>

Ясно, что в достаточно широких для наших целей предположениях изложенные соображения имеют вполне общий смысл. В частности, они легко переформулируются применительно к устойчивости автомодельных решений.

<sup>1</sup> Действительно, уравнение (7.67) приводится к самосопряженному виду, если положить в нем  $\Psi = e^{-\lambda\zeta/2\kappa} \varphi$ . Однако множитель  $e^{-\lambda\zeta/2\kappa}$  в нуль не обращается, а для самосопряженного оператора сформулированное свойство, как известно, имеет место.

<sup>2</sup> Подчеркнем, что проведенное рассуждение доказывает устойчивость пламени только при указанных предположениях. В частности, если подобие полей концентрации и температуры не имеет места (например, при горении пороха), возникает неустойчивость.

## 7.7. Устойчивость автомодельных решений

Как мы видели автомодельные решения определяются непосредственным построением с точностью до некоторой константы  $A$ , которая для автомодельных решений первого рода находится из законов сохранения, а для автомодельных решений второго рода может быть найдена только прослеживанием эволюции неавтомодельного решения, поскольку законы сохранения принимают здесь неинтегрируемую форму.

По определению, *автомодельное решение устойчиво, если решение всякой возмущенной задачи с достаточно малыми возмущениями представляется в виде автомодельного решения, отвечающего измененной, вообще говоря, константе  $A$  плюс некоторая добавка, отношение которой к невозмущенному решению стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$* <sup>1</sup>.

Опираясь на это определение, проведем исследование устойчивости решения модифицированной задачи о тепловом источнике, рассмотренной в главе 3.

Как показано в главе 3 с использованием численного счета, автомодельная промежуточная асимптотика решения начальной задачи для уравнения

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \geq 0; \quad \partial_t u = \kappa_1 \partial_{xx}^2 u \text{ при } \partial_t u \leq 0 \quad (7.69)$$

имеет при  $\kappa_1 \neq \kappa$  вид автомодельного решения второго рода

$$u = A(\kappa t)^{-(1+\alpha)/2} f(\xi, \varepsilon); \quad \xi = x/\sqrt{\kappa t}; \quad \varepsilon = \kappa_1/\kappa, \quad (7.70)$$

где функция  $f(\xi, \varepsilon)$  выражается через функции параболического цилиндра. Для автомодельного решения (7.70) при  $|x| < \xi_0 \sqrt{\kappa t}$  производная  $\partial_t u < 0$ , а при  $|x| > \xi_0 \sqrt{\kappa t}$   $\partial_t u > 0$ , так что смена коэффициента в уравнении (7.69) происходит при

$$x = \pm \xi_0 \sqrt{\kappa t}. \quad (7.71)$$

Постоянные  $\alpha$  и  $\xi_0$  находятся из системы уравнений

$$D_{\alpha+2}(\xi_0/\sqrt{2}) = 0; \quad M(-1 - \alpha/2, 1/2, \xi_0^2/4\varepsilon) = 0. \quad (7.72)$$

Рассмотрим теперь в соответствии с указанной выше общей процедурой аналитического исследования устойчивости решение возмущенной начальной задачи, начальное условие для которого при  $t = t_0$  можно без потери общности записать в виде

$$u(x, t_0) = [Af(x/\sqrt{\kappa t_0}, \varepsilon) + \delta v_0(x/\sqrt{\kappa t_0})](\kappa t_0)^{-(1+\alpha)/2}, \quad (7.73)$$

<sup>1</sup> Для удобства неавтомодельная переменная отождествляется со временем  $t$ .

где  $\delta$  — малый параметр, а функция  $v_0(\xi)$  обращается в нуль вне некоторого конечного интервала по  $\xi$ . В линейном приближении при  $t > t_0$

$$u(x, t) = (xt)^{-(1+\alpha)/2} [Af(\xi, \varepsilon) + \delta v(\xi, \tau)], \quad (7.74)$$

где  $v(\xi, \tau)$  — возмущение. Вместо времени  $t$  удобно для возмущения взять в качестве независимой переменной  $\tau = \ln(t/t_0)$ . Поверхности  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , на которых обращается в нуль  $\partial_t u$ , вследствие возмущения также смещаются, так что

$$x_1(t) = (\xi_0 + \beta_1(\tau)) \sqrt{xt}; \quad x_2(t) = -(\xi_0 + \beta_2(\tau)) \sqrt{xt}. \quad (7.75)$$

Действительно, возмущение не обязано быть симметричным, поэтому  $\beta_1(\tau) \neq \beta_2(\tau)$ . Подставляя возмущенное решение (7.74), (7.75) в основное уравнение, получаем уравнение для возмущения при  $\xi > 0$  в виде

$$\begin{aligned} \partial_\tau v &= \varepsilon \partial_{\xi\xi}^2 v + (\xi/2) \partial_\xi v + (1 + \alpha) v/2 \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \xi_0; \\ \partial_\tau v &= \varepsilon \partial_{\xi\xi}^2 v + (\xi/2) \partial_\xi v + (1 + \alpha) v/2 + [(\varepsilon - 1) A/\delta] d^2 f/d\xi^2 \\ &\quad \text{при } \xi_0 < \xi \leq \xi_0 + \beta_1(\tau); \\ \partial_\tau v &= \partial_{\xi\xi}^2 v + (\xi/2) \partial_\xi v + (1 + \alpha) v/2 \quad \text{при } \xi_0 + \beta_1(\tau) \leq \xi < \infty \end{aligned} \quad (7.76)$$

и аналогичное уравнение при  $\xi < 0$ .

Далее, из (7.74) получаем выражение для производной  $\partial_t u$  возмущенного решения:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= (xt)^{-(1+\alpha)/2} (1/t) \{ -[(1 + \alpha)/2] [Af(\xi, \varepsilon) + \delta v(\xi, \tau)] - \\ &\quad - (\xi/2) [Af'(\xi, \varepsilon) + \delta \partial_\xi v] + \delta \partial_\tau v \}. \end{aligned}$$

Полагая в этом соотношении  $\xi = \xi_0 + \beta_1(\tau)$ , линеаризуя его и имея в виду, что  $f''(\xi_0) = 0$  и  $\partial_t u = 0$  при  $\xi = \xi_0 + \beta_1(\tau)$ , получаем:

$$\delta [\partial_\tau v - (1 + \alpha) v/2 - (\xi/2) \partial_\xi v] - (1 + \alpha/2) Af'(\xi_0) \beta_1(\tau) = 0,$$

откуда следует, что смещение границы пропорционально малому параметру  $\delta$ . Линеаризуя (7.76), получаем для  $v(\xi, \tau)$  уравнение

$$\partial_\tau v = \varepsilon \partial_{\xi\xi}^2 v + (\xi/2) \partial_\xi v + (1 + \alpha) v/2 = 0 \quad \text{при } |\xi| < \xi_0;$$

$$\partial_\tau v = \partial_{\xi\xi}^2 v + (\xi/2) \partial_\xi v + (1 + \alpha) v/2 = 0 \quad \text{при } |\xi| > \xi_0. \quad (7.77)$$

При  $\xi = \xi_0$  функции  $v$  и  $\partial_\xi v$  должны быть непрерывны. В самом деле, из второго уравнения (7.76), интегрируя по  $\xi$  от  $\xi = \xi_0$  до  $\xi = \xi_0 + \beta_1(\tau)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \left. \varepsilon \partial_\xi v \right|_{\xi=\xi_0}^{&\xi=\xi_0 + \beta_1(\tau)} &= \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \beta_1(\tau)} [\partial_\tau v - (\xi/2) \partial_\xi v - (1 + \alpha) v/2] d\xi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon - 1}{\delta} A \frac{df}{d\xi} \left. \right|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_0 + \beta_1(\tau)}. \end{aligned}$$

Величины под знаком интеграла в правой части ограничены, а  $\beta_1(\tau)$  имеет порядок  $\delta$ , так что весь интеграл имеет порядок  $\delta$ . Далее, при  $\xi = \xi_0$  величина  $f''(\xi, \varepsilon)$  обращается в нуль, поэтому и второй член правой части имеет порядок  $\delta$ , откуда и из линейности приближения следует непрерывность  $\partial_\xi v$  при  $|\xi| = \xi_0$ . Непрерывность  $v$  доказывается умножением на  $\xi$  и таким же интегрированием с последующими оценками.

Решение начальной задачи для возмущения ищется в виде

$$v(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\mu_n \tau} \Psi(\xi, \mu_n). \quad (7.78)$$

Здесь функция  $\Psi(\xi, \mu_n)$  — собственная функция оператора, определяемого уравнением

$$\begin{aligned} \varepsilon d^2\Psi/d\xi^2 + (\xi/2) d\Psi/d\xi + (1 + \alpha + 2\mu) \Psi/2 &= 0 \text{ при } |\xi| \leq \xi_0; \\ d^2\Psi/d\xi^2 + (\xi/2) d\Psi/d\xi + (1 + \alpha + 2\mu) \Psi/2 &= 0 \text{ при } |\xi| > \xi_0, \end{aligned} \quad (7.79)$$

и условиями обращения в нуль быстрее любой степени  $|\xi|$  при  $\xi = \pm\infty$ :

$$\Psi(\pm\infty, \mu_n) = 0, \quad (7.80)$$

где  $\mu_n$  —  $n$ -е собственное значение этого оператора. Функции  $\Psi(\xi, \mu_n)$  непрерывны вместе со своими первыми производными по  $\xi$  при  $\xi = \pm\xi_0$ . Стандартными приемами доказывается, что спектр получившейся задачи на собственные значения дискретен.

Удобно рассмотреть отдельно симметричные  $\Psi_1$  и антисимметричные  $\Psi_2$  собственные функции оператора (7.79), (7.80). Симметричное решение уравнения (7.79), удовлетворяющее условиям (7.80), должно представляться в виде (ср. главу 3):

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= C_1 \exp(-\xi^2/8\varepsilon) [D_{\alpha+2\mu}(\xi/\sqrt{2\varepsilon}) + D_{\alpha+2\mu}(-\xi/\sqrt{2\varepsilon})] \\ &\quad \text{при } |\xi| \leq \xi_0; \end{aligned} \quad (7.81)$$

$$\Psi_1 = C_2 \exp(-\xi^2/8) D_{\alpha+2\mu}(|\xi|/\sqrt{2}) \text{ при } |\xi| > \xi_0.$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  воспользуемся условием непрерывности  $\Psi$  и  $d\Psi/d\xi$  при  $|\xi| = \xi_0$ . При этом получается система однородных линейных алгебраических уравнений; условие обращения в нуль определителя этой системы дает характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) &= (\alpha + 2\mu + 1) D_{\alpha+2\mu}(\xi_0/\sqrt{2}) M(-1 - (\alpha + 2\mu)/2, 1/2; \xi_0^2/4\varepsilon) + \\ &\quad + D_{\alpha+2\mu+2}(\xi_0/\sqrt{2}) M(-(\alpha + 2\mu)/2, 1/2; \xi_0^2/4\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Величины  $\alpha$  и  $\xi_0$  по-прежнему определяются соотношениями (7.72), используя которые легко показать, что  $\mu_0 = 0$  — корень уравнения (7.82). Покажем теперь, что остальные корни этого

уравнения положительны. Действительно, уравнение (7.82) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\Delta(\mu) = & (\xi_0/\sqrt{2}) D_{1+\alpha+2\mu}(\xi_0/\sqrt{2}) M(-1-(\alpha+2\mu)/2, \frac{1}{2}, \xi_0^2/4\varepsilon) + \\ & + D_{\alpha+2\mu+2}(\xi_0/\sqrt{2}) [M(-(\alpha+2\mu)/2, \frac{1}{2}, \xi_0^2/4\varepsilon) - \\ & - M(-1-(\alpha+2\mu)/2, \frac{1}{2}, \xi_0^2/4\varepsilon)] = 0.\end{aligned}\quad (7.83)$$

Известно (см. [106]), что функция  $M(a+l, \frac{1}{2}; x_0)$  есть монотонно возрастающая функция  $l$  при  $l > 0$ , если  $x_0$  — наименьший положительный корень уравнения  $M(a+l, \frac{1}{2}; x) = 0$ . Если  $\xi_0$  — наименьший положительный корень уравнения  $D_{\alpha+2}(\xi) = 0$ , то

$$D_{\alpha+2\mu+2}(\xi_0) > 0 \text{ при } \mu < 0.$$

Следовательно  $\Delta(\mu) > 0$  при всех отрицательных  $\mu$ , и, таким образом, отрицательных корней характеристическое уравнение (7.82) не имеет.

Далее, антисимметричное решение имеет вид

$$\Psi_2 = C_3 \exp(-\xi^2/8\varepsilon) [D_{\alpha+2\mu}(\xi/\sqrt{2\varepsilon}) - D_{\alpha+2\mu}(-\xi/\sqrt{2\varepsilon})] \\ \text{при } 0 \leq |\xi| \leq \xi_0;$$

$$\Psi_2 = C_4 \exp(-\xi^2/8) D_{\alpha+2\mu}(\xi/\sqrt{2}) \text{ при } \xi_0 \leq |\xi| < \infty. \quad (7.84)$$

Характеристическое уравнение для него приводится к соотношению

$$\begin{aligned}\Delta_1(\mu) = & (\xi_0/\sqrt{2}) D_{\alpha+2\mu}(\xi_0/\sqrt{2}) M(-1-(\alpha+2\mu-1)/2, \frac{1}{2}, \xi_0^2/4\varepsilon) + \\ & + \varepsilon D_{1+\alpha+2\mu}(\xi_0/\sqrt{2}) [M(-(\alpha+2\mu-1)/2, \frac{1}{2}, \xi_0^2/4\varepsilon) - \\ & - M(-1-(\alpha+2\mu-1)/2, \frac{1}{2}, \xi_0^2/4\varepsilon)] = 0.\end{aligned}\quad (7.85)$$

Сопоставляя это уравнение с (7.83), получаем, что его наименьший корень  $\mu_1 = \frac{1}{2}$ . Дальнейшее исследование обнаруживает, что наименьший положительный корень уравнения (7.83) равен  $\mu_2 = 1$ , а соответствующий корень уравнения (7.85) равен  $\mu_3 = \frac{3}{2}$ . Таким образом, соотношения (7.74) и (7.78) показывают, что решение возмущенной начальной задачи записывается в следующей форме:

$$u(x, t) = (xt)^{-(1+\alpha)/2} [(A + \delta c_0) f(\xi, \varepsilon) + \delta c_1(t_0/t)^{1/2} \Psi(\xi, \frac{1}{2}) + \\ + \delta c_2(t_0/t) \Psi(\xi, 1) + \delta c_3(t_0/t)^{3/2} \Psi(\xi, \frac{3}{2}) + o[(t_0/t)^{3/2}]], \quad (7.86)$$

где  $c_i$  — коэффициенты разложения функции  $v_0(\xi)$  в ряд Фурье по собственным функциям оператора (7.79) — (7.80). Таким образом, автомодельное решение, построенное в главе 3, оказалось устойчивым относительно малых возмущений. Как видно, в данном случае константа  $A$  также оказалась измененной:  $A' = A + \delta c_0$ , так что инвариантность принятого нами определения устойчивости автомодельных решений используется и в этом случае. Проведенное выше исследование устойчивости решения модифицированной задачи о тепловом источнике было выполнено В. И. Керчманом [52].

В линейном случае ( $\chi_1 = \chi, \varepsilon = 1, \alpha = 0$ ) получается естественный результат — устойчивость автомодельного решения типа мгновенного теплового источника.

Представление (7.86) решения возмущенной начальной задачи принимает в этом случае вид

$$u(x, t) = (1/\sqrt{ut}) [(A + \delta c_0) \exp(-\xi^2/4) - \delta c_1 (t_0/t)^{1/2} (\xi/2) \exp(-\xi^2/4) + \delta c_2 (t_0/t) (\xi^2 - 2) \exp(-\xi^2/4)/4 + \dots]. \quad (7.87)$$

Действительно, коэффициенты уравнения (7.79) в линейном случае (при  $\epsilon = 1$ ) непрерывны, и оно записывается в форме

$$d^2\Psi/d\xi^2 + (\xi/2) d\Psi/d\xi + (1 + 2\mu) \Psi/2 = 0. \quad (7.88)$$

При  $\mu = 0$  решением этого уравнения, удовлетворяющим условиям (7.80) быстрого стремления к нулю на бесконечности, будет  $e^{-\xi^2/4}$ . Эта функция не обращается в нуль ни при каком конечном  $\xi$ , следовательно, она является нулевой собственной функцией, а  $\mu = \mu_0 = 0$  — нулевым собственным значением. Производная от  $e^{-\xi^2/4}$  по  $\xi$ , равная  $-(\xi/2)e^{-\xi^2/4}$ , обращается в нуль помимо бесконечности, только при  $\xi = 0$  и удовлетворяет уравнению (7.88) при  $\mu = 1/2$ , а также условиям на бесконечности. Следовательно, это первая собственная функция, а  $\mu = \mu_1 = 1/2$  — первое собственное значение. Таким образом,  $\Psi(\xi, \mu_1) = -(\xi/2)e^{-\xi^2/4}$ . Аналогично находятся и последующие собственные значения  $\mu_n = n/2 (n = 0, 1, 2, \dots)$ , а соответствующие собственные функции равны  $n$ -й производной от  $e^{-\xi^2/4}$ .

Результат для линейного случая нетрудно получить непосредственно [44, 48], так как в этом случае имеется явное представление решения возмущенной начальной задачи.

Выполненный выше анализ продемонстрировал, что инвариантные решения — типа бегущей волны и автомодельные — представляют собой асимптотику решений определенного класса невырожденных задач с неинвариантными решениями.

## Глава 8

### ФРАКТАЛИ МАНДЕЛЬБРОТА И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ

#### 8.1. Представление о фракталях. Фрактальные кривые

В научной и научно-популярной литературе последнего времени широко обсуждаются *фрактали*. Так называются геометрические объекты: линии, поверхности, пространственные тела, имеющие сильно изрезанную форму и обладающие некоторыми специальными свойствами однородности и самоподобия, о которых будет сказано ниже. Такого рода объекты интенсивно изучались

математиками конца девятнадцатого — начала двадцатого века, в частности, в связи с построением примеров непрерывных нигде не дифференцируемых функций. Большинству физиков они казались, а некоторым кажутся и поныне, математическими уродцами, не имеющими приложений в реальных задачах естествознания и техники. В действительности это не так.

Возрождение интереса к подобным объектам и осознание их важной роли в приложениях обязано серии работ, и в особенностях примечательной монографии-эссе Б. Мандельброта [164]. Мандельброт ввел термин «фракталь» и общее понятие фракталей. Он показал, что вопреки ожиданиям это понятие, охватившее многие известные частные примеры, оказалось плодотворным в таких разнообразных и важных приложениях, как физика полимеров и геоморфология, теория броуновского движения, теория турбулентности и астрофизика, а также многих других. Именно фрактали, как оказалось, представляют собой адекватный образ многих интересных природных объектов. В монографии [164] изложены также с единой точки зрения относящиеся к этим вопросам предшествующие работы других авторов.

В этой главе мы расскажем о фракталях Мандельброта, опираясь на простейший пример фрактальных кривых, разберем свойства однородности и самоподобия, которые делают непрерывную кривую фрактальной и покажем, что основная идея фракталей тесно связана с неполной автомодельностью по параметру.

Начнем с одного показательного результата. Известным английским физиком Л. Ф. Ричардсоном была предпринята попытка [187, 164] измерить длину морского побережья острова Британия. Ричардсон выбрал следующий естественный для обычных гладких кривых способ определения этой длины. Он приблизил линию побережья на детальной карте Британии замкнутой ломаной линией, составленной из отрезков постоянной длины  $\eta$ , все вершины которой располагались на побережье. Длина  $L_\eta$  этой ломаной принималась за приближенное значение длины побережья, соответствующее данному значению  $\eta$ . Предполагалось, что при уменьшении  $\eta$  соответствующие значения длин аппроксимирующих ломаных  $L_\eta$ , будут стремиться к определенному конечному пределу, который и следует принять за длину морского побережья.

Естественно, что так и получилось, когда этот способ был применен к изображенной на той же карте окружности (рис. 8.1, кривая *a*). Однако в отличие от гладкой кривой — окружности, линия морского побережья оказалась настолько изрезанной вплоть до самых малых изображенных на карте масштабов, что с уменьшением длины звена аппроксимирующей ломаной  $\eta$  величина  $L_\eta$  к конечному пределу не стремилась. Напротив, величина  $L_\eta$  с уменьшением  $\eta$  неограниченно возрастала, причем во всем имевшемся диапазоне значений  $\eta$  это возрастание происходило по степенному закону (рис. 8.1, кривая *б*):

$$L_\eta = \lambda \eta^{1-D}, \quad (8.1)$$

где  $\lambda > 0$  и  $D > 1$  — некоторые постоянные. Для приближенной длины отдельных участков того же побережья между некоторыми его точками также получались соотношения вида (8.1) с теми же  $D$ , но другими, меньшими  $\lambda$ . Когда такое же определение было повторено для побережья Австралии (рис. 8.1, кривая  $\nu$ ), степенной закон сохранился, но уже обе постоянные  $\lambda$  и  $D$  оказались другими. Как видно, постоянная  $D$  безразмерна, постоянная же  $\lambda$  имеет причудливую размерность длины в дробной степени  $D$ .

Формальный переход к пределу при  $\eta \rightarrow 0$  в соотношении (8.1) дает малосодержательный результат: определяемая по предложен-

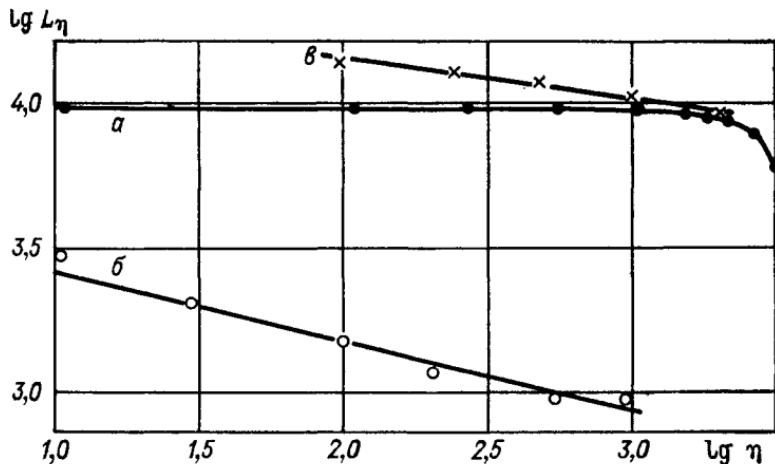


Рис. 8.1. Зависимость длины  $L_\eta$  ломаной, аппроксимирующей морское побережье, от длины  $\eta$  ее звена:

а — окружность, б — Западное побережье Британии, в — побережье Австралии.

ному способу длина морского побережья и, добавим, длина любого его отрезка бесконечны. В то же время из (8.1) следует, что отдельные куски побережья можно сравнивать по некоторой мере их протяженности, хотя и не по длине. Действительно, приблизим оба куска побережья ломанными с одной и той же длиной звена  $\eta$ . В обоих случаях получаются соотношения вида (8.1):

$$L_\eta^{(1)} = \lambda^{(1)} \eta^{1-D}; \quad L_\eta^{(2)} = \lambda^{(2)} \eta^{1-D}. \quad (8.2)$$

Как видно, отношение  $L_\eta^{(2)}/L_\eta^{(1)} = \lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}$  от длины звена ломаной  $\eta$  не зависит. Таким образом, протяженность отдельных участков побережья можно сравнивать, но не по их длинам, а по соответствующим им коэффициентам  $\lambda$ . Таким образом, сам подход к определению протяженности морского побережья теми же средствами, что и для гладких кривых, оказался неприменимым.

Адекватным представлением для линии морского побережья является не гладкая кривая типа окружности или эллипса, для которой предел длины аппроксимирующей ломаной  $L_\eta$  при стремлении к нулю длины ее звена  $\eta$  конечен, а кривая-фракталь, для

которой это не так. Представление о кривых-фракталях (или фрактальных кривых) дает так называемая триада Коха [154, 164] (рис. 8.2). Для ее построения возьмем исходный равносторонний треугольник (рис. 8.2 а) и подвергнем на первом шаге каждую из его сторон **элементарной операции** — разделим ее на три равные части и заменим среднюю часть двумя другими сторонами построенного на ее базе равностороннего треугольника (рис. 8.2 б). На следующем шаге той же элементарной операции подвергается каждая из сторон получившегося на первом шаге двенадцатиугольника и т. д. В результате на  $n$ -м шаге получается ломаная линия

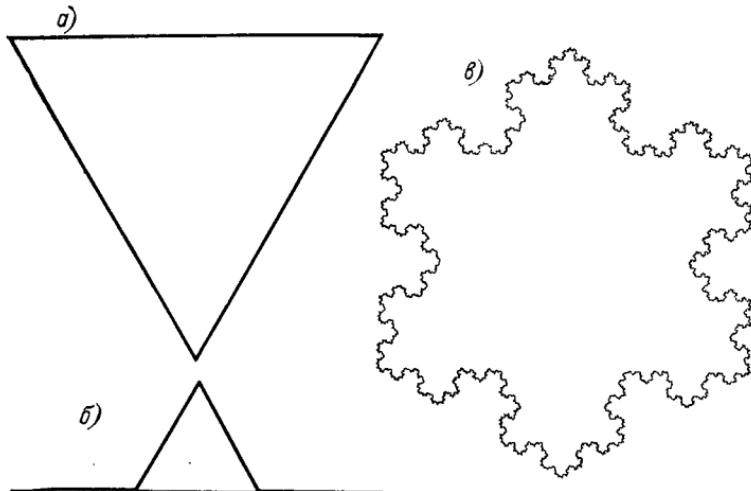


Рис. 8.2. Триада Коха.

а — исходный треугольник, б — элементарная операция, в — аппроксимирующая ломаная линия при большом  $n$ .

типа границы многоугольника, изображенного на рис. 8.2 в. Продолжая до бесконечности, получим непрерывную кривую, нигде не имеющую касательной,—триаду Коха.

Суммарная длина  $L_\eta$  и длина  $\eta$  звена получившейся на  $n$ -м шаге ломаной линии определяются следующим образом:

$$L_\eta = 3L(4/3)^n; \quad \eta = L/3^n, \quad (8.3)$$

где  $L$  — длина стороны исходного равностороннего треугольника. При  $n \rightarrow \infty$  длина звена  $\eta$  стремится к нулю, а длина всей ломаной  $L_\eta$  — к бесконечности. Второе из соотношений (8.3) дает  $n = \lg(L/\eta)/\lg 3$ , так что первое соотношение (8.3) приводится к виду

$$L_\eta = 3L \cdot 10^{\alpha \lg(L/\eta)} = 3L(L/\eta)^\alpha, \quad (8.4)$$

где  $\alpha = (\lg 4 - \lg 3)/\lg 3 = 0,2618\dots$  — трансцендентное число. Положим

$$\lambda = L^D; \quad D = 1 + \alpha = \lg 4/\lg 3 = 1,2618\dots, \quad (8.5)$$

тогда соотношение (8.4) приводится к той же форме (8.1), что и эмпирическое уравнение Ричардсона для приближенной длины морского побережья.

Из соотношения (8.1) следует, что число звеньев аппроксимирующей ломаной с длиной звена  $\eta$  равно

$$N = L_\eta / \eta = \lambda \eta^{-D}. \quad (8.6)$$

Величина  $L_\eta$  — длина аппроксимирующей ломаной — при  $n \rightarrow \infty$  ( $\eta \rightarrow 0$ ) стремится к бесконечности, поскольку  $D > 1$ . Построим теперь на каждом звене ломаной квадрат. Суммарная площадь этих квадратов составляет  $N\eta^2 = \lambda\eta^{2-D}$ . Эта величина стремится при  $\eta \rightarrow 0$  к нулю, поскольку  $D < 2$ .

Конечная величина, не равная нулю, получается в пределе при  $\eta \rightarrow 0$ , если число звеньев аппроксимирующей ломаной умножить на  $\eta$  в степени  $D$ , промежуточной между единицей и двумя:

$$N\eta^D = \lambda. \quad (8.7)$$

Величина  $\lambda$ , являющаяся мерой протяженности и искривленности предельной непрерывной кривой, для которой справедливо соотношение (8.1), называется ее *мерой Хаусдорфа*. Как мы уже видели, различные участки такой кривой можно сравнивать по протяженности, но не по их длине, которая бесконечна, а по их мере Хаусдорфа. Постоянная  $D$  называется *размерностью Хаусдорфа* рассматриваемой кривой. Для размерности Хаусдорфа триады Коха справедливо двойное неравенство  $1 < D < 2$ . Из рис. 8.1 следует, что для западного побережья Британии  $D \approx \approx 1,24$ , а для побережья Австралии  $D \approx 1,13$ . Таким образом, и для этих кривых размерность Хаусдорфа тоже лежит между единицей и двумя. В то же время для обычной гладкой кривой длина аппроксимирующей ломаной ограничена, так что для гладкой кривой  $D = 1$ . Дадим теперь формальное определение кривых-фракталей.

*Кривой-фракталем*<sup>1</sup>, или *фрактальной кривой* называется *непрерывная кривая, для которой размерность Хаусдорфа строго больше единицы*:

$$D > 1. \quad (8.8)$$

Ясно, что размерность Хаусдорфа определена не для всякой непрерывной кривой, а только для кривых, для которых справедливо соотношение типа (8.1) для длины аппроксимирующей ломаной.

Из предыдущего следует, таким образом, что триада Коха представляет собой фрактальную кривую. Как показывает изложенный выше анализ Ричардсона, морские побережья Британии и Австралии также аппроксимируются фрактальными кривыми.

<sup>1</sup> Название «фракталь» происходит от латинского *fractus* — дробный, ломаный.

Заметим, что постоянство размерности Хаусдорфа вдоль всей фрактальной кривой не обязательно. Для того чтобы непрерывная кривая была фрактальной, нужно, чтобы локально, вблизи каждой точки, длины аппроксимирующих кривую ломаных представлялись соотношениями вида (8.1), где  $D$  обязательно больше единицы, но вблизи разных точек может быть различным. Простейший пример фрактальной кривой с разными размерностями Хаусдорфа на разных участках получается, если на  $n$ -м шаге построения триады Коха изменить элементарную операцию и взять ее разной для разных звеньев ломаной: на первом оставить прежней, на второй делить отрезок на пять частей и заменять вторую и четвертую части двумя сторонами построенного на их базе равностороннего треугольника, на третьей делить отрезок на семь частей и также заменять вторую, четвертую и шестую части и т. д. В результате на одной части предельной кривой размерность Хаусдорфа будет по-прежнему равна  $\lg(4/3)$ , на второй —  $\lg(7/5)$ , на третьей —  $\lg(10/7)$  и т. д.

Приведенное выше рассмотрение фракталей на примере фрактальных кривых, в принципе, без труда переносится на поверхности, трехмерные тела и, вообще, объекты любой топологической размерности. Мы здесь на этом останавливаться не будем.

## 8.2. Неполная автомодельность фракталей

Выясним теперь, какие свойства рассмотренных выше фрактальных кривых привели именно к степенному закону возрастания длины аппроксимирующей ломаной при уменьшении длины ее звена. Возьмем непрерывную замкнутую кривую, диаметр которой (расстояние между наиболее удаленными точками) равен  $L$ . Аппроксимируем рассматриваемую кривую ломаной линией с постоянной длиной составляющих отрезков (звеньев)  $\eta^1$  и вершинами, лежащими на этой кривой. Ясно, что число звеньев  $N$  ломаной линии зависит только от двух размерных параметров:  $L$  и  $\eta$ . Поскольку величина  $N$  безразмерна, из анализа размерности получаем

$$N = f(L/\eta). \quad (8.9)$$

Возьмем теперь другую аппроксимирующую ломаную с меньшей длиной отрезка:  $\xi < \eta$ . Рассмотрим участок кривой между двумя соседними вершинами первой ломаной и попытаемся определить число вершин второй ломаной, приходящихся на этот участок. Триада Коха обладает двумя важнейшими свойствами: *однородности*, так что все участки кривой между соседними вершинами первой ломаной порождают одинаковое количество отрезков второй ломаной, и *самоподобия* (подобия кривой своей части), так что число отрезков ломаной с длиной звена  $\xi$ , помещающихся

---

<sup>1</sup> Последний отрезок ломаной может иметь длину меньше  $\eta$ .

между соседними вершинами ломаной с длиной  $\eta$ , зависит только от отношения  $\eta/\xi$ , но не от  $\eta$  и  $\xi$  в отдельности. Предположим, что рассматриваемая кривая также обладает свойствами однородности и самоподобия. Рассмотрим ломаную с длиной отрезка, равной диаметру. Число сторон такой ломаной, согласно (8.9), равно  $f(1)$ . Следовательно, на каждый отрезок ломаной, равный диаметру кривой, приходится  $f(L/\eta)/f(1)$  отрезков ломаной с длиной звена  $\eta$ . В силу свойства самоподобия аналогичное выражение при замене  $L$  на  $\eta$  и  $\eta$  на  $\xi$  справедливо для числа  $N_{\xi\eta}$  звеньев ломаной с длиной  $\xi$ , приходящихся на один отрезок ломаной с длиной  $\eta$ :

$$N_{\xi\eta} = f(\eta/\xi)/f(1). \quad (8.10)$$

Вследствие однородности кривой это выражение справедливо для всех отрезков ломаной с длиной звена  $\eta$ , число которых равно  $f(L/\eta)$ . Следовательно, общее число отрезков второй ломаной на кривой будет равно

$$f(L/\eta) f(\eta/\xi)/f(1). \quad (8.11)$$

С другой стороны, в силу той же формулы (8.9), число отрезков второй ломаной на кривой составляет  $f(L/\xi)$ . Приравнивая оба выражения для числа звеньев второй ломаной, получаем функциональное уравнение для функции  $f$ :

$$f(x)f(y/x) = f(y)f(1), \quad (8.12)$$

где  $x = L/\eta$ ,  $y = L/\xi$ , так что  $\eta/\xi = y/x$ . С близким функциональным уравнением мы уже встречались в главе 1 (уравнение (1.5)); уравнение (8.12) решается вполне аналогично и мы получаем его гладкое решение в виде

$$f(x) = Cx^D, \quad (8.13)$$

где  $C = f(1)$  и  $D$  — постоянные. Имея в виду, что  $L_\eta = N\eta$ , получаем из (8.9) и (8.13):

$$L_\eta = \lambda \eta^{1-D}, \quad (8.14)$$

где  $\lambda = CL^D$ , т. е. формулу (8.1). Для триады Коха, например,  $C = 3$ ,  $D = 1,2618\dots$ .

Мы показали, таким образом, что для непрерывной замкнутой кривой, обладающей свойствами однородности и самоподобия справедлив степенной закон (8.1) при постоянном вдоль кривой  $D$ . Если  $D > 1$ , кривая является фракталем.

Однако требования однородности и самоподобия являются чрезвычайно ограничительными и множество кривых, им удовлетворяющих, весьма узко. Трудно представить себе, например, чтобы кривые, изображающие линию морского побережья обладали этим свойством в точности. Покажем, что свойства однородности и самоподобия кривой не являются необходимыми для того, чтобы непрерывная кривая была фракталем; для этого достаточно

существенно более слабых свойств ее локальной однородности и локального самоподобия.

Это означает, что для любой точки кривой можно указать малую окрестность  $\Delta$ , в которой кривая обладает следующим свойством. Главный член асимптотического представления числа вершин  $N_{\xi\eta}$  аппроксимирующей ломаной с длиной звена  $\xi$  между двумя располагающимися в окрестности  $\Delta$  соседними вершинами ломаной с длиной звена  $\eta$  зависит только от отношения  $\eta/\xi$  при  $\eta/\xi \rightarrow \infty$ . Таким образом, предполагается, что с точностью до малых величин число вершин  $N_{\xi\eta}$  ломаной с длиной звена  $\xi$  внутри одного звена ломаной с длиной звена  $\eta$  не зависит от места этого последнего звена и от величины  $\xi$  и  $\eta$  при фиксированном отношении  $\eta/\xi \gg 1$ :

$$N_{\xi\eta} = f(\eta/\xi). \quad (8.15)$$

Возьмем теперь новую ломаную с еще меньшей длиной звена  $\zeta \ll \xi$ . В силу локальной однородности и самоподобия с точностью до малых величин число ее звеньев внутри одного находящегося в окрестности  $\Delta$  звена длиной  $\eta$  равно, с одной стороны,  $f(\eta/\zeta)$ , а с другой стороны — произведению числа  $f(\eta/\xi)$  звеньев длиной  $\xi$  внутри одного звена длиной  $\eta$  на число  $f(\xi/\zeta)$  звеньев длиной  $\zeta$  внутри одного звена длиной  $\xi$ . Приравнивая, получаем функциональное уравнение для функции  $f$ :

$$f(x)f(y/x) = f(y), \quad (8.16)$$

совпадающее с уравнением (1.5) (см. главу 1). Здесь  $x = \eta/\xi$ ,  $y = \eta/\zeta$ . Гладкое решение этого уравнения имеет вид  $f(x) = x^D$ . Величина  $D$  может быть различной в разных точках кривой. Переходя от числа звеньев к длине ломаной, получаем, что для длин аппроксимирующих ломаных в окрестности каждой точки непрерывной кривой, обладающей свойствами локальной однородности и локального самоподобия, справедливо степенное асимптотическое соотношение

$$L_\xi = \eta^{D\xi^{1-D}} + \dots, \quad (8.17)$$

где точки означают величины, малые сравнительно с первым членом (сюда же попадает вклад от крайних звеньев, которые могут оказаться нецелыми). Если повсюду  $D > 1$ , это означает, что рассматриваемая кривая является фрактальной.

Еще раз отметим, что множество кривых, обладающих свойством локальной однородности и локального самоподобия, неизмеримо богаче множества кривых типа триады Коха, обладающих весьма специальными свойствами полной однородности и самоподобия.

Фрактали проявляют свойства неполной автомодельности по параметру. Покажем это на том же примере фрактальных кривых. Действительно, длина ломаной, аппроксимирующей непрерывную кривую между двумя ее точками, отстоящими на расстояние  $\eta$ ,

зависит от двух размерных параметров:  $\eta$  и длины звена ломаной  $\xi$ . Из анализа размерностей получаем

$$L_\eta = \eta \Phi(\eta/\xi). \quad (8.18)$$

Для гладкой (или кусочно-гладкой) кривой при  $\xi \rightarrow 0$ , т. е. при  $\eta/\xi \rightarrow \infty$ , функция  $\Phi$  стремится к конечному пределу  $\Phi(\infty)$ . По определению, величина

$$L_0 = \Phi(\infty) \eta \quad (8.19)$$

представляет собой длину отрезка гладкой кривой между двумя ее точками, отстоящими на расстояние  $\eta$ . Так, например, если рассматриваемая кривая — окружность, опирающаяся на отрезок длиной  $\eta$  как на диаметр, то  $\Phi(\infty) = \pi/2$ . Таким образом, для гладких кривых имеет место полная автомодельность по параметру  $\eta/\xi$  при  $\eta/\xi \rightarrow \infty$ .

Для фрактальных кривых конечного предела функции  $\Phi(\eta/\xi)$  при  $\eta/\xi \rightarrow \infty$  не существует; этот предел равен бесконечности. Однако из соотношения (8.17) следует, что при  $\eta/\xi \rightarrow \infty$  функция  $\Phi(\eta/\xi)$  имеет степенное асимптотическое представление:

$$\Phi(\eta/\xi) \simeq (\eta/\xi)^{D-1}, \quad (8.20)$$

т. е. имеет место неполная автомодельность по параметру  $\eta/\xi$  при  $\eta/\xi \rightarrow \infty$ . Ясно, что размерность Хаусдорфа  $D$  зависит от геометрических свойств кривой и соображениями анализа размерностей определена быть не может.

Заметим в заключение, что переходя от геометрических образов к представляемым ими физическим объектам, мы можем просто отождествить фрактальность и неполную автомодельность по параметру.

## Глава 9

# ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ УПРУГОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

## 9.1. Задача о равновесии упругого клина под действием пары сил, приложенной в его вершине

Рассмотрение линейных задач теории упругости поучительно: для них можно аналитически явно проследить выход на автомодельную асимптотику решений невырожденных задач и переход при некотором критическом значении параметра от автомодельностей первого рода к автомодельностям второго рода. Для нелинейных задач этого так просто сделать не удается.

Мы разберем вначале отдельные задачи теории упругости при плоской деформации, когда компоненты *упругих полей* — тензоров напряжений, деформаций, вектора смещения и т. д. — одинаковы во всех плоскостях, перпендикулярных некоторому направлению. Уравнения упругого равновесия при плоской деформации имеют, как известно, следующий вид [см., например, 76, 64]:

$$\partial_r \sigma_{rr} + \partial_\theta \sigma_{r\theta}/r + (\sigma_{rr} - \sigma_{r\theta})/r = 0; \quad \partial_\theta \sigma_{\theta\theta}/r + \partial_r \sigma_{r\theta} + 2\sigma_{r\theta}/r = 0. \quad (9.1)$$

Здесь  $r, \theta$  — полярные координаты в плоскости деформации,  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$  — соответствующие компоненты тензора напряжений (для дальнейшего нам понадобятся именно полярные координаты).

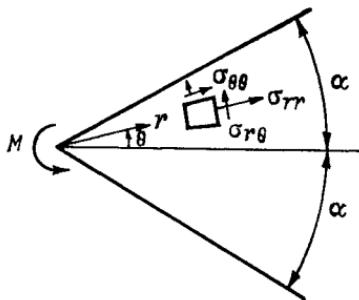


Рис. 9.1. Клин с углом раствора  $2\alpha$  под действием пары сил с моментом  $M$ , приложенной в его вершине.

Уравнения (9.1) тождественно удовлетворяются введением функции напряжений Эри  $\Psi$ :

$$\sigma_{rr} = \partial_r \Psi/r + \partial_\theta^2 \Psi/r^2; \quad \sigma_{\theta\theta} = \partial_r^2 \Psi; \quad \sigma_{r\theta} = -\partial_r(\partial_\theta \Psi/r). \quad (9.2)$$

Закон Гука связывает линейными дифференциальными соотношениями три компоненты тензора напряжений с двумя компонентами вектора смещений  $u_r$  и  $u_\theta$ , откуда вытекает, что компоненты тензора напряжений удовлетворяют некоторому условию интегрируемости: *соотношению совместности*. Если подставить в это соотношение выражения (9.2) компонентов тензора напряжений через функцию напряжений, то для последней получается бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta \Psi = [r^{-1} \partial_r(r \partial_r) + r^{-2} \partial_\theta^2]^2 \Psi = 0. \quad (9.3)$$

Начнем с показательной задачи, впервые рассмотренной в работах Карозерса [118] и Инглиса [140]. Возьмем бесконечный клин с углом раствора  $2\alpha$  и в вершине клина приложим сосредоточенную пару с моментом  $M$  (рис. 9.1). Функция напряжений  $\Psi$ , определяющая распределение напряжений, зависит от четырех параметров:  $M, r, \theta$  и  $\alpha$ , размерности которых в классе *FLT* соответственно равны  $F, L, 1, 1$ . (Размерность момента пары сил в плоской задаче теории упругости совпадает с размерностью силы, поскольку в задаче речь идет на самом деле о паре, прихо-

дящейся на единицу толщины.) В силу соотношений (9.2), размерность функции напряжений также совпадает с размерностью силы, поэтому анализ размерностей после стандартной процедуры приводит к соотношению

$$\Psi = M\Phi(\theta, \alpha). \quad (9.4)$$

Подставляя (9.4) в (9.3), получаем для  $\Phi(\theta, \alpha)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Phi^{IV} + 4\Phi'' = 0. \quad (9.5)$$

Боковые стороны клина свободны от напряжений на всем своем протяжении:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \pm a) = 0; \quad \sigma_{r\theta}(r, \pm a) = 0,$$

откуда и из выражений (9.2), (9.4) получаются граничные условия для функции  $\Phi(\theta, \alpha)$ :

$$\partial_\theta \Phi(\pm a, \alpha) = 0. \quad (9.6)$$

Уравнение и граничное условие определяют решение с точностью до множителя, который находится из следующего условия. Проводится разрез по окружности произвольного радиуса, вычисляется суммарный момент сил, действующих на отрезанную часть клина со стороны разреза, и результат приравнивается моменту приложенной в вершине пары  $M$  — отрезанная часть клина должна быть в равновесии. В результате окончательные выражения получаются в виде:

для функции напряжений

$$\Psi = M(20 \cos 2\alpha - \sin 2\theta)/2 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha), \quad (9.7)$$

для компонент поля напряжений

$$\sigma_{rr} = \frac{2M \sin 2\theta}{(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = \frac{M (\cos 2\alpha - \cos 2\theta)}{(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) r^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 0. \quad (9.8)$$

## 9.2. Парадокс Стернберга—Койтера. Промежуточная асимптотика решения неавтомодельной задачи

В замечательной работе Стернберга и Койтера [194] было впервые обращено внимание на странное свойство полученного решения (9.7) — (9.8). При приближении угла  $\alpha$  к значению  $\alpha = \alpha_* \approx 0,715\pi$ , вполне допустимому по физике задачи, при котором обращается в нуль знаменатель выражений (9.7) — (9.8), напряжения во всех точках клина, согласно (9.8), стремятся к бесконечности. В связи с этим возник следующий вопрос: является ли сингулярное автомодельное решение вырожденной задачи (9.7) асимптотикой каких-то неавтомодельных решений невырожденных задач, иными словами, имеет ли оно смысл? Для того чтобы это

выяснить, Стернберг и Койтер рассмотрели для того же бесконечного клина следующую невырожденную задачу (рис. 9.2 а). На конечных отрезках боковых сторон клина  $\theta = \pm\alpha$ ,  $0 \leq r \leq r_0$ ; по некоторому закону распределены антисимметричные нормальные напряжения, статически эквивалентные паре с моментом  $M$ . Касательные напряжения всюду на боковых сторонах клина по прежнему равны нулю. Таким образом, для невырожденной задачи имеют место условия

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r, a) &= -\sigma_{\theta\theta}(r, -a) = p(r), \\ \sigma_{r\theta}(r, a) &= \sigma_{r\theta}(r, -a) \equiv 0 \text{ при } 0 < r < \infty,\end{aligned}\quad (9.9)$$

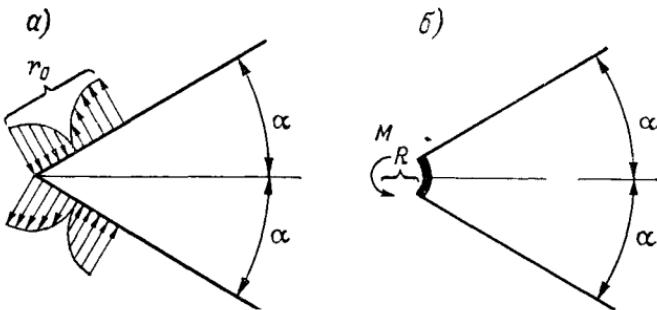


Рис. 9.2. Невырожденные задачи упругого равновесия клина под действием пары сил с моментом  $M$ .

а — силы распределены на боковых сторонах клина, б — силы приложены к жесткой подкрепляющей дуге конечного радиуса.

где  $p(r)$  — непрерывная функция, тождественно равная нулю при  $r \geq r_0$  и удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{r_0} p(r) dr = 0; \quad \int_0^{r_0} p(r) r dr = M/2. \quad (9.10)$$

Далее, для выделения единственного решения накладывается дополнительное требование регулярности — ограниченности результирующей силы на любом радиальном разрезе клина:

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) dr < \infty; \quad \int_0^{\infty} \sigma_{r\theta}(r, \theta) dr < \infty. \quad (9.11)$$

Решение поставленной задачи выполняется применением интегрального преобразования Меллина по переменной  $r$ .

Как известно (см., например, [193]), преобразование Меллина функции  $f(r)$  и его обращение задаются соотношениями

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(r) r^{s-1} dr, \quad f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(s) r^{-s} ds. \quad (9.12)$$

Применяя преобразование Меллина к бигармоническому уравнению (9.3), получаем для преобразования функции напряжений  $\bar{\Psi}(s, \theta)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[d^2/d\theta^2 + s^2] [d^2/d\theta^2 + (s+2)^2] \bar{\Psi}(s, \theta) = 0. \quad (9.13)$$

Искомое поле напряжений антисимметрично; такой же должна быть и функция напряжений. Общее антисимметричное решение уравнения (9.13) имеет вид

$$\bar{\Psi}(s, \theta) = A(s) \sin s\theta + B(s) \sin (s+2)\theta. \quad (9.14)$$

Условия (9.9) с учетом (9.2) можно записать в виде

$$r^2 \partial_{rr}^2 \bar{\Psi}(r, \pm \alpha) = \pm p(r) r^2, \quad \partial_r [\partial_\theta \bar{\Psi}(r, \pm \alpha)/r] = 0. \quad (9.15)$$

Преобразуя эти условия по Меллину и интегрируя по частям (для этого нам и нужно было умножать на  $r^2$ ), получаем граничные условия для функции  $\bar{\Psi}(s, \theta)$ :

$$\bar{\Psi}(s, \pm \alpha) = \pm \bar{p}(s)/s(s+1); \quad d\bar{\Psi}(s, \pm \alpha)/d\theta = 0, \quad (9.16)$$

где

$$\bar{p}(s) = \int_0^\infty p(r) r^{s+1} dr. \quad (9.17)$$

Из (9.14) и (9.16) определяем постоянные  $A(s)$  и  $B(s)$ ; подставляя результат в формулу обращения, получаем решение для функции напряжений в виде

$$\begin{aligned} & \Psi(r, \theta) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\bar{p}(s) [s \cos s\alpha \sin (s+2)\theta - (s+2) \cos (s+2)\alpha \sin s\theta] r^{-s} ds}{s(s+1)[(s+1) \sin 2\alpha - \sin 2(s+1)\alpha]}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Выражения для компонент тензора напряжений получаются отсюда дифференцированием:

$$\begin{aligned} & \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\bar{p}(s) [s \cos s\alpha \sin (s+2)\theta - (s+2) \cos (s+2)\alpha \sin s\theta] r^{-s-2} ds}{(s+1) \sin 2\alpha - \sin 2(s+1)\alpha}, \\ & \sigma_{rr}(r, \theta) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\{\bar{p}(s) [(s+2) \cos (s+2)\alpha \sin s\theta - (s+4) \sin (s+2)\theta \cos s\alpha] r^{-s-2}\} ds}{(s+1) \sin 2\alpha - \sin 2(s+1)\alpha}, \\ & \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\{\bar{p}(s) [(s+2) \cos s\alpha \cos (s+2)\theta - (s+2) \cos (s+2)\alpha \cos s\theta] r^{-s-2}\} ds}{(s+1) \sin 2\alpha - \sin 2(s+1)\alpha}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Как видно, подынтегральные функции в интегралах (9.19) — мероморфные функции комплексной переменной  $s$ , полюса которых совпадают с нулями целой функции

$$(s+1) \sin 2\alpha - \sin 2(s+1)\alpha = G(s, \alpha) \quad (9.20)$$

В интегралах (9.18)–(9.19) абсцисса линии интегрирования  $\text{Re } s = c$  может выбираться произвольно в пределах одной и той же полосы регулярности подынтегральной функции. Выбор полосы регулярности определяется условиями, накладываемыми на напряжения на бесконечности. Требование исчезновения напряжения на бесконечности и регулярности напряжений, т. е. выполнения условий (9.11), позволяет выбрать полосу регулярности, содержащую точку  $s = -1$ . Представление решения интегралами (9.18)–(9.19) удобно для вычисления асимптотик.

Для вычисления интегралов следует замкнуть контур интегрирования, добавив к линии  $\text{Re } s = c$  полуокружность большого радиуса, правую или левую, в зависимости от того, интересует нас асимптотика поля напряжений при  $r \rightarrow 0$  или  $r \rightarrow \infty$ , и устремить радиус окружности к бесконечности. При этом нужный нам интеграл выразится через сумму вычетов в охваченных полученным контуром полюсах, т. е. для напряжений — в точках, соответствующих корням функции (9.20). Основные члены интересующей нас асимптотики решения при  $r \rightarrow \infty$  определяются, таким образом, корнями уравнения (9.20), имеющими наименьшую действительную часть.

Исследование корней уравнения (9.20) показывает, что положение меняется при значении  $\alpha = \alpha_* \approx 0,715\pi$ , обращающем в нуль выражение  $\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha$ . Дело в том, что при  $0 < \alpha < \alpha_*$  корнем функции (9.20), имеющим наименьшую действительную часть, является действительный простой корень  $s = 0$ . При  $\alpha = \alpha_*$  корень  $s = 0$  становится двукратным: при  $s = 0$  обращается в нуль не только  $G(s, \alpha)$ , но и  $G'(s, \alpha) = \sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2(s+1)\alpha$ . Наконец, при  $\alpha_* < \alpha \leq \pi$  появляется действительный простой отрицательный корень  $s = \lambda(\alpha)$ , причем  $\lambda(\alpha)$  меняется монотонно от нуля при  $\alpha = \alpha_*$  до  $-1/2$  при  $\alpha = \pi$ .

Таким образом, главные члены разложения при  $r \rightarrow \infty$  в этих трех случаях ( $0 < \alpha < \alpha_*$ ,  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\alpha_* < \alpha \leq \pi$ ) различны:

1) при  $0 < \alpha < \alpha_*$  и  $r \rightarrow \infty$

$$\Psi = M(2\theta \cos 2\alpha - \sin 2\theta)/2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) + o(1);$$

$$\sigma_{rr} = 2M \sin 2\theta / (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) r^2 + o(r^{-2}); \quad \sigma_{\theta\theta} = o(r^{-2});$$

$$\sigma_{r\theta} = M(\cos 2\alpha - \cos 2\theta) / (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) r^2 + o(r^{-2}); \quad (9.21)$$

2) при  $\alpha = \alpha_*$  и  $r \rightarrow \infty$

$$\Psi = (M/12a_*^2 \sin 2a_*) \{3[g(r_0) - \ln(r/r_0)](2\theta \cos 2a_* - \sin 2\theta) - 3\theta \cos 2\theta + 4\sin 2\theta - 5\theta \cos 2a_* - 6a_*\theta \sin 2a_*\} + o(1);$$

$$\sigma_{rr} = (M/12a_*^2 \sin 2a_* r^2) \{[12g(r_0) - 12\ln(r/r_0) - 1]\sin 2\theta + 12\theta \cos 2\theta - 6\theta \cos 2a_*\} + o(r^{-2});$$

$$\sigma_{\theta\theta} = M(2\theta \cos 2\alpha - \sin 2\theta)/4a_*^2 \sin 2a_* r^2 + o(r^{-2});$$

$$\sigma_{r\theta} = (M/12a_*^2 \sin 2a_* r^2) \{[6g(r_0) - 6\ln(r/r_0) + 1](\cos 2a_* - \cos 2\theta) + 6\theta \sin 2\theta - 6a_* \sin 2a_*\} + o(r^{-2}), \quad (9.22)$$

где

$$g(r_0) = \frac{2}{M} \int_0^{r_0} p(r) r \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) dr;$$

3) при  $\alpha_* < \alpha \leq \pi$  и  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{\bar{p}(\lambda)[(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\alpha\sin\lambda\theta - \lambda\cos\lambda\alpha\sin(\lambda+2)\theta]}{\lambda(\lambda+1)[\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2(\lambda+1)\alpha]r^\lambda} + \\ &\quad + M(2\theta\cos 2\alpha - \sin 2\theta)/2(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha) + o(1); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\bar{p}(\lambda)[(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\alpha\sin\lambda\theta - \lambda\cos\lambda\alpha\sin(\lambda+2)\theta]}{[\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2(\lambda+1)\alpha]r^{\lambda+2}} + o(r^{-2}); \\ \sigma_{rr} &= \frac{\bar{p}(\lambda)[\lambda+4]\cos\lambda\alpha\sin(\lambda+2)\theta - (\lambda+2)\cos(\lambda+2)\alpha\sin\lambda\theta}{[\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2(\lambda+1)\alpha]r^{\lambda+2}} + \\ &\quad + 2M\sin 2\theta/(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)r^2 + o(r^{-2}); \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\bar{p}(\lambda)(\lambda+2)[\cos(\lambda+2)\alpha\cos\lambda\theta - \cos\lambda\alpha\cos(\lambda+2)\theta]}{[\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2(\lambda+1)\alpha]r^{\lambda+2}} + \\ &\quad + M(\cos 2\alpha - \cos 2\theta)/(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)r^2 + o(r^{-2}), \quad (9.23)\end{aligned}$$

где  $\bar{p}(\lambda)$  определяется формулой (9.17).

Применим теперь анализ размерностей к исходной неавтомодельной задаче. Не уменьшая общности, можно записать функцию  $p(r)$  в виде

$$p(r) = (M/2r_0^2)\varphi(r/r_0). \quad (9.24)$$

Как видно, решение  $\Psi$  определяется следующими величинами:  $M$ ,  $r_0$ ,  $r$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ , размерности которых суть соответственно  $F$ ,  $L$ ,  $L$ , 1, 1. Следовательно, из анализа размерностей после стандартной процедуры получаем

$$\Psi = M\Phi(r/r_0, \theta, \alpha). \quad (9.25)$$

Рассуждение, с помощью которого мы пришли к формуле (9.4), было основано на неявном предположении, что на больших расстояниях от вершины клина параметр  $r/r_0$  очень велик, и поэтому размер  $r_0$  части боковой стороны клина, на которой была распределена нагрузка, несуществен.

Проведенный только что анализ показал, что это действительно так лишь при  $0 < \alpha < \alpha_*$ . Если  $\alpha > \alpha_*$ , то размер  $r_0$  остается существенным, как бы далеко мы ни отошли от вершины клина. Тем не менее асимптотика функции напряжений, а следовательно, и всех компонент тензора напряжений автомодельна, но это автомодельность неполная, не определяемая из соображений размерности.

Действительно, как видно из соотношения (9.23), при  $\alpha > \alpha_*$  существует такое действительное число  $\lambda$ , что функция  $\Phi(\eta, \theta, \alpha)$ , где  $\eta = r/r_0$ , при  $\eta \rightarrow \infty$  (т. е. при  $r \rightarrow \infty$  или  $r_0 \rightarrow 0$ ) ведет себя как  $\eta^{-\lambda}\Phi_1(\theta, \alpha)$ . Тогда в силу (9.25), предельное решение, получающееся при стягивании  $r_0$  к нулю, т. е. при  $\eta \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\Psi = M(r_0/r)^\lambda \Phi_1(\theta, \alpha). \quad (9.26)$$

Ясно при этом, что устремляя  $r_0$  к нулю и желая получить правильную асимптотику решения неавтомодельной задачи при  $r/r_0 \rightarrow \infty$ , нельзя оставлять  $M$  постоянным; его тоже следует устремлять к нулю так, чтобы оставалось постоянным произведение  $Mr_0^\lambda$ .

Подставляя выражение (9.26) в бигармоническое уравнение (9.3), получаем для  $\Phi_1(\theta, \alpha)$  обыкновенное уравнение:

$$\Phi_1^{IV} + [\lambda^2 + (\lambda + 2)^2] \Phi_1'' + \lambda^2 (\lambda + 2)^2 \Phi_1 = 0, \quad (9.27)$$

совпадающее с уравнением (9.13) при  $s = \lambda$ . Интересующее нас решение должно быть антисимметричным и удовлетворять условиям  $\Phi_1 = 0$ ,  $d\Phi_1/d\theta = 0$  при  $\theta = \pm\alpha$ . Последние условия вытекают из равенства нулю напряжений на боковых сторонах клина. Из этих условий получается выражение для  $\Phi_1$  с точностью до безразмерного постоянного множителя  $\beta$

$$\Phi_1 = \beta [(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda\theta - \lambda \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\theta], \quad (9.28)$$

а также характеристическое уравнение для определения  $\lambda$

$$(\lambda + 1) \sin 2\alpha - \sin 2(\lambda + 1)\alpha = 0, \quad (9.29)$$

совпадающее с условием обращения в нуль функции (9.20). Как было указано выше, при  $\alpha_* < \alpha \leq \pi$  уравнение (9.29) имеет действительный отрицательный корень, в то время как при  $0 < \alpha < \alpha_*$  наименьший корень этого уравнения — нуль. Поэтому при  $0 < \alpha < \alpha_*$  функция  $\Phi(\eta, \theta, \alpha)$  в выражении для решения неавтомодельной задачи при  $\eta \rightarrow \infty$  (при стягивании к нулю области приложения нагрузки) стремится к конечному не равному нулю пределу, так что развитые в п. 9.1 соображения размерности оказываются применимыми и приводят к правильному окончательному результату. При  $\alpha_* < \alpha \leq \pi$  предельное решение записывается в виде

$$\Psi = (A/r^\lambda) [(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda\theta - \lambda \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\theta], \quad (9.30)$$

где константа  $A = \beta Mr_0^\lambda$  уже не может быть определена, если непосредственно искать автомодельное решение второго рода. Она может быть найдена лишь, если проследить выход решения неавтомодельной задачи на автомодельную асимптотику. Действительно, асимптотическое представление решения неавтомодельной задачи при больших  $r$  имеет в случае  $\alpha_* < \alpha \leq \pi$  главный член, совпадающий с (9.30) (ср. (9.23)), если принять

$$A = \frac{\lambda^{-1} (\lambda + 1)^{-1}}{[\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2(\lambda + 1)\alpha]} \int_0^{r_0} p(r) r^{\lambda+1} dr. \quad (9.31)$$

Таким образом, асимптотика решения, получающегося, если стягивать к вершине область приложения сил на боковых сторо-

нах клина, «запоминает» при  $\alpha_* < \alpha \leq \pi$  не обычный момент сил, т. е. не интеграл  $\int_0^{r_0} p(r) r dr = M/2$ , а более сложный, с дробной степенью, момент системы сил, действующих на боковых сторонах клина. При этом степень, с которой радиус входит в момент сил, зависит от угла раствора клина и определяется решением задачи на собственные значения для линейного уравнения (9.27) при условиях обращения в нуль решения и его производной на концах интервала.

Рассмотренное решение показательно во многих отношениях. Оно содержит параметр  $\alpha$  — угол раствора клина. Как видно из предыдущего анализа, при углах раствора меньше некоторого критического можно использовать традиционную аргументацию анализа размерностей, ограничиваясь заданием момента сил, действующих на клин. При этом получается автомодельное решение первого рода, которое вполне определяется непосредственным построением с помощью анализа размерностей. При углах раствора клина больше критического традиционные соображения анализа размерностей неприменимы, потому что выбрасывать  $r_0$  из списка определяющих параметров и оставлять там  $M$  при  $\alpha > \alpha_*$  нельзя. Тем не менее, стягивая к вершине область приложения сил на боковых сторонах клина, мы также получаем автомодельное предельное решение. Попытка построить это решение непосредственно как автомодельное решение второго рода определяет предельное решение, как и всякое автомодельное решение второго рода, только с точностью до константы. Значение этой константы может быть получено путем срашивания автомодельного решения с решением неавтомодельной задачи. Оно выражается, как показывает проведенное срашивание, через некоторый дробный момент от распределения напряжений на боковых сторонах клина, но какой именно момент (т. е. с какой степенью  $r$ ) можно определить только после решения задачи. Заранее из соображений размерности эту степень определить нельзя. Наконец, при угле раствора клина, равном критическому, соображения размерности оказываются бессильными; они не приводят ни к какому упрощению решения, а аргументация малостью участка приложенных сил, приводящая к вырождению задачи, является незаконной. Иными словами, автомодельность по параметру  $\eta$  не наступает, как бы велико  $\eta$  ни было. Тем не менее, как показывает соотношение (9.22), асимптотика решения в этом случае автомодельна, поскольку выражение для  $\Phi = \Psi/M$  при больших  $\eta = r/r_0$  записывается в виде

$$\Phi = \ln \eta \Phi_3(\theta).$$

Эта автомодельность, однако, нестепенного типа, и уже не является решением.

Очевидно, что сказанное выше невозможно было бы установить, не зная неавтомодельного решения более полной, невырож-

денной задачи. В нелинейных задачах анализ, подобный проведенному выше, практически никогда не бывает возможным: как уже упоминалось, одной из главных причин, по которым вообще занимались автомодельными решениями вырожденных задач, было стремление получить какое-то представление о строении решений сложных невырожденных нелинейных задач.

Приведенный пример явно продемонстрировал, что просто построить автомодельное решение — мало; нужно удостовериться, что это решение является промежуточной асимптотикой для какого-то хотя бы узкого класса невырожденных задач. После фундаментальной работы Стернберга и Койтера появились и другие примеры того же рода. Отметим среди них изящную задачу об упругом поле вблизи угловых точек контура поперечного сечения стержня при кручении<sup>1</sup>, решенную Моффатом и Даффи [168].

### 9.3. Использование автомодельных решений для оценки жесткости клина

Б. Будянский и Дж. Кэррье [117] выполнили в связи с той же задачей о клине, на который действует пара сил, весьма поучительное исследование, касающееся применения автомодельных решений для оценки интегральных характеристик решения невырожденных задач.

Они рассмотрели (см. рис. 9.2 б) упругий клин, обрезанный по расположенной вблизи его вершины дуге круга, вдоль которой сделано абсолютно жесткое подкрепление. Воспользовавшись тем, что те же уравнения плоской теории упругости, что и в случае плоской деформации, применимы в случае плоского напряженного состояния (тонкая пластина), Будянский и Кэррье рассматривали «обобщенный клин» — прижатые друг к другу пластинки, навивающиеся по винтовой линии. Это дает возможность рассматривать задачу при произвольных углах  $\alpha$ , в том числе больших  $\pi$ . К подкреплению приложена пара сил с крутящим моментом  $M$  (приходящимся на единицу толщины клина). Ясно, что при этом подкрепленная граница повернется на некоторый малый угол  $\Omega$ . Поскольку угол  $\Omega$  пропорционален приложенному моменту  $M$ , естественно назвать величину  $M/\Omega$  жесткостью. Как показывают соображения анализа размерностей, эта величина, определяемая мо-

<sup>1</sup> В работе [168] эта задача в действительности рассматривалась в другой, гидродинамической интерпретации: течение Пуазейля в цилиндрической трубе с угловыми точками на контуре поперечного сечения. Аналогия этих задач хорошо известна. Отметим попутно, что анализ математически эквивалентных автомодельных задач плоской теории упругости для клиновидных областей (см. работу Вильярса [214]) и медленных течений вязкой жидкости в клиновидных сосудах (ср. работу Моффатта [167]) проводился в течение почти шестидесяти лет практически без всякой взаимной корреляции, так что одни и те же трудности неизменно преодолевались дважды. Гидродинамическая интерпретация решения Стернберга—Койтера была указана в работе [109] и позднее в работе [168].

дулем сдвига  $G$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и радиусом круга  $R$ , до которого клин обрезан, равна  $GR^2C(\nu)$ , где  $C(\nu)$  — величина, называемая *безразмерной жесткостью*.<sup>1</sup> Задача заключается в том, чтобы получить достаточно надежную оценку для безразмерной жесткости. Будянский и Кэррье эффективно и поучительно с общей точки зрения использовали для этой цели автомодельные решения. Они исходили из установленного в теории упругости принципа минимума дополнительной энергии, согласно которому, среди всех «допустимых» полей напряжений, обращающихся в нуль на боковых сторонах клина и обладающих на дуге  $r = R$  нулевым главным вектором и главным моментом, равным  $M$ , истинное упругое поле минимизирует «энергию напряжений»

$$W = -\frac{1}{2} \int_R^\infty \int_{-\alpha}^\alpha \sigma_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} r dr d\theta \quad (9.32)$$

(по повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование). Здесь компоненты тензора деформаций  $\epsilon_{ij}$  выражены через компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  посредством закона Гука ( $\delta_{ij}$  — единичный тензор):

$$\epsilon_{ij} = (1/2G) \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{yy} \delta_{ij} \right). \quad (9.33)$$

Очевидно, что точная величина энергии напряжений равна  $(1/2)M\Omega$ . Следовательно, если  $\bar{W}$  — энергия, соответствующая какому-то допустимому полю напряжений, то

$$\bar{W} \geq W = M\Omega/2 = M^2/2GR^2C(\nu), \quad (9.34)$$

откуда

$$C(\nu) \geq M^2/2GR^2\bar{W}. \quad (9.35)$$

Идея состоит в том, чтобы, используя автомодельные поля напряжений, получать величины  $\bar{W}$ , возможно более близкие к истинному значению, и тем самым получать хорошие оценки для  $C(\nu)$ .

При этом энергия  $\bar{W}$  находится из соотношения

$$\bar{W} = -\frac{R}{2} \int_{-\alpha}^\alpha (\sigma_{rr} u_r + \sigma_{r\theta} u_\theta)_{r=R} d\theta, \quad (9.36)$$

получающегося из уравнения энергии и условия быстрого убывания напряжений на бесконечности.

<sup>1</sup> В отличие от предыдущего рассмотрения, здесь появились упругие смещения, поэтому среди определяющих параметров появились постоянные  $G$  и  $\nu$ , характеризующие упругие свойства тела.

Если в качестве допустимого упругого поля взять поле, соответствующее автомодельному решению Карозерса (9.7) — (9.8), то простое, но длинное вычисление по указанному рецепту дает нижнюю оценку для  $C(v)$ :

$$C(v) = \frac{16(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)^2}{4(\kappa + 5)\alpha + 8\alpha \cos 4\alpha - (\kappa + 7)\sin 4\alpha}. \quad (9.37)$$

Здесь  $\kappa = (3-v)/(1+v)$ .

Эта оценка, представленная на рис. 9.3 (кривая 1) для случая  $v=0$ , обладает очевидными несообразностями. Например, согласно этой оценке, клин теряет жесткость при критических углах, обращающих в нуль числитель формулы (9.37), и задолго до критических углов жесткость начинает убывать с ростом угла  $\alpha$ . Последнее заведомо неверно, поскольку для всякого клина поле напряжений клина с любым меньшим углом раствора, продолженное тож-

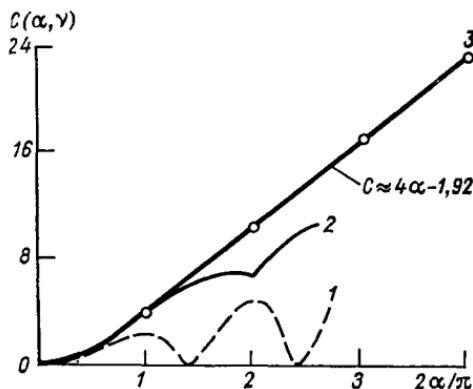


Рис. 9.3. Зависимость безразмерной жесткости клина от его угла раскрытия при  $v=0$ .

дественным нулем до границ клина, является допустимым. Таким образом, жесткость является неубывающей функцией угла раствора клина:  $dC/d\alpha \geq 0$ . И действительно, вычисление жесткости на основе неавтомодельного решения при  $\alpha = \alpha_*$ , данного первыми членами формулы (9.22) и также принадлежащего к допустимым, приводит к ненулевой оценке жесткости. Далее, для углов, не равных критическим, в качестве допустимых брались поля, описываемые суммой решений (9.7) и (9.30), причем коэффициент  $A$  в решении (9.30) выбирался так, чтобы минимизировать энергию напряжений  $\bar{W}$ . В качестве  $\lambda$  также брался корень уравнения (9.29), дававший минимум энергии напряжений. Соответствующая оценка для жесткости (рис. 9.3, кривая 2) получается значительно более высокой и, что существенно, гладко проходящей через критические углы. Однако эта оценка неудовлетворительна при больших  $\alpha$ . В самом деле, при больших  $\alpha$  «обобщенный» клин должен вести себя, как упругое кольцо, для которого во всех точках  $\sigma_{r\theta} = M/2\pi r^2$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0$ , а энергия напряжений равна

$$\frac{1}{2}M\Omega = 2\pi \int_R^\infty (\sigma_{r\theta}^2/2G) r dr = M^2/8\pi R^2 G, \quad (9.38)$$

следовательно, безразмерная жесткость  $C(v)$  составляет  $C = M/\Omega GR^2 = 4\pi$ . Таким образом, при больших  $\alpha$  каждое увеличение  $\alpha$  на  $\pi$  должно увеличивать безразмерную жесткость на  $4\pi$ , так что  $dC/d\alpha \approx 4$ , и при больших  $\alpha$  для  $C$  должна быть справедлива асимптотическая формула

$$C = 4\alpha - \delta(v). \quad (9.39)$$

Для получения весьма точной оценки безразмерной жесткости Будянский и Кэррье использовали то обстоятельство, что при  $\alpha = N\pi/2$ , где  $N$  — целое число, все корни уравнения (9.29) действительны и выражаются простой формулой

$$\lambda = m/N - 1, \quad (9.40)$$

где  $m$  — целое число. Для упругого поля берется выражение в виде суммы большого числа решений вида (9.30)

$$\Psi = \sum_{m=1, (m \neq N)}^K \frac{A_m}{r^{m/N-1}} \left\{ \left( \frac{m}{N} + 1 \right) \cos \frac{(m+N)\pi}{2} \sin \left( \frac{m}{N} - 1 \right) \theta - \left( \frac{m}{N} - 1 \right) \cos \frac{(m-N)\pi}{2} \sin \left( \frac{m}{N} + 1 \right) \theta \right\} + \frac{M [2(-1)^N \theta - \sin 2\theta]}{2N\pi (-1)^{N+1}} \quad (9.41)$$

(последний член соответствует корню, равному нулю, и выражается теми же формулами, что и (9.7). Здесь  $K \geq N$ , а  $m$  — положительное число. Коэффициенты  $A_m$  выбираются из условия минимальности энергии напряжений  $\bar{W}$ . Результаты соответствующих расчетов представлены на рис. 9.3 кривой 3. Как видно, соответствующая оценка получилась значительно более высокой и, что важно, она согласуется с формулой (9.39). Для  $\delta(v)$  вычисления дали следующие значения:  $\delta(0) = 1,92$ ;  $\delta(0,25) = 1,68$ ;  $\delta(0,5) = 1,48$ .

Этот пример показывает, что автомодельные решения могут быть с успехом использованы для получения оценок суммарных характеристик неавтомодельных решений невырожденных задач. Проведенное Будянским и Кэррьеом исследование показало, однако, что такое использование автомодельных решений следует делать весьма осмотрительно. В самом деле, например, при всех  $\alpha < \alpha_*$  решение на больших расстояниях от вершины клина хорошо аппроксимируется решением Карозерса. Казалось бы, отсюда следует возможность использования этого решения при  $\alpha < \alpha_*$  для оценки жесткости. Это привело, однако, к противоречию убыванию жесткости, что связано с непригодностью автомодельного решения для описания упругого поля вблизи  $r = R$ , вносящего существенный вклад в энергию напряжений.

#### 9.4. Законы подобия хрупкого и квазихрупкого разрушения

1. Классическая линейная теория упругости не позволяет непосредственно определить прочность конструкции: в ней можно построить решение для сколь угодно больших нагрузок. В то же время для многих материалов (металлов, полимеров, керамики) деформации перед разрушением при обычных условиях малы и пластические деформации либо отсутствуют вовсе (хрупкое разрушение), либо сосредоточиваются в малой окрестности разрыва (квазихрупкое разрушение), так что, казалось бы, классическая теория упругости должна быть применимой. По этой причине первоначально предлагавшиеся теории прочности дополняли теорию упругости *локальными* условиями разрушения. По существу эти условия ограничивали возникающие напряжения характерной для данного материала постоянной. Считалось, что разрушение начи-

нается, когда где-то в теле достигается предельное значение некоторой комбинации компонентов напряжения и притом там, где оно достигается.

Важнейший шаг в построении модели хрупкого разрушения сделал Гриффитс [133]. Он понял, что задавая конструкцию в ее идеальном виде, в котором она предстает на чертеже, мы не полностью определяем границы тела. В действительности помимо «законных» границ в любом изделии всегда имеются дефекты — трещины, поверхность которых также составляет часть границы. Теории прочности упомянутого выше типа, дополняющие теорию упругости ограничением на напряжения, для расчета прочности тел с трещинами не годятся принципиально: на краю трещины напряжения получаются, согласно теории упругости, бесконечными. Трещины способны расширяться с увеличением нагрузок; это делает задачу теории упругости для тела с трещинами нелинейной. Следовательно, в задаче разрушения должна быть существенной некоторая характеристика сопротивления материала распространению в нем трещин. В качестве такой характеристики Гриффитс выбрал энергию образования единицы поверхности трещины. Ирвин [141] и Орован [178] распространяли концепцию Гриффитса на квазихрупкое разрушение и тем расширили область ее применения. В работе [9] был предложен силовой подход к теории хрупкого и квазихрупкого разрушения, основанный на явном учете дополнительных к основным нагрузкам сил сцепления, действующих на поверхности трещин, и условии ограниченности напряжений в концах трещин, указанном С. А. Христиановичем [37, 23]. Было показано, что определение прочности математически приводится к глобальной задаче отыскания области существования (по параметрам нагружения) решения нелинейной задачи теории упругого равновесия тел с трещинами. Последняя принадлежит к числу трудных проблем с подвижной границей, так что в сколько-нибудь сложных случаях нельзя рассчитывать на получение аналитического решения. В связи с этим большое значение приобретает эксперимент — физический и численный — а следовательно, выяснение законов подобия. Отсылая за подробностями постановки задачи разрушения к обзорам [142, 10, 88, 24] и монографиям [76, 160, 64, 82], мы остановимся здесь на законах подобия при хрупком и квазихрупком разрушении [10, 11, 131].

Пластическая головка трещины для классического примера квазихрупкого разрушения — трещины в органическом стекле — представлена на рис. 9.4 *а* [210]. Как видно, размер головки мал, он имеет порядок нескольких сотых миллиметра. За поверхность трещины при таком квазихрупком разрушении принимается граница упругой и пластической областей. При этом подходе в дополнение к основным нагрузкам нужно учесть силы  $G(s)$  (рис. 9.4 *б*), действующие со стороны пластической головки на упругую область. В случае чисто хрупкого разрушения такие силы тоже существуют; это молекулярные силы сцепления. Поэтому силы  $G(s)$  объединяются под общим названием сил сцепления.

Таким образом, в рассмотрение должны входить дополнительные размерные характеристики: размер головки трещины  $d$ , который определяется, вообще говоря, нагрузкой и структурой материала, и характерная величина сил сцепления  $G_0$ .

Анализ показывает, что для большого класса практически важных случаев хрупкого и квазихрупкого разрушения справедливы гипотезы [9]: 1) *малости* размера головки сравнительно с размером трещины  $l$  ( $d/l \ll 1$ ); 2) *автономности* головки, т. е. одинаковости в состоянии подвижного равновесия<sup>1</sup> головок (и, следовательно, создаваемых ими сил сцепления) для всех трещин

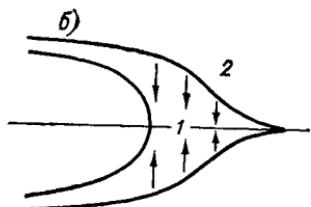


Рис. 9.4. Головка трещины при квазихрупком разрушении: фотография головки трещины в органическом стекле [210] (а) и схема сил сцепления при квазихрупком разрушении (б).

1 — пластическая головка трещины, 2 — упругая область.

в данном материале при данных внешних условиях. Автономность головки трещины объясняется тем, что характерная величина приложенных к телу нагрузок  $\sigma_0$  много меньше характерной величины сил сцепления  $G_0$  ( $\sigma_0/G_0 \ll 1$ ). Поэтому теория хрупкого (и квазихрупкого) разрушения является промежуточно-асимптотической, и оказывается, что существенна не каждая из постоянных  $d$  и  $G_0$  в отдельности: единственной постоянной материала, дополнительной к константам теории упругости является *модуль сцепления* или *трещиностойкость*:

$$K = \int_0^d \frac{G(s) ds}{\sqrt{s}}; \quad K \sim G_0 \sqrt{d}. \quad (9.42)$$

Модуль сцепления имеет размерность  $FL^{-3/2}$ . Он характеризует сопротивление материала распространению трещин и представляет собой независимую характеристику прочностных свойств матери-

<sup>1</sup> Подвижное равновесие отвечает достижению силами сцепления максимума, так что при малейшем увеличении нагрузки трещина начинает распространяться.

ала.<sup>1</sup> Приведем значения модуля сцепления некоторых материалов: органическое стекло —  $K \sim 10^2$  кгс/см<sup>3/2</sup>, конструкционная сталь —  $K \sim 2,5 \cdot 10^4$  кгс/см<sup>3/2</sup>, дюралюминий —  $K \sim 10^4$  кгс/см<sup>3/2</sup>.

Модуль сцепления (трещиностойкость) является одним из определяющих параметров при формулировании законов подобия хрупкого и квазихрупкого разрушения. Появление одного определяющего параметра  $K \sim G_0 \sqrt{d}$  вместо двух параметров  $d$  и  $G_0$  является типичным проявлением неполной автомодельности.

2. Обратимся к нескольким показательным примерам. Первый из них, рассмотренный в той же фундаментальной работе Гриффитса [133], относится к случаю плоской деформации бесконечного тела с прямолинейной трещиной, растягиваемого одноосным напряжением  $\sigma$ , направленным перпендикулярно трещине. Длина  $l$  подвижно-равновесной трещины определяется величинами  $\sigma$  и  $K$ . Из анализа размерностей получаем

$$l = \text{const } K^2 / \sigma^2. \quad (9.43)$$

Согласно полному решению задачи,  $\text{const} = 4/\pi^2$ . Для рассматриваемого вида нагружения катастрофическое развитие трещины, приводящее к полному разрушению тела, начинается при малейшем увеличении нагрузки, после того, как было достигнуто состояние подвижного равновесия. Вообще говоря, как показывает следующий пример, это не обязательно. Рассмотрим в условиях плоской деформации бесконечное тело с прямолинейной трещиной, поддерживаемой двумя противоположными и равными по величине сосредоточенными силами, перпендикулярными трещине и приложенными в центрах противоположных берегов трещины. Размер подвижно-равновесной трещины  $l$  зависит от модуля сцепления  $K$  и силы  $s$ , приходящейся на единицу толщины тела ( $[s] = FL^{-1}$ ). Из анализа размерностей получаем

$$l = \text{const } s^2 / K^2. \quad (9.44)$$

Согласно полному решению задачи [9],  $\text{const} = 1$ . Как видно, при таком нагружении достижение подвижного равновесия не связано с разрушением тела: при дальнейшем увеличении нагрузки трещина растет, но несущая способность тела сохраняется. Если сопротивление распространению трещины, поддерживаемой такими же сосредоточенными силами  $s$ , создается, как это имеет место в горных породах, не силами сцепления, а сжимающим внешним давлением  $q$ , то, согласно анализу размерностей,

$$l = \text{const } s/q. \quad (9.45)$$

---

<sup>1</sup> Модуль сцепления, введенный в работе [9], следует отличать от характеристики прочности материала  $K_{Ic}$ , введенной примерно одновременно Ирвином [144] и определяемой по началу катастрофического развития трещины. Катастрофическое развитие трещины требует неустойчивости исходного подвижно-равновесного состояния. Перед началом распространения трещины из неустойчивого состояния автономная головка трещины может не успеть сформироваться. Отсюда большой разброс при определении  $K_{Ic}$ .

Из полного решения [8] получаем  $\text{const} = 2/\pi$ . В этом случае, в отличие от предыдущего, длина трещины растет пропорционально разрывающей силе, а не ее квадрату.

3. В замечательных опытах Бенбоу [111] и Реслера [188] (рис. 9.5) штамп с плоским торцом круговой формы вдавливается в образец из стекла [188] или плавленого кварца [111]. Под штампом образуется и с увеличением нагрузки распространяется трещина, имеющая форму усеченного кругового конуса.

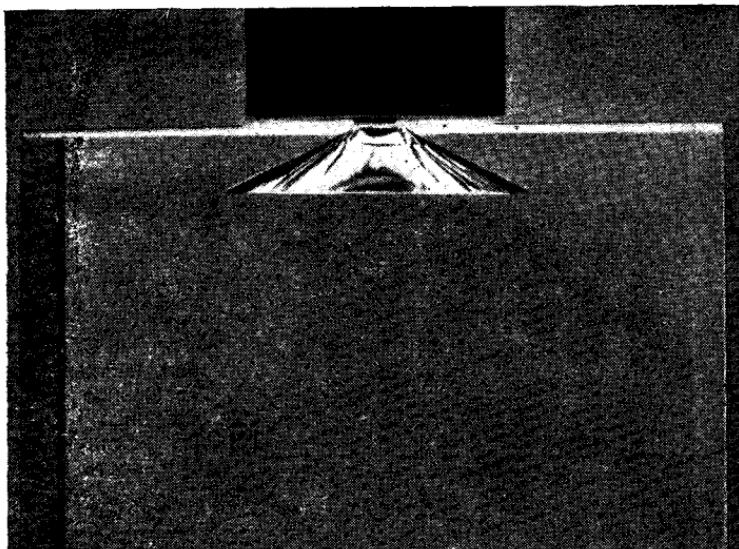


Рис. 9.5. Коническая трещина Бенбоу—Реслера, образующаяся при вдавливании штампа [111].

Диаметр  $D$  основания конической трещины зависит, очевидно, от действующей нагрузки  $S$ , диаметра индентора  $d$  и модуля сцепления  $K$ . Из анализа размерностей находим

$$D = (S/K)^{2/3} \Phi(\Pi_S); \quad \Pi_S = S/Kt^{1/2}. \quad (9.46)$$

Большие нагрузки отвечают  $\Pi_S \gg 1$ , так что если имеет место полная автомодельность по параметру  $\Pi_S$ , то должно быть справедливо соотношение

$$D = \text{const} (S/K)^{2/3}; \quad \text{const} = \Phi(\infty). \quad (9.47)$$

Обработка опытов, проведенных со штампами разных диаметров при разных нагрузках [111], хорошо подтверждает это соотношение (рис. 9.6).

4. Обратимся к общим законам подобия при хрупком (квазихрупком) разрушении. Можно представить себе параметры нагрузления трех типов: размерности напряжения  $\sigma$ , натяжения

(силы, отнесенной к длине)  $s$  и силы  $S$ . Значения этих параметров, отвечающие разрушению,  $\sigma_f$ ,  $s_f$ ,  $S_f$  при хрупком или квазихрупком разрушении тела заданной формы определяются двумя размерными параметрами — модулем сцепления  $K$  и размером тела  $l$ . Размерные упругие постоянные не входят в число определяющих параметров, так как при задании действующих на тело нагрузок поле напряжений от них не зависит.

Как видно из анализа размерностей, при квазихрупком и хрупком разрушении определяющих параметров подобия нет, следовательно,

$$S_f = \text{const } Kl^{3/2}; \quad s_f = \text{const } Kl^{1/2}; \quad \sigma_f = \text{const } Kl^{-1/2}. \quad (9.48)$$

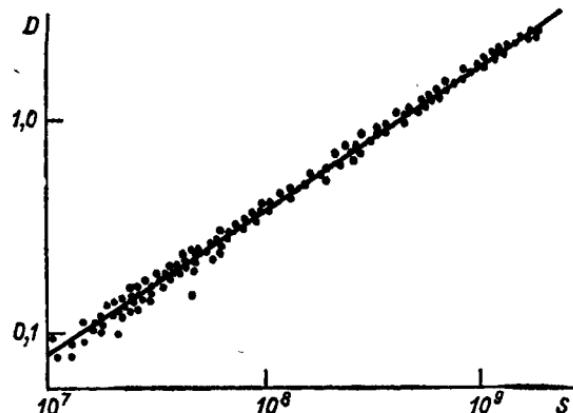


Рис. 9.6. Обработка опытных данных по распространению конической трещины подтверждает [111] полную автомодельность процесса.

Постоянныес в (9.48) можно поэтому определить из опыта на геометрически подобной модели из любого материала, также разрушающегося по квазихрупкому механизму, так что, например,

$$S_f^{(p)} = S_f^{(m)} (K^{(p)}/K^{(m)}) (l^{(p)}/l^{(m)})^{3/2}. \quad (9.49)$$

Здесь индексы  $p$  относятся к натуре,  $m$  — к модели. Единственным требованием к модельной конструкции является ее геометрическое подобие натурной конструкции, в том числе подобие начальных трещин.

Если пластические деформации в материале при разрушении не сосредоточены вблизи трещины, а занимают заметную часть конструкции (в этом случае разрушение несколько неудачно называется *вязким*), то появляется новый размерный определяющий параметр: предел текучести  $\sigma_y$ . Следовательно, появляется определяющий параметр подобия

$$I = \sigma_y \sqrt{l/K}, \quad (9.50)$$

который мы будем называть параметром Ирвина: в его работе [143] (см. также обзор и обсуждение в [131]) было впервые установлено определяющее влияние параметра, эквивалентного  $I$ , на вязкое разрушение и переход от квазихрупкого разрушения к вязкому.

Таким образом, для параметров вязкого разрушения получаем

$$S_f = \sigma_Y l^2 \Phi_S(l); \quad s_f = \sigma_Y l \Phi_s(l); \quad \sigma_f = \sigma_Y \Phi_\sigma(l). \quad (9.51)$$

Параметр  $l$  представляет собой корень квадратный из отношения масштаба конструкции  $l$  к характерному масштабу материала  $K^2/\sigma_y^2$  — характерному размеру пластической зоны вблизи края трещины. Поэтому испытания на модели из того же материала при тех же внешних условиях проводить нельзя. В работе В. М. Вайншельбаума и Р. В. Гольдштейна [131] предложено проводить моделирование путем испытаний модели из того же материала при других температурах: масштаб  $K^2/\sigma_y^2$  сильно зависит от температуры, увеличиваясь с ее возрастанием.

## Глава 10

### ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ИЗОТРОПНАЯ ОДНОРОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

#### 10.1. Проблема турбулентности

Эта и следующая главы отличаются тем, что здесь автомодельность (полная и неполнная) будет устанавливаться с существенным использованием экспериментальных данных и без обращения к математической формулировке задачи, которая в настоящее время для турбулентности отсутствует.

Проблема турбулентности, которой посвящены эти главы, с полным основанием считается проблемой номер один современной классической физики. Само явление турбулентности, как известно, состоит в следующем. Как мы убедились в главе 1, основным параметром подобия, определяющим глобальные свойства течения несжимаемой вязкой жидкости, является число Рейнольдса  $Re = \rho U l / \mu$  ( $\rho$  — плотность,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $U$  — характерная скорость,  $l$  — характерный размер потока). Когда число Рейнольдса переходит через определенное критическое значение  $Re_{cr}$ , разное для разных потоков (например, для течения в гладкой цилиндрической трубе круглого поперечного сечения  $Re_{cr} \approx 10^3$ , для течения в пограничном слое  $Re_{cr} \approx 10^5$ ), характер течения внезапно и резко меняется. Поток из регулярного, упорядоченного, ламинарного, каким он был при докритических значениях числа Рейнольдса, становится существенно нерегулярным. Течение при сверхкритических значениях числа Рейнольдса резко и неупорядоченно меняется в пространстве и во времени, и поля характеристик потока (давления, скорости и т. д.) можно с хорошим

приближением считать стохастическими, случайными. Такой режим течения называется *турбулентным*.

В настоящее время по поводу возникновения турбулентности существуют лишь более или менее правдоподобные гипотезы, порой весьма интересные, но не имеющие доказательной силы. Не существует также законченного математического описания сформировавшихся турбулентных потоков. В этих обстоятельствах при всех попытках создания теоретических моделей тех или иных классов турбулентных течений соображения подобия занимают первостепенное место.

Вместе с большинством исследователей мы будем исходить из того, что при малых по сравнению со скоростью звука скоростях истинное турбулентное движение описывается уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости, т. е. уравнениями сохранения импульса Навье—Стокса и уравнением неразрывности, которые в прямоугольных декартовых координатах  $x_i$  записываются в виде

$$\partial_t u_i + u_a \partial_a u_i = -\partial_i p/\rho + v \Delta u_i; \quad \partial_a u_a = 0. \quad (10.1)$$

Здесь  $u_i$  — компоненты вектора скорости,  $v = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость,  $p$  — давление; по повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование от единицы до трех.

Строить решение этих уравнений, отвечающее некоторой конкретной реализации развитого турбулентного течения, невозможно ввиду его крайней неустойчивости. Поэтому, а также ввиду отмеченной выше возможности считать характеристики поля турбулентного потока случайными, описание турбулентных течений всегда ведется в статистических терминах. Как известно (подробнее см. в монографии А. С. Монина, А. М. Яглома [74, 75]), достаточно полное описание развитого турбулентного потокадается системой средних величин

$$\langle u_i(x, t) \rangle, \quad \langle p(x, t) \rangle \quad (10.2)$$

и моментов, т. е. тензоров вида

$$\begin{aligned} B_{ijk\dots} &= \langle u_i(x, t) u_j(x_1, t) u_k(x_2, t) \dots \rangle; \\ B_{pil\dots} &= \langle p(x, t) u_i(x_1, t) u_l(x_2, t) \dots \rangle; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (10.3)$$

для всевозможных точек и систем точек  $x$ ;  $x, x_1; x, x_1, x_2; \dots$ .

Здесь знак  $\langle \dots \rangle$  обозначает вероятностное среднее значение. Вероятностное среднее значение используется в теоретических работах по турбулентности в качестве естественного способа осреднения. На опыте осреднение производится по объему или по времени; отождествление этих типов осреднения между собой и с вероятностным осреднением делается на основе так называемой эргодической гипотезы.

Система уравнений для моментов получается умножением уравнений (10.1) на компоненты скорости в различных точках по-

тока и последующим осреднением. Впервые это было сделано в работе Л. В. Келлера и А. А. Фридмана [150]. Однако в общем случае получающиеся при этом уравнения записываются настолько сложно, что в работе [150] сами уравнения даже не выписывались: была указана лишь основная идея и перечислено сколько и каких уравнений при этом получается. Как частный случай при этом получаются уравнения для средних значений компонент скорости и турбулентной энергии, впервые приведенные в основополагающей работе Рейнольдса [185].

## 10.2. Изотропная однородная турбулентность

Существенный прогресс в развитии статистической теории турбулентности наступил, когда Дж. И. Тейлор [200] выдвинул идею рассмотрения изотропной однородной турбулентности. Эта идея приобрела особенно фундаментальное значение после того, как А. Н. Колмогоров [54] предсказал, что в малых масштабах все развитые турбулентные течения (т. е. течения при больших числах Рейнольдса) обладают свойством изотропии и однородности.

Поток называется *изотропным* и *однородным*, если все его тензоры моментов остаются неизменными при параллельном переносе, вращении или зеркальном отражении соответствующей системы точек  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  относительно некоторой плоскости. (Неизменность означает, что в системе координат, располагающейся относительно преобразованной системы точек так же, как исходная система координат относительно прежней системы точек, значения компонент тензора остаются теми же.) Для изотропного однородного потока средняя скорость равна нулю, существенно уменьшается число независимых компонент тензоров моментов и сокращается число величин, от которых они зависят. Так, в произвольной системе декартовых координат компоненты тензора момента скоростей второго порядка изотропного однородного потока выражаются следующим образом:

$$B_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = (B_{LL} - B_{NN}) \xi_i \xi_j / r^2 + B_{NN} \delta_{ij}. \quad (10.4)$$

Здесь  $r = |\mathbf{r}|$  — расстояние между точками;  $\xi_i$  — компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , соединяющего две точки;  $t$  — время;

$$\begin{aligned} B_{LL}(r, t) &= \langle u_L(\mathbf{x}, t) u_L(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle; \\ B_{NN}(r, t) &= \langle u_N(\mathbf{x}, t) u_N(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle; \end{aligned} \quad (10.5)$$

$u_L$  — проекция вектора скорости на направление радиус-вектора  $\mathbf{r}$ ;  $u_N$  — проекция вектора скорости на направление, нормальное радиус-вектору  $\mathbf{r}$ . Вследствие несжимаемости потока величины  $B_{LL}$  и  $B_{NN}$  связаны соотношением

$$B_{NN} = B_{LL} + (r/2) \partial_r B_{LL}. \quad (10.6)$$

Таким образом, тензор момента скоростей второго порядка изотропного однородного несжимаемого турбулентного потока

определяется одной скалярной функцией двух скалярных аргументов  $B_{LL}(r, t)$ . Аналогично обстоит дело и для тензора «двуточечного» момента третьего порядка

$$B_{iI, k} = \langle u_i(x, t) u_I(x, t) u_k(x + r, t) \rangle,$$

который вследствие изотропии, однородности и несжимаемости можно выразить через одну компоненту — скалярную функцию скалярных аргументов  $r$  и  $t$ , например

$$B_{LL, L}(r, t) = \langle u_L^2(x, t) u_L(x + r, t) \rangle. \quad (10.7)$$

Подобное же уменьшение числа независимых переменных и независимых компонент тензоров моментов благодаря однородности, изотропии и несжимаемости имеет место и для моментов более высоких порядков.

Обратимся теперь к уравнениям Навье—Стокса. Умножим эти уравнения на разные компоненты скорости в последовательно возрастающем числе точек, осредним и воспользуемся соотношениями симметрии, вытекающими из изотропии и однородности потока. При этом получается бесконечная цепочка уравнений, не замкнутая на каждом конечном шаге вследствие наличия в уравнениях Навье—Стокса квадратичной нелинейности.

Первое уравнение этой цепочки, связывающее двуточечные вторые и третий моменты, приводится к виду

$$\partial_t B_{LL}(r, t) = 2vr^{-4} \partial_r r^4 \partial_r B_{LL} + r^{-4} \partial_r r^4 B_{LL, L}(r, t). \quad (10.8)$$

Это соотношение, связывающее две неизвестные функции, называется уравнением Кармана—Хаузерза. Следует отметить, что в основной работе Кармана и Хаузерза [149] это уравнение было впервые дано в несколько другой, менее удобной форме. В форме (10.8) оно было представлено Л. Г. Лойцянским [65] и М. Д. Милионщиковым [67].

Задача в полном виде состоит в решении получившейся бесконечной цепочки уравнений при заданных начальных условиях на моменты. Это так называемая проблема вырождения изотропной однородной турбулентности. На самом деле о начальных условиях мы имеем в лучшем случае лишь очень общие представления и задать начальное распределение моментов не можем. В связи с этим особый интерес представляют асимптотики решения при больших временах, «запоминающие» лишь какие-то основные свойства начальных условий. Эти асимптотики в широких предположениях можно считать автомодельными.

### 10.3. Вырождение изотропной однородной турбулентности при пренебрежимо малых третьих моментах

Если на некотором этапе движения вклад третьих моментов в соотношение Кармана—Хаузерза (10.8) мал, то это соотношение становится замкнутым и превращается в уравнение для второго момента  $B_{LL}(r, t)$ :  $\partial_t B_{LL} = 2vr^{-4} \partial_r r^4 \partial_r B_{LL}$ ,

$$(10.9)$$

совпадающее по форме с уравнением теплопроводности в пятимерном пространстве при наличии центральной симметрии. Автомодельные решения этого уравнения были получены в той же работе Кармана и Хауэрза [149] (см. также [94, 97]); они имеют вид

$$B_{LL} = A(t - t_0)^{-n} f(\xi, n); \quad \xi = r/\sqrt{v(t - t_0)}, \quad (10.10)$$

где  $A, n, t_0$  — постоянные, а функция  $f(\xi, n)$  удовлетворяет уравнению

$$d^2f/d\xi^2 + (4/\xi + \xi/2) df/d\xi + nf = 0 \quad (10.11)$$

при условиях

$$f(0, n) = 1; \quad f(\infty, n) = 0, \quad (10.12)$$

Первое из условий (10.12) является нормировочным, а второе получается из естественного предположения о статистической независимости скоростей в бесконечно удаленных точках:  $B_{LL}(\infty, t) = 0$ . Определенная таким образом функция  $f(\xi, n)$  выражается, как нетрудно показать, через хорошо известную [106] специальную функцию — конфлюентную гипергеометрическую функцию  $M(\alpha, \beta, z)$ :

$$f = M(n, 5/2; -\xi^2/8). \quad (10.13)$$

Спектр собственных значений  $n$ , определяющих скорость затухания моментов связи второго порядка, при непосредственном построении автомодельного решения (10.10) оказался непрерывным: решение уравнения (10.11) при условиях (10.12) существует при любом  $n > 0$ . Реализуемое на самом деле значение  $n$  должно определяться начальными условиями невырожденной задачи, для которой решение (10.10) представляет собой автомодельную промежуточную асимптотику.

Пусть начальное распределение  $B_{LL}(r, 0)$  таково, что величина

$$\Lambda_0 = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r, 0) dr \quad (10.14)$$

конечна и отлична от нуля, т. е.  $0 < \Lambda_0 < \infty$ . Тогда  $n = 5/2$ , и соответствующая такому начальному распределению асимптотика решения при  $t \rightarrow \infty$  записывается в виде

$$B_{LL}(r, t) = (\Lambda_0/48 \sqrt{2\pi v^5 (t - t_0)^5}) \exp[-r^2/8v(t - t_0)]. \quad (10.15)$$

При этом величина

$$\Lambda = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r, t) dr \quad (10.16)$$

является интегралом движения, аналогичным суммарному количеству тепла в теории теплопроводности, т. е. не зависит от времени:

$\Lambda = \Lambda_0$ . Л. Г. Лойцянский [65] показал, что при определенных предположениях эта величина не изменяется во времени и при учете третьих моментов.

Можно показать, используя свойства конфлюентной гипергеометрической функции, что решения (10.10) с  $n > 5/2$  обладают интегралом  $\Lambda$ , равным нулю. Эти решения в определенном смысле неустойчивы по отношению к начальным данным. Действительно, если возмущения такого решения обладают пусть малым, но конечным  $\Lambda_0$ , то при достаточно больших временах именно вклад возмущения будет определять закон затухания, поскольку он соответствует меньшему  $n$ , а именно  $n = 5/2$ . По этой причине автомодельные решения с  $n > 5/2$  представляют меньший интерес. Напротив, представляют существенный интерес решения с  $n < 5/2$ , для которых  $\Lambda_0 = \infty$ . Эти решения можно записать в виде

$$B_{LL}(r, t) = (\Lambda_0 / \sqrt{v^5(t - t_0)^5}) (\sqrt{v(t - t_0)/l})^{5-2n} f(r/\sqrt{v(t - t_0)}, n), \quad (10.17)$$

где  $\Lambda_0$  и  $l$  — постоянные, имеющие соответственно размерность  $L^7 T^{-2}$  и  $L$ , причем эти постоянные выбраны так, что  $A = \Lambda_0 l^{-(5-2n)} v^{-n}$ . Как видно, все решения с  $n \neq 5/2$  представляют собой автомодельности второго рода, «запомнившие» характерный размер начального распределения  $l$  (ср. главу 3, где на примере другой задачи разобрана вполне аналогичная ситуация). Дело в том, что асимптотика безразмерной функции  $\Phi_{LL}(\xi, \eta, \dots)$ , где  $\xi = r/\sqrt{v(t - t_0)}$ ,  $\eta = l/\sqrt{v(t - t_0)}$ , появляющейся при применении анализа размерностей к решению  $B_{LL}(r, t)$  исходной неавтомодельной задачи, имеет при малых  $\eta$  вид

$$\Phi_{LL}(\xi, \eta, \dots) \cong \eta^{2n-5} \Phi_{1LL}(\xi, \dots).$$

Таким образом, характерный размер начального распределения  $l$  хотя и входит в определяющую решение константу  $A$ , но только в комбинации с  $\Lambda_0$ , и поэтому не портит автомодельности.

Заметим, что стадию развития изотропной однородной турбулентности, на которой третий моменты пренебрежимо малы, иногда называют заключительной стадией вырождения. Это аргументируется тем, что на заключительной стадии малы скорости, и, следовательно, третий моменты, имеющие порядок куба скорости, малы по сравнению со вторыми, имеющими порядок квадрата скорости. Такая аргументация на самом деле недостаточна, потому что третий моменты входят в основное уравнение Кармана—Хаузерса (10.8) с производной на единицу меньшего порядка, чем вторые, а каждое дифференцирование повышает скорость вырождения соответствующего члена. В действительности, стадия, на которой третий моменты пренебрежимо малы, может иметь место лишь в начале движения при специальном выборе начальных условий.

#### 10.4. Вырождение изотропной однородной турбулентности при конечных третьих моментах

С самого возникновения в работах Дж. И. Тейлора [200] представления об изотропном однородном турбулентном потоке его пытались моделировать затуханием турбулентности в аэродинамических и гидродинамических трубах. Подробная сводка этих работ имеется в статье Гад-эль-Хак и Корсина [128]. Следует специально отметить исключительные по тщательности эксперименты, выполненные Лингом с сотрудниками [162, 163] в гидродинамической трубе — длинном канале квадратного сечения, в который подавалась вода через пассивную или активную решетку стержней.

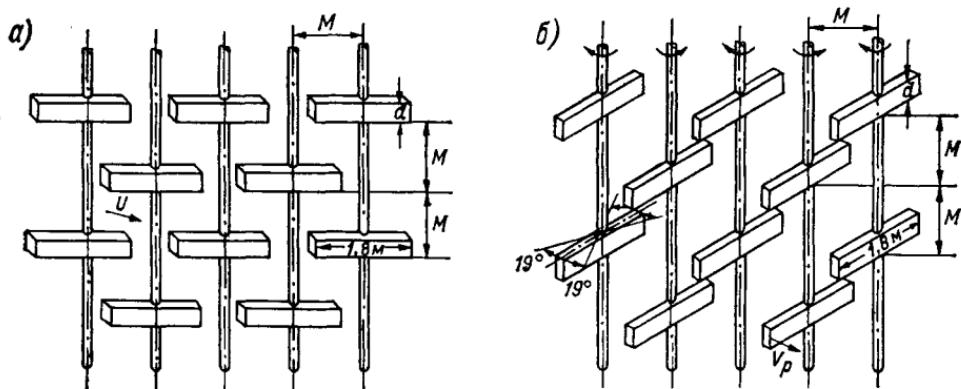


Рис. 10.1. Турбулизирующие решетки, использованные в работах [162, 163]: пассивная (а) и активная (б).

На рис. 10.1 приведены схемы решеток, использованных в этих работах. В активной решетке стержни были снабжены лопатками, совершающими колебательное движение с различной скоростью. В работе Гад-эль-Хак и Корсина [128] использовались другие активные решетки, стержни которых были полыми, а сопла направлены по потоку или против потока. Через полые стержни и сопла в поток подавался воздух (в этой работе исследование проводилось в аэродинамической трубе) с различным расходом.

Таким образом, во всех этих опытах турбулентные возмущения вносятся в поток на решетке и затем затухают по мере продвижения по потоку. При этом пульсации скорости уже на небольших расстояниях от решеток становятся близкими к изотропным. На рис. 10.2 изображены результаты измерения отношения средних квадратов пульсаций продольной и поперечной компонент скорости [162]. Как видно, эти отношения близки к единице. Ясно, что если принять за время величину  $t = x/U$  ( $U$  — средняя скорость подводимого к решетке потока,  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль канала от решетки), то картина затухания турбулентности по мере продвижения вдоль канала достаточно хорошо соответ-

ствует схеме вырождения изотропной однородной турбулентности во времени (однородность также проверялась специально путем перемещения по сечению  $x = \text{const}$  датчиков, при помощи которых производились измерения скорости).

Статистические характеристики — моменты рассматриваемого турбулентного движения — определяются, таким образом, средней скоростью подводимого к решетке потока  $U$ , характерным размером решетки  $M$ , толщиной стержней  $d$ , коэффициентом вязкости  $\nu$  и величинами  $r$  и  $t - t_0$ , где  $t_0$  — эффективное начало отсчета времени, об определении которого будет сказано ниже. Далее, для активных решеток, подобных тем, что были использованы Лингом и Ваном [163], моменты определяются также скоростью  $V_p$  и ча-

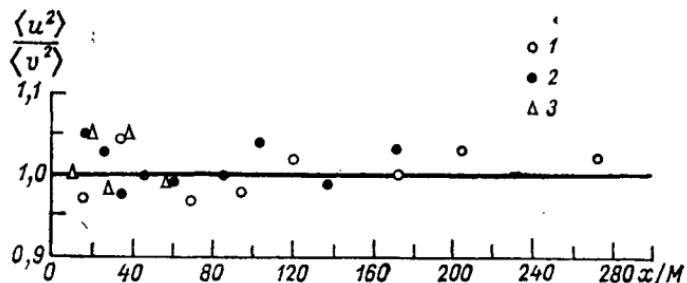


Рис. 10.2. Пульсации скорости в турбулентном потоке за решеткой [162].

1)  $Re_M = 470$ ,  $M = 1,78$  см,  $M/d = 2,8$ ,  $U = 2,9$  см/с; 2)  $Re_M = 940$ ,  $M = 3,56$  см,  $M/d = 2,8$ ,  $U = 2,9$  см/с; 3)  $Re_M = 840$ ,  $M = 3,18$  см,  $M/d = 5,0$ ,  $U = 2,9$  см/с.

стотой  $\omega$  колебаний концов лопаток; для активных решеток, использованных в работе Гад-Эль-Хака и Корсина [128], дополнительным определяющим параметром моментов является относительный расход газа через решетку  $J = Q_1/Q$  ( $Q_1$  — расход газа, подаваемого через полые стержни решетки;  $Q$  — расход газа, подаваемого к решетке).

Из анализа размерности для двухточечных моментов второго и третьего порядка получаем

$$B_{LL} = [\nu/(t - t_0)] \Phi_{LL}(\xi, \eta, M/d, MU/\nu, \dots); \quad (10.18)$$

$$B_{LL,L} = [\nu/(t - t_0)]^{3/2} \Phi_{LL,L}(\xi, \eta, M/d, MU/\nu, \dots), \quad (10.19)$$

где  $\Phi$  с индексами — безразмерные функции своих безразмерных аргументов

$$\xi = r/\sqrt{\nu(t - t_0)}; \quad \eta = M/U(t - t_0),$$

параметра решетки  $M/d$ , числа Рейнольдса решетки  $MU/\nu$ , а также параметров, характеризующих активность решетки.

Представляет интерес рассмотрение движения на достаточно больших удалениях от решетки, где  $\eta = M/U(t - t_0) \ll 1$  и можно

считать, что случайные детали начальных условий на решетке уже перестают сказываться. Простейшее предположение состоит в том, что по параметру  $\eta$  при  $\eta \ll 1$  имеет место полная автомодельность. Такое предположение и было выдвинуто Карманом [149], считавшим, что оно может выполняться при больших числах Рейнольдса, когда влияние вязкости несущественно. В предположении полной автомодельности по  $\eta$  при  $\eta \ll 1$  на достаточно больших расстояниях от решетки должны быть справедливы соотношения

$$B_{LL}(r, t)/B_{LL}(0, t) = f(\xi, M/d, MU/v, \dots); \quad B_{LL}(0, t) = A/(t - t_0); \quad (10.20)$$

$$B_{LL,L}(r, t)/B_{LL}^{3/2}(0, t) = g(\xi, M/d, MU/v, \dots). \quad (10.21)$$

Здесь  $A$  — постоянная, зависящая от начальных условий на решетке. Соотношения (10.20), (10.21) были указаны Драйденом [125] и Л. И. Седовым [94].

Следующим по степени сложности является предположение о неполной автомодельности по переменной  $\eta$  при  $\eta \ll 1$ . В этом случае на больших расстояниях от решетки должны выполняться соотношения

$$B_{LL}(r, t) = [vM^\alpha/U^\alpha(t - t_0)^{1+\alpha}] F(\xi, M/d, MU/v, \dots); \quad (10.22)$$

$$B_{LL}(r, t)/B_{LL}(0, t) = f(\xi, M/d, MU/v, \dots); \quad (10.23)$$

$$B_{LL}(0, t) = A/(t - t_0)^{1+\alpha}; \quad (10.24)$$

$$B_{LL,L}(r, t) = [v^{3/2}M^\alpha/U^\alpha(t - t_0)^{3/2+\alpha}] g(\xi, M/d, MU/v, \dots); \quad (10.25)$$

$$B_{LL,L}(r, t)/B_{LL}^{3/2}(0, t) = B(t - t_0)^{\alpha/2} g(\xi, M/d, MU/v, \dots). \quad (10.26)$$

Здесь  $A, B, \alpha$  — постоянные величины. При этом одинаковость степеней, с которыми  $\eta$  входит в выражения для  $B_{LL}(r, t)$  и  $B_{LL,L}(r, t)$ , вытекает из уравнения Кармана—Хаэрза (10.8), связывающего эти величины.

Обратимся к результатам экспериментов. На рисунках 10.3 и 10.4 представлены результаты измерений величины коэффициента корреляции

$$f = B_{LL}(r, t)/B_{LL}(0, t),$$

соответственно для пассивной [162] и активной [163] решеток в зависимости от  $\xi = r/\sqrt{v(t - t_0)}$ . При этом начало отсчета  $t_0$  определялось надлежащим образом (см. ниже). Как видно, во всех случаях опытные точки превосходно ложатся на единые кривые, различные для разных случаев. Это подтверждает автомодельность коэффициента корреляции  $f$ , но не определяет характера автомодельности: соответствующий результат, как видно из формул

(10.20) и (10.23), должен иметь место в обоих случаях — как при полной, так и при неполной автомодельности.

На рисунках 10.5 и 10.6 представлены результаты измерения величины  $B_{LL}(0, t)$  соответственно для пассивных решеток разных

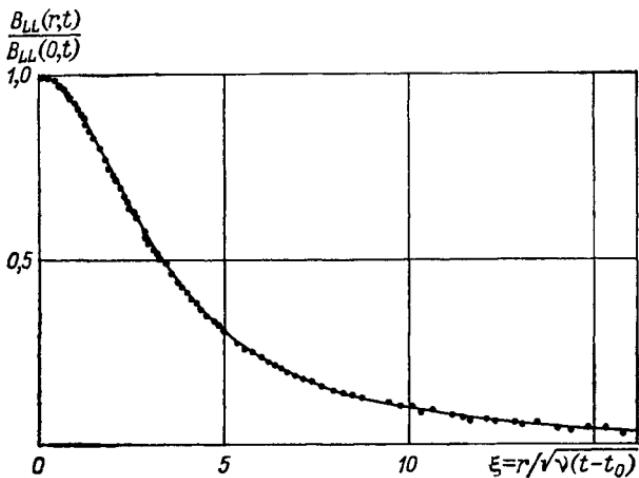


Рис. 10.3. Коэффициент корреляции  $f$  за пассивной решеткой [162].

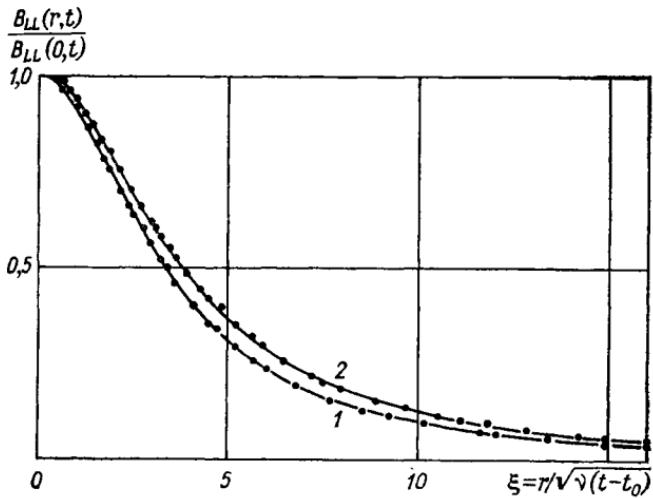


Рис. 10.4. Коэффициент корреляции  $f$  за активной решеткой [163].

1)  $V_p/U=3$ , 2)  $V_p/U=17$ .

типов [162] и активных решеток [163]. Как видно, во всех случаях затухание уже на небольших расстояниях от решетки следует автомодельному степенному закону

$$B_{LL}(0, t) = A/(t - t_0)^n; \quad n = 1 + \alpha. \quad (10.27)$$

Способ определения начального момента  $t_0$  представлен на рис. 10.7. Степенной закон затухания  $B_{LL}(0, t) = \langle u^2 \rangle \sim (t - t_0)^{-n}$  приводит к тому, что при больших  $t$  величина  $[U^2/\langle u^2 \rangle]^{1/n}$  должна

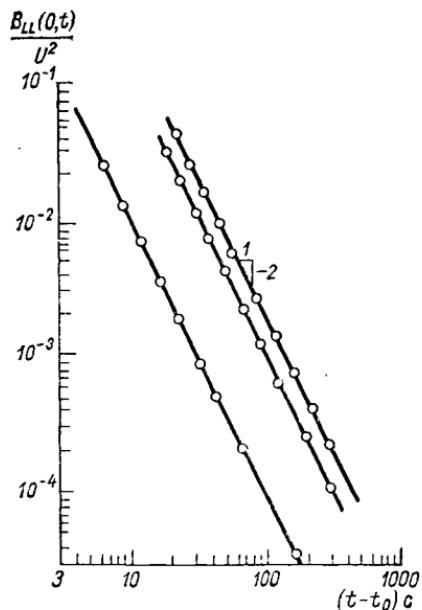


Рис. 10.5. Момент  $B_{LL}(0, t)$  за пассивной решеткой [162] при разных комбинациях пассивных решеток.

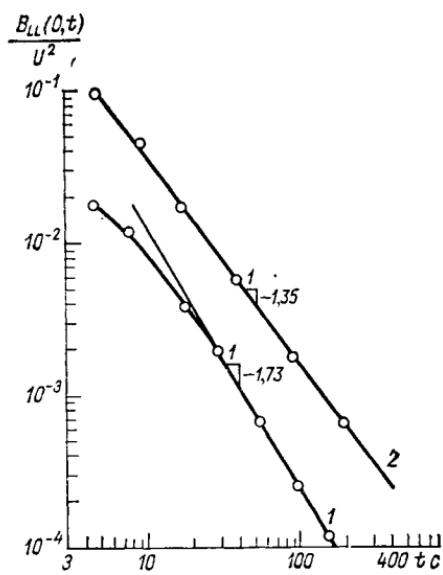


Рис. 10.6. Момент  $B_{LL}(0, t)$  за активной решеткой [163].

1)  $V_p/U=3$ , 2)  $V_p/U=17$ .

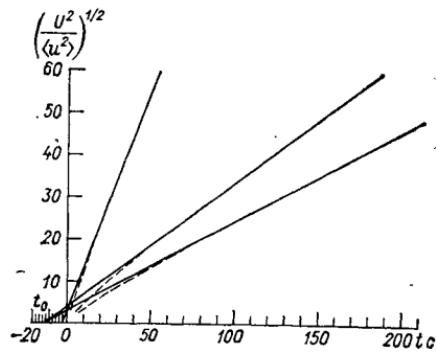


Рис. 10.7. Определение начального момента  $t_0$  для случая пассивных решеток [162].

быть линейной функцией времени, т. е. ее зависимость от  $t$  должна представляться прямой линией. Пересечение построенных по экспериментальным точкам прямых с осью абсцисс и дает значение  $t_0$ .

Во всех случаях показатель  $\alpha$  оказался отличным от нуля: он равен единице для неподвижных решеток; 0,73 для подвижной ре-

шетки с  $V_p/U = 3$  и 0,35 для подвижной решетки с  $V_p/U = 17$ . Этот показатель зависит, таким образом, от начальных условий, т. е. условий на решетке.

Работа Гад-эль-Хак и Корсина [128] содержит результаты обработки данных других, как правило, с нашей точки зрения менее совершенных, экспериментов различных авторов. Обработка велась по зависимости величины  $B_{LL}(0, t)$  от  $t$ , зависимость предполагалась, согласно (10.27), степенной. В некоторых случаях турбулентность была слабо анизотропной, поэтому в работе [128] приведены показатели затухания всех трех компонентов пульсационной скорости. Эксперименты, как правило, проводились на пассивных решетках, за исключением некоторых опытов, о которых сообщается

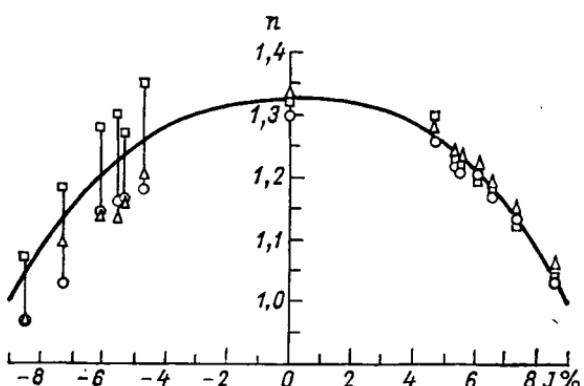


Рис. 10.8. Зависимость показателей степени в законе затухания  $B_{LL}(0, t)$  за активной решеткой от относительного расхода  $J$  воздуха для различных компонентов скорости [128].

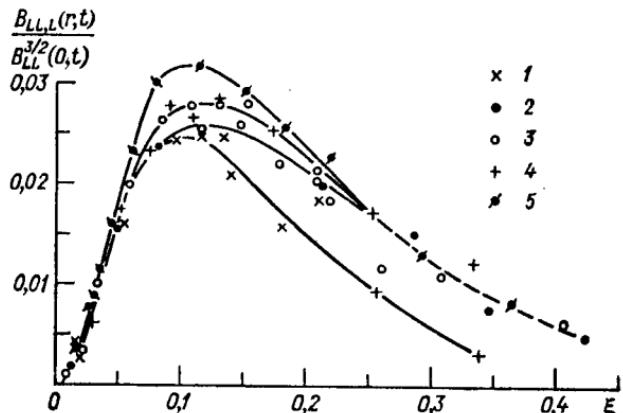
При вдуве по потоку  $J > 0$ , против потока  $J < 0$ . При  $J > 0$  затухание изотропно, показатель степени отличается от единицы.

в той же работе [128]. В этих опытах, как уже говорилось выше, использовалась решетка из полых стержней с соплами, через которые в поток подавался воздух. Зависимость показателей степени в законе затухания  $B_{LL}(0, t)$  за активной решеткой от относительного расхода  $J$  воздуха, подаваемого через сопла решетки, представлена на рис. 10.8.

Как оказалось, показатели степени в законе вырождения зависят от условий на решетке (число Рейнольдса решетки, характеристики ее активности:  $J$ ,  $V_p/U$ ,  $\omega$  и т. д.). Показатель  $\alpha$  оказался равным нулю, т. е. автомодельность вырождения оказалась полной только в случае чудовищно больших чисел Рейнольдса решетки, полученных в работе Кистлера и Вребаловича [152].

К сожалению, третий моменты почти никем не измерялись: одной из немногих работ, в которых измерялись третий моменты, остается на сегодня работа Стюарта [195]. В ней подтверждается автомодельность коэффициента корреляции и обращается внимание на отсутствие единой зависимости отношения  $B_{LL,L}(r, t)/B_{LL}^{3/2}(0, t)$  от автомодельной переменной для разных моментов времени (рис. 10.9). Это согласуется с неполной автомодельностью вырождения (см. (10.26)) и не должно иметь места при полной автомодельности.

Итак, мы приходим к выводу, что в опытах уже на небольших расстояниях от решетки вырождение турбулентности автомодельно, причем эта автомодельность неполная, так что влияние начального размера (размера решетки) не исчезает никогда, но благодаря особенностям изотропной однородной турбулентности проявляется только в комплексе с другими параметрами. Показатель степени в законе вырождения не может быть определен из соображений анализа размерностей, но выделяется из непрерывного



спектра возможных значений начальными условиями (условиями на решетке) — ситуация, в принципе аналогичная той, с которой мы столкнулись выше при рассмотрении автомодельного аналога уравнения Кортевега—де Фриза.

Сделанные выводы, разумеется, относятся только к случаю «слабой» турбулентности, для которой значения  $Ret = v l / v$  ( $v$  — масштаб пульсаций скорости,  $l$  — линейный масштаб турбулентности) достаточно малы. В противном случае нет оснований ожидать независимости от  $Ret$ , т. е. автомодельности вырождения.

Изложенный выше анализ автомодельного вырождения однородной изотропной турбулентности был выполнен в работе [15].

## 10.5. Локально-изотропная турбулентность

Исследование локальной структуры турбулентных течений несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса в замечательных работах А. Н. Колмогорова [54, 155] и А. М. Обухова [79, 173] также доставляет показательные примеры автомодельных промежуточных асимптотик различных типов. Здесь следует отметить также выдающуюся работу их предшественника Л. Ф. Ричардсона [186], предложившего качественную картину вихревого каскада в турбулентном потоке.

Согласно основному предположению А. Н. Колмогорова, при больших числах Рейнольдса гидродинамические поля обладают свойством локальной изотропии, однородности и стационарности.

Локальная изотропия и однородность означают, что тензоры моментов, в которые входят относительные скорости

$$\Delta_r \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (10.28)$$

при достаточно малых  $r$  изотропны и однородны. Условие стационарности статистических характеристик локальных полей объясняется тем, что характерные времена мелкомасштабных локальных полей много меньше характерных времен изменения основного потока.

Таким образом, как и в случае обычной изотропии и однородности турбулентного потока, тензор вторых моментов величин  $\Delta_r \mathbf{u}$  выражается через один из своих компонентов, например,

$$D_{LL} = \langle (u_L(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_L(\mathbf{x}, t))^2 \rangle, \quad (10.29)$$

где  $u_L$  — компонент вектора скорости  $\mathbf{u}$  по направлению  $\mathbf{r}$ . Величина  $D_{LL}$  зависит от  $r$  — модуля вектора  $\mathbf{r}$ , а также от кинематической вязкости жидкости  $\nu$ , внешнего масштаба  $\Lambda$  и некоторого параметра, определяющего интенсивность турбулентности. В качестве такого параметра удобно принять среднюю энергию, передаваемую за единицу времени рассматриваемым мелкомасштабным движением от крупномасштабных, которая в силу стационарности равна в расчете на единицу массы средней скорости вязкой диссипации энергии  $\langle \varepsilon \rangle$ . Величина  $\langle \varepsilon \rangle$  имеет, очевидно, размерность  $L^2 T^{-3}$ . Удобно ввести в рассмотрение вместо вязкости линейный масштаб  $\lambda$  движений, на которых происходит вязкая диссипация, определяемый величинами  $\nu$  и  $\langle \varepsilon \rangle$ , согласно анализу размерностей, соотношением

$$\lambda = \nu^{3/4} \langle \varepsilon \rangle^{-1/4}. \quad (10.30)$$

Этот масштаб называется колмогоровским внутренним масштабом. Таким образом, получаем

$$D_{LL} = f(r, \langle \varepsilon \rangle, \lambda, \Lambda). \quad (10.31)$$

Анализ размерностей дает по стандартной процедуре

$$D_{LL} = \langle \varepsilon \rangle^{2/3} r^{2/3} \Phi(r/\lambda, r/\Lambda). \quad (10.32)$$

Закономерности, справедливые в так называемом инерционном интервале масштабов, много меньших внешнего и много больших внутреннего, т. е. при  $\lambda \ll r \ll \Lambda$ , представляют собой промежуточную асимптотику (10.32) при  $r/\lambda \rightarrow \infty$ , но  $r/\Lambda \rightarrow 0$  (при больших числах Рейнольдса, очевидно,  $\lambda \ll \Lambda$ ). В классическом варианте теории Колмогорова—Обухова делается предположение, равносильное предположению о полной автомодельности по обоим параметрам  $r/\lambda$  и  $r/\Lambda$ , так что при  $\lambda \ll r \ll \Lambda$  получается «закон двух третей» Колмогорова—Обухова:

$$D_{LL} = C \langle \varepsilon \rangle^{2/3} r^{2/3}, \quad (10.33)$$

где  $C$  — универсальная постоянная, которая должна быть равна  $\Phi(\infty, 0)$ .

На самом деле существование полной автомодельности по переменной  $r/\Lambda$  при малых  $r/\Lambda$  вызывает некоторые сомнения. Дело в том, что величина скорости диссипации энергии  $\varepsilon$  тоже флюктуирует, и может оказаться существенным вклад флюктуаций  $\varepsilon$  в масштабах, больших масштаба «интервала равновесия»  $r \ll \Lambda$ , для которого только  $\varepsilon$  имеет место локальная изотропия и однородность. Этот вопрос был поднят Л. Д. Ландау (см. [63]); он детально обсуждается в монографии А. С. Монина и А. М. Яглома [75].

Предположим поэтому, что имеет место полная автомодельность по параметру  $r/\lambda$  при  $r/\lambda \gg 1$  и неполная автомодельность по параметру  $r/\Lambda$  при  $r/\Lambda \ll 1$ , так что при  $r/\lambda \rightarrow \infty$  и  $r/\Lambda \rightarrow 0$

$$\Phi(r/\lambda, r/\Lambda) \sim C_1(r/\Lambda)^\alpha,$$

где  $C_1$ ,  $\alpha$  — универсальные постоянные. Из соотношения (10.32) получаем при этом

$$D_{LL} = C_1 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} r^{2/3 + \alpha} \Lambda^{-\alpha}. \quad (10.34)$$

Однако именно такое соотношение получается в уточненной теории Колмогорова—Обухова, учитывающей влияние флюктуаций диссипации энергии. При этом, по косвенным экспериментальным данным,  $\alpha = 0,04$ , так что зависимость (10.34) фактически мало отличается от закона двух третей, что не уменьшает теоретического интереса этого отличия.

## Глава 11

---

### ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ПОТОК С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ

---

#### 11.1. Пристеночная область турбулентного потока с поперечным сдвигом

Наряду с изотропным однородным турбулентным потоком, законы подобия которого были рассмотрены в предыдущей главе, фундаментальное значение имеет исследование потока с поперечным сдвигом. Так называется в среднем стационарный и однородный в продольном направлении турбулентный поток, средняя скорость и все статистические характеристики которого зависят только от одной поперечной координаты (рис. 11.1). Простейшая реализация такого течения получается в трубе или в канале вдали от входа, при обтекании пластинки вдали от ее передней кромки, в пограничном слое атмосферы и т. д. Вблизи ограничивающей поток твердой стенки можно считать напряжение сдвига постоянным.

Область, в которой это предположение справедливо, естественно назвать *пристеночной областью*; в атмосфере эта область называется *приземным слоем*. Состояние движения в некоторой точке течения в пристеночной области определяется: напряжением сдвига  $\tau$  (по предположению постоянным), плотностью жидкости  $\rho$  и ее кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu$ , а также расстоянием рассматриваемой точки от стенки  $z$  и некоторым внешним размером  $\Lambda$  (диаметром трубы, полной глубиной канала, толщиной пограничного слоя и т. д.).

Таким образом, градиент средней скорости  $\partial_z u$  в данной точке зависит от следующих определяющих параметров:

$$\partial_z u = f(\tau, \rho, \nu, z, \Lambda), \quad (11.1)$$

первые три из которых имеют независимые размерности.

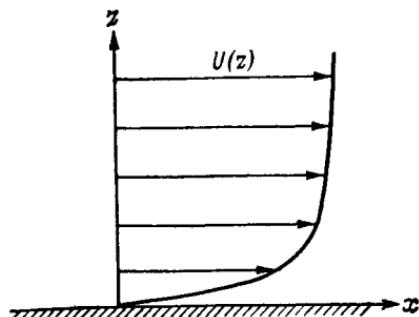


Рис. 11.1. Поток с поперечным сдвигом.

Применяя стандартную процедуру анализа размерностей, получаем:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2), \quad (11.2)$$

где

$$\Pi = z \partial_z u / u_*; \quad \Pi_1 = u_* z / \nu = Re_l; \quad \Pi_2 = u_* \Lambda / \nu = Re_*. \quad (11.3)$$

Фигурирующая здесь величина размерности скорости  $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$  носит название *динамической скорости*; величины  $\Pi_1 = Re_l$  и  $\Pi_2 = Re_*$  называются соответственно *локальным* и *глобальным* числами Рейнольдса. Заметим теперь, что величина локального числа Рейнольдса уже на небольших расстояниях от стенки весьма велика. Так, например, в потоке воды ( $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ ) с небольшой динамической скоростью  $u_* = 10 \text{ см}/\text{с}$  локальное число Рейнольдса на расстоянии всего одного миллиметра от стенки равно 100, а глобальное число Рейнольдса для трубы диаметром 10 см составляет 10 000. (Глобальное число Рейнольдса отличается от обычно используемого (см. главу 1) в трубной гидравлике числа Рейнольдса, которое основано на средней, а не на динамической скорости.)

Естественно, таким образом, в первую очередь сделать предположение о полной автомодельности течения по локальному и гло-

бальному числом Рейнольдса вне малой непосредственной окрестности стенки.<sup>1</sup> В этом предположении, восходящем к Л. Прандтлю, соотношение (11.2) дает

$$P = z \partial_z u / u_* = \text{const} = 1/\kappa, \quad (11.4)$$

откуда получается известный универсальный (т. е. независящий от глобального числа Рейнольдса) логарифмический закон распределения скоростей

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln z + \text{const}. \quad (11.5)$$

Величина  $\kappa$ , называемая константой Кармана, в предположении полной автомодельности должна быть универсальной постоянной, не зависящей от числа Рейнольдса.

Универсальный логарифмический закон, на первый взгляд, удовлетворительно подтверждается данными измерений распределения скорости в течениях в гладких трубах и других аналогичных потоках (рис. 11.2). Однако более детальный анализ опытных данных [139, 202, 203] обнаруживает систематическую зависимость константы Кармана от числа Рейнольдса, т. е. систематические, хотя и небольшие, отклонения распределения скорости от универсального логарифмического закона.

Естественно поэтому проанализировать возможное предположение [21, 108] о неполной автомодельности течения по локальному числу Рейнольдса в отсутствии автомодельности по глобальному числу Рейнольдса. Причину, по которой влияние вязкости сохраняется при больших числах Рейнольдса, можно представить себе следующим образом. Как известно, турбулентный поток представляет собой совокупность громадного множества вихрей, пронизывающих движущуюся жидкость. С ростом числа Рейнольдса количество вихрей возрастает. Как бы велико ни было число Рейнольдса, вязкость остается существенной вблизи «ядер» вихрей, и, таким образом, ее динамическое воздействие на поток не исчезает.

В предположении неполной автомодельности соотношение (11.2) дает

$$z \partial_z u / u_* = (u_* z / v)^\lambda \Phi(\text{Re}_*), \quad (11.6)$$

где  $\lambda$  — величина, также зависящая от глобального числа Рейнольдса. Интегрируя это соотношение и полагая, в согласии с опытом, постоянную интегрирования равной нулю, получаем степенное распределение скорости:

$$u = u_*^{1+\lambda} z^\lambda / \lambda v^\lambda \kappa (\text{Re}_*) \quad (11.7)$$

<sup>1</sup> Именно в этом предположении кроется причина того, что рассматривается градиент скорости, а не сама скорость. В отличие от градиента скорости, сама скорость на любом расстоянии от стенки зависит от ситуации в области течения, примыкающей к стенке. В этой области гипотеза автомодельности по числам Рейнольдса непригодна.

с показателем степени, зависящим от глобального числа Рейнольдса. Здесь обозначено  $\kappa(Re_*) = 1/\Phi(Re_*)$ . Степенные законы распределения скорости в различных турбулентных сдвиговых течениях уже давно предлагались в качестве эмпирических зависимостей. Они прекрасно подтверждаются многочисленными экспериментами, среди которых следует отметить классические опыты с турбулентными течениями в гладких трубах Мёбиуса [190], Никурадзе [172] и сравнительно недавние превосходные измерения

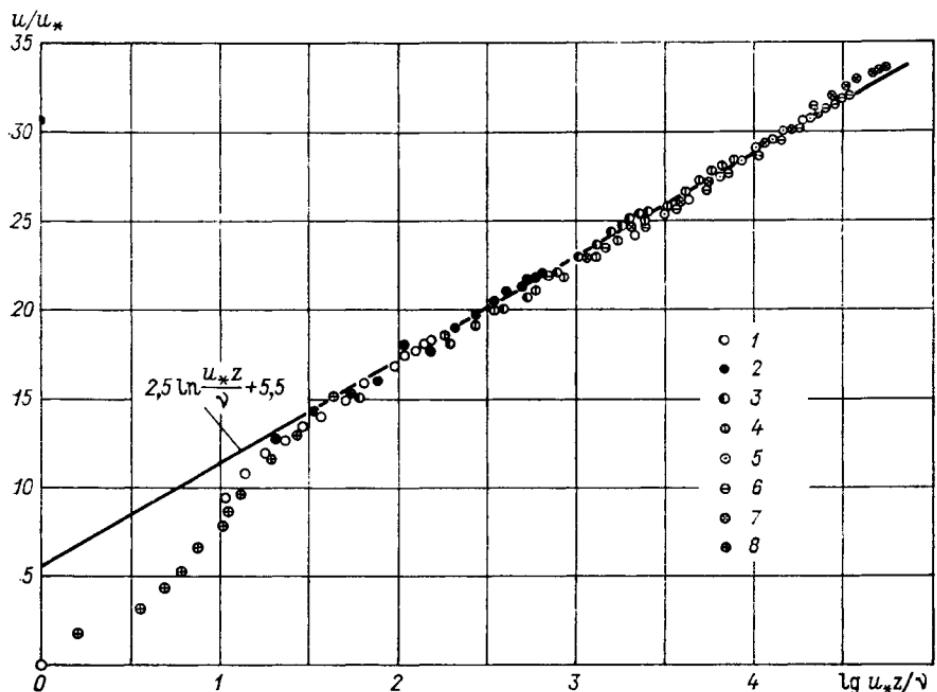


Рис. 11.2. Универсальный логарифмический закон на первый взгляд подтверждается данными измерений распределений скорости в гладких трубах, пограничных слоях, на гладких пластинах и т. д.

1)  $Re=4,1 \cdot 10^3$ ; 2)  $Re=2,3 \cdot 10^4$ ; 3)  $Re=1,1 \cdot 10^5$ ; 4)  $Re=4,0 \cdot 10^5$ ; 5)  $Re=1,1 \cdot 10^6$ ; 6)  $Re=2,0 \cdot 10^6$ ; 7)  $Re=3,2 \cdot 10^6$  (опыты Никурадзе); 8) опыты Райхардта.

Лауфера [158]. Признано (см. монографии Шлихтинга [191] и Хинце [138]), что степенные законы для распределения скорости с показателем степени, зависящим от глобального числа Рейнольдса, подтверждаются заведомо не хуже, чем универсальный логарифмический закон. На рис. 11.3 представлено заимствованное из монографии Шлихтинга [191] распределение скоростей в гладких трубах, построенное по измерениям Никурадзе [172], которое удовлетворительно подтверждает степенное распределение скоростей почти по всему сечению трубы. Тем не менее считается, что универсальный логарифмический закон имеет, в отличие от степенных, теоретическое обоснование, а степенные законы представляют собой просто эмпирические соотношения. На самом деле,

как мы видели, степенные законы обосновываются исходя из предположения о неполной автомодельности потока по локальному числу Рейнольдса не хуже, чем универсальный логарифмический закон обосновывается исходя из предположения о полной автомодельности.

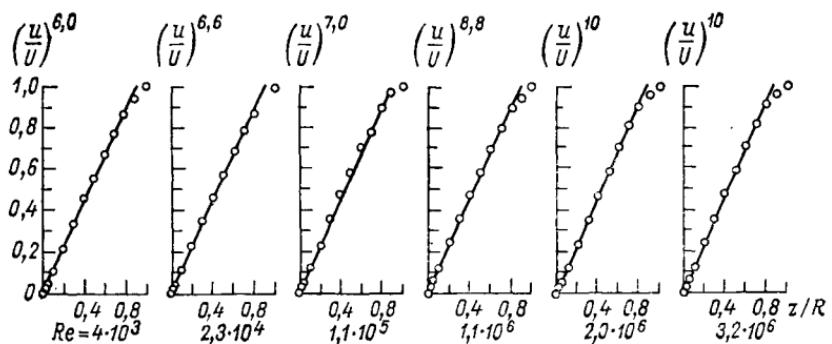
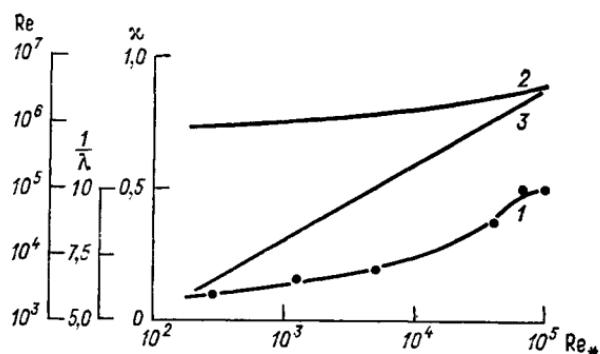


Рис. 11.3. Измерения Никирадзе подтверждают степенной закон распределения скорости почти по всему сечению трубы.

$U$  — средняя скорость на оси трубы.

Данные опытов названных выше авторов позволяют определить зависимость  $\lambda(Re_*)$  (рис. 11.4, кривая 1) до  $Re_* \cong 10^5$ . Остается неясным поведение этой зависимости при еще больших значениях  $Re_*$ : стремится  $\lambda$  при возрастании  $Re_*$  к нулю или к некоторому

Рис. 11.4. Зависимости  $\lambda(Re_*)$  (1) и  $\chi(Re_*)$  (2), определенные по данным измерений распределения скорости в гладких трубах, и зависимость глобального числа Рейнольдса  $Re_*$  от обычного числа Рейнольдса  $Re$ , основанного на средней скорости (3).



постоянному пределу, отличному от нуля? Последнее означало бы, что универсальный логарифмический закон, строго говоря, вообще не имеет места даже при очень больших числах Рейнольдса и является лишь приближенным представлением опытных данных. Упомянутые опыты позволяют также построить зависимость  $\chi(Re_*)$  (см. рис. 11.4, кривая 2). Как видно, величина  $\chi(Re_*)$  при возрастании  $Re_*$  меняется сравнительно слабо и в первом приближении ее можно считать постоянной.

## 11.2. Пристеночная область турбулентного потока с поперечным сдвигом — полуэмпирическая теория и гипотезы автомодельности Колмогорова

Рассмотрим теперь пристеночную область турбулентного потока с поперечным сдвигом, описанную в п. 11.1, более детально, опираясь на полуэмпирическую теорию, предложенную А. Н. Колмогоровым [55]. Теория Колмогорова основана на использовании уравнений сохранения импульса и турбулентной энергии и их замыкания при помощи некоторых гипотез автомодельности.

Исключим из рассмотрения весьма тонкую область в непосредственной близости от стенки, где вязкие напряжения сравнимы с турбулентными. Тогда уравнение баланса импульса для пристеночной области потока с поперечным сдвигом записывается в виде

$$-\rho \langle u' w' \rangle = \tau. \quad (11.8)$$

Здесь  $u'$  и  $w'$  — пульсации соответственно продольной и вертикальной компонент скорости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $-\rho \langle u' w' \rangle$  — средний поток продольной компоненты импульса через единичную горизонтальную площадку, т. е. напряжение сдвига, создаваемое турбулентностью;  $\tau$  — действующее напряжение трения, по условию постоянное. В уравнении (11.8) мы пренебрегли вкладом вязких напряжений по сравнению со вкладом турбулентных напряжений Рейнольдса. Уравнение баланса турбулентной энергии для потока с поперечным сдвигом записывается в том же пренебрежении вкладом вязких напряжений в виде [69]

$$\langle u' w' \rangle \partial_z u + \partial_z \langle [p'/\rho + (1/2)(u'^2 + v'^2 + w'^2)] w' \rangle + \varepsilon_t = 0. \quad (11.9)$$

где  $v'$  — пульсация поперечной компоненты скорости,  $p'$  — пульсация давления,  $\varepsilon_t$  — средняя скорость диссипации турбулентной энергии в единице массы жидкости. Уравнение (11.9) получается по общему правилу, изложенному в п. 10.1, и отражает тот простой факт, что локальный баланс турбулентной энергии складывается из притока турбулентной энергии от энергии среднего движения, т. е. за счет работы рейнольдсовых напряжений (первый член), диффузионного притока турбулентной энергии (второй член) и диссипации турбулентной энергии в тепло. Для интересующих нас задач перенос турбулентной энергии за счет диффузии мал, и им можно пренебречь.

Введем коэффициент обмена импульса  $K$  посредством соотношения

$$\langle u' w' \rangle = -K \partial_z u. \quad (11.10)$$

Подчеркнем, что для потока с поперечным сдвигом соотношение (11.10) представляет собой простое переобозначение и не несет в себе никакой дополнительной гипотезы.

Как уже говорилось, турбулентный поток представляет собой совокупность множества вихрей, пронизывающих поток и создающих нерегулярное, быстро меняющееся движение. Гипотеза

А. Н. Колмогорова состоит в том, что коэффициент обмена импульса  $K$  и скорость диссипации энергии  $\varepsilon_t$  в данной точке потока определяются только локальной средней энергией вихрей, в качестве меры которой можно взять величину средней турбулентной энергии единицы массы

$$b = \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle / 2,$$

и локальным средним размером вихрей или пропорциональным ему внешним масштабом турбулентности  $l$ . Анализ размерности приводит стандартным образом к соотношениям

$$K = l \sqrt{b}; \quad \varepsilon_t = \gamma^4 b^{3/2} / l. \quad (11.11)$$

где, в силу неопределенности масштаба, константу в первом соотношении можно принять равной единице, а постоянная  $\gamma$  по оценкам опытных данных близка к 0,5.

Подставляя соотношения (11.10) и (11.11) в уравнения (11.8) и (11.9) и пренебрегая в последнем уравнении членом, выражющим вклад диффузии турбулентной энергии, получаем основную систему уравнений в виде

$$l \sqrt{b} \partial_z u = u_*^2; \quad l \sqrt{b} (\partial_z u)^2 - \gamma^4 b^{3/2} / l = 0, \quad (11.12)$$

где  $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$  — динамическая скорость.

Эта система остается пока незамкнутой, так как не определен масштаб турбулентности  $l$ . В согласии с п. 11.1, в пристеночной области турбулентного потока с поперечным сдвигом, где динамическая скорость  $u_*$  постоянна, масштаб турбулентности  $l$  зависит от динамической скорости  $u_*$ , кинематической вязкости  $\nu$ , вертикальной координаты  $z$  и внешнего масштаба  $\Lambda$ . Анализ размерностей дает

$$l = z \Phi_l (Re_l, Re_*), \quad (11.13)$$

где по-прежнему  $Re_l = u_* z / \nu$  и  $Re_* = u_* \Lambda / \nu$  — соответственно локальное и глобальное числа Рейнольдса. В предположении полной автомодельности по обоим числам Рейнольдса вне непосредственной окрестности стенки функция  $\Phi_l$  тождественно равна постоянной, которую удобно обозначить через  $\kappa\gamma$ , где  $\gamma$  — ранее введенная константа, а  $\kappa$  — постоянная Кармана, так что

$$l = \kappa\gamma z. \quad (11.14)$$

Подставляя (11.14) в (11.12) и интегрируя, получаем:

$$u = (u_*/\kappa) \ln z + \text{const}; \quad b = u_*^2 / \gamma^2, \quad (11.15)$$

т. е. логарифмический закон распределения скорости (11.5), полученный ранее из более общих соображений. Если предположить,

что автомодельность течения по локальному числу Рейнольдса неполная, то соотношение для масштаба турбулентности примет вид

$$l = z(u_*z/v)^{-\lambda} \Phi_{ll}(\text{Re}_*), \quad (11.16)$$

откуда и из (11.12) находим

$$z \partial_z u/u_* = (u_*z/v)^\lambda \Phi(\text{Re}_*); \quad \Phi(\text{Re}_*) = \gamma/\Phi_l(\text{Re}_*), \quad (11.17)$$

т. е. соотношение (11.6), также полученное ранее из более общих соображений. Интегрируя это соотношение, получим аналогично предыдущему степенной закон распределения скорости (11.7). Естественно, что степенные законы для распределения скорости получаются и при других способах замыкания. В частности, они получаются во всех вариантах замыкания, предложенных В. В. Новожиловым [78].

### 11.3. Законы подобия турбулентного пристеночного течения с продольным градиентом давления

Рассмотрим, следуя работе А. М. Яглома и Б. А. Кадера [105], течение в пристеночной области замедляющегося турбулентного потока с положительным продольным градиентом давления. Поток по-прежнему считается однородным в продольном направлении, так что определяющими параметрами течения являются: динамическая скорость  $u_*$ , плотность  $\rho$ , коэффициент кинематической вязкости жидкости  $v$ , расстояние от стенки  $z$  и внешний масштаб  $\Lambda$  (в данном случае ширина канала или толщина пограничного слоя). Все эти величины были определяющими параметрами для рассмотренного в п. 11.1 пристеночного течения в отсутствии продольного градиента давления. Кроме того, в рассматриваемом здесь течении возникает новый определяющий параметр — продольный градиент давления  $dp/dx$ , который в силу однородности потока в направлении оси  $x$ , выбираемом вдоль стенки, не зависит от продольной координаты и является, таким образом, постоянным. Поскольку  $[dp/dx] = ML^{-2}T^{-2}$ , в потоке дополнительно к локальному  $\text{Re}_l = u_*z/v$  и глобальному  $\text{Re}_* = u_*\Lambda/v$  числам Рейнольдса появляется новый параметр подобия

$$(dp/dx)v/\rho u_*^3. \quad (11.18)$$

Обратная этому параметру величина

$$\rho u_*^3/(dp/dx)v = \text{Re}_p \quad (11.19)$$

играет роль числа Рейнольдса, основанного на динамической скорости, кинематической вязкости и линейном масштабе  $\rho u_*^2/(dp/dx)$ , отвечающему продольному перепаду давления. Ясно, что имеет значение относительная величина всех трех чисел Рейнольдса. Мы предполагаем, имея в виду описание имеющихся эксперименталь-

ных данных, что  $Re_p$  хотя и велико, но все же много меньше глобального числа Рейнольдса. Пусть теперь мы находимся в таком диапазоне расстояний от стенки  $z$ , что локальное число Рейнольдса  $Re_l$  много больше единицы, но все же  $Re_l \ll Re_p$ . В этом диапазоне изменения локального числа Рейнольдса влияние касательного напряжения более существенно, чем влияние продольного перепада давления. Поэтому остается справедливым все, сказанное в п. 11.1, и есть основания ожидать неполной автомодельности течения по локальному числу Рейнольдса с показателями степени, зависящими уже не только от глобального числа Рейнольдса, но и от  $Re_p$ . Весьма показательно поведение течения в другом промежуточном диапазоне локальных чисел Рейнольдса, где

$$Re_p \ll Re_l \ll Re_*,$$

так что

$$v/u_* \ll \rho u_*^2 / (dp/dx) \ll z \ll \Lambda. \quad (11.20)$$

В этом диапазоне расстояний от стенки влияние продольного перепада давления более существенно, чем влияние касательного напряжения, поэтому естественно принять в качестве основных определяющих параметров с независимыми размерностями величины  $\rho$ ,  $z$  и  $dp/dx$ . Помимо этих величин характеристики течения могут зависеть от динамической скорости  $u_*$ , вязкости  $v$  и внешнего масштаба  $\Lambda$ . Анализ размерностей дает

$$\begin{aligned} dU/dz &= \sqrt{(dp/dx)/\rho z} \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3); \\ \Pi_1 &= \Lambda/z; \quad \Pi_2 = u_*/\sqrt{z(dp/dx)/\rho}; \quad \Pi_3 = v/z^{3/2} \sqrt{(dp/dx)/\rho}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

В силу соотношения (11.20), определяющего относительные порядки величин, получаем

$$\Pi_1 = \frac{\Lambda}{z} \gg 1; \quad \Pi_2 = \frac{u_*}{\sqrt{z(dp/dx)/\rho}} = \left( \frac{z}{\rho u_*^2 / (dp/dx)} \right)^{-1/2} \ll 1;$$

$$\Pi_3 = \frac{v}{z^{3/2} [(dp/dx)/\rho]^{1/2}} = \frac{v}{u_* \rho u_*^2 / (dp/dx)} \left( \frac{z}{\rho u_*^2 / (dp/dx)} \right)^{-3/2} \ll 1. \quad (11.22)$$

Естественно для начала сделать предположение о полной автомодельности по всем трем безразмерным параметрам, входящим в универсальную функцию  $\Phi$  в выражении (11.21). Тогда выполняется соотношение  $dU/dz = \sqrt{(dp/dx)/\rho z} \text{const}$ , откуда

$$U(z) = K \sqrt{z(dp/dx)/\rho} + K_1, \quad (11.23)$$

где величины  $K$ ,  $K_1$  должны быть универсальными постоянными. Закон (11.23) вместе с аргументами, равносильными предположению о полной автомодельности, был указан Стратфордом [197] и Таунсендом [206].

Эксперименты Ньюмена [171], выполненные в пограничном слое на профиле крыла, подтвердили (как и последующие аналогичные опыты), что область распределения скоростей, описываемая законом квадратного корня (11.23), существует, но коэффициент  $K$  оказался непостоянным (рис. 11.5). Этот факт привлек внимание, и Перри и Шоффилд [179] провели детальный статистический ана-

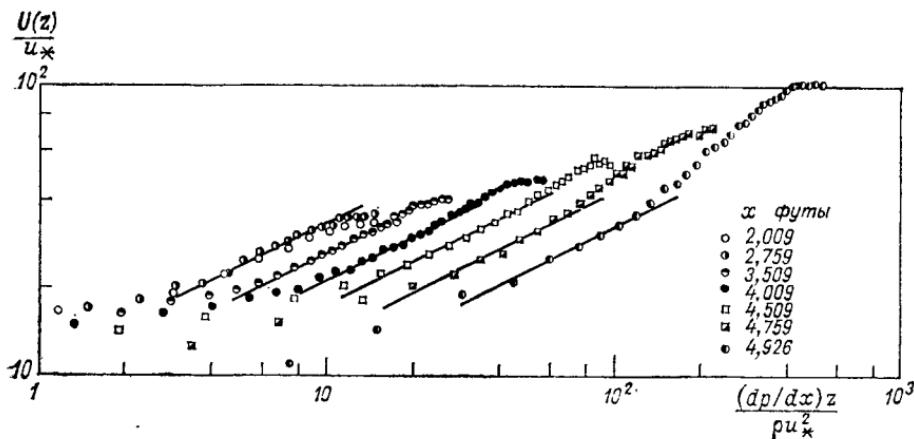


Рис. 11.5. Прямые линии отвечают закону (11.27).

1 фут соответствует 0,3048 м.

лиз данных большого числа экспериментов, собранных в трудах Станфордской конференции [121]. Результаты этого анализа, представленные на рис. 11.6 в виде гистограммы значений  $K$ , показывают, что величина  $K$  сильно варьирует (примерно от 3,5 до 13).

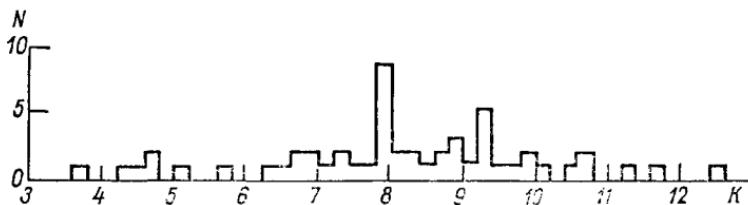


Рис. 11.6.

Естественно предположить поэтому, что в данном случае имеет место неполная автомодельность. В самом деле, соотношение (11.21) можно записать в виде

$$dU/dz = \sqrt{(dp/dx)/\rho z} \Psi(\Pi_1, \Pi'_2, \Pi'_3), \quad (11.24)$$

где  $\Pi_1$  по-прежнему равно  $\Lambda/z$ , а

$$\Pi'_2 = \Pi_1 \Pi_2^{-2} = (dp/dx) \Lambda / \rho u_*^2; \quad \Pi'_3 = \Pi_1 \Pi_3^{-2/3} = \Lambda v^{-2/3} [(dp/dx)/\rho]^{1/3}. \quad (11.25)$$

Переход к параметрам  $\Pi'_2$ ,  $\Pi'_3$  удобен, поскольку эти параметры относятся к потоку в целом и не содержат расстояния от стенки  $z$ , меняющегося от точки к точке. Соотношение (11.20) показывает, что  $\Pi'_2 \gg 1$ ,  $\Pi'_3 \gg 1$ . Оказывается, что в представлении (11.24) при  $\Pi_1 \gg 1$ ,  $\Pi'_2 \gg 1$ ,  $\Pi'_3 \gg 1$  имеет место полная автомодельность по параметрам  $\Pi_1$  и  $\Pi'_3$  и неполная автомодельность по параметру  $\Pi'_2$ , так что

$$\Psi = A \Pi_2'^m, \quad (11.26)$$

откуда и из (11.24) следует:

$$U(z) = 2A((dp/dx)\Lambda/\rho u_*^2)^m ((dp/dx)z/\rho)^{1/2} + C_1, \quad (11.27)$$

где величины  $A$ ,  $m$ ,  $C_1$  должны быть универсальными постоянными.

Обработка тех же данных, представленных на Станфордской конференции [121], выполненная А. М. Ягломом и Б. А. Қадером, вполне подтверждает неполную автомодельность (рис. 11.7), а значения параметров составляют:  $A = 12,25$ ;  $m = -\frac{1}{3}$ ;  $C_1 = 0$ . Таким образом, гистограмма, представленная на рис. 11.6, отражает просто распределение диапазонов изменения параметра  $(dp/dx) \times \Lambda/\rho u_*^2$ , в которых работали различные авторы, представившие свои доклады в Станфорд.

#### 11.4. Нестационарные явления в вязком слое турбулентного потока с поперечным сдвигом

В последние годы опубликованы фундаментальные исследования турбулентных сдвиговых течений в непосредственной близости стенки, выполненные в основном двумя группами американских авторов (см. работы Клайна, Рейнольдса, Шрауба, Рунстадлера, Кима, Оффена [153, 151, 174] и Корино и Бродки [123]). Искусной комбинацией методов визуализации (водородными пузырьками и трассирующими красками) и термоанеметрических методов в этих работах было показано, что турбулентный поток вблизи стенки имеет сложную, существенно нестационарную и неоднородную по пространству структуру.

Речь идет о явлениях в вязком слое, где глобальные характеристики течения определяются напряжением сдвига  $\tau$ , плотностью жидкости  $\rho$  и ее кинематической вязкостью  $v$ , а также некоторым внешним масштабом  $\Lambda$ , например, толщиной потери импульса пограничного слоя. Таким образом, если дело касается глобальных кинематических характеристик, то они должны определяться только динамической скоростью  $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ , внешним масштабом  $\Lambda$  и кинематической вязкостью  $v$ . Оказалось, что в области толщиной порядка нескольких десятков характерных линейных размеров вязкого слоя  $v/u_*$  со статистически определенной частотой

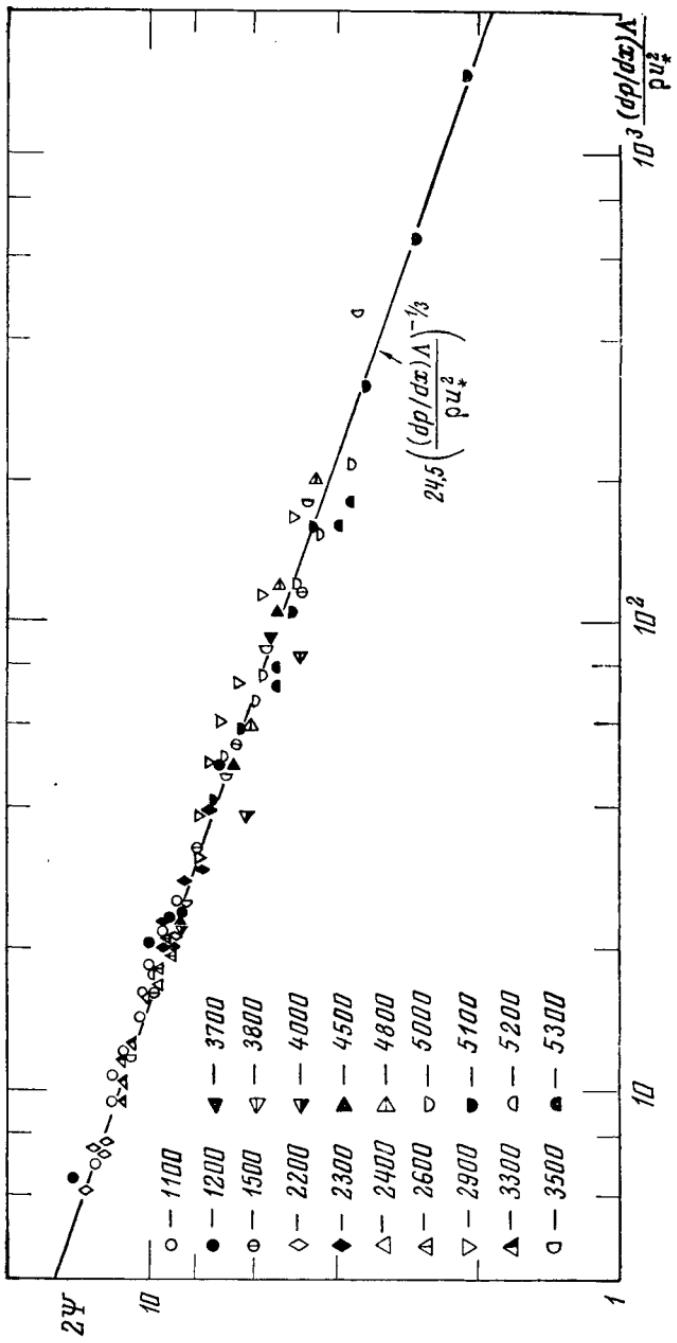


Рис. 11.7. Обработка опытных данных, представленных на конференции [121], выполненная А. М. Ягломом и Б. А. Кадером [105].

Разные обозначения соответствуют работам различных авторов по номенклатуре Станфордской конференции [121].

той возникают локальные отрывы потока, которые порождают подковообразные вихри, уходящие в глубь потока и в свою очередь стимулирующие появление новых локальных отрывов. Это порождает чередующиеся в форме «паркета» продольные полоски замедленного течения. Взаимодействие возникающих подковообразных вихрей между собой приводит к сложным явлениям типа локальной потери устойчивости, носящим взрывной характер. Как убедительно показано в цитированных работах, именно эти «взрывы» определяют порождение турбулентности вблизи границы сдвигового турбулентного потока. Представление о характере возникаю-



Рис. 11.8. Искривление вихрем первоначально вертикальных линий водородных пузырьков [151].

щих локальных течений дает заимствованная из работы [151] фотография (рис. 11.8), показывающая искривление этими течениями первоначально вертикальных линий водородных пузырьков.

Несмотря на сложный характер локальных течений в вязком слое турбулентного сдвигового потока, некоторые их статистические характеристики хорошо описываются законами подобия, получающимися методом анализа размерностей с привлечением понятия неполной автомодельности. Продемонстрируем это здесь на примере определения среднего времени между «взрывами»  $T_B$ , т. е. среднего времени циклического процесса, происходящего вблизи стенок. Эта величина может зависеть от динамической скорости  $u_*$ , кинематической вязкости  $v$  и внешнего масштаба  $\Lambda$ , откуда, применяя анализ размерностей, получаем:

$$T_B = (v/u_*^2) \Phi(u_* \Lambda / v). \quad (11.28)$$

Параметр  $u_* \Lambda / v$  весьма велик, порядка 100 и более, поэтому было естественным первоначальное предположение, равносильное гипо-

тезе о полной автомодельности по этому параметру. Используя это предположение, получаем:

$$T_B = Cv/u_*^2, \quad (11.29)$$

где  $C$  — константа. Экспериментальные данные на первый взгляд подтвердили зависимость (11.29) (рис. 11.9). Однако попытка применения соотношения (11.29) к опытам Тью и Вильмарта (см. [151]), в которых были достигнуты существенно более высокие динамические скорости, привела к ошибке более чем на порядок.

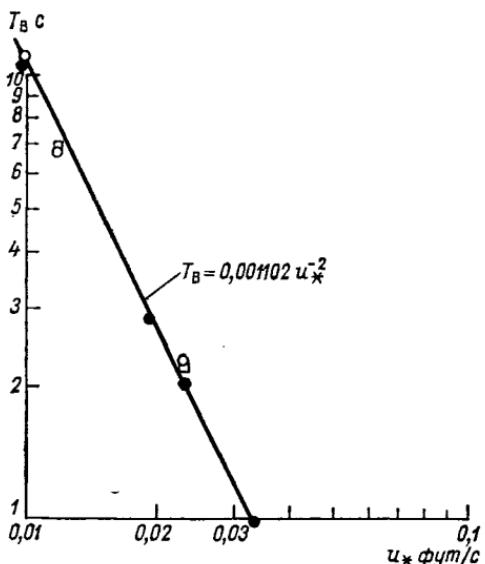


Рис. 11.9. Экспериментальные данные на первый взгляд подтверждают полную автомодельность зависимости времени между «взрывами»  $T_B$  от параметра  $u_*\Lambda/v$  при больших значениях этого параметра [151].

На самом деле, как было показано Рао, Нарамсимха и Бадри Нараянан [184], полной автомодельности по параметру  $u_*\Lambda/v$  здесь нет. Привлечение более полных экспериментальных данных в упомянутой работе и работе Кима, Клейна и Рейнольдса [151] обнаружило наличие неполной автомодельности по параметру  $u_*\Lambda/v$ ; было получено соотношение

$$\Phi = 0,65 (U\Lambda/v)^{0,73}, \quad (11.30)$$

где  $U$  — скорость свободного потока, а  $\Lambda$  — толщина потери импульса пограничного слоя (рис. 11.10). Как известно (ср. кривую 3 на рис. 11.4) отношение  $u_*/U$  представляет собой степенную функцию глобального числа Рейнольдса. Действительно, воспользовавшись формулами [172], отвечающими областям применимости «закона одной седьмой», получаем:

$$u_*\Lambda/v = 0,11 (U\Lambda/v)^{0,875}, \quad (11.31)$$

откуда и из (11.30) находим

$$\Phi = 4,0 (u_* \Lambda / v)^{0,83}. \quad (11.32)$$

Это соотношение и показывает неполную автомодельность по параметру  $u_* \Lambda / v$ .

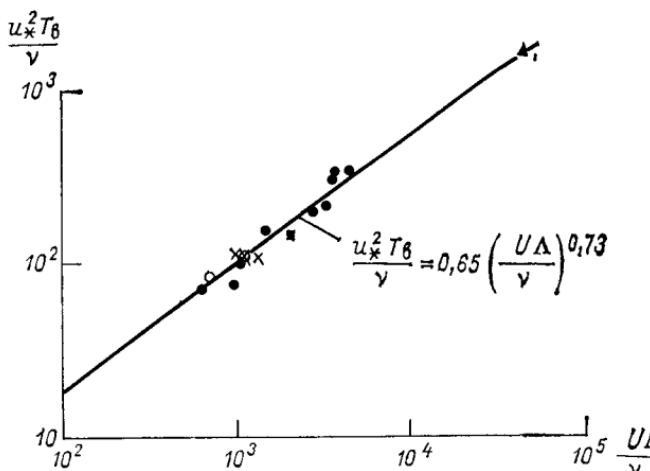


Рис. 11.10. Эксперименты в более широком диапазоне значений параметра  $U \Lambda / v$  обнаруживают неполную автомодельность по этому параметру [151].

Приведенные в этой и предыдущей главах примеры показывают, что неполная автомодельность встречается в теории турбулентности гораздо чаще, чем можно было ожидать, и даже в таких ее областях, в которых работали многие исследователи и законы подобия казались вполне выясненными.

## Глава 12

### ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

#### 12.1. Течения с сильно устойчивой стратификацией

Как уже говорилось, несмотря на многолетние усилия исследователей, гидродинамическая турбулентность в однородной жидкости продолжает в значительной мере оставаться загадкой. Расслоение жидкости по плотности в поле силы тяжести — *стратификация* — дополнительно усложняет картину турбулентных течений и приводит к появлению принципиально новых эффектов.

Стратификация течения вводит в рассмотрение некоторый характерный вертикальный масштаб — расстояние по вертикали, на котором плотность жидкости меняется на существенную для динамики потока величину. Стратификация считается *сильной*, если характерные вертикальные размеры потока существенно превосходят этот масштаб. В настоящей главе рассматриваются, в основном, законы подобия для явлений турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией, представляющих существенный интерес для геофизической гидродинамики.

Излагаются законы подобия Монина—Обухова турбулентности и теплообмена в приземном слое атмосферы, уже ставшие классическими. Обсуждение теории подобия Монина—Обухова показывает, что соображения, основанные на неполной автомодельности, позволяют обобщить эти законы. Неполная автомодельность, по-видимому, может объяснить некоторые наблюдавшиеся расхождения опытных данных с теорией.

Далее, рассматривается простейшее стратифицированное течение в пристеночной области потока, в котором сильно устойчивая стратификация создается мелкими взвешенными тяжелыми частицами. Примерами таких течений могут служить движение наносов в придонной области русловых потоков или запыленный приземный слой атмосферы при пыльных бурях. Этот случай сильно стратифицированного течения привлекает простыми окончательными формулами, позволяющими увидеть и объяснить парадоксальное на первый взгляд, но практически важное явление: в определенных условиях взвешенные частицы могут ускорять поток!

В случае сильно устойчивой стратификации, создаваемой температурой и(или) соленостью, в дело существенно вмешивается новый фактор — внутренние волны. Рассматривается предварительно показательная задача о переносе тепла в *верхнем деятельном слое океана*, в котором температура и соленость подвергаются сезонным изменениям. Как известно, плотность морской воды отличается от плотности чистой воды на три-четыре процента, а пульсации плотности имеют порядок всего лишь десятых долей процента. Тем не менее эти изменения плотности оказывают существенные динамические воздействия на поток. Распределение температуры по глубине в верхнем деятельном слое океана имеет вид, схематически представленный на рис. 12.1. *Верхний однородный слой*, в котором температура и соленость, а следовательно, и плотность почти постоянны, обязан своим существованием турбулентному перемешиванию. Это перемешивание осуществляется совместным действием сдвига и конвекции, опускающимися более тяжелыми частицами жидкости. Эти частицы попадают в глубь потока из приповерхностного слоя, а также вследствие обрушивания поверхностных волн. Жидкость в приповерхностном слое тяжелее, так как этот слой охлажден и осолонен из-за испарения с поверхности океана. Глубина верхнего однородного слоя зависит от времени года: в умеренных широтах она растет в осенне-зимний сезон и уменьшается весной. Верхний однородный слой подпирается

областью, в которой температура меняется резко — *верхним термоклином*, заканчивающимся на глубине, где прекращаются сезонные изменения температуры. Эта глубина, т. е. глубина верхнего деятельного слоя океана, составляет по порядку величины примерно 200—250 м.

Проводимый ниже анализ распределения осредненной температуры в сильно и устойчиво стратифицированном верхнем термоклине показывает, что достаточной моделью этого распределения является бегущая тепловая (или диффузионная) волна Герца, причем величина эффективного коэффициента температуропроводности оказывается с хорошей точностью постоянной. Этот коэф-

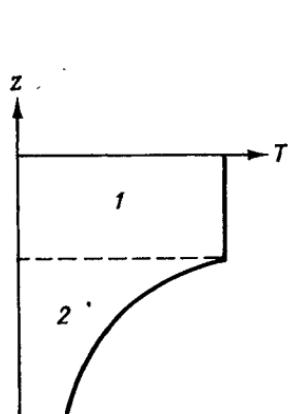


Рис. 12.1. Схематическое представление верхнего деятельного слоя океана.

1 — верхний однородный слой.  
2 — верхний термоклин.

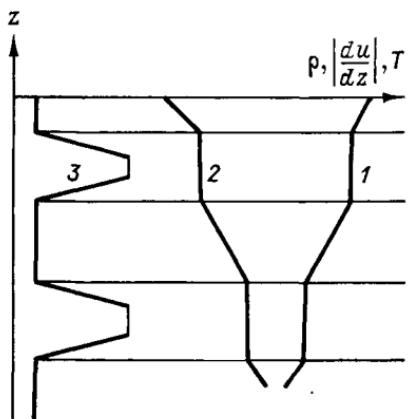


Рис. 12.2. Схематическое мгновенное распределение температуры  $T(1)$ , плотности  $\rho(2)$  и градиента скорости  $du/dz(3)$  по глубине.

фициент имеет порядок  $10^{-1}$ — $1 \text{ см}^2/\text{с}$ , по непонятным, на первый взгляд, причинам промежуточный между порядком коэффициента турбулентной температуропроводности в верхнем однородном слое, по оценкам, составляющим  $10^3 \text{ см}^2/\text{с}$  и более, и порядком коэффициента молекулярной температуропроводности, составляющим  $10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$ . При этом прецизионные измерения показывают (это подробно обсуждается в монографии К. Н. Федорова [101]), что мгновенное распределение температуры по глубине никогда не бывает гладким, а носит скорее ступенчатый характер (рис. 12.2): участки, где температура почти постоянна, сменяются участками с большими градиентами температуры, солености и, следовательно, плотности.

Все это объясняется тем, что в турбулентном потоке с сильно устойчивой стратификацией турбулентность распространена не повсеместно, а пятнами; она относительно быстро возникает и исчезает и тесно связана с внутренними волнами. Взаимодействие внутренних волн и турбулентности иллюстрируется показательным опытом Филлипса, который также описывается и анализируется

ниже. Попутно обсуждается задача о порождении турбулентности колеблющейся решеткой. Эта задача возникает в связи с лабораторным моделированием верхнего деятельного слоя. Ее рассмотрение обнаруживает своеобразные законы подобия, в которых также проявляется неполная автомодельность.

Внутренние волны определяют и самую структуру турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией. Дело в том, что по разным причинам внутренние волны разрушаются, образуя пятна перемешанной жидкости, которые коллапсируют — сплющиваются и расплываются вблизи уровня своей плотности. Ниже рассматривается этот коллапс. Показывается, что на всех своих основных стадиях процесс коллапса характеризуется различными автомодельными законами. Наиболее продолжительной стадией коллапса является заключительная, на которой сопротивление расширению пятна оказывают силы вязкости. Расширение пятна на этой стадии оказывается настолько медленным, что пятно может длительное время казаться наблюдателю неизменным.

Существенно, что внутри пятна жидкость однородна по плотности, а вне него — сильно и устойчиво стратифицирована. Поэтому вне пятна турбулентность должна расходовать часть своей энергии на работу против сил плавучести, а внутри пятна — нет. Вследствие этого турбулентность вне пятен затухает быстрее, а внутри пятен — поддерживается на более высоком уровне. Это и определяет своеобразный пятнистый, «островной» характер турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией.

Неоднородный и сильно анизотропный характер турбулентности в условиях сильно устойчивой стратификации был предсказан А. Н. Колмогоровым в конце сороковых годов. Существование «блинообразных» пятен турбулентности в океане было указано О. М. Филлипсом [180].

Турбулентность, если она достаточно сильна, может поддерживать во взвешенном состоянии примесь, которая в нетурбулентной или слаботурбулентной жидкости оседает. Попадание оседающей примеси в турбулентные пятна может поэтому сделать их контрастно видимыми в окружающей среде с более слабой турбулентностью. Можно полагать, что это объясняет дискоидные образования в атмосфере, привлекшие в последнее время широкое внимание, а также «облака мутности» в океане.

## 12.2. Законы подобия приземного слоя атмосферы

Приземный слой атмосферы обычно моделируют [74] однородным по горизонтали и стационарным в среднем турбулентным течением, ограниченным снизу горизонтальной плоскостью. Напряжение сдвига  $\tau$  в приземном слое также считается постоянным. Существенное отличие от рассмотренных в п. 11.1 пристеночных течений состоит в наличии в приземном слое термической стратификации — температурной неоднородности по высоте слоя в поле

силы тяжести.<sup>1</sup> Стратификация устойчива, если температура растет с высотой и неустойчива в противоположном случае. Из-за температурной неоднородности вертикальные перемещения жидких частиц, совершающиеся благодаря вертикальным пульсациям скорости, сопровождаются затратой (или получением, в зависимости от того, устойчива стратификация или нет) некоторой энергии на работу против силы тяжести. Эта энергия забирается из общего баланса турбулентной энергии или соответственно вносится в него, оказывая тем самым влияние на уровень турбулентных пульсаций скорости, т. е. на перенос тепла, массы, импульса, а следовательно, и на распределение продольной скорости поперек потока. Эффективность влияния термической стратификации на баланс пульсационной энергии определяется произведением коэффициента теплового расширения воздуха на ускорение силы тяжести, так называемым параметром плавучести. Воздух в приземном слое атмосферы обычно рассматривается как термодинамически идеальный газ, для которого коэффициент теплового расширения равен  $1/T$ , где  $T$  — абсолютная температура. Приземный слой атмосферы невысок, поэтому изменением среднего давления по высоте слоя под действием силы тяжести и соответствующим изменением плотности можно пренебречь. И вообще, изменения плотности и абсолютной температуры в приземном слое считаются малыми, и их влияние на динамику течений учитывается только в произведении с ускорением силы тяжести, т. е. только через плавучесть, определяющую вклад температурной неоднородности в баланс турбулентной энергии.

Таким образом, состояние движения в некоторой точке потока в приземном слое атмосферы определяют следующие величины:

- 1) динамическая скорость  $u_* = \sqrt{\tau/\rho_0}$ ; 2) отсчетная плотность  $\rho_0$ ;
- 3) динамическая температура  $T_*$ , вводимая по аналогии с динамической скоростью соотношением

$$T_* = -\langle w'T' \rangle / u_*, \quad (12.1)$$

где  $w'$  — вертикальная пульсация скорости,  $T'$  — пульсация температуры, величина  $\langle w'T' \rangle$  с точностью до постоянного множителя совпадает с вертикальным потоком тепла (динамическая температура положительна в случае устойчивой стратификации ( $\partial_z T > 0$ ) и отрицательна при неустойчивой стратификации); 4) параметр плавучести  $\beta = g/T_0$ , где  $g$  — ускорение свободного падения,  $T_0$  — отсчетная температура, отдельно нигде не фигурирующая, так как изменение температуры оказывает влияние на динамику только через параметр плавучести, т. е. в комбинации с силой тяжести; 5) вертикальная координата  $z$ ; 6) кинематическая вязкость  $v$ ; 7) температуропроводность  $\chi$ ; 8) внешний геометрический размер  $\Lambda$  (высота приземного слоя атмосферы).

---

<sup>1</sup> Мы отвлекаемся здесь от таких дополнительных факторов, как влажность, запыленность атмосферы и т. д.

Стандартная процедура анализа размерности дает

$$\Pi_u = z \partial_z u / u_* = \Phi_u(z/L_0, u_* z/v, u_* \Lambda/v, \text{Pr}); \quad (12.2)$$

$$\Pi_T = z \partial_z T / T_* = \Phi_T(z/L_0, u_* z/v, u_* \Lambda/v, \text{Pr}), \quad (12.3)$$

где  $\text{Pr} = v/\chi$  — число Прандтля, а  $L_0$  — тепловой масштаб длины<sup>1</sup>

$$L_0 = u_*^2 / \beta T_* . \quad (12.4)$$

Существующая теория подобия течений в приземном слое атмосферы, обязанныя своим возникновением пионерской работе Л. Прандтля [183] и работам А. С. Монина и А. М. Обухова [71, 72], основана на предположении о полной автомодельности течений по обоим числам Рейнольдса — локальному  $\text{Re}_l = u_* z/v$  и глобальному  $\text{Re}_* = u_* \Lambda/v$ . Возможность такого предположения и, следовательно, пренебрежения в соотношениях (12.2), (12.3) зависит от  $\text{Re}_l$  и  $\text{Re}_*$  обычно аргументируется очень большими значениями обоих чисел Рейнольдса (локального — вне небольшой области вблизи самой поверхности, не превышающей по высоте нескольких миллиметров). При этом предположение о существовании конечных пределов у функций  $\Phi_u$  и  $\Phi_T$  при  $\text{Re}_l \rightarrow \infty$  и  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$  явно не оговаривается. Если функции  $\Phi_u$  и  $\Phi_T$  стремятся при  $\text{Re}_l \rightarrow \infty$  и  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$  к конечному пределу, в согласии с предположением о полной автомодельности, то при достаточно больших  $\text{Re}_l$  и  $\text{Re}_*$  должен иметь место универсальный, т. е. независящий от чисел Рейнольдса закон подобия:

$$z \partial_z u / u_* = \Psi_u(z/L_0, \text{Pr}); \quad (12.5)$$

$$z \partial_z T / T_* = \Psi_T(z/L_0, \text{Pr}), \quad (12.6)$$

называемый в литературе законом подобия Монина—Обухова. В частном случае, когда термическая стратификация потока исчезает, мы снова приходим к универсальному логарифмическому закону Прандтля, рассмотренному в п. 11.1.

Соображения, изложенные в п. 11.1, показывают, что уже в случае термически нейтрального течения обнаруживается слабая зависимость универсальной функции от обоих чисел Рейнольдса. Эта слабая зависимость позволила выдвинуть предположение о неполной автомодельности потока по локальному числу Рейнольдса при отсутствии автомодельности по глобальному числу Рейнольдса, не противоречащее, по-видимому, данным опытов с течениями в гладких трубах, в пограничном слое на пластинке и т. д. Естественно сделать подобное же предположение и для термически стратифицированного течения в приземном слое атмосферы [21, 108].

В случае неполной автомодельности термически стратифицированного потока с поперечным сдвигом по локальному числу Рей-

<sup>1</sup> Это определение теплового масштаба длины следует работе А. М. Яглома [104] и несколько отличается от общепринятого.

нольдса (при отсутствии автомодельности по глобальному числу Рейнольдса) закон подобия записывается в виде

$$z \partial_z u / u_* = (u_* z/v)^\lambda \varphi_u(z/L_0, \text{Re}_*, \text{Pr}); \quad (12.7)$$

$$z \partial_z T / T_* = (u_* z/v)^\mu \varphi_T(z/L_0, \text{Re}_*, \text{Pr}), \quad (12.8)$$

где показатели  $\lambda$ ,  $\mu$  зависят от глобального числа Рейнольдса:

$$\lambda = \lambda(u_* \Lambda/v); \quad \mu = \mu(u_* \Lambda/v). \quad (12.9)$$

В принципе, не исключена зависимость этих показателей и от числа Прандтля, но мы ею при первом рассмотрении пренебрегаем. Общий характер зависимости  $\lambda(\text{Re}_*)$  для не слишком больших глобальных чисел Рейнольдса можно считать известным из опытов по исследованию течений в гладких трубах. Можно попытаться найти функцию  $\mu(\text{Re}_*)$ , рассматривая предельный режим «безветренной конвекции» в случае неустойчивой стратификации. При неустойчивой стратификации  $L_0 < 0$ ,  $T_* < 0$ . В предельном случае безветренной конвекции величина  $u_*$  должна в определенном смысле выпадать из числа определяющих параметров. Это означает, что для безветренной конвекции справедлив предельный закон подобия, отвечающий случаю, когда  $u_*$  достаточно мало, чтобы динамическая скорость исключалась из асимптотических выражений турбулентных коэффициентов вязкости и теплопроводности:

$$K = -\frac{\langle v' w' \rangle}{\partial_z u} = \frac{u_*^2}{\partial_z u}; \quad K_T = -\frac{\langle w' T' \rangle}{\partial_z T} = \frac{u_* T_*}{\partial_z T}. \quad (12.10)$$

Вместе с тем,  $u_*$  должно быть достаточно велико, чтобы локальное число Рейнольдса все же было большим (вне малой области вблизи подстилающей поверхности) и допускало применение асимптотических соотношений (12.7), (12.8). Из этих условий в рассматриваемом предельном течении получаем

$$\varphi_u \simeq B_u (-\xi)^{-(1-\lambda)/3}; \quad \varphi_T \simeq B_T (-\xi)^{-(1-\mu)/3}, \quad \xi \rightarrow -\infty;$$

$$\xi = z/L_0 = z/(u_*^2/\beta T_*) = z/(-u_*^3/\beta \langle w' T' \rangle), \quad (12.11)$$

или в размерном виде

$$\partial_z u \simeq B_u u_*^2 z^{-4(1-\lambda)/3} (Q\beta)^{-(1-\lambda)/3} v^{-\lambda}; \quad (12.12)$$

$$\partial_z T \simeq B_T Q^{(2+\mu)/3} z^{-4(1-\mu)/3} \beta^{-(1-\mu)/3} v^{-\mu}, \quad (12.13)$$

Здесь  $B_u$ ,  $B_T$  — безразмерные константы,  $Q = \langle w' T' \rangle$ .

В качестве физического условия, определяющего функцию  $\mu(\text{Re}_*)$ , выберем условие ограниченности турбулентного числа Прандтля  $\alpha$ . Имеем

$$\alpha = \frac{K}{K_T} = \frac{\langle u' w' \rangle \partial_z T}{\langle w' T' \rangle \partial_z u} = \frac{\varphi_T}{\varphi_u} \left( \frac{u_* z}{v} \right)^{\mu - \lambda} =$$

$$= \frac{\varphi_T}{\varphi_u} \left( -\frac{z}{L_0} \right)^{\mu - \lambda} \left( -\frac{u_* L_0}{v} \right)^{\mu - \lambda}. \quad (12.14)$$

(Напомним, что тепловой масштаб длины в рассматриваемом случае неустойчивой стратификации отрицателен.) Изучаемый предельный случай малых  $\mu_*$  отвечает  $\zeta \rightarrow -\infty$  и выполнению асимптотических соотношений (12.11), поэтому отношение  $\varphi_T/\varphi_u$  при  $\zeta \rightarrow -\infty$  пропорционально величине  $(-\zeta)^{(\mu-\lambda)/3}$ , так что условие ограниченности турбулентного числа Прандтля будет иметь вид

$$\lambda = \mu. \quad (12.15)$$

Это соотношение и определяет зависимость второго показателя в законах подобия от глобального числа Рейнольдса.

К сожалению, имеющиеся опытные данные, относящиеся к термически стратифицированным турбулентным потокам с поперечным сдвигом, пока еще остаются крайне скучными и не позволяют высказать однозначное суждение о справедливости или несправедливости предположения о неполной автомодельности по локальному числу Рейнольдса.

### 12.3. Режим предельного насыщения пристеночного турбулентного сдвигового потока со взвесью

Обратимся теперь к рассмотрению турбулентного сдвигового потока, содержащего взвесь мелких тяжелых частиц. Объемная и массовая концентрации частиц считаются очень малыми (так, например, в реках, несущих большое количество наносов, их объемная и массовая концентрации редко превышают несколько десятитысячных), поэтому вклад частиц в плотность смеси пренебрежимо мал. Тем не менее динамическое действие частиц на поток может оказаться существенным из-за громадного влияния силы тяжести. Таким образом, отличием плотности смеси от плотности чистой жидкости мы будем пренебрегать всюду, где это отличие не умножается на ускорение силы тяжести. Далее, частицы предполагаются много меньшими внутреннего масштаба турбулентности, поэтому движение частиц можно представить себе следующим образом: частицы переносятся вихрями вместе с жидкостью, но опускаются относительно жидкости с постоянной скоростью, такой же, с которой частица опускалась бы в покоящейся безграничной жидкости. Будем, следовательно, считать, что горизонтальные компоненты мгновенной скорости частиц и жидкости совпадают, а вертикальные отличаются на постоянную величину  $a$  — скорость свободного падения частиц в жидкости.

Рассмотрим снова пристеночную область потока (например, приземный слой атмосферы<sup>1</sup> или придонный слой руслового потока). Распределения концентрации частиц и прочих характеристик потока будем считать стационарными и зависящими только

<sup>1</sup> Мы отвлекаемся здесь от влияния термической стратификации. Совместный учет термической стратификации и стратификации взвесью можно найти в работе [16]; он существенно усложняет результирующие соотношения.

от вертикальной координаты. Уравнение импульса в этой области остается таким же, как для чистой жидкости, поскольку влияние частиц на плотность смеси пренебрежимо мало.

Уравнение баланса массы взвеси получим, приравняв нулю суммарный поток частиц через единичную горизонтальную площадку. Этот приток складывается из потока от турбулентного переноса частиц  $\langle s'w' \rangle$  и потока от оседания частиц  $-as$ , так что

$$\langle s'w' \rangle - as = 0, \quad (12.16)$$

где  $s$ ,  $s'$  — соответственно средняя объемная концентрация частиц и ее пульсация.

Наконец, уравнение баланса турбулентной энергии в потоке со взвесью в пренебрежении вкладом диффузии турбулентной энергии принимает вид

$$\langle u'w' \rangle \partial_z u + \varepsilon_t + \sigma \langle s'w' \rangle g = 0. \quad (12.17)$$

Здесь  $\sigma = (\rho_p - \rho)/\rho$  — относительное превышение плотностью частиц плотности жидкости ( $\rho_p$  — плотность частиц). Первые два члена представляют собой соответственно порождение турбулентной энергии за счет работы рейнольдсовых напряжений и скорость вязкой диссипации в тепло на единицу массы жидкости (ср. уравнение (11.9) для однородной жидкости). Новый по сравнению с уравнением (11.9) последний член выражает собой затрату турбулентной энергии на турбулентное взвешивание частиц потоком. Несмотря на малость концентрации частиц в потоке, это слагаемое может иметь существенное значение, поскольку сила тяжести очень велика и ее влияние может компенсировать малость концентрации. При анализе переноса частиц турбулентным потоком воспользуемся полуэмпирической теорией и гипотезами автомодельности А. Н. Колмогорова (ср. п. 11.2).

Уравнение (12.17) можно представить в виде

$$\langle u'w' \rangle \partial_z u (1 - Ko) + \varepsilon_t = 0, \quad (12.18)$$

где безразмерный параметр, называемый числом Колмогорова<sup>1</sup>, выражает относительную затрату турбулентной энергии на взвешивание частиц потоком:

$$Ko = -\sigma g \langle s'w' \rangle / \langle u'w' \rangle \partial_z u. \quad (12.19)$$

Этот параметр является единственным критерием динамической активности взвеси, т. е. влияния взвешенных частиц на динамику потока. Введем аналогично коэффициенту обмена импульса коэффициент обмена взвеси:

$$\langle s'w' \rangle = -K_s \partial_z s \quad (12.20)$$

и примем гипотезу автомодельности, согласно которой и этот коэффициент, как и коэффициент обмена импульса и скорость дисси-

<sup>1</sup> Число Колмогорова аналогично параметру, возникающему при анализе температурной стратификации, и называемому числом Ричардсона (см. ниже).

пации, зависит только от средней энергии и размера вихрей в данной точке потока, т. е. от локальной турбулентной энергии единицы массы и масштаба турбулентности. Отсюда, используя анализ размерности, получаем:

$$K_s = \varepsilon l \sqrt{b}, \quad (12.21)$$

где  $\varepsilon$  — постоянный множитель.

В рассматриваемой задаче о течении взвеси в отличие от течения чистой жидкости (ср. п. 11.2) появился дополнительный параметр — число Колмогорова  $Ko$ , так что для масштаба турбулентности  $l$ , согласно анализу размерности, получаем

$$l = z\Psi(\text{Re}_l, \text{Re}_*, Ko).$$

В предположении полной автомодельности по локальному и глобальному числам Рейнольдса масштаб турбулентности выражается через универсальную функцию числа Колмогорова:

$$l = \kappa \gamma z \Phi_l(Ko), \quad (12.22)$$

где  $\kappa, \gamma$  — постоянные, получившиеся для однородной жидкости (п. 11.2), а  $\Phi_l(0)$  равно, очевидно, единице, поскольку  $Ko = 0$  отвечает однородной жидкости, для которой  $l = \kappa \gamma z$ . Масштаб турбулентности под влиянием взвеси заведомо не возрастает, поэтому функция  $\Phi_l$  не должна возрастать с ростом своего аргумента.

Итак, в сделанных предположениях основная система уравнений взвесенесущего турбулентного сдвигового потока в пристеночной области принимает вид

$$\begin{aligned} l \sqrt{b} \partial_z u_* &= u_*^2; \quad \varepsilon l \sqrt{b} \partial_z s + as = 0; \quad b = (u_*^2/\gamma^2)(1 - Ko)^{1/2}; \\ l &= \kappa \gamma z \Phi_l(Ko); \quad Ko = \sigma g a s / u_*^2 \partial_z u. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Система (12.23) обладает некоторыми характерными свойствами. Прежде всего, в нее входит только градиент скорости  $\partial_z u$ , а не сама скорость. В то же время эта система содержит как градиент средней концентрации  $\partial_z s$ , так и саму среднюю концентрацию  $s$ . Поэтому скорость определяется системой (12.23) с точностью до постоянного слагаемого, и для концентрации, вообще говоря, требуется задавать граничное условие. В частности, если  $Ko \ll 1$ , так что влияние частиц на динамику потока пренебрежимо мало, то  $l = \kappa \gamma z$ ,  $b = u_*^2 / \gamma^2$ . Подставляя эти выражения в уравнение для концентрации и интегрируя, получаем:

$$s = \text{const}_1 z^{-\omega}; \quad \omega = a/\varepsilon \kappa u_*; \quad u = (u_*/\kappa) \ln z + \text{const}_2, \quad (12.24)$$

где постоянная  $\text{const}_1$  должна определяться из граничного условия — задания концентрации частиц на некотором уровне, причем эта концентрация может быть произвольной. Пусть теперь частицы оказывают существенное влияние на динамику потока, т. е. число  $Ko$  имеет порядок единицы. Тогда при неограниченном запасе частиц на подстилающей поверхности ввиду обратного влия-

ния частиц на динамику потока можно ожидать существования такого режима течения, при котором поток вбирает в себя максимально возможное при заданной динамической скорости и прочих параметрах количество взвеси. Этот режим, который мы будем называть *режимом предельного насыщения*, должен определяться свойствами основной массы потока, т. е. описываться особым решением системы (12.23), которое, в свою очередь, должно определяться только параметрами, входящими в дифференциальные уравнения. Тем самым определение режима предельного насыщения не требует задания граничного условия для концентрации взвеси.

Система (12.23) инвариантна относительно группы преобразований

$$S = s/a; \quad Z = az; \quad u = U + \beta, \quad (12.25)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta$  — параметры группы, так что, подставляя (12.25) в (12.23), мы получаем в переменных  $S$ ,  $U$ ,  $Z$  ту же систему (12.23). Пусть особое решение, отвечающее режиму предельного насыщения, определяет градиент скорости и концентрацию взвеси соотношениями

$$\partial_z u = f(z); \quad s = g(z). \quad (12.26)$$

Однако особое решение определяется только самой системой и поэтому тоже должно быть инвариантным относительно группы (12.25):

$$\partial_z U = f(Z); \quad S = g(Z).$$

Выражая  $U$ ,  $S$ ,  $Z$  через  $u$ ,  $s$ ,  $z$  и  $\alpha$ , получаем для функций  $f$  и  $g$  функциональные уравнения

$$f(z) = af(az); \quad g(z) = ag(az). \quad (12.27)$$

Решение этих функциональных уравнений получается элементарно:

$$f = C_1/z; \quad g = C_2/z, \quad (12.28)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, подлежащие определению. Подставляя в (12.23) соотношения

$$\partial_z u = C_1/z; \quad s = C_2/z; \quad Ko = \sigma g C_2 / C_1^2 = \text{const}, \quad (12.29)$$

получаем

$$C_1 = u_*/\kappa (1 - Ko)^{1/4}; \quad \Phi_l(Ko) = u_*/\kappa \omega; \quad \omega = a/\varepsilon \mu u_*, \quad (12.30)$$

откуда находится конечное уравнение для определения постоянного для режима предельного насыщения числа Колмогорова  $Ko$ :

$$\omega = (1 - Ko)^{1/4} \Phi_l(Ko). \quad (12.31)$$

Однако  $\Phi_l$  — невозрастающая функция своего аргумента,  $\Phi_l(0) = 1$ , а  $Ko$  по своему физическому смыслу заключено между

нулем и единицей. Отсюда следует, что при  $\omega > 1$  корня уравнения (12.31) не существует, а при  $\omega < 1$  корень существует и притом только один. Стало быть, для существования режима предельного насыщения необходимо условие

$$\omega < 1. \quad (12.32)$$

Физический смысл условия (12.32) прозрачен. В самом деле, величина динамической скорости  $u_*$  пропорциональна средней квадратичной пульсации скорости. Таким образом, если пульсации велики, так что за время подъема некоторого объема жидкости турбулентной пульсацией твердые частицы внутри этого объема не успевают опуститься, то эти частицы попадают в ядро потока и взвешиваются в нем. В противном случае частицы переносятся потоком в придонной области, в его ядро не попадают и на динамику течения в основной массе потока не влияют.

Из первого уравнения (12.29) с учетом (12.30) при  $\omega < 1$  получаем

$$u = \frac{u_*}{\kappa\omega} \ln z + \text{const}. \quad (12.33)$$

Это означает, что в предельно нагруженном частицами потоке, который может существовать при  $\omega < 1$ , распределение скоростей остается, как и в чистой жидкости, логарифмическим; однако при этом как бы происходит уменьшение константы Кармана: вместо  $\kappa$  она становится равной  $\kappa\omega$ . Следовательно, при тех же внешних условиях (той же динамической скорости) поток под действием частиц ускоряется по сравнению с потоком чистой жидкости.<sup>1</sup>

Поскольку захват потоком частиц осуществляется турбулентными пульсациями, турбулентная энергия должна уменьшаться. Действительно, турбулентная энергия единицы массы для насыщенного частицами потока равна

$$b = b_0(1 - \text{Ko})^{1/2}, \quad (12.34)$$

где  $b_0 = u_*^2 / \gamma^2$  — величина турбулентной энергии для потока чистой жидкости при той же динамической скорости. Однако сопротивление турбулентного потока обусловливается интенсивностью пульсаций, следовательно, оказывается, что взвешенные частицы уменьшают турбулентное сопротивление. Разумеется, этот вывод справедлив для указанных выше условий горизонтального или близкого к горизонтальному потока, малой объемной и массовой концентраций частиц и т. д. В подобных условиях уменьшение сопротивления потока и константы Кармана под действием взвешенных частиц неоднократно отмечалось экспериментаторами в лабораторных опытах (В. Ванони [212], Г. А. Эйнштейн и Нинг Чен

<sup>1</sup> Этот факт известен гидрологам. Так, например, по измерениям на р. Янцзыян в Китае, известной большим количеством переносимых ею наносов, постоянная Кармана составляет 0,2, что вдвое меньше, чем для однородной жидкости.

[126]). Именно этим эффектом объясняются [16] пылевые бури в атмосфере Земли, а также Марса, которые в отсутствие пыли были бы безобидными ветерками. Этим же эффектом объясняется ускорение движения рек, несущих большое количество взвешенных наносов, которое также неоднократно отмечалось экспериментаторами-гидрологами.

Изложенная выше теория переноса взвешенных частиц турбулентным потоком была развита в работах А. Н. Колмогорова [56], Г. И. Баренблatta [5, 7]; вывод уравнений режима предельного насыщения на основе групповых соображений был дан в работе Г. И. Баренблатта, Г. С. Голицына [16].

#### 12.4. Верхний термоклин в океане — бегущая тепловая волна

Стратификация в океане создается неравномерным по глубине распределением температуры и солености. В отличие от стратификации взвешенными частицами, рассмотренной в предыдущем пункте, здесь имеет место перемешивание стратифицирующего агента с жидкостью на молекулярном уровне. При этом турбулентность, а следовательно, и тепло- и массообмен оказываются тесно связанными с внутренними волнами. Мы убедимся в этом, рассмотрев показательную задачу о распределении температуры в верхнем термоклине океана в умеренных широтах в осенне-зимний период, когда верхний термоклин наиболее ясно выражен и проходит его опускание.

Тепло- и массообмен на поверхности океана, в том числе опускание тяжелых жидких частиц от обрушающихся волн, приводит к появлению своеобразного пограничного слоя океана, в котором на распределение температуры (и солености) влияет граница вода—воздух. Эта область — *верхний деятельный слой океана* — состоит из *верхнего однородного слоя*, где температура почти постоянна, и подстилающего *верхнего термоклина*, где температура, напротив, меняется резко (рис. 12.1). Толщина верхнего деятельного слоя открытого океана на порядок меньше глубины океана. Поэтому можно рассматривать верхний термоклин как полубесконечную область  $h < z < \infty$  ( $z$  — глубина, отсчитываемая от поверхности океана,  $h$  — глубина верхнего однородного слоя) и принять, что избыточная температура  $\Theta$  обращается в нуль на бесконечности. Под избыточной температурой здесь понимается разность между текущей температурой и средней годовой температурой в данной точке. (При отсутствии тепло- и массообмена на границе вода—воздух в данной точке установилась бы средняя годовая температура.)

Если осреднить данные натурных наблюдений за время около месяца, то влияние различных кратковременных процессов (суточные вариации, кратковременные случайные температурные аномалии и т. п.) исчезнет. Осредненные параметры верхнего деятельного слоя: скорость заглубления верхнего однородного слоя

$u = dh/dt$  и его избыточная температура  $\Theta_0$  — будут функциями некоторого безразмерного «медленного» времени  $T$ :

$$u = u(T); \quad \Theta_0 = \Theta_0(T). \quad (12.35)$$

Пренебрежем горизонтальной неоднородностью и будем считать, что движения, определяющие механизмы турбулентности и тепло- и массообмена в верхнем термоклине, стационарны, однородны и мелкомасштабны. Тогда в сделанных предположениях для осредненной избыточной температуры  $\Theta(z, t)$  получается уравнение теплопроводности

$$\partial_t \Theta = \kappa \partial_{zz}^2 \Theta, \quad (12.36)$$

где  $t$  — время, а  $\kappa$  — эффективный вертикальный коэффициент температуропроводности, который мы принимаем постоянным. Заметим, что в последующем рассмотрении было бы нетрудно учесть переменность этого коэффициента и, в частности, его зависимость от температуры и/или ее градиента. Дальнейший анализ покажет, однако, что в таком усложнении нет необходимости.

Распределение осредненной избыточной температуры удовлетворяет граничным условиям

$$\Theta(h, t) = \Theta_0(T); \quad \Theta(\infty, t) = 0. \quad (12.37)$$

Перейдем к подвижной координате  $\xi = z - h$ , отсчитываемой от верхней границы термоклина. Тогда уравнение (12.36) и условия (12.37) запишутся (ср. аналогичное рассуждение в п. 6.5) в виде

$$\begin{aligned} \partial_t \Theta - u(T) \partial_\xi \Theta &= \kappa \partial_{\xi\xi}^2 \Theta; \\ \Theta(0, t) &= \Theta_0(T); \quad \Theta(\infty, t) = 0. \end{aligned} \quad (12.38)$$

В рассматриваемой задаче характерный масштаб времени  $\tau = \kappa/u^2$ , имеет, как будет показано, порядок нескольких суток. Поскольку  $\Theta$  — осредненная избыточная температура, кратковременные процессы на нее влияния не оказывают, и следует считать время  $t$  большим  $\tau$ . При больших  $t$  решение задачи (12.38) асимптотически становится стационарным, так что производная  $\partial_t \Theta$  в уравнении (12.38) исчезает. Получающееся уравнение легко интегрируется, и при условиях (12.38) находим

$$\Theta = \Theta_0 \exp(-u\xi/\kappa). \quad (12.39)$$

Удобно ввести универсальную переменную — относительную температуру  $\theta = (\Theta_0 - \Theta)/\Theta_0$ . При этом решение (12.39) записывается в виде

$$\theta = 1 - \exp(-u\xi/\kappa), \quad (12.40)$$

т. е. распределение относительной температуры оказывается автомодельным. Автомодельность распределения относительной температуры в верхнем термоклине была эмпирически обнаружена С. А. Китайгородским, Ю. З. Миропольским и Б. Н. Филюшкиным

[53, 69] при обработке натурных опытных данных. П. Линден [161] предпринял полезную попытку обработать на основе гипотезы автомодельности данные своих опытов по определению профилей солености на лабораторной модели верхнего термоклина. В работе О. В. Решетовой и Д. В. Чаликова [90] путем обработки натурных опытных данных была установлена аналогичная автомодельность для поля солености в верхнем термоклине. Б. В. Харьков [102] критически проанализировал методику обработки натурных опытных данных и также подтвердил автомодельность распределения относительной температуры в верхнем термоклине океана. Однако во всех этих работах автомодельность не связывалась с тем или иным физическим механизмом. В предыдущих главах мы уже неоднократно убеждались, что автомодельность не бывает случайной: она всегда свидетельствует об определенной стабилизации процесса. Выход температурного поля в верхнем термоклине на стационарную бегущую волну — еще один показательный пример, это иллюстрирующий. Модель бегущей волны применительно к верхнему термоклину была предложена и апробирована опытными данными — лабораторными и натуральными — в работе [14]; одновременно и независимо близкую модель предложил Дж. Тернер [209]. Следует отметить, что стационарное решение уравнения теплопроводности с подвижным тепловым источником (12.39) было впервые указано Г. Герцем еще в прошлом веке и с тех пор многократно использовалось в различных областях математической физики. В частности, оно играет фундаментальную роль в теории горения, описывая распределения температуры в области, где химическая реакция еще не идет (см. главу 6). Модель бегущей тепловой волны неоднократно использовалась и в океанологии: по образному выражению У. Манка [169], применившего близкую модель в другой физической ситуации, она восходит к океанологической древности.

Интегрируя (12.40), получаем:

$$\kappa/u = \int_0^\infty (1 - \theta) d\xi, \quad (12.41)$$

так что соотношение (12.40) переписывается в универсальном виде

$$\ln 1/(1 - \theta) = \xi \int_0^\infty (1 - \theta) d\xi = \zeta. \quad (12.42)$$

Таким образом, если предлагаемая модель верна, то в координатах  $\ln 1/(1 - \theta)$ ,  $\zeta$  опытные точки должны лежать на биссектрису первого координатного угла. В работе [36] С. С. Ефимов и В. М. Царенко провели обработку в этих координатах многочисленных натуральных данных, хорошо подтвердивших модель бегущей волны для верхнего термоклина. На рис. 12.3 представлены результаты Ефимова по обработке осредненного за октябрь 1968 —

1972 гг. профиля температуры на станции погоды «Эхо» ( $34^{\circ}0'$  с. ш. и  $48^{\circ}0'$  з. д.), любезно предоставленные Б. Н. Филюшкиным. Как видно, эти данные подтверждают принятую модель тепловой волны для верхнего термоклина и постоянство эффективного вертикального коэффициента температуропроводности.<sup>1</sup> Приведенные данные позволяют получить некоторые показательные оценки. Для натурных измерений на станции «Эхо» величина  $\kappa/u$ , определенная, согласно формуле (12.41), составляет примерно  $2 \cdot 10^3$  см. Оценивая среднюю скорость опускания верхней границы термоклина, получаем:  $u \sim 10^{-4} \dots 10^{-3}$  см/с. Отсюда и из предыдущей оценки находим  $\kappa \approx 10^{-1} \dots 1$  см<sup>2</sup>/с. Это значение является проме-

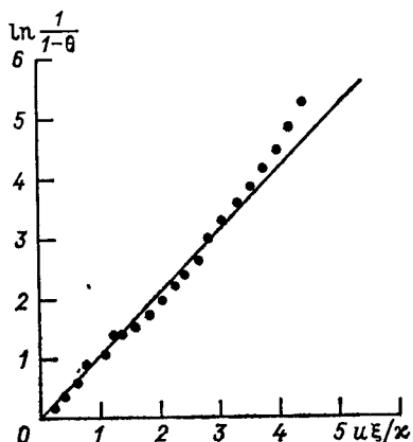


Рис. 12.3. Результаты обработки натурных экспериментов подтверждают модель бегущей волны для верхнего термоклина.

жуточным между порядком молекулярного коэффициента температуропроводности воды, равным примерно  $10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с, и порядком коэффициента турбулентной температуропроводности в верхнем однородном слое, составляющим  $10^3$  см<sup>2</sup>/с. Полученная оценка для эффективного вертикального коэффициента температуропроводности совпадает с оценкой У. Манка [169] для промежуточной по глубине области Тихого океана и согласуется с глобальной оценкой Г. Стормела [196]. Аналогичное промежуточное значение коэффициента обмена получается и по данным лабораторных опытов. Это дает основание предположить (Филлипс [182]), что обмен в верхнем термоклине определяется перемежающейся турбулентностью, связанной с разрушением внутренних волн.

Внутренние волны представляют собой специфическое для среды с устойчивой стратификацией явление. В случаях, когда стратификация «дискретна» т. е. в многослойной жидкости, плотность которой убывает снизу вверх от слоя к слою, энергия внутренних волн сосредоточена в основном вблизи границ раздела

<sup>1</sup> Систематические отклонения в верхней части графика, отвечающей нижней области термоклина, объясняются способом обработки, при котором в этой области теряется точность.

слоев. При устойчивой непрерывной стратификации внутренние волны заполняют все пространство, занятное жидкостью, разумеется, если в жидкости имеются источники возмущений. Такие источники в океане и атмосфере имеются всегда (отметим хотя бы приливы, создающие в океане внутренние волны громадной амплитуды и длины), так что внутренние волны представляют собой повсеместно распространенное в океане и атмосфере явление (см., например, [68, 132]). Взаимодействие внутренних волн с турбулентностью является определяющим для турбулентности в стратифицированной жидкости.

### 12.5. Сильное взаимодействие турбулентности с внутренними волнами. Заглубление турбулизированной области

1. Сильное нелинейное взаимодействие внутренних волн и турбулентности приводит к принципиально новым эффектам. Один из них был продемонстрирован Филлипсом [181], выполнившим замечательный эксперимент, принципиальная схема которого заключается в следующем.

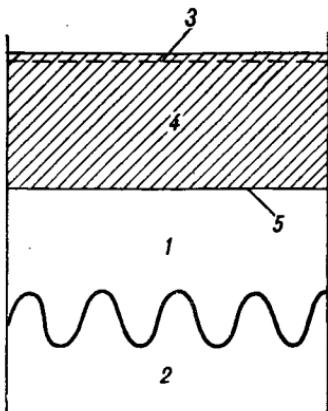


Рис. 12.4. Принципиальная схема эксперимента Филлипса.

1 — слой легкой жидкости, 2 — слой тяжелой жидкости, 3 — решетка, возбуждающая турбулентность, 4 — турбулизированная область, 5 — фронт турбулентности.

На поверхности раздела двух слоев жидкости разной плотности возбуждаются внутренние волны (рис. 12.4). После установления стационарной системы волн на верхней границе верхнего слоя начинает возбуждаться турбулентность. Турбулизированная область постепенно распространяется вниз от верхней границы верхнего слоя; ее нижняя граница — резкая. Распространение нижней границы турбулизированной области определялось визуализационными методами. Основной эффект заключается в том, что при подходе фронта турбулентности к границе раздела слоев волны сглаживаются и практически исчезают.

Заметим, что на самом деле в опытах Филлипса бак имел форму кругового цилиндра, и турбулентность возбуждалась вра-

щением диска, покрывающего верхнюю границу верхнего слоя, так что здесь возникало вращательное среднее сдвиговое течение. При теоретическом рассмотрении [12] задача была несколько упрощена: считалось, что слой жидкости горизонтально-однороден, а турбулентность возбуждается без сдвига, например, колебаниями решетки перпендикулярно границе слоя (см. рис. 12.5). Это упрощение, облегчающее теоретическое рассмотрение, ни в коем случае не является принципиальным, не говоря уже о том, что упрощенная схема соответствует вполне реальному опыту [32, 33, 207, 208, 213].

2. Рассмотрим вначале распространение турбулентности, возбуждаемой без образования сдвигового течения на границе  $z = 0$  бесконечно глубокого горизонтально-однородного слоя жидкости постоянной плотности. Ввиду отсутствия сдвига средней скорости порождение турбулентности средним течением не происходит, так что уравнение баланса турбулентной энергии в области, охваченной турбулентностью, записывается в виде

$$\partial_t b + \partial_z \langle [p'/\rho + (1/2)(u'^2 + v'^2 + w'^2)] w' \rangle + \varepsilon_t = 0 \quad (12.43)$$

(обозначения те же, что и в п. 11.2). Диффузионным потоком турбулентной энергии в уравнении (12.43) пренебречь уже нельзя: именно он определяет основной эффект «захвата» — расширение турбулентной области. Запишем выражение для диффузионного потока турбулентной энергии в виде

$$\langle [p'/\rho + (1/2)(u'^2 + v'^2 + w'^2)] w' \rangle = -K_b \partial_z b, \quad (12.44)$$

где  $K_b$  — коэффициент переноса турбулентной энергии. Подчеркнем, что запись (12.44) сама по себе не содержит никакой гипотезы: здесь лишь вводится новая характеристика потока  $K_b$ .

Примем теперь, как и раньше, для коэффициента  $K_b$  и скорости диссипации колмогоровские гипотезы замыкания:

$$K_b = l \sqrt{b}; \quad \varepsilon_t = c b^{3/2} / l, \quad (12.45)$$

где  $c$  — универсальная в рамках принятой модели постоянная<sup>1</sup>.

Уравнение (12.43) принимает при этих предположениях вид

$$\partial_t b - \partial_z l \sqrt{b} \partial_z b + c b^{3/2} / l = 0. \quad (12.46)$$

Уравнение (12.46) близко по типу к уравнениям нелинейной теплопроводности, рассмотренным в главе 2. Начальную турбулентность в поле потока, в соответствии с условиями опыта, можно считать отсутствующей, так что начальную турбулентную энергию примем равной нулю. Приток турбулентной энергии на

<sup>1</sup> Эту постоянную уже нельзя считать определенной из опытов со сдвиговыми течениями. Действительно, приняв  $K_b$  равным, а не пропорциональным  $l \sqrt{b}$ , мы переопределили  $l$ , включив в выражение для него множитель, равный отношению  $K_b$  к коэффициенту обмена импульса  $K$ , отличный от единицы.

поверхности слоя  $q$  будем вначале считать постоянным. Таким образом, начальное и граничное условия в задаче примут вид

$$b(z, 0) \equiv 0; (l \sqrt{b} \partial_z b)_{z=0} = -q, \quad (12.47)$$

так что турбулентная энергия зависит от величин  $t$ ,  $q$ ,  $z$ , а масштаб турбулентности, принимаемый постоянным по глубине охваченной турбулентностью области,— от величин  $t$  и  $q$ . Постоянство масштаба по глубине подсказывает идея А. А. Таунсенда [205] об определяющей роли больших вихрей в процессе переноса. Анализ размерности дает

$$b = q^{2/3} f(z/q^{1/3}t); \quad l = \alpha q^{1/3} t. \quad (12.48)$$

Здесь  $\alpha$  — постоянная, которая, так же как и  $c$ , в рамках предлагаемой модели не определяется и должна быть найдена из опыта или более детальной теории. Подставляя (12.48) в (12.46) и (12.47), получаем для  $f$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(d/d\xi)(\alpha \sqrt{f} df/d\xi) + \xi df/d\xi - cf^{3/2}/\alpha = 0, \quad \xi = z/q^{1/3}t \quad (12.49)$$

и краевые условия

$$(\alpha \sqrt{f} df/d\xi)_{\xi=0} = -1; \quad f(\infty) = 0. \quad (12.50)$$

Искомое решение, как и в главе 2, отлично от нуля только на конечном промежутке  $(0, \xi_0)$ . Таким образом, в сделанных предположениях турбулентная энергия в момент  $t$  отлична от нуля только в области конечной глубины  $h$ , растущей со временем по линейному закону, так что скорость распространения границы турбулентной области получается постоянной:

$$h = \xi_0 q^{1/3} t, \quad dh/dt = \xi_0 q^{1/3}. \quad (12.51)$$

При этом суммарная турбулентная энергия в турбулизованной области, приходящаяся на единицу площади границы, растет со временем по линейному закону:

$$\int_0^h b(z, t) dz = qt \int_0^{\xi_0} f(\xi) d\xi = \sigma(\alpha) qt, \quad (12.52)$$

а интегральная скорость диссипации не зависит от времени:

$$\int_0^h \varepsilon_t dz = \frac{cq}{\alpha} \int_0^{\xi_0} f^{3/2}(\xi) d\xi = \tau(\alpha) cq. \quad (12.53)$$

Заметим, что, принимая масштаб постоянным по глубине турбулизованного слоя, мы делаем непринципиальное аппаратное упрощение. Действительно, если считать, что масштаб  $l$  зависит также от  $z$ , то  $\alpha$  во втором соотношении (12.48) окажется функцией  $\xi$ , т. е.  $\alpha = \alpha(\xi)$ . Для определения этой функции требуются дополнительные соображения. В широких предположениях отно-

сительно  $\alpha$  это обобщение не меняет сделанных выводов, в частности вывода о конечности глубины и постоянстве скорости заглубления турбулизованной области.

3. Обратимся к данным эксперимента. Использование колеблющейся у поверхности жидкости решетки для лабораторного моделирования различных этапов формирования деятельного слоя океана было впервые предложено Тернером [207] и в дальнейшем

широко применялось в установках со стратифицированной жидкостью [204, 208, 215]. Интересное лабораторное исследование заглубления турбулизованного слоя в однородной жидкости, создаваемого колеблющейся вблизи поверхности решеткой, было выполнено С. И. Воропаевым, Б. Л. Гаврилиным, А. Г. Засецинским и К. Н. Федоровым [32, 33]. Их установка (рис. 12.5) представляла собой прямоугольный в плане бак из органического стекла с жестким металлическим каркасом. Решетки закреплялись на осевом стержне, приводившемся в колебательное движение двигателем постоянного тока. В опытах применялись две съемные решетки: перфорированная пластина и решетка из брусков с отверстиями квадратного сечения. Частота колебаний решетки могла плавно меняться почти на порядок. Амплитуда колебаний решетки была фиксированной; продвижение турбулентной области визуализировалось флюoresцирующим красителем и алюминиевой пудрой. Толщина турбулизированного слоя определялась в каждый момент, как рас-

Рис. 12.5. Схематическое изображение лабораторной установки [33].

1 — бассейн, 2 — решетка, 3 — мотор с редуктором, 4 — осевой стержень, 5 — граница раздела.

стояние от среднего положения решетки до условного горизонта, где коэффициент перемежаемости турбулентности составлял 0,5. Измерения турбулентности проводились лазер-допплер-анемометром «Дис». Результаты измерения глубины турбулизированной области  $h(t)$  представлены на рис. 12.6. При помощи статистического анализа экспериментальных данных был получен степенной закон роста глубины турбулизированной области

$$h(t)/h_0 = C(\omega t)^\beta. \quad (12.54)$$

Здесь  $h_0$  — начальное заглубление решетки;  $C$  и  $\beta$  — постоянные, зависящие от формы решетки. Оказалось, что для перфорированной пластины  $\beta = 0,33 \pm 0,01$ , а для решетки из брусков  $\beta = 0,20 \pm 0,02$ , так что показатели степенного закона (12.54) существенно отличаются от единицы.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> При других способах возбуждения турбулентности на границе (ср. работу В. А. Попова и Ю. Д. Чашечкина [86]) расширение турбулизированной области близко следует линейному закону.

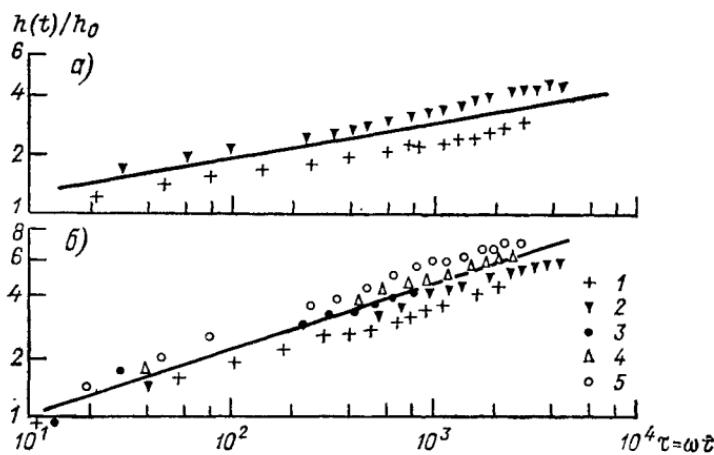


Рис. 12.6. Зависимость толщины турбулизованного слоя от времени в универсальных координатах при постоянной частоте колебаний решетки из брусков (а) и решетки в виде перфорированной пластины (б).

Обозначение . . . . . 1 2 3 4 5  
 $\omega$  Гц . . . . . 1,1 1,9 2,0 2,5 3,8

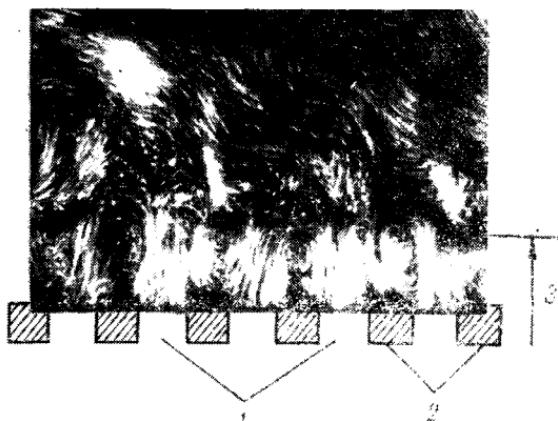


Рис. 12.7. Движение жидкости вблизи колеблющейся решетки.

1 — отверстия, 2 — перфорированная пластина, 3 — примыкающий к пластине слой жидкости с интенсивным пульсационным движением.

Наблюденное отличие экспериментальных результатов от предсказанных теоретической формулой (12.51) объясняется тем, что принятое при анализе условие постоянства притока турбулентной энергии на границе слоя (12.47) в опытах [32, 33] не выполнялось. Как видно из фотографии (рис. 12.7), любезно предоставленной нам С. И. Воропаевым, вблизи решетки над ней образуется слой жидкости, в котором происходит интенсивное пульсационное движение, так что энергия, сообщаемая решеткой жидкости, делится между этим слоем и заглубляющейся турбулизованной областью, причем доля энергии, приходящаяся на турбулизованную область меняется со временем.

4. Полученный экспериментальный результат — соотношение (12.54) — указывает на возникновение неполной автомодельности. Действительно, пусть решетка начинает колебаться в момент времени  $t = 0$  и колеблется с постоянной частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ . В начальный момент жидкость считается покоящейся. Тогда в качестве определяющих параметров удобно взять следующие величины: 1) величину  $q = a^3\omega^3$  (если бы вместо решетки были сплошная пластина, то этой величине была бы пропорциональна скорость передачи энергии к жидкости); 2) амплитуду колебаний решетки  $a$ ; 3) глубину точки наблюдения  $z$ ; 4) время  $t$ . Снова предполагаем, что движение можно охарактеризовать постоянным по всей глубине турбулизированной области масштабом турбулентности  $l$ . Анализ размерности по стандартной процедуре дает для удельной энергии турбулентности и ее масштаба

$$b = q^{2/3}\Phi_b(z/q^{1/3}t, a/q^{1/3}t); \quad l = q^{1/3}t\Phi_l(a/q^{1/3}t). \quad (12.55)$$

Нас интересует поведение энергии и масштаба турбулентности только для больших времен, когда глубина турбулизированной области много больше амплитуды колебаний решетки, т. е. при  $\eta = a/q^{1/3}t \ll 1$ . Если перейти в соотношениях (12.55) к пределу при  $\eta \rightarrow 0$  и предположить полную автомодельность по параметру  $\eta = a/q^{1/3}t = 1/\omega t$ , т. е. существование конечных отличных от нуля пределов функций  $\Phi_b$  и  $\Phi_l$ , то получится решение (12.48), отвечающее постоянному во времени притоку турбулентной энергии на границе  $z = 0$  и линейному расширению турбулизированной области. Эксперимент [33] показал, как мы видели, что это не всегда так: закон заглубления турбулизированной области (12.54) всегда степенной, но степень иногда оказывается существенно меньше единицы. Это объясняется неполной автомодельностью по параметру  $\eta$ : конечного отличного от нуля предела функций  $\Phi_b$  и  $\Phi_l$  при  $\eta = a/q^{1/3}t \rightarrow 0$  может не быть, но эти функции имеют при  $\eta \rightarrow 0$  степенную асимптотику:

$$\Phi_b \sim \eta^\lambda f(\xi/\eta^\mu); \quad \Phi_l \sim \eta^\nu. \quad (12.56)$$

Подставляя (12.55) и (12.56) в основное уравнение баланса турбулентной энергии (12.46), мы получаем, что для того чтобы степени  $\eta$  сократились и для функции  $f$  получилось обыкновенное

уравнение, должно выполняться условие  $v = \mu = \lambda/2$ , так что автомодельная предельная форма решения при  $\eta \rightarrow 0$  представляется в отличие от (12.48) в виде

$$b = A^2 t^{-2\mu} f(\xi); \quad \xi = z/At^{1-\mu}; \quad l = \alpha At^{1-\mu}, \quad (12.57)$$

где  $A, \alpha$  — постоянные, причем  $[A] = LT^{-1+\mu}$ , а  $\alpha$  — безразмерная величина. Очевидно, что параметр  $\mu$  из анализа размерности определить нельзя.

Функция  $f$  удовлетворяет уравнению

$$(d/d\xi)(\alpha \sqrt{f} df/d\xi) + (1 - \mu) \xi df/d\xi + 2\mu f - cf^{3/2}/\alpha = 0. \quad (12.58)$$

Легко показать, что, как и в предположении полной автомодельности ( $\mu = 0$ ), все решения этого уравнения, не обращающиеся в бесконечность при  $\xi \rightarrow \infty$ , непрерывные с непрерывной величиной  $\sqrt{f} df/d\xi$  (что вытекает из требования непрерывности турбулентной энергии и ее потока) на самом деле обращаются в тождественный нуль начиная с некоторой точки  $\xi = \xi_0 > 0$ . В точке  $\xi = \xi_0$  обращается в нуль величина безразмерного потока турбулентной энергии  $(\sqrt{f} df/d\xi)_{\xi=\xi_0} = 0$ , так как при  $\xi > \xi_0$  эта величина тождественно равна нулю. Действительно, при малых  $f$  последний член левой части (12.58) мал сравнительно с предыдущим и им можно пренебречь. Для получающегося при этом укороченного уравнения сформулированный результат известен [4, 17] (ср. ниже, а также главу 2).

Таким образом, глубина турбулизованной области, как и в предположении полной автомодельности, получается в каждый момент конечной. Она определяется соотношением

$$h = \xi_0 At^{1-\mu}. \quad (12.59)$$

Суммарная турбулентная энергия в турбулизированной области меняется со временем, согласно (12.57) и (12.59), по закону

$$\int_0^h b dz = A^3 t^{1-3\mu} \int_0^{\xi_0} f(\xi) d\xi \sim t^{1-3\mu}, \quad (12.60)$$

и интегральная скорость диссипации уже также зависит от времени:

$$\int_0^h \varepsilon_t dz = \frac{A^3 c}{\alpha} t^{-3\mu} \int_0^{\xi_0} f^{3/2} d\xi \sim t^{-3\mu}. \quad (12.61)$$

Таким образом, отличие от случая полной автомодельности оказалось количественным, но не качественным: при обоих предположениях глубина турбулизированной области в каждый момент оказалась конечной.

Проведенный анализ показывает, что предположение о бесконечной глубине верхнего слоя было излишним: ввиду конечной скоп-

ности распространения турбулентного фронта конечность глубины слоя не будет сказываться вплоть до достижения турбулентным фронтом границы раздела слоев. Анализ показал также, что масштаб турбулентности составляет определенную долю  $\alpha/\xi_0$  глубины турбулизованной области.

5. Распространение внутренних гравитационных волн вблизи границы раздела слоев тяжелой и легкой жидкостей (рис. 12.4) определяется обычной потенциальной теорией. На стационарную картину волн, распространяющихся по границе раздела слоев, турбулентность не оказывает влияния, пока фронт турбулентности не войдет в непосредственную окрестность границы раздела слоев. Дело в том, что поле скоростей волнового движения быстро (экспо-

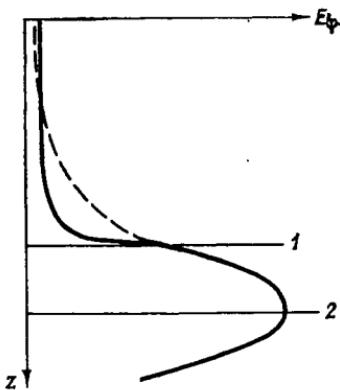


Рис. 12.8. Перераспределение волновой энергии по всему объему турбулизированной области.  
1 — фронт турбулентности, 2 — граница раздела слоев.

ненциально) затухает по обе стороны поверхности раздела слоев. Наличие турбулентности приводит к тому, что возникает турбулентный поток  $j$  энергии потенциального волнового движения  $E_\phi$  (см. работу А. Ю. Бенилова [27]), направленный против ее градиента:

$$j = -K_\phi \operatorname{grad} E_\phi, \quad (12.62)$$

где  $K_\phi$  — коэффициент турбулентного обмена волновой энергии, который вводится так же, как ранее вводились аналогичные коэффициенты обмена массы, импульса и т. д. Применяя гипотезу автомодельности А. Н. Колмогорова, мы считаем этот коэффициент пропорциональным коэффициенту обмена импульса турбулентной энергии, так что  $K_\phi \sim l\sqrt{b}$ .

До прихода турбулентности в области больших градиентов  $E_\phi$ , т. е. вблизи границы раздела, коэффициент  $K_\phi \sim l\sqrt{b}$  равен нулю, так как равна нулю турбулентная энергия. Пока фронт турбулентности далек от границы раздела, градиент волновой энергии  $\operatorname{grad} E_\phi$  в области, охваченной турбулентностью, экспоненциально мал, поэтому турбулентный поток волновой энергии мал везде. Когда же фронт турбулентности подходит к границе раздела слоев, коэффициент обмена  $K_\phi \sim l\sqrt{b}$  там становится отличным от нуля, и, поскольку вблизи границы раздела  $\operatorname{grad} E_\phi$  не мал, возникает

турбулентный поток волновой энергии (рис. 12.8). Из-за этого потока волновая энергия распределяется более или менее равномерно по всему верхнему слою. Таким образом, как только фронт турбулентности захватит поверхность раздела слоев, действие волнопродуктора становится неэффективным: энергия волн благодаря турбулентности распределяется по всему объему сосуда, а не сосредотачивается вблизи поверхности раздела, как это было в отсутствии турбулентности. Это и приводит к выглаживанию волн на поверхности раздела.

Разумеется, частный характер рассмотренной здесь геометрии явления несуществен. Мы столкнулись при анализе опыта Филлипса с явлением совершенно общего характера: турбулентное образование, распространяющееся в жидкости и ограниченное при малой фоновой турбулентности резким фронтом, набегая на область, охваченную нетурбулентным волновым движением, «всасывает» в себя энергию волнового движения и тем самым выглаживает волны. Это явление могут наблюдать, например, катающиеся на водных лыжах: за глиссером образуется гладкая дорожка из-за того, что турбулентная спутная струя глиссера всасывает в себя энергию волн. Однако, стоя на этой дорожке лыжник испытывает частые слабые толчки, обусловленные турбулентностью.

Отметим, что основной для проведенного рассмотрения примечательный факт наличия резкой границы турбулизованной и нетурбулизованной областей, полученный здесь теоретически, неоднократно отмечался экспериментаторами (см. особенно статью Л. Коваснаи и др. [156] и монографию Дж. Тернера [208], в которых можно найти также обзор более ранних работ).

6. Сделаем несколько замечаний. В соотношениях (12.57) можно нормировать функцию  $f$  произвольно, при этом могут изменяться только постоянные  $A$  и  $\alpha$ . Поэтому нормируем решение уравнения (12.58) условием

$$(\alpha \sqrt{f} df/d\xi)_{\xi=0} = -1, \quad (12.63)$$

совпадающим с первым условием (12.50), причем второе условие (12.50), т. е.  $f(\infty) = 0$ , тоже остается в силе. Таким образом, при заданном  $\alpha$ , которое при рассматриваемом подходе не определяется и должно находиться из более подробной теории или опыта, нужное нам решение уравнения (12.58) однозначно определяется единственным параметром  $\mu$ . Для нахождения параметра  $\mu$  необходимо поставить задачу на собственные значения.

Рассмотрим простейший возможный вариант постановки этой задачи. Решение (12.57) при  $z=0$  дает с учетом нормировочного условия (12.63) для притока энергии на границе

$$(l \sqrt{b} \partial_z b)_{z=0} = -A^3 t^{-3\mu},$$

так что приток энергии от решетки со временем убывает. Нетрудно дать этому физическое истолкование. В отличие от поступательно движущейся внутрь жидкости сплошной пластиинки (например, штампа конечных размеров на плоской границе жидкости), которая передает жидкости определенную порцию энергии, заставляя ее двигаться перед собой, в решетке имеются сквозные отверстия.

Через эти отверстия жидкость проникает и течет навстречу движению решетки. Из-за таких возвратных движений жидкости спустя короткое время после начала движения вблизи решетки формируется слой жидкости, имеющий толщину порядка амплитуды колебаний решетки. В этом слое жидкость совершает возвратные движения, перетекая поочередно с одной стороны решетки на другую. Основная турбулизованная область располагается ниже этого прирешеточного слоя. Разбиение турбулизированной области на прирешеточный слой, в котором происходят возвратные движения жидкости, и основную турбулизированную область было продемонстрировано выше на рис. 12.7. Ясно, что пульсирующий прирешеточный слой передает расположенной ниже жидкости энергию, определяемую пульсационным движением на их общей границе и только им. Толщина прирешеточного слоя имеет порядок величины амплитуды колебаний решетки.

В интересующие нас времена, когда нижняя граница перемешанной области достаточно далеко ушла от решетки, можно считать, что верхняя граница основной турбулизированной области находится при  $z=0$ . Из пульсационной энергии единицы массы можно составить единственную величину размерности потока турбулентной энергии —  $b^{3/2}$ . Действительно,  $\sqrt{b}$  с точностью до постоянного множителя — средняя скорость пульсационного движения. Поэтому величина  $\sqrt{b} = b^{3/2}$  при  $z=0$  (снова с точностью до множителя) представляет собой средний перенос величины  $b$  пульсационным движением на единицу площади за единицу времени. Он и определяет, в согласии со сказанным, приток турбулентной энергии к турбулизированной области на ее верхней границе, т. е. при  $z=0$ . Таким образом,

$$(I \sqrt{b} \partial_z b)_{z=0} = -\lambda b^{3/2} (0, t),$$

где  $\lambda$  — безразмерный множитель, который может определяться только формой ячеек решетки и ее просветностью (поверхностной пористостью). Подставляя это условие в соотношение (12.57) и учитывая нормировочное условие (12.63), получаем

$$(\alpha \sqrt{f} df/d\xi)_{\xi=0} = -\lambda [f(0)]^{3/2} = -1,$$

откуда находим

$$f(0) = (1/\lambda)^{2/3}.$$

Решение уравнения (12.58), удовлетворяющее условиям (12.50), непрерывное и имеющее непрерывную величину  $\sqrt{f} df/d\xi$ , определяется единственным образом и при произвольном  $\mu$  предыдущему соотношению не удовлетворяет. Существует, однако, исключительное значение параметра  $\mu$  — собственное значение — при котором это условие удовлетворяется; оно и определяет искомое решение.

Отметим, что пока неясно, как практически задавать параметр  $\lambda$  по заданной форме решетки, поэтому само собственное значение  $\mu$  может оказаться непосредственной характеристикой формы решетки.

7. Продемонстрируем постановку и решение задачи на собственные значения для близкого явления распространения турбулентности от мгновенного источника, представляющего также самостоятельный интерес.

Пусть в безграничном пространстве, заполненном несжимаемой однородной жидкостью, в начальный момент  $t=0$  создается плоский турбулентный слой постоянной толщины  $2a$ , в котором распределение турбулентности симметрично относительно горизонтальной плоскости  $z=0$  и горизонтально однородно. В последующие моменты времени слой расширяется в вертикальном направлении, захватывая окружающую жидкость.

Таким образом, начальное условие для распределения турбулентной энергии имеет вид

$$b(z, 0) = (Q/a) u_0(z/a),$$

где  $u_0$  — четная безразмерная функция своего безразмерного аргумента, равная нулю при  $|z|/a \geq 1$ , а величина  $Q$  — интенсивность мгновенного источника турбулентности, приходящаяся на единицу площади границы слоя:

$$Q = \int_{-a}^a b(z, 0) dz.$$

Вполне аналогично предыдущему можно показать, что при больших временах асимптотика решения поставленной таким образом задачи представляется в виде (12.57), где

$$A = Q^{(1-\mu)/2} a^{(3\mu-1)/2},$$

причем полутолщина  $h(t)$  турбулизованного слоя в момент  $t$  определяется соотношением (12.59). На границах слоя  $z = \pm h(t)$  турбулентная энергия и ее поток обращаются в нуль. Таким образом, интегрируя уравнение (12.58) по  $\xi$  от  $-\xi_0$  до  $\xi_0$ , получаем:

$$\mu - \frac{1}{3} = c \int_{-\xi_0}^{\xi_0} f^{3/2} d\xi / 3a \int_{-\xi_0}^{\xi_0} f d\xi. \quad (12.64)$$

Из этого соотношения следует, что  $\mu > 1/3$ . Из условия расширения слоя находим (ср. (12.59)), что  $\mu < 1$ . Таким образом, если устремить начальную толщину слоя  $a$  к нулю, то для сохранения неизменной асимптотики решения при больших временах интенсивность источника должна возрастать и притом так (ср. главу 3), чтобы оставался неизменным момент  $Qa^{(3\mu-1)/(1-\mu)}$ . Полагая для удобства  $\zeta = \xi/\xi_0 = z/h(t)$ ,  $\Phi(\zeta) = \xi_0^{-2} f$ , приведем уравнение (12.58) к виду

$$(d/d\zeta)(a\sqrt{\Phi} d\Phi/d\zeta) + (1-\mu)\zeta d\Phi/d\zeta + 2\mu\Phi - c\Phi^{3/2}/a = 0. \quad (12.65)$$

Ввиду симметрии задачи  $\Phi(\zeta) = \Phi(-\zeta)$ , и можно ограничиться построением решения только при  $\zeta \geq 0$ . Таким образом, ищется нетривиальное решение уравнения (12.65) в интервале  $0 \leq \zeta \leq 1$ , удовлетворяющее условиям

$$d\Phi(0)/d\zeta = 0; \Phi(1) = 0, \quad (12.66)$$

непрерывное и обладающее непрерывной производной  $d\Phi^{3/2}/d\zeta$ . Из непрерывности этой производной вытекает, в частности, условие

$$d\Phi^{3/2}(1)/d\zeta = 0, \quad (12.67)$$

которому искомое решение также должно удовлетворять.

При малых  $\Phi$  последний член уравнения (12.65) мал сравнительно с предыдущим и может быть отброшен. Легко показать, что получающееся при этом уравнение инвариантно относительно группы преобразований

$$\Phi' = \lambda^4 \Phi; \quad \zeta' = \lambda \zeta,$$

где  $\lambda > 0$  — параметр группы. Следовательно, порядок уравнения можно понизить до первого и оно может быть исследовано (ср. [4, 17]). Исследование показывает, что нетривиальное решение уравнения (12.65), обладающее нужной гладкостью и удовлетворяющее условиям  $\Phi(1) = 0$ ,  $d\Phi^{3/2}(1)/d\zeta = 0$  существует и опреде-

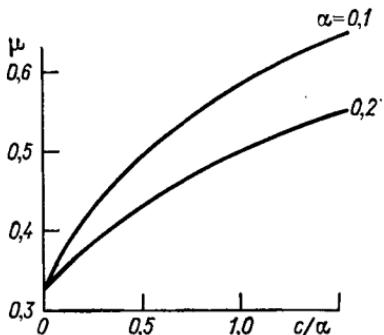


Рис. 12.9. Зависимость параметра  $\mu$  от параметров задачи  $\alpha$  и  $c/\alpha$ .

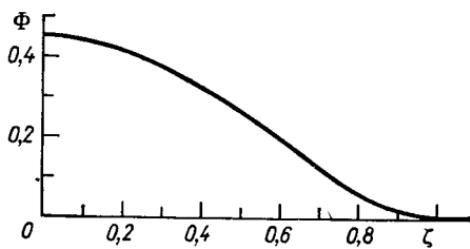


Рис. 12.10. Универсальное распределение турбулентной энергии по толщине слоя при  $\alpha=0,2$  и  $c/\alpha=0,5$ .

ляется единственным образом; для него при  $\zeta \leqslant 1$  справедливо разложение

$$\Phi = [(1 - \mu)/2\alpha]^2 (1 - \zeta)^2 - [(1 - \mu)/6\alpha^2] (1 - \zeta)^3 + \dots$$

Однако при произвольном  $\mu$  оставшееся условие  $d\Phi(0)/d\zeta = 0$  не выполняется. Мы пришли, таким образом, к классической ситуации нелинейной задачи на собственные значения: нужно построить нетривиальное решение уравнения (12.65), удовлетворяющее условиям (12.66), (12.67) и имеющее нужную гладкость, и определить значение параметра  $\mu$ , для которого такое решение существует. Можно показать, что решение этой задачи существует и единственно; она легко решается численно. Результаты определения  $\mu$  для разных значений параметров  $\alpha$  и  $c/\alpha$  представлены на графике рис. 12.9. Решение  $\Phi(\zeta)$  для случая  $\alpha = 0,2$  и  $c/\alpha = 0,5$  представлено на рис. 12.10.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Вычисления выполнены Е. С. Бениловым.

Как и для всякого автомодельного решения второго рода, константа  $\xi_0$  остается в построенном асимптотическом решении неопределенной, поскольку закон сохранения турбулентной энергии принимает неинтегрируемую форму.

8. Следующее замечание также относится к притоку энергии на границе турбулизированной области. Представляется естественным, что плавно увеличивая со временем частоту колебаний решетки, т. е. суммарную подачу энергии в оба слоя, можно при определенной скорости роста частоты обеспечить постоянный приток турбулентной энергии внутрь турбулизированной области, а следовательно, и линейный закон ее заглубления. Это было проверено в работе [33]. В новой серии опытов частота колебаний решетки

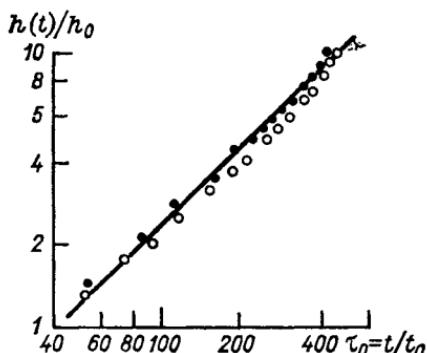


Рис. 12.11. Зависимость толщины турбулизированного слоя от времени в универсальных координатах при переменной частоте колебаний перфорированной пластины и  $\gamma=0,80$  [33].

Сплошная линия отвечает  $h \sim t^{1.05}$ .

плавно возрастала по степенному закону  $h \sim (t/t_0)^\gamma$ , где  $t_0$ ,  $\gamma$  — постоянные. На рис. 12.11, взятом из [33], показано, что при  $\gamma = 0,80$  в случае решетки в виде перфорированной пластины закон заглубления турбулизированной области действительно близок к линейному.

Далее, при достаточно длительном колебании решетки в однородной жидкости нижняя граница турбулизированной области достигает дна бассейна, после чего через некоторое время в бассейне устанавливается стационарный режим турбулентности. Очевидно, что в стационарном режиме турбулентная энергия  $b$  зависит от частоты  $\omega$  и амплитуды  $a$  колебаний решетки, а также от глубины  $z$  точки наблюдения под решеткой и глубины бассейна  $H$ . Анализ размерности дает

$$b = a^2 \omega^2 \Phi_b(z/a, H/a). \quad (12.68)$$

Ясно, что в основной части бассейна, вне непосредственной близости решетки параметр  $z/a \gg 1$ , поэтому можно ожидать, что распределение турбулентной энергии описывается предельными соотношениями. Если бы по параметру  $z/a$  была полная автомодельность, то распределение турбулентной энергии по глубине было бы равномерным:  $b = a^2 \omega^2 \Phi(\infty, H/a)$ . Опыты Томсона и Тернера

[204] показали, что это не так, и имеет место соотношение неполной автомодельности по параметру  $z/a$ :

$$b = Ca^2\omega^2(a/z)^n, \quad (12.69)$$

причем показатель степени  $n$  и константа  $C$  существенно зависят от формы решетки.

9. В предыдущем рассмотрении предполагалось, что сдвиг отсутствует. Однако автомодельные асимптотики рассматриваемого типа должны иметь место и при возбуждении турбулентности со сдвигом.

Действительно, уравнения баланса импульса и энергии в нестационарном однородном по горизонтали в среднем турбулентном потоке с поперечным сдвигом имеют при тех же предположениях вид

$$\partial_t u - \partial_z l \sqrt{b} \partial_z u = 0, \quad (12.70)$$

$$\partial_t b - \partial_z \varepsilon_b l \sqrt{b} \partial_z b + \gamma^4 b^{3/2} / l - l \sqrt{b} (\partial_z u)^2 = 0, \quad (12.71)$$

где  $u(z, t)$  — средняя скорость,  $\varepsilon_b$  — постоянное отношение коэффициента обмена турбулентной энергии к коэффициенту обмена импульса, а остальные обозначения прежние. Как нетрудно видеть, эти уравнения допускают автомодельные решения вида

$$u = At^{-\mu} g(\xi); \quad b = A^2 t^{-2\mu} f(\xi); \quad \xi = z/At^{1-\mu}; \quad l = aAt^{1-\mu}. \quad (12.72)$$

Соответствующая система обыкновенных уравнений для функций  $g$  и  $f$  легко выписывается. Аналогично предыдущему, нелинейность уравнения турбулентной энергии такова, что при отсутствии начальных турбулентных возмущений, т. е. при начальном условии  $b(z, 0) = 0$ , область, где решение  $g, f$  отлично от нуля, конечна и соответствует  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ , а следовательно, конечна и глубина турбулизованной области в каждый момент:  $h = \xi_0 At^{1-\mu}$ . При  $\xi = \xi_0$  имеют место очевидные условия

$$(\sqrt{f} df/d\xi)_{\xi=\xi_0} = 0; \quad (\sqrt{f} dV/d\xi)_{\xi=\xi_0} = 0, \quad (12.73)$$

вытекающие из обращения в нуль на нижней границе турбулизованной области потока импульса и потока турбулентной энергии.

10. Специфика распространения турбулентности в стратифицированной жидкости заключается в передаче части энергии на границе турбулизованной области внутренним волнам, возбуждаемым в нетурбулизированной стратифицированной жидкости, лежащей под турбулизированной областью. Автомодельность распространения турбулентности при этом сохраняется только в том случае, когда энергия, передаваемая внутренним волнам, составляет постоянную часть  $m$  ( $0 < m < 1$ ) энергии, поступающей в турбулизованную область от решетки. Все сказанное выше при этом

остается справедливым за исключением первого условия (12.73), которое заменяется условием

$$(\alpha \varepsilon_b \sqrt{f} df/d\xi)_{\xi=\xi_0} = -m. \quad (12.74)$$

Разумеется, показатель степени в законе расширения турбулизованной области при этом будет зависящим и от величины  $m$ .

Предположение о постоянстве доли энергии, передаваемой турбулизованной областью внутренним волнам, делалось рядом авторов (см. [161, 208]). Если бы оно не выполнялось, наблюдавшаяся автомодельность заглубления турбулизированной области не имела бы места.

Заметим, наконец, что нами принималось предположение о постоянстве масштаба турбулентности по глубине турбулизированной области. В автомодельном представлении это предположение свело дело к единственной константе  $\alpha$ , которая в рамках предложенной схемы не определялась. Можно воспользоваться известным полуэмпирическим подходом Лаундера [137] или каким-либо другим аналогичным подходом, основанным на введении нового дифференциального уравнения, позволяющего определить масштаб. При этом величина  $\alpha(\xi)$  станет определяемой переменной величиной, зависящей от основной автомодельной переменной. К сожалению, такого рода подходы всегда приводят к мало достоверным гипотезам замыкания и к необходимости введения новых параметров, предполагаемое постоянство которых всегда нуждается в трудном обосновании.

## 12.6. Разрушение внутренних волн и растекание пятен перемешанной жидкости в устойчиво стратифицированной жидкости

Взаимодействие внутренних волн и турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией не сводится только к перераспределению волновой энергии турбулентностью, которое было рассмотрено в предыдущем параграфе. Турбулентность в устойчиво стратифицированной жидкости имеет своеобразную пространственную структуру. Наблюдения, в частности в верхнем термоклине океана, показывают, что она сосредоточена в блинообразных слоях — «пятнах» турбулентности, простирающихся в горизонтальном направлении на расстояния, значительно превышающие их толщину [70, 73, 101]. Эти блинообразные пятна оказываются резко ограниченными и сравнительно долго живущими. Даже после затухания турбулентности жидкость в них долго остается перемешанной. Поэтому возникновение и развитие пятен перемешанной жидкости в устойчиво стратифицированной среде представляет значительный интерес, в частности (см. ниже), в связи с тонкой структурой и микроструктурой океана.

Возникновение пятен перемешанной жидкости связано с разрушением внутренних волн, которое может обуславливаться раз-

личными механизмами: простым обрушиванием [216], сдвиговой или конвективной неустойчивостью [25, 58], резонансным взаимодействием и т. д. При разрушении внутренних волн в окружающей устойчиво стратифицированной среде появляются пятна перемешанной жидкости (рис. 12.12), которые эволюционируют, постепенно сплющиваясь и внедряясь в окружающую среду языками — интрузиями. Ясно, что интрузии образуются на уровне  $z = z_1$ , на котором плотность стратифицированной жидкости равна плотности жидкости в пятне. Перемешанность жидкости в пятне создает в нем избыточное по сравнению с окружающей средой давление, которое и создает движущую силу интрузии: под влиянием этой силы и происходит расплывание пятна.

Естественно различать три стадии коллапса — растекания пятен перемешанной жидкости в устойчиво стратифицированной

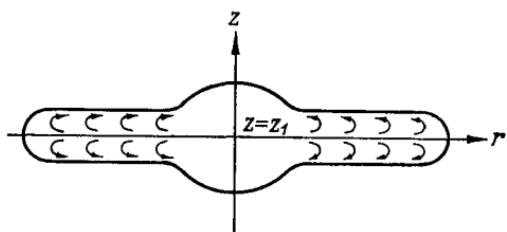


Рис. 12.12. Интрузия пятна перемешанной жидкости в окружающую стратифицированную жидкость.

среде: 1) *начальную стадию*, существенно нестационарную, на которой движущая сила интрузии значительно превосходит силы сопротивления; 2) *промежуточную стационарную стадию*, на которой движущая сила интрузии уравновешивается сопротивлением формы и волновым сопротивлением, обусловливаемым излучением внутренних волн расширяющимися пятнами; 3) *заключительную, вязкую стадию*, на которой внутренние волны не излучаются и движущая сила интрузии уравновешивается вязким сопротивлением. На каждой из этих стадий, как мы увидим, действуют свои автомодельные законы. Разумеется, между названными стадиями имеются неавтомодельные промежуточные периоды. После завершения вязкой стадии пятно вследствие диффузии смешивается с окружающей жидкостью и исчезает. Классификация стадий коллапса пятна перемешанной жидкости в устойчиво стратифицированной жидкости восходит к фундаментальной работе By [217]. В этой работе было также показано, что начиная с ранних стадий эволюции пятна и до последней наблюдавшейся стадии объем пятна перемешанной жидкости остается постоянным.

Разберем эти стадии последовательно. На первой стадии происходит свободное падение или подъем частиц перемешанной жидкости на плоскость уровня ее плотности  $z = z_1$  и растекание частиц жидкости вдоль этой плоскости. Поэтому скорость изменения площади  $S$  пятна в плане на первой стадии пропорциональна произведению текущей площади пятна на скорость подтекания жидкости к плоскости  $z = z_1$ . В условиях свободного паде-

ния скорость подтекания пропорциональна произведению времени на ускорение свободного падения. Последняя величина в свою очередь пропорциональна  $N^2$ , где  $N$  — основной параметр стратификации — частота Брента—Вайсяля, определяемая соотношением<sup>1</sup>

$$N^2 = g |d\rho/dz|/\rho \quad (12.75)$$

и равная частоте линейных внутренних волн, возникающих при слабом возмущении покоящейся стратифицированной жидкости.<sup>2</sup> Распределение  $N^2$  по вертикали вблизи пятна можно считать равномерным. Таким образом, для первой стадии получаем

$$\partial_t S \sim SN^2 t. \quad (12.76)$$

При малых  $Nt$ , интегрируя, находим:

$$(S - S_0)/S_0 \sim N^2 t^2, \quad (12.77)$$

где  $S_0$  — начальная площадь пятна в плане. Таким образом, на первой стадии изменение характерного размера турбулентного пятна в плане  $L$  пропорционально квадрату времени:

$$(L - L_0)/L_0 \sim N^2 t^2; \quad dL/dt \sim L_0 N^2 t. \quad (12.78)$$

Действительно, в случае пятна, имеющего форму удлиненного цилиндра с горизонтальной осью,  $S$  пропорционально  $L$  и выражение (12.78) получается из (12.77) непосредственно. Если размеры проекции пятна в плане примерно одинаковы (например, если пятно — круглое в плане), то  $S \sim L^2$ . Однако при  $(L - L_0) \ll L_0$   $S - S_0 \sim L^2 - L_0^2 \sim 2(L - L_0)L_0$ , откуда и из (12.77) снова получается закон (12.78). Соотношения вида (12.78) были получены Ву [217] на основе обработки данных лабораторных опытов с пятном в форме удлиненного цилиндра. Они были подтверждены теоретическим анализом Гао [146] и численными расчетами. Фактически они оказались справедливыми до  $t \sim 2,5/N$ .

На промежуточной стадии движущая сила интрузии уравновешивается сопротивлением формы и волновым сопротивлением, так что для скорости расширения пятна  $dL/dt$  определяющими параметрами будут параметр стратификации  $N$  и текущая средняя толщина пятна  $h$ . Анализ размерности дает

$$dL/dt \sim Nh. \quad (12.79)$$

Как видно, на этой стадии зависимость скорости расширения пятна от времени различна для разной геометрии пятна. Действительно, поскольку, в согласии со сказанным выше, объем пятна

<sup>1</sup> В формуле (12.75) и далее  $g$  — ускорение свободного падения, а под  $\rho$  понимается потенциальная плотность, т. е. плотность жидкости, получающаяся при адиабатическом приведении давления к некоторому стандартному.

<sup>2</sup> Типичное значение  $N$  для атмосферы составляет  $10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , для океана  $10^{-3} \text{ с}^{-1}$ .

$V$  постоянен, для пятна в форме удлиненного цилиндра площадью  $S$  поперечного сечения  $h \sim S/L$ , а для пятна круговой формы в плане  $h \sim V/L^2$ . Поэтому получаем в первом и втором случаях соответственно

$$dL^2/dt \sim SN; L \sim [SN(t - t_0)]^{1/2}; \quad (12.80)$$

$$dL^3/dt \sim VN; L \sim [VN(t - t_0)]^{1/3}. \quad (12.81)$$

Здесь  $t_0$  — условный момент начала второй стадии. Соотношения вида (12.80) были получены Ву [217] обработкой данных лабораторных опытов и подтверждены теоретическим анализом Гао [146]. Они оказались справедливыми при  $3/N < t < 25/N$ .

Перейдем к рассмотрению заключительной, вязкой стадии коллапса пятна перемешанной жидкости [13].

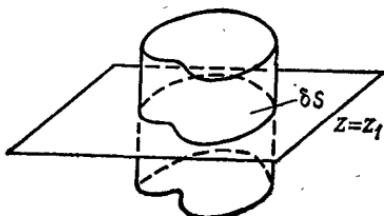


Рис. 12.13. Элемент пятна перемешанной жидкости.

В сделанных предположениях уравнение сохранения массы в пятне перемешанной жидкости имеет вид

$$\partial_t h + \operatorname{div} h \mathbf{v} = 0, \quad (12.82)$$

где  $h(x, y, t)$  — толщина пятна;  $x, y$  — координаты в плоскости  $z = z_1$ ;  $t$  — время,  $\mathbf{v}$  — средняя по толщине пятна скорость перемешанной жидкости на данной вертикали. Для вывода этого уравнения достаточно рассмотреть баланс массы жидкости в элементарном объеме пятна, представленном на рис. 12.13, и учесть, что на вязкой стадии уже не происходит захвата пятном окружающей жидкости и еще не происходит эрозии пятна.

Для определения средней скорости  $\mathbf{v}$  рассмотрим систему сил, действующих на элементарную частицу пятна (см. рис. 12.13), ограниченную цилиндрической поверхностью, опирающуюся на элементарную площадку  $\delta S$  в плоскости  $z = z_1$ . Движущая сила интрузии частицы обусловлена градиентом величины  $p\dot{h}$ , где  $p$  — среднее избыточное по сравнению с окружающей стратифицированной жидкостью давление на данной вертикали:

$$\mathbf{F}_m = -\operatorname{grad}(p\dot{h})\delta S. \quad (12.83)$$

Действительно, на каждой вертикали цилиндрической границы частицы пятна по нормали к этой границе действует сила  $-p\mathbf{n}\dot{h}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к контуру  $\delta C$  площадки  $\delta S$ . На верхней и нижней границах пятна движущие силы не действуют: давление жидкости в пятне совпадает там с давлением

в стратифицированной жидкости. Следовательно, применяя преобразование Гаусса—Остроградского, получаем:

$$\mathbf{F}_m = - \int_{\delta S} p h \mathbf{n} ds \simeq - \operatorname{grad}(ph) \delta S.$$

Силу сопротивления  $\mathbf{F}_r$ , приходящуюся на площадку  $\delta S$  проекции частицы в плане, можно вычислить следующим образом. Поскольку коллапс на рассматриваемой стадии происходит медленно, можно пренебречь ускорениями движения в пятне и упростить уравнения движения. Интегрируя эти упрощенные уравнения по толщине пятна, получаем, что сила сопротивления пропорциональна производной по  $z$  от истинной скорости на верхней (или нижней) границе пятна. Далее, уравнения движения жидкости в пятне легко интегрируются; при этом необходимо принять то или иное граничное условие на верхней и нижней границах пятна. Эксперименты и численные расчеты показывают, что скорость на границе пятна много меньше средней скорости в пятне. Это объясняется тем, что при коллапсе вблизи пятна над и под ним происходят движения жидкости в обратном направлении по отношению к движению жидкости в пятне. Следовательно, с достаточной точностью можно считать, что на верхней и нижней границах пятна скорость обращается в нуль. Интегрируя при этом условии уравнения движения, можно получить распределение скорости по толщине пятна, а следовательно, и выражение для силы сопротивления. Мы получим это выражение непосредственно, опираясь на анализ размерности. Действительно, сила сопротивления, приходящаяся на единичную площадку, определяется местной средней скоростью жидкости  $v$ , вязкостью жидкости  $\mu$  и местной толщиной пятна  $h$ . Из анализа размерности следует, что эта сила пропорциональна  $mv/h$ . Таким образом, сила вязкого сопротивления  $\mathbf{F}_r$  определяется соотношением

$$\mathbf{F}_r = c\mu(v/h)\delta S, \quad (12.84)$$

где  $c$  — константа, для нахождения которой можно воспользоваться хорошо известным решением задачи о течении вязкой жидкости между плоскими стенками, согласно которому  $\mathbf{F}_r = 12\mu v \delta S/h$ . Отсюда получаем, что  $c = 12$ .

Приравнивая силу сопротивления (12.84) движущей силе интрузии частицы (12.83), получаем:

$$\mathbf{v} = -(h/c\mu) \operatorname{grad} ph. \quad (12.85)$$

Нам осталось найти избыточное давление в перемешанной жидкости. Распределение плотности стратифицированной жидкости по высоте вблизи уровня растекания пятна  $z = z_1$  можно считать ввиду относительно небольшой толщины пятна линейным. Ясно, что пятно растекается симметрично относительно этого уровня, так что он делит пятно по толщине пополам. Обозначим через  $p_1$  и  $\rho_1$  соответственно давление и плотность стратифициро-

ванной жидкости на уровне  $z = z_1$ . Тогда, интегрируя уравнение гидростатики, получаем, что давление в стратифицированной жидкости меняется с высотой по закону

$$p = p_1 - \rho_1 g (z - z_1) + \rho_1 N^2 (z - z_1)^2 / 2. \quad (12.86)$$

Здесь  $N$  — по-прежнему частота Брента—Вийсяля, так что  $N^2 = ag$ ,  $a = |\partial p / \partial z| / \rho_1$ . Таким образом, поскольку давление на поверхности пятна совпадает с давлением в окружающей стратифицированной жидкости, давления в верхней  $z = z_1 + h/2$ , и нижней  $z = z_1 - h/2$  точках некоторой вертикали в пятне равны соответственно

$$p_u = p_1 - \rho_1 gh / 2 + \rho_1 N^2 h^2 / 8; \quad p_d = p_1 + \rho_1 gh / 2 + \rho_1 N^2 h^2 / 8. \quad (12.87)$$

Давление внутри пятна распределено по гидростатическому закону, так как плотность жидкости в пятне постоянна и равна  $\rho_1$ :

$$p = p_1 - \rho_1 g (z - z_1) + \rho_1 N^2 h^2 / 8. \quad (12.88)$$

Средние давления по некоторой вертикали в пятне и такому же участку в окружающей стратифицированной жидкости равны соответственно

$$p_{ai} = p_1 + \rho_1 N^2 h^2 / 8; \quad p_{as} = p_1 + \rho_1 N^2 h^2 / 24. \quad (12.89)$$

Разность этих величин и составляет среднее избыточное давление в пятне по данной вертикали:

$$p = p_{ai} - p_{as} = \rho_1 N^2 h^2 / 12. \quad (12.90)$$

Из соотношений (12.85) и (12.90) находим

$$\mathbf{v} = -(\rho_1 N^2 / 12 c \mu) h \operatorname{grad} h^3 = -(\rho_1 N^2 / 4 c \mu) h^3 \operatorname{grad} h. \quad (12.91)$$

Подставляя это выражение в уравнение сохранения массы жидкости в пятне (12.82), получаем для толщины пятна нелинейное уравнение типа уравнения теплопроводности:

$$\partial_t h - \kappa \Delta h^5 = 0; \quad \kappa = \rho_1 N^2 / 20 c \mu = N^2 / 20 c v. \quad (12.92)$$

где  $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$  — двумерный оператор Лапласа,  $v$  — кинематическая вязкость жидкости внутри пятна. С аналогичным уравнением мы уже встречались в главе 2 при описании начальной стадии ядерного взрыва. В частности, для плоского и осесимметричного одномерных движений уравнение (12.92) принимает соответственно вид

$$\partial_t h - \kappa \partial_{xx}^2 h^5 = 0; \quad (12.93)$$

$$\partial_t h - (\kappa/r) \partial_r r \partial_r h^5 = 0, \quad (12.94)$$

где  $x$  — горизонтальная декартова координата,  $r$  — горизонтальный полярный радиус.

Если начальные размеры пятна перемешанной жидкости в плане примерно одинаковы, то естественно ожидать, что пятно

становится осесимметричным уже в конце второй стадии и заведомо на вязкой стадии. На рис. 12.14 представлены результаты выполненного Е. И. Тихомировой численного интегрирования уравнения (12.92) при несимметричном начальном распределении толщины пятна  $h(x, y, 0)$ . (Методы численного интегрирования уравнений типа (12.92) при вырождении — обращении  $h$  в нуль на границе возмущенной области — были развиты в работах А. А. Самарского и его учеников [92, 91].) Как видно, уже при небольшом расширении форма пятна в плане становится не отличимой от круговой, поэтому в этом случае можно коллапс пятна переме-

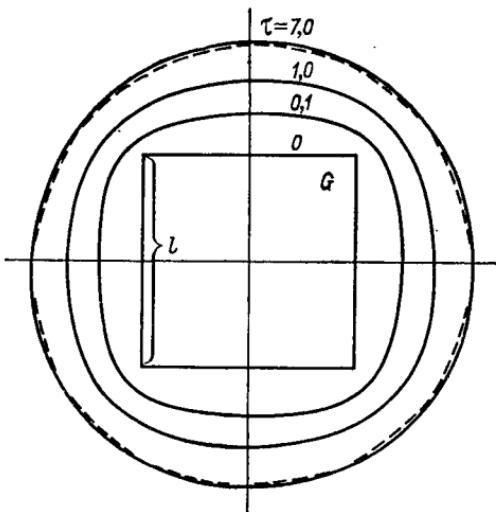


Рис. 12.14. Численное решение уравнения (12.92) при несимметричном начальном условии:  
 $h(x, y, 0) \equiv h_0$  для точек  $x, y$  внутри квадрата  $G$ ;  
 $h(x, y, 0) \equiv 0$  для точек вне  $G$ , выполненное  
Е. И. Тихомировой.  
 $\tau = \pi h_0^4 t / l^2$ .

шанной жидкости считать осесимметричным и применять для его описания уравнение (12.94). Уравнение сохранения объема жидкости в пятне принимает при этом вид

$$2\pi \int_0^\infty h(r, t) r dr = V = \text{const.} \quad (12.95)$$

Нас интересует прежде всего промежуточно-асимптотическая стадия растекания пятна, на которой диаметр пятна в плане значительно превосходит его начальный диаметр. На этой стадии случайные детали начального распределения  $h(r, 0)$  перестают быть существенными. Следовательно, как и в главе 2, для асимптотического описания вязкой стадии коллапса пятна можно представить начальное распределение в виде сосредоточенного мгновенного источника:

$$h(r, t_1) \equiv 0 \text{ при } r \neq 0; \quad 2\pi \int_0^\infty h(r, t_1) r dr = V, \quad (12.96)$$

где  $t_1$  — условный момент начала вязкой стадии.

Поступим здесь вполне аналогично решению задачи о нелинейном мгновенном тепловом источнике в главе 2. Решение  $h$  уравнения (12.94) при начальном условии (12.96) зависит от величин  $t - t_1$ ,  $\chi$ ,  $V$  и  $r$ . Анализ размерности показывает, что решение автомодельно и представляется в виде

$$h = [V/2\pi\chi(t - t_1)]^{1/5} f(\zeta); \quad \zeta = r/[V^4\chi(t - t_1)/16\pi^4]^{-1/10}. \quad (12.97)$$

Подставляя (12.97) в уравнение (12.94), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $f$

$$d^2f^5/d\zeta^2 + (1/\zeta) df^5/d\zeta + (\zeta/10) df/d\zeta + (1/5) f = 0. \quad (12.98)$$

Умножая (12.98) на  $\zeta$ , получаем уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя это уравнение и используя для определе-

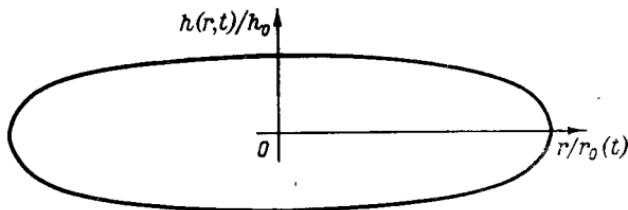


Рис. 12.15. Форма пятна перемешанной жидкости на вязкой стадии близка к диску.

ния констант условия (12.95) и (12.96), находим простое выражение для функции  $f$ :

$$f(\zeta) = \begin{cases} (10^{1/5}/6)^{1/4} (1 - \zeta^2/\zeta_0^2)^{1/4} & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_0, \\ 0 & \text{при } \zeta \geq \zeta_0 = 10^{1/5}/2 \approx 2. \end{cases} \quad (12.99)$$

Таким образом, пятно в каждый момент имеет конечный радиус  $r_0(t)$  и в этом состоит специфика нелинейности, отличающая уравнение (12.92) от линейного уравнения теплопроводности (ср. главу 2). Радиус пятна определяется соотношением

$$r_0(t) = 2 [V^4\chi(t - t_1)/16\pi^4]^{1/10} \simeq 0.55 V^{4/10} \nu^{-1/10} [N^2(t - t_1)]^{1/10}, \quad (12.100)$$

откуда следует, что он растет со временем крайне медленно. Для максимальной толщины пятна получаем выражение

$$h(0, t) = h_0(t) = (10^{1/5}/6)^{1/4} [V/2\pi\chi(t - t_1)]^{1/5} \simeq 1.5 [V\nu/N^2(t - t_1)]^{1/5}, \quad (12.101)$$

так что ее изменение со временем также происходит крайне медленно. Любопытна форма сечения пятна, представленная в автомодельных переменных  $h(r, t)/h_0(t)$ ,  $r/r_0(t)$  на рис. 12.15. Толщина пятна повсюду почти постоянна и быстро уменьшается только вблизи самого края, так что пятно имеет явно выраженную дискообразную форму.

Аналогично, если форма пятна перемешанной жидкости близка к удлиненному цилиндру с горизонтальной осью, то для толщины пятна можно применить уравнение (12.93), где  $x$  — горизонтальная координата, нормальная к образующей цилиндра. Условие сохранения объема пятна перемешанной жидкости принимает в этом случае вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) dx = S = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, 0) dx = \text{const}, \quad (12.102)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения пятна. Начальные условия, отвечающие промежуточно-асимптотическому решению типа мгновенного источника, записываются в форме

$$h(x, t_1) \equiv 0 \text{ при } x \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x, t_1) dx = S, \quad (12.103)$$

а само это решение, которое получается вполне аналогично предыдущему, принимает вид

$$h = [S^2/4\kappa(t - t_1)]^{1/6} f_1(\zeta); \quad \zeta = x [S^4 \kappa(t - t_1)/16]^{-1/6}; \quad (12.104)$$

$$f_1(\zeta) = \begin{cases} A(1 - \zeta^2/\zeta_0^2)^{1/4} & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_0; \\ 0 & \text{при } \zeta \geq \zeta_0; \end{cases} \quad (12.105)$$

$$\zeta_0 = (15)^{1/6} [2\Gamma(5/4)\Gamma(1/2)/\Gamma(7/4)]^{2/3} \cong 3,62; \quad A = (\zeta_0^2/15)^{1/4} \cong 0,97,$$

так что край пятна  $x = \pm x_0(t)$  распространяется по закону

$$x_0(t) = \zeta_0 [S^4 \kappa(t - t_1)/16]^{1/6}, \quad (12.106)$$

а максимальная толщина пятна убывает со временем по закону

$$h(0, t) = h_0(t) = A [S^2/4\kappa(t - t_1)]^{1/6}. \quad (12.107)$$

Промежуточные асимптотики (12.97) и (12.104) приводят к важному выводу: при переходе к вязкой стадии коллапса расширение пятна резко замедляется, так что на не слишком большом промежутке времени пятно может показаться наблюдателю неизменным.

Закон (12.100) расширения пятна перемешанной жидкости, круглого в плане, выглядит весьма просто и была желательной его экспериментальная проверка. Эта работа была выполнена в изящном лабораторном опыте А. Г. Зацепина, К. Н. Федорова, С. И. Воропаева, А. М. Павлова [39]. Эксперимент проводился по следующей схеме (рис. 12.16). В открытый плексиглавозовый бак, заполненный линейно стратифицированной по плотности жидкостью медленно вводилась под уровень жидкости полая цилиндрическая

трубка. Жидкость в торцевой области трубы, отделенной неподвижным поршнем, перемешивалась специальной мешалкой, после чего успокаивалась, и трубка медленно поднималась вверх, освобождая пятно перемешанной жидкости, которое начинало внед-

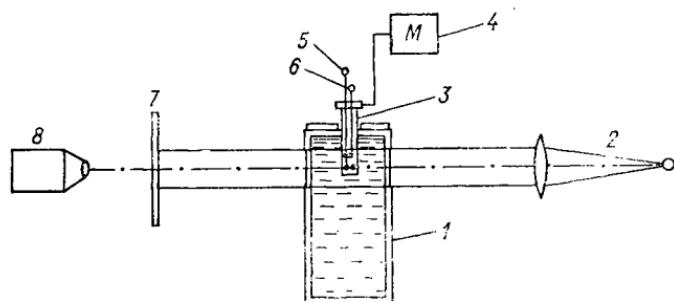


Рис. 12.16. Схема лабораторной установки [39].

1 — бассейн со стратифицированной жидкостью, 2 — теневой прибор, 3 — стеклянная трубка, 4 — электродвигатель постоянного тока, 5 — мешалка, 6 — поршень, 7 — экран, 8 — фото- или киноаппарат.

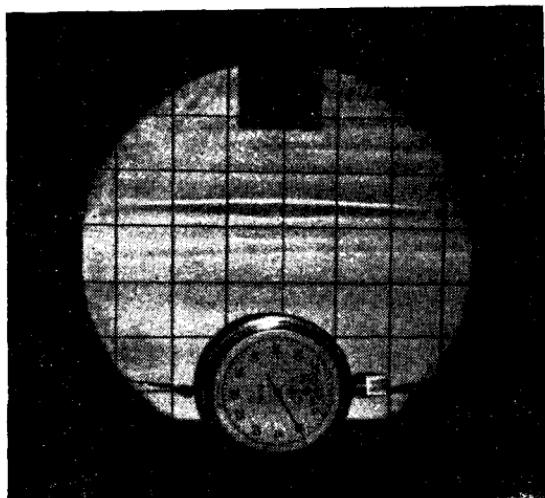


Рис. 12.17. Фотография теневого изображения растекающегося перемешанного пятна [39].

ряться в окружающую стратифицированную жидкость. Визуальные наблюдения, фото- и киносъемка проводились с использованием теневого прибора. Экспериментальное устройство позволяло наблюдать и регистрировать две последние стадии коллапса пятна. Фотографии, подобные представленной на рис. 12.17, продемонстри-

ровали, что действительно, вскоре после начала коллапса наступает стадия, на которой расширение пятна резко замедляется, и пятно на этой стадии имеет форму линзы с притупленными внешними краями, сходную с формой пятна, приведенного на рис. 12.15. Объем пятна, кинематическая вязкость жидкости и диаметр

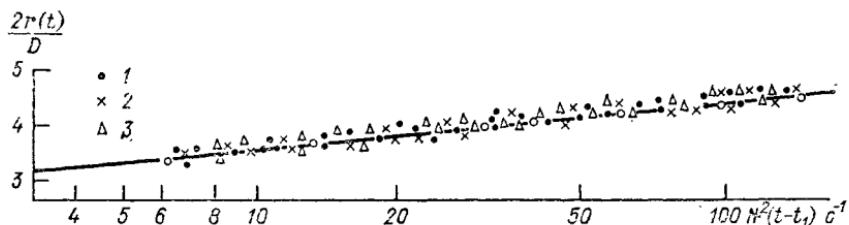


Рис. 12.18. Результаты эксперимента подтверждают закон одной десятой  $N=0,63 \text{ c}^{-1}$  (1);  $1,00 \text{ c}^{-1}$  (2);  $0,58 \text{ c}^{-1}$  (3).

трубки  $D$  во всех опытах были одинаковыми. Поэтому, если формула (12.100) верна, то опытные точки в координатах

$$\lg [2r_0(t)/D], \lg [N^2(t-t_1)] \quad (12.108)$$

должны лежать на единую кривую с наклоном  $1/10$ . Это хорошо подтверждает график, представленный на рис. 12.18, также заимствованный из работы [39]. Величина  $t_1 = -10 \text{ с}$  была определена в этой работе подбором. Таким образом, закон одной десятой для расширения пятна перемешанной жидкости получил в работе [39] экспериментальное подтверждение. При этом оказалось, что длительность заключительной стадии по крайней мере на порядок больше, нежели длительность первых двух стадий; она составила в этих опытах величину порядка  $300N^{-1}$ .

## 12.7. Некоторые явления, связанные с турбулентностью в устойчиво стратифицированной жидкости

В условиях сильно устойчивой стратификации турбулентность подавляется, потому что велик отток турбулентной энергии на работу против сил плавучести. Действительно, уравнение баланса турбулентной энергии в случае стратифицированной жидкости записывается в виде

$$\partial_t b = -\langle u'w' \rangle \partial_z u - \varepsilon_t - \partial_z [\langle b'w' \rangle + \langle p'w' \rangle / \rho] - \langle \rho'w' \rangle g / \rho. \quad (12.109)$$

Новый по сравнению с уравнением для однородной жидкости последний член в правой части, определяющий затрату турбулентной энергии на работу против сил плавучести, велик из-за большой величины ускорения свободного падения  $g$ . Вклад этого члена существен несмотря на то, что пульсации плотности  $\rho'$  малы по сравнению со средней плотностью  $\rho$  и их вклад в остальные слага-

гаемые баланса турбулентной энергии мал и может не учитываться. Поэтому в естественных условиях турбулентность при сильно устойчивой стратификации не может существовать во всем объеме жидкости в течение длительных промежутков времени [70, 73]. В действительности турбулентность сосредотачивается в отдельных блинообразных слоях, однородных по вертикали вследствие турбулентного смешения и разделенных между собой относительно тонкими слоями, в которых происходит резкое изменение температуры, солености, плотности, электропроводности, скорости звука и других термодинамических параметров и иногда — скорости течения. Такая тонкослойная вертикальная структура гидрофизических полей, которая проявляется в виде ступенек на вертикальных профилях температуры, плотности и других термодинамических параметров (см. схематический график на рис. 12.2), называется (в зависимости от вертикального масштаба) *микроструктурой* или *тонкой структурой* гидрофизических полей. Многочисленные эксперименты, проведенные на исследовательских судах методом непрерывного вертикального зондирования, показали, что это явление существует в Мировом океане практически всегда и везде за исключением редких, по крайней мере для низких и умеренных широт, областей, в которых имеет место микроконвекция.

Сглаживания ступеньки профиля распределения по высоте плотности или температуры, мы получаем гладкую кривую, характеризующую крупномасштабную стратификацию (такая же гладкая кривая получается при осреднении по времени). Параметром устойчивости сдвигового течения устойчиво стратифицированной жидкости является число Ричардсона

$$Ri = |d\rho/dz| g/\rho (\partial_z u)^2 = N^2/(\partial_z u)^2. \quad (12.110)$$

Обычно наступление неустойчивости сдвигового течения стратифицированной жидкости связывают, опираясь на результат работы Дж. Майлса [166], с переходом числом Ричардсона значения  $Ri_{cr}=0,25$ . В устойчивых потоках  $Ri > Ri_{cr}$ . Крупномасштабная стратификация с точки зрения этого критерия как правило устойчива,  $Ri > 0,25$ . Однако при учете микроструктуры на графиках  $Ri(z)$  обнаруживаются участки с  $Ri < 0,25$ , т. е. области неустойчивости. По-видимому, именно в некоторых из этих областей имеет место в момент зондирования порождение турбулентности.<sup>1</sup> Это порождение турбулентности связано с внутренними волнами: число Ричардсона, очевидно, минимально вблизи гребней и впадин внутренних волн. Кроме того, возможны такие механизмы разрушения внутренних волн и порождения турбулентности, как обрушивание

<sup>1</sup> Потеря устойчивости стационарного однородного сдвигового течения еще не означает возникновения турбулентности, поэтому следует относиться с некоторой осторожностью к критическому значению  $Ri_{cr}=0,25$ , как к границе возникновения турбулентности. Эксперименты показывают [73], что критическое число Ричардсона, отвечающее возникновению турбулентности, близко к 0,1.

внутренних волн, их резонансное взаимодействие и др. Для пятен перемешанной жидкости, появляющихся после разрушения внутренних волн, характерно быстрое возникновение непрерывного спектра, т. е. развитой турбулентности, спустя уже короткое время после обрушивания [26, 192]. Это и понятно, поскольку *после перемешивания, следующего за разрушением внутренних волн, жидкость в турбулизованной области становится однородной*, и отток турбулентной энергии за счет работы против сил плавучести (последний член уравнения (12.109)) там исчезает. Поэтому в пятне перемешанной жидкости создаются условия для порождения и сравнительно длительного поддержания турбулентности на более высоком уровне, чем в окружающей устойчиво стратифицированной жидкости. Действительно, приток турбулентной энергии за счет работы рейнольдсовых напряжений (первый член правой части уравнения (12.109)) расходуется в пятне перемешанной жидкости только на диссиацию турбулентной энергии в тепло, которая относительно мала: третий член правой части уравнения (12.109), определяющий диффузионный перенос турбулентной энергии, при интегрировании по толщине пятна исчезает и на среднее значение турбулентной энергии влияния не оказывает. Таким образом, благодаря внутренним волнам турбулентность в жидкости с сильно устойчивой стратификацией имеет специфический пятнистый характер. При этом пятна перемешанной жидкости коллапсируют качественно так же, как это описано в предыдущем параграфе, где турбулентность явно не учитывалась. Отличие состоит лишь в том, что турбулентная вязкость жидкости в пятне также меняется со временем. Следует отметить, что влияние этого отличия не должно быть велико. Это видно хотя бы из того, что вязкость жидкости в пятне входит в закон расширения (12.100) в степени  $1/10$ , так что ее изменение на три порядка меняет радиус пятна лишь вдвое. Таким образом, естественно, что пятна турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией также имеют форму круглых дисков — блинов и на заключительной стадии расширяются крайне медленно. Представляется правдоподобной поэтому [13, 107] связь микроструктуры и тонкой структуры океана с блинообразными областями постоянной плотности и температуры. Эти области представляют собой пятна перемешанной жидкости различных масштабов, возникающие вследствие разрушения внутренних волн, проникновения охлажденной жидкости из приповерхностного турбулизированного слоя и т. д. и находящиеся в основном на заключительной, вязкой стадии своей эволюции. При этом наряду с состояниями, когда в пятне еще сохраняется турбулентность, возможны и, по-видимому, достаточно часты состояния, когда турбулентность в пятне уже исчезла, а состояние перемешанности жидкости еще сохранилось.

Сказанное выше может также объяснить [22] явление дискоидных образований в атмосфере, привлекающее в последнее время широкое внимание («летающие тарелки», «неопознанные летающие объекты» и т. д.).

Действительно, в условиях сильно устойчивой стратификации в атмосфере [192] и океане [216] происходит разрушение внутренних волн и образование пятен перемешанной жидкости. Пятна перемешанной жидкости коллапсируют и турбулизуются, согласно механизмам, обсужденным выше, и приобретают дискообразную форму. В этой связи особенно интересна работа С. СетхуРамана [192], который непосредственно наблюдал и регистрировал разрушение внутренних волн, возникновение и длительное существование локализованной турбулентности в условиях сильной температурной инверсии (сильно устойчивой стратификации) и сильного сдвига скорости ветра в атмосфере над Атлантическим океаном вблизи Нью-Йорка (рис. 12.19). Существенно, что, по наблюдениям СетхуРамана, возникающая в результате разрушения внутренних волн четко локализованная турбулентность (рис. 12.19 *в*) не носила характера быстро затухающей вспышки в самый момент разрушения (ср. рис. 12.19 *б*). Напротив, она сравнительно медленно развивалась и поддерживалась длительное время (более часа). Возникновение и длительное существование локализованной турбулентности можно, в согласии с ранее сказанным, объяснить работой рейнольдсовых напряжений на сильном сдвиге скопления волн.

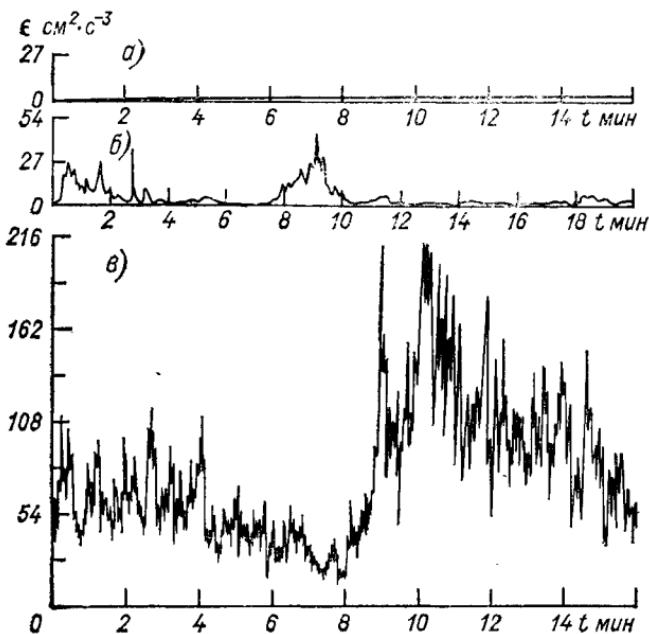


Рис. 12.19. Мера турбулентности — скорость дисsipации энергии  $\varepsilon$  — на разных стадиях разрушения внутренних волн [192].

*а)* внутренних волн нет,  $z=183$  м; *б)* начало обрушения внутренних волн,  $z=40$  м; *в)* после обрушения внутренних волн.

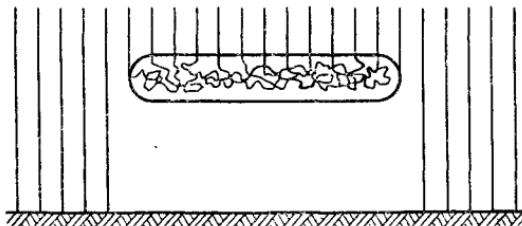
вание локализованной турбулентности в условиях сильной температурной инверсии (сильно устойчивой стратификации) и сильного сдвига скорости ветра в атмосфере над Атлантическим океаном вблизи Нью-Йорка (рис. 12.19). Существенно, что, по наблюдениям СетхуРамана, возникающая в результате разрушения внутренних волн четко локализованная турбулентность (рис. 12.19 *в*) не носила характера быстро затухающей вспышки в самый момент разрушения (ср. рис. 12.19 *б*). Напротив, она сравнительно медленно развивалась и поддерживалась длительное время (более часа). Возникновение и длительное существование локализованной турбулентности можно, в согласии с ранее сказанным, объяснить работой рейнольдсовых напряжений на сильном сдвиге скопления волн.

ности ветра при малой вязкой диссипации и при исчезновении затраты турбулентной энергии на работу против сил плавучести. Действительно, после перемешивания воздух в пятне стал однородным по плотности.

Дискообразные пятна перемешанного турбулизованного воздуха иногда становятся видимыми, хотя и сравнительно редко. Как нам представляется, видимость пятен может объясняться следующим образом.

Пусть по тем или иным причинам в атмосфере появилось некоторое количество взвеси, например, в виде аэрозоля. При определенных условиях эта взвесь выпадает более или менее равномерно по площади (рис. 12.20). Для удержания частиц во взвешенном состоянии необходимо, как было показано в п. 12.3, чтобы отношение скорости установившегося падения частиц к средней квадратичной пульсационной скорости было меньше некоторого

Рис. 12.20. Выпадающая взвесь опускается в стабилизированной жидкости, где турбулентность низка, но задерживается дискообразным пятном.



критического значения. Там, где воздух стратифицирован, турбулентность, в согласии со сказанным выше, низка и частиц во взвешенном состоянии удержать не может. В пятне же турбулентность может оказаться достаточно высокой чтобы удержать частицы во взвешенном состоянии (ср. рис. 12.19). Удержаные взвешенные частицы увеличивают оптическую плотность пятна и оно может стать видимым в окружающем воздухе при внешнем освещении Солнцем или Луной. По мере расплывания пятна его толщина уменьшается и сдвиг скорости, необходимый для поддержания в нем турбулентности, возрастает. Когда имеющийся сдвиг оказывается недостаточным для поддержания турбулентности, пятно сбрасывает частицы и перемешивается с окружающим воздухом.

Для того чтобы пятно стало видимым, достаточно, чтобы его так называемая оптическая толщина  $\tau$  была порядка сотых-десятых долей единицы. Оценивая необходимую для этого концентрацию частиц по формуле  $n = \tau / 2\pi r^2 H$ , где  $H$  — эффективная толщина пятна с учетом скоса луча зрения,  $r$  — радиус частицы, получаем для  $H$  порядка  $10^3$  см и частиц размером 3 мкм (имеющих скорость опускания порядка нескольких см/с)  $n$  порядка  $10 - 10^2$  см $^{-3}$ . Это значение вполне реально для пылевых облаков.

Согласно сказанному, дискоидные образования могут наблюдаться там, где существуют условия для разрушения внутренних волн в атмосфере. Это может быть резкая граница атмосферных слоев, наветренная сторона горной гряды умеренной высоты при наличии температурной инверсии и т. п. Предложенное объяснение находится в согласии с наблюдавшимися, по-видимому, большими ускорениями дискоидных образований. В самом деле, эти ускорения ненормально велики, если считать образования металлическими летающими объектами, но вполне разумны, если принять во внимание, что они лишь немного тяжелее воздуха. Сообщения об участвившихся в последнее время наблюдениях дискоидных образований можно связать с загрязнением атмосферы.

Отметим, что вполне аналогичное объяснение можно дать «облакам мутности» в океане.

## **ПОСЛЕСЛОВИЕ**

---

Методы исследования, основанные на анализе размерностей и подобий, снова стали предметом широкого интереса и принесли неожиданности, связанные главным образом с неполной автомодельностью. Основная цель настоящей книги состояла в обсуждении этого круга вопросов. Подходы, связанные с неполной автомодельностью, оказались особенно плодотворными во многих областях гидрофизики.

Неполная автомодельность открывает новые возможности при анализе данных экспериментов, поэтому сразу же возникла потребность в более точных опытных данных для ряда проблем, считавшихся классическими. Так, неполная автомодельность просматривается в турбулентном потоке с поперечным сдвигом. Мы все еще далеки от желания отказаться от универсального логарифмического профиля скорости в таком потоке при очень больших числах Рейнольдса. Но следует принять во внимание, что точные измерения профилей скорости в контролируемых условиях до удивления малочисленны, и что отсутствуют подобные измерения в трубах при числах Рейнольдса, превышающих  $3,2 \cdot 10^6$ . В то же время имеющиеся результаты измерений показывают, что профили скорости отклоняются от универсального логарифмического закона и хорошо согласуются со степенным. Можно надеяться, что представления о неполной автомодельности послужат определенным стимулом для экспериментаторов, и будущие экспериментальные исследования позволят быстро высказать определенные суждения о наличии или отсутствии в потоке с поперечным сдвигом неполной автомодельности по числу Рейнольдса.

Неполные автомодельности и автомодельные решения второго рода встречаются во многих проблемах. Простая общая схема и примеры, приведенные в книге, показывают те возможности, которые при этом возникают. Может быть, они помогут читателю, увидевшему похожую ситуацию в своих задачах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамский В. Б. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе по холодному газу.— Акустический журнал, 1956, т. 2, вып. 1, с. 3—9.
2. Алдушин А. П., Зельдович Я. Б., Худяев С. И. Распространение пламени по реагирующей газовой смеси.— Препринт ОИХФ АН СССР, Черноголовка, 1979, с. 28.
3. Андрущенко В. А., Баренблatt Г. И., Чудов Л. А. Автомодельное распространение сильных взрывных волн при наличии излучения или выделения энергии на фронте волны.— В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975, с. 35—44.
4. Баренблatt Г. И. О некоторых неуставновившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— Прикладная математика и механика, 1952, т. 16, № 1, с. 67—78.
5. Баренблatt Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке.— Прикладная математика и механика, 1953, т. 17, № 3, с. 261—274.
6. Баренблatt Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя.— Прикладная математика и механика, 1954, т. 18, № 4, с. 409—414.
7. Баренблatt Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины.— Прикладная математика и механика, 1955, т. 19, с. 61—88.
8. Баренблatt Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта.— Прикладная математика и механика, 1956, т. 20, вып. 4, с. 475—486.
9. Баренблatt Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении.— Прикладная математика и механика, 1959, т. 23, вып. 3, с. 434—444, вып. 4, с. 706—721, вып. 5, с. 893—900.
10. Баренблatt Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении.— Журнал прикладной механики и теоретической физики, 1961, № 4, с. 3—56.
11. Баренблatt Г. И. О некоторых общих представлениях математической теории хрупкого разрушения.— Прикладная математика и механика, 1964, т. 28, вып. 4, с. 630—643.
12. Баренблatt Г. И. Сильное взаимодействие гравитационных волн и турбулентности.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1977, т. 13, № 8, с. 845—849.
13. Баренблatt Г. И. Динамика турбулентных пятен и интрузии в устойчиво-стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 2, с. 195—206.
14. Баренблatt Г. И. Об автомодельности распределений температуры и солености в верхнем термоклине.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 11, с. 1160—1166.
15. Баренблatt Г. И., Гаврилов А. А. К теории автомодельного вырождения однородной изотропной турбулентности.— Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1973, т. 65, № 2, с. 806—813.
16. Баренблatt Г. И., Голицын Г. С. Локальная структура развитых пыльных бурь.— Изд-во МГУ, 1973. 44 с.

17. Баренблatt Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.—М.: Недра, 1972. 288 с.
18. Баренблatt Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени.—Прикладная математика и механика, 1957, т. 21, № 6, с. 856—859.
19. Баренблatt Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики в математической физике.—Успехи математических наук, 1971, т. 26, № 2.
20. Баренблatt Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации.—Изв. АН СССР. Отделение техн. наук, 1955, № 2, с. 14—26.
21. Баренблatt Г. И., Монин А. С. Законы подобия турбулентных сдвиговых течений стратифицированных жидкостей.—В кн.: Доклады на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Киев, Наукова думка, 1976, с. 41.
22. Баренблatt Г. И., Монин А. С. О возможном механизме явления дискоидных образований в атмосфере.—Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 4, с. 834—837.
23. Баренблatt Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках.—Изв. АН СССР. Отделение технических наук, 1955, № 11, с. 73—86.
24. Баренблatt Г. И., Христианович С. А. О модуле сцепления в теории трещин.—Инженерный журнал. Механика твердого тела, 1968, № 2, с. 70—75.
25. Беляев В. С., Гезенцвей А. Н. О сдвиговой неустойчивости внутренних волн в океане.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 6, с. 648—655.
26. Беляев В. С., Лозовацкий И. Д., Озмидов Р. В. О связи параметров мелкомасштабной турбулентности с локальными условиями стратификации в океане.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 7, с. 718—725.
27. Бенилов А. Ю. О генерации турбулентности в океане поверхностными волнами.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1973, т. 9, № 3, с. 293—303.
28. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики.—Успехи математических наук, 1963, т. 18, вып. 2, с. 3—24.
29. Бункин Ф. В., Конов В. И., Прохоров А. М., Федоров В. Б. Лазерная искра в режиме «медленного горения».—Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, вып. 11, с. 609—612.
30. Велихов Е. П., Дыхно А. М. Волна неравновесной ионизации в газе.—В кн.: Труды VII Международного симпозиума по ионизационным явлениям в газах. Белград, 1965, с. 47.
31. Власов И. О., Державина А. И., Рыжов О. С. О взрыве на границе раздела двух сред.—Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974, т. 14, № 6, с. 1544—1552.
32. Воропаев С. И. Развитие перемешиваемого слоя в стратифицированной жидкости. Лабораторный эксперимент.—В кн.: Мезомасштабная изменчивость поля температуры в океане. Отпеч. на множит. аппарате ИОАН СССР. М., 1977, с. 140—152.
33. Воропаев С. И., Гаврилин Б. Л., Задеин А. Г., Федоров К. Н. Лабораторное исследование углубления перемешиваемого слоя в однородной жидкости.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 2, с. 197—200.
34. Голицын Г. С. Введение в динамику планетных атмосфер.—Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 103 с.
35. Гухман А. А. Физические основы теплопередачи. Т. I. Теория подобия и ее приложения.—Л., М.: Госэнергоиздат, 1934. 315 с.
36. Ефимов С. С., Царенко В. М. К вопросу об автомодельности распределения температуры в верхнем термоклине.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 6, с. 620—627.
37. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта.—Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук, 1955, № 5, с. 3—41.

38. Жуков А. И., Каждан Я. М. О движении газа под действием кратковременного импульса.—Акустический журнал, 1956, т. 2, вып. 4, с. 352—357.
39. Зацепин А. Г., Федоров К. Н., Воропаев С. И., Павлов А. М. Экспериментальное исследование растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 2, с. 234—237.
40. Зельдович Я. Б. О распределении давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности, при сферическом распространении детонационной волны.—Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1942, т. 12, № 9, с. 389—406.
41. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени.—Журнал физической химии, 1948, т. 22, № 1, с. 27—48.
42. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара).—Акустический журнал, 1956, т. 2, вып. 1, с. 28—38.
43. Зельдович Я. Б. Распространение пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре. Отпеч. на множит. аппарате ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1978, с. 10.
44. Зельдович Я. Б., Баренблatt Г. И. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа.—Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 4, с. 671—674.
45. Зельдович Я. Б., Баренблatt Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.—М.: Наука, 1980. 478 с.
46. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.—В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе.—М.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 61—71.
47. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. Теория детонации.—М.: Гостехиздат, 1955, 268 с.
48. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд. 2-е.—М.: Физматгиз, 1966.
49. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория равномерного распространения пламени.—Журнал физической химии, 1938, т. 12, № 1, с. 100—105.
50. Канель Я. И. О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения.—Математический сборник, 1962, т. 59 (101), с. 245—288.
51. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Физматгиз, 1973. 175 с.
52. Керчман В. И. К автомодельным решениям второго рода в теории нестационарной фильтрации.—Прикладная математика и механика, 1971, т. 35, № 1, с. 189—192.
53. Китайгородский С. А., Миропольский Ю. З. К теории деятельности слоя открытого океана.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, № 2, с. 177—188.
54. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.—Докл. АН СССР, 1941, т. 30, с. 299—303.
55. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.—Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, т. 6, № 1, 2, с. 56—58.
56. Колмогоров А. Н. О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов.—Вестник МГУ, 1954, № 3, с. 41—45.
57. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме.—Бюлл. МГУ, секция А, 1937, т. 1, № 6, с. 1—26.
58. Коротаев Г. К., Пантелеев Н. А. Экспериментальные исследования гидродинамической неустойчивости в океане.—Океанология, 1977, т. 17, вып. 6, с. 914—953.
59. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2.—М., Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.

60. Кулаковский А. Г., Любимов Г. А. О магнитогидродинамических волнах, ионизирующих газ.—Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 1, с. 52—55.
61. Кулаковский А. Г., Любимов Г. А. Простейшие задачи, содержащие ионизирующую газ ударную волну в магнитном поле.—Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 3, с. 525—528.
62. Кулаковский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.—М.: Гостехиздат, 1962. 246 с.
63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.—М., Л.: Гостехиздат, 1954. 567 с.
64. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.—М.: Наука, 1965, с. 204.
65. Лойцянский Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока.—Труды ЦАГИ, 1939, вып. 440, с. 3—23.
66. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории.—М.: Физматгиз, 1975. 335 с.
67. Миллионщикова М. Д. Вырождение однородной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости.—Докл. АН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 236—240.
68. Миропольский Ю. З., Монин А. С. Внутренние волны.—В кн.: Океанология. Физика океана, т. 2. М.: Наука, 1978, с 182—228.
69. Миропольский Ю. З., Филюшкин Б. Н., Чернышков П. П. О параметрическом описании профилей температуры в деятельном слое океана.—Океанология, 1970, т. 10, № 6, с. 1101—1107.
70. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость мирового океана.—Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 262 с.
71. Монин А. С., Обухов А. М. Безразмерные характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы.—Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 2, с. 223—226.
72. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы.—Труды Геофизического института АН СССР, 1954, № 24, (151), с. 163—187.
73. Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность.—Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
74. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1.—М.: Физматгиз, 1965. 639 с.
75. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 2.—М.: Физматгиз, 1967. 720 с.
76. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е.—М.: Наука, 1966. 707 с.
77. Нигматулин Р. И. Плоский сильный взрыв на границе двух идеальных калорически совершенных газов.—Вестник МГУ. Сер. матем. и механ., 1965, № 1, с. 83—87.
78. Новожилов В. В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.—Л.: Судостроение, 1977. 165 с.
79. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока.—Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 22—24.
80. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений.—Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1962. 238 с.
81. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений.—Успехи математических наук, 1957, т. 12, № 3 (75), с. 3—73.
82. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.—Киев, Наукова думка, 1968, с. 246.
83. Пархоменко В. П., Попов С. П., Рыжов О. С. О влиянии начальной скорости частиц на неуставновившиеся осесимметричные движения газа.—Ученые записки ЦАГИ, 1977, т. VIII, № 3, с. 32—38.
84. Пархоменко В. П., Попов С. П., Рыжов О. С. О влиянии начальной скорости частиц на неуставновившиеся сферически-симметричные движения газа.—Журнал вычислительной математики и математической физики, 1977, т. 15, № 5, с. 1325—1329.
85. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. 3-е.—М.: Физматгиз, 1961. 400 с.

86. Попов В. А., Чашечкин Ю. Д. Структура перемешанного слоя в стратифицированной жидкости.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 3, стр. 284—293.
87. Райзэр Ю. П. Высокочастотный разряд высокого давления в потоке газа как процесс медленного горения.—Журнал прикладной механики и теоретической физики, 1968, № 3, с. 3—10.
88. Райзэр Ю. П. Физические основы теории трещин хрупкого разрушения.—Успехи физических наук, 1970, т. 100, № 2, с. 329—347.
89. Райзэр Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов.—М.: Наука, 1974, 308 с.
90. Решетова О. В., Чаликов Д. В. Об универсальной структуре деятельного слоя океана.—Океанология, 1977, т. 17, № 5, с. 774—777.
91. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.—М.: Наука, 1977, с. 653.
92. Самарский А. А., Соболь И. М. Примеры численного расчета температурных волн.—Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, т. 3, № 4, с. 702.
93. Сапунков Я. Г. Сходящиеся детонационные волны в режиме Чепмена—Жуге в среде с переменной и постоянной начальной плотностями.—Прикладная математика и механика, 1967, т. 31, № 5, с. 932—935.
94. Седов Л. И. Вырождение изотропных турбулентных движений несжимаемой жидкости.—Докл. АН СССР, 1944, т. 42, № 3, с. 121—124.
95. Седов Л. И. О некоторых неуставновившихся движениях сжимаемой жидкости.—Прикладная математика и механика, 1945, т. 9, № 4, с. 293—311.
96. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн.—Прикладная математика и механика, 1946, т. 10, № 2, с. 241—250.
97. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 7-е.—М.: Наука, 1972. 440 с.
98. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1.—М.: Наука, 1973. 563 с.
99. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики.—Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, т. 18, вып. 1, с. 3—50.
100. Станюкович К. П. Неуставновившиеся движения сплошной среды.—М.: Гостехиздат, 1955. 804 с.
101. Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура вод океана.—Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 184 с.
102. Харьков Б. В. О структуре верхнего слоя океана.—Океанология, 1977, т. 17, № 1, с. 37—43.
103. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме.—М.: Гостехиздат, 1959. 467 с.
104. Яглом А. М. Данные о характеристиках турбулентности в приземном слое атмосферы.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 6, с. 566—586.
105. Яглом А. М., Кадер Б. А. Применение соображений размерности и подобия к расчету турбулентных пограничных слоев с продольным градиентом давления.—В кн.: Доклады Всесоюзного научного симпозиума «Теория пограничного слоя».—Л.: Изд-во ЛПИ, 1975, с. 21—22.
106. Abramovitz M., Stegun I. A. (ed.). Handbook of mathematical functions.—N. Y., Dover Publ., 1970, 1045 p. (Абрамович М. и Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.—М.: Наука, 1979).
107. Vagennblatt G. I., Monin A. S. The origin of the Oceanic Microstructure.—In: Proc. XII Symposium Naval Hydrodynamics.—Washington, Nat. Ac. Sci., 1979, p. 574—581.
108. Vagennblatt G. I. and Monin A. S. Similarity laws for turbulent stratified shear flows.—Arch. Rat. Mech. Anal., 1979, vol. 70, No 4, p. 307—317.
109. Vagennblatt G. I., Zel'dovich Ya. B. Self-similar solutions as intermediate asymptotics.—Ann. Rev. Fluid Mech., 1972, vol. 4, p. 285—312.
110. Bechert K. Differentialgleichungen der Wellenausbreitung in Gasen.—Annalen der Physik, 1941, Bd 39, H 5, S. 357—372.
111. Венбов J. J. Cone crack in fused silica.—Proc. Phys. Soc., 1960, B 75, p. 697—699.

112. Birkhoff G. Hydrodynamics, a study in logic, fact and similitude. 2nd ed.—Princeton University Press, 1960 (Биркгоф Г. Гидродинамика, методы, факты, подобие.—М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 244 с.).
113. Bluman G. W., Cole J. D. Similarity methods for differential equations.—New York, Heidelberg, Berlin, Springer Verlag, 1974, 332 p.
114. Böse E., Böse M. Ueber die Turbulenzreibung Verschiedener Flüssigkeiten.—Physikalische Zeitschrift, 1911, Bd 12, No 4, S. 126—135.
115. Böse E., Rauert D. Experimentalbeitrag zur Kenntnis der Turbulenten Flüssigkeitsreibung.—Physikalische Zeitschrift 1909, Bd 10, No 12, S. 406—409.
116. Bridgeman P. W. Dimensional analysis. Yale University Press, New Haven, 1931 (Бриджмен П. В., Анализ размерностей.—ОНТИ, 1934, 120 с.).
117. Buidansky B., Carrier G. F. The pointless wedge.—SIAM J. Appl. Math., 1973, vol. 25, No 3, p. 378—387.
118. Carothers S. D. Plane strain in a wedge.—Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1912, vol. 23, No 2, p. 292—306.
119. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids. 2nd ed.—Oxford, Clarendon, 1960. 510 p.
120. Cole J. D. Perturbation methods in applied mathematics.—Toronto, London, Blaisdell, 1968, (Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.—М.: Мир, 1972, 274 с.).
121. Coles D. E., Hirst E. A. (ed.) Proceedings of Computation of Turbulent Boundary Layers.—AFOSR—IFP—Stanford Conference, Stanford University Press, 1969, vol. 11, 519 p.
122. Collins R. E. Flow of fluids through porous materials.—N. Y., Reinhold, 1961, (Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы.—М.: Мир, 1964. 350 с.).
123. Corino E. R., Brodkey R. S. A visual investigation of the wall region in turbulent flow.—J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, P. 1, p. 1—30.
124. Daniell P. J. The theory of flame motion.—Proc. Roy. Soc., 1930, vol. A 126, No A802, p. 393—402.
125. Dryden H. L. A review of the statistical theory of turbulence.—Quart. Appl. Math., 1943, vol. 1, No 1, p. 7—42.
126. Einstein H. A., Ning Chen. Effects of heavy sediment concentration near the bed on the velocity and sediment distribution.—University of California MRD Ser., Report No 8, 1955, 77 p.
127. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes.—Annals of Eugenics, 1937, vol. 7, p. 355—369.
128. Gad-el-Hak M., Corrsin S. Measurements of the nearly isotropic turbulence behind a uniform jet grid.—J. Fluid Mech., 1974, vol. 62, P. 1, p. 115—143.
129. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. A method for solving the Korteweg—de-Vries equation.—Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 19, № 19, p. 1095—1097.
130. Goldstein S. A. A note on the boundary layer equations.—Proc. Cambr. Phil. Soc., 1939, vol. 35, P. 2, p. 338—340.
131. Goldstein R. V., Vainshelbaum V. M. Material scale length as a measure of fracture toughness in fracture mechanics of plastic materials.—Internat. J. Fracture, 1978, vol. 14, No 2, p. 185—201.
132. Gossard E. E., Hooke W. H. Waves in the Atmosphere.—New York, Elsevier, 1975. 456 p. (Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере.—М.: Мир, 1978. 532 с.).
133. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids.—Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1920, vol. 221, p. 163—198.
134. Gunderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse.—Luftfahrtforschung, 1942, Bd. 19, Lfg. 9, S. 302—312.
135. Häfele W. Zur analytischen Behandlung ebener, starker, instationärer Stoßwelle.—Zs. für Naturforschung, 1955, Bd 10a, H. 9/10, S. 693—697.
136. Hain K., Höerner S. V. Instationäre starke Stoßfronten.—Zs. für Naturforschung, 1954, Bd 9a, H. 12, S. 993—1004.

137. Hanjalic K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow.—*J. Fluid Mech.* 1972, vol. 52, P. 4, p. 609—638.
138. Hinze J. O. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory.—New York, Toronto, London, McGraw-Hill. 1959. (Хинце И. О. Турбулентность.—М.: Физматгиз, 1963, 680 с.).
139. Hinze J. O. Turbulent pipe-flow.—In: *Mécanique de la turbulence*. Ed. du Centre Nat. Rech. Sci.—Paris, 1962, p. 63—76.
140. Inglis C. E. Some special cases of two-dimensional stress and strain.—*Trans. Inst. Naval. Archit.*, 1922, vol. 64, p. 253—258.
141. Irwin G. R. Fracture dynamics. In: *Fracturing of Metals*.—Cleveland, Ohio, ASM, 1949, p. 147—166.
142. Irwin G. R. Fracture. In: *Handbuch der Physik*, Bd VI. Springer, 1958, Berlin, p. 551—590.
143. Irwin G. R. Fracture mode transition for a crack traversing a plate.—*Trans. ASME*; ser. D, 1960, vol. 82, p. 417—425.
144. Irwin G. R., Kies J. A., Smith H. L. Fracture strengths relative to onset and arrest of crack propagation.—*Proc. Am. Soc. Test. Mater.*, 1959, 58, p. 640—657.
145. Jeffrey A., Kakutani T. Weak non-linear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg-de-Vries equation.—*SIAM Rev.*, 1972, vol. 14, No 4, p. 582—643.
146. Kao T. W. Principal stage of wake collapse in a stratified fluid: two-dimensional theory.—*Phys. Fluids*, 1976, vol. 19, No 8, p. 1071—1074.
147. Kármán Th., von. Ueber die Turbulenzreibung verschiedener Flüssigkeiten.—*Physikalische Zeitschrift*, 1911, Bd 12, No 8, S. 283—284.
148. Kármán Th., von. *Aerodynamics*.—Ithaca, New York, Cornell University Press, 1957, 203 p.
149. Kármán Th., von, Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence.—*Proc. Roy. Soc.*, 1938, vol. A 164, No 917, p. 192—215.
150. Keller L. V., Friedman A. A. Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit.—*Proc. I Intern. Congress Appl. Mech.*, Delft, 1924, S. 395—405.
151. Kim H. T., Kline S. J., Reynolds W. C. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer.—*J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 50, P. 1, p. 133—160.
152. Kistler A. L., Vrebalovich T. Grid turbulence at large Reynolds number.—*J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 26, P. 1, p. 37—47.
153. Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W. The structure of turbulent boundary layers.—*J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 30, P. 4, p. 741—774.
154. Koch H., von. Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire.—*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1904, vol. 1, p. 681—704.
155. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number.—*J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 13, P. 1, p. 82—85.
156. Kovasznay L. S. G., Kilens V., Blackwelder R. F. Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer.—*J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 41, P. 2, p. 283—325.
157. Lagerström P. A., Casten R. J. Some basic concepts underlying singular perturbation techniques.—*SIAM Rev.*, 1972, vol. 14, No 1, p. 63—120.
158. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow.—*Rep. NACA*, 1954, No 1174.
159. Lax P. D. Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves.—*Communications on Pure and Appl. Math.*, 1968, vol. 21, No 5, p. 467—490.
160. Liebowitz H. (ed.). *Fracture. An advanced treatise*.—Academic Press, New York, London. 1968, vol. I, p. 579, vol. II, p. 759. (Либовиц Г. (ред.). *Разрушение*. т. I, М.: Мир, 1973, с. 616, т. II, М.: Мир, 1975, с. 763.)

161. Linden P. F. The deepening of a mixed layer in a stratified fluid.—*J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 71, p. 385—405.
162. Ling S. C., Huang T. T. Decay of weak turbulence.—*Phys. Fluids*, 1970, vol. 13, No 12, p. 2912—2920.
163. Ling S. C., Wan C. A. Decay of isotropic turbulence, generated by a mechanically agitated grid.—*Phys. Fluids*, 1972, vol. 15, No 8, p. 1363—1369.
164. Mandelbrot B. B. *Fractals. Form, chance, and dimension.*—San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1977, 365 p.
165. Meyer F. Zur Darstellung starker Stossfronten durch Homologie—Lösungen.—*Zs. für Naturforschung*, 1955, Bd 10a, H. 9/10, S. 693—697.
166. Miles J. W. On the stability of heterogeneous shear flow.—*J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 10, P. 4, p. 496—508.; 1963, vol. 16, P. 2, p. 209—227.
167. Moffatt H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner.—*J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 18, P. 1, p. 1—18.
168. Moffatt H. K., Duffey B. R. Local similarity solutions and their limitations.—*J. Fluid Mech.*, 1980, vol. 96, P. 2, p. 299—313.
169. Munk W. Abyssal recipes.—*Deep-sea research.*, 1966, vol. 13, p. 707—730.
170. Murray J. D. *Lectures on non-linear differential equation models in biology.* Oxford, Clarendon Press, 1977, 370 p.
171. Newman B. G. Some contributions to the study of the turbulent boundary layer near separation. Austr.—Dept. Supply Rep. ACA-53, 1951.
172. Nikuradse J. Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren. VDI Forschungsheft, 1932, No 356 (Никирадзе И. Закономерности турбулентного движения жидкостей в гладких трубах.—В кн.: Проблемы турбулентности. М., Л.: ОНТИ, 1936, с. 75—150).
173. Oboukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbulence.—*J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 13, P. 1, p. 77—81.
174. Offen G. R., Kline S. J. A proposed model of the bursting process in turbulent boundary layers.—*J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 70, P. 2, p. 209—228.
175. Oppenheim A. K., Kuhl A. C., Kamel M. M. On self-similar blast waves headed by the Chapman—Jouget detonation.—*J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 55, P. 2, p. 257—270.
176. Oppenheim A. K., Lundström E. A., Kuhl A. C., Kamel M. M. A systematic exposition of the conservation equations for blast waves.—*J. Appl. Mech.*, 1971, vol. 38, No 4, p. 783—794.
177. Oppenheim A. K., Lundström E. A., Kuhl A. C., Kamel M. M. A parametric study of self-similar blast waves.—*J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 52, P. 4, p. 657—682.
178. Orowan E. Fracture and Strength of Solids.—Rep. Progr. in Phys. Soc. London, 1949, v. 12, p. 185—232.
179. Perry A. S., Schofield W. H. Mean velocity and shear stress distribution in turbulent boundary layers.—*Phys. Fluid*, 1973, vol. 16, No 12, p. 2068—2074.
180. Phillips O. M. The generation of clear-air turbulence by the degradation of internal waves.—В кн.: Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. М.: Наука, 1967, с. 130—138.
181. Phillips O. M. Energy loss mechanisms from low-mode waves. Report on the Soviet—American Conference on Internal Waves, Novosibirsk, Dec. 1976.
182. Phillips O. M. The dynamics of the upper ocean. Second edition.—Cambridge University Press, 1977, p. 336.
183. Prandtl L. Meteorologische Anwendungen der Strömungslehre.—Beiträge Phys. für Atmosph., 1932, Bd 19, No 3, S. 188—202.
184. Rao K. N., Narasimha R., Badri Narayanan M. A. The bursting phenomenon in a turbulent boundary layer.—*J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 48, p. 339—352.
185. Reynolds O. On the dynamical theory of the incompressible viscous fluids and the determination of the criterion.—*Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1895, vol. 186, P. 1, p. 123—161.

186. Richardson L. F. Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press, 1922.
187. Richardson L. F. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels.—General Systems Yearbook, 1961, vol. 6, p. 139—187.
188. Roesler F. C. Brittle fracture near equilibrium.—Proc. Phys. Soc., 1956, B 69, p. 981—992.
189. Rosen J. B. Theory of laminar flame stability. I, II.—J. Chem. Phys., 1954, vol. 22, No 4, p. 733—748.
190. Schiller L. Strömung in Rohren.—In: Handbuch der Experimentalphysik, Bd 4, 4 Teil. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft 1932 (Шиллер Л.: Движение жидкостей в трубах.—М., Л.: ОНТИ, 1936, 230 с.).
191. Schlichting H. Grenzschichttheorie. 5 Auflage, Karlsruhe, G. Braun. 1965 (Шлихтинг Г.: Теория пограничного слоя.—М.: Физматгиз, 1974. 711 с.).
192. Sethuraman S. A case of persistent breaking of internal gravity waves in the atmospheric surface layer over the ocean.—Boundary-layer meteorology, 1980, vol. 19, No 1, p. 67—80.
193. Sneddon I. N. Fourier Transforms.—N. Y., Mc Graw-Hill Book Co., 1951 (Сneddon И.: Преобразование Фурье.—М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 667 с.).
194. Sternberg E., Koiter W. T. The wedge under a concentrated couple: a paradox in the two-dimensional theory of elasticity.—J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No 4, p. 575—581.
195. Stewart R. W. Triple velocity correlations in isotropic turbulence.—Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, vol. 47, P. 1, p. 146—157.
196. Stommel H. The abyssal circulation.—Deep-sea research, 1958, vol. 5, p. 80—82.
197. Stratford B. S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer.—J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, P. 1, p. 1—16.
198. Taffanel M. Sur la combustion des mélanges gazeux et des vitesses de réaction.—Comptes Rendus, 1913, vol. 157, No 17, p. 714—717.
199. Taffanel M. Sur la combustion des mélanges gazeux et des vitesses de réaction.—Comptes Rendus, 1914, vol. 158, No 1, p. 42—45.
200. Taylor G. I. Statistical theory of turbulence, I—IV.—Proc. Roy. Soc., 1935, vol. A151, No A 874, p. 421—478.
201. Taylor G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion.—Proc. Roy. Soc., 1950, vol. A 201, No A 1065, p. 159—186.
202. Tennekes H. Outline of second-order theory of turbulent pipe flow.—AIAA J., 1968, vol. 6, No 9, p. 1735—1740.
203. Tennekes H. The logarithmic wind profile.—J. Atm. Sci., 1973, vol. 30, No 2, p. 234—238.
204. Thompson S. M., Turner J. S. Mixing across an interface due to turbulence generated by an oscillating grid.—J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, P. 2, p. 349—368.
205. Townsend A. A. The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press, 1956 (Таунсенд А. А.: Структура турбулентного потока с перечным сдвигом.—М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 399 с.).
206. Townsend A. A. The development of turbulent boundary layers with negligible wall stress.—J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, P. 1, p. 143—155.
207. Turner J. S. The influence of molecular diffusivity on turbulent entrainment across a density interface.—J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, P. 4, p. 639—656.
208. Turner J. S. Buoyancy effects in fluids.—Cambridge, Cambridge University Press, 1973. 367 p. (Тернер Дж.: Эффекты плавучести в жидкостях.—М.: Мир, 1977. 431 с.).
209. Turner J. The temperature profile below the surface mixed layer.—Ocean modeling, 1978, No 11, p. 6—8.
210. Van den Boogaart A. Crazing and characterisation of brittle fracture in polymers.—In: Proc. Conf. Phys. Basis of Yield and Fracture. Oxford, 1966.
211. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics.—Stanford, California, Parabolic press, 1975, p. 271.

212. Vanoni V. Transportation of suspended sediments by water. *Transactions Amer. Soc. Civil. Eng.*, 1946, vol. 111, p. 67—133.
213. Weizsäcker C. F., von. Genäherte Darstellung starker instationärer Stosswellen durch Homologie—Lösungen.—*Zs. für Naturforschung*, 1954, Bd 9a, H. 4, S. 269—275.
214. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.—*J. Appl. Mech.*, 1952, vol. 19, No 4, p. 526—528.
215. Wolanski E. J., Brush L. M. Turbulent entrainment across stable density step structure.—*Tellus*, 1975, vol. 27, No 3.
216. Woods J. D. Wave-induced shear instability in the summer thermocline.—*J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, P. 4, p. 792—800.
217. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in a density stratified medium.—*J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 35, P. 3, p. 531—544.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомодельность 6, 49  
определение 11  
по параметру, неполная 19, 91—92  
по параметру, полная 19, 90  
связь с группами преобразований 116—118  
Автомодельные решения 49—53  
второго рода 9, 17—18, 21, 59—66, 72—78, 81—82, 153—154, 218—219  
классификация 6, 19—20, 88, 93—94  
первого рода 9, 42—44, 47—49  
пределельные 121—123  
применение для оценки интегральных характеристик неавтомодельных решений 156—159  
промежуточно-асимптотический характер- 7, 16, 49—53, 57—59, 69—71, 79—81, 150—155  
устойчивость 135—139  
Анализ размерностей 12—13, 28—30  
атмосфер планет 37—39  
атмосферного приземного слоя 198—199  
вспышек турбулентности в пристеночном слое 191—193  
вырождения изотропной однородной турбулентности 172—173  
движения газа при коротком ударе 79  
использование различных единиц измерения 120, 124  
линейного распространения тепла от источника 13—15, 44  
модифицированной задачи распространения тепла от источника 17, 56—57  
недостаточность для построения автомодельных решений 19—20, 94  
нелинейного распространения тепла от источника 42  
обтекания клина жидкостью 21—22  
пограничного слоя на плоской пластине 119—120  
применение для доказательства теоремы Пифагора 32—33

применение для построения точных решений 13—15, 42, 47, 229—231  
расплывания пятен перемешанной жидкости в стратифицированной среде 229—231  
распространения сильных взрывных волн 32, 47, 68, 72—74  
распространения сильных тепловых волн 42  
распространения трещин 161—165  
связь с группами преобразований 116—118  
упругого равновесия клина 149—153  
численных расчетов 60, 72  
экспериментальных данных 30—31, 173, 212, 221  
Асимптотика промежуточная 51, 59—61, 69—71, 79—81, 85—88, 112—116  
связь с автомодельными решениями 51  
Атмосфера  
вспышки турбулентности 236  
дискоидные образования 236—237  
планет 37—39  
приземный слой, законы подобия 196—200  
пылевые бури 205  
разрушение внутренних волн 236

Бегущие волны 100  
Бюргерса 102—104  
классификация 102  
применение для описания движения гена 104—105  
применение для описания океанского термоклина 205—209  
применение для описания пламени 105—112  
связь с автомодельными решениями 9, 22, 101  
устойчивость 131—134

Взрыв атомный  
газодинамическая стадия 45—49  
оценка энергии 32

распространение взрывных волн, законы подобия 31—32, 45—49 тепловая стадия 40—43  
Волны внутренние взаимодействие с турбулентностью 209, 216, 222 разрушение в атмосфере 236  
Вращение жидкости в сосуде 123—125 автомодельные решения 124  
Вспышки турбулентности в атмосфере 236 в вязком слое 191—193

**Группы преобразований**  
применение для построения автомодельных решений 118—125  
применение при исследовании задач на собственные значения 220  
применение при исследовании режима предельного насыщения взвесенесущего потока 203  
связь с анализом размерности 117—118

**Законы подобия**  
вспышек турбулентности 191—193 изотропной однородной турбулентности 169, 173 ламинарного пограничного слоя 121 локально-изотропной турбулентности 178—179 приземного слоя атмосферы Монина—Обухова 196—200 расплывания пятен перемешанной жидкости 225—226, 230—233 расплывания турбулентного слоя 219 сильных взрывных волн 31—32, 47, 51, 80, 85, 96, 99 турбулентного потока с поперечным сдвигом 181—183 с продольным градиентом давления 187 упругого равновесия клина 149, 154 крупного и квазикрупного разрушения 159—165

**Кармана—Хауэрза, уравнение** 168  
**Клин**

обтекание жидкостью 20—22 упругое равновесие 147—149  
Колмогорова—Обухова законы подобия локальной структуры турбулентности 177—179  
Колмогорова гипотезы автомодельности для потока с поперечным сдвигом 185

Колмогорова число 201  
Кортевега—де-Фриза уравнение 127 автомодельная интерпретация солитонов 130

**Моделирование** 34 взаимодействие турбулентности с внутренними волнами 209 движения тела в бесграничной жидкости 35 движение корабля 36—37 деятельного слоя океана 212 изотропной однородной турбулентности 172—177 планетных атмосфер 37—39 правило пересчета результатов на природу 34  
Монина—Обухова законы подобия приземного слоя атмосферы 198

**Океан**  
верхний деятельный слой 195 микроструктура 195, 234—235 термоклин верхний 195, 205—209

**П-теорема** 29  
Парадокс Стернберга—Койтера 149—150  
Пифагора теорема 32—33  
Пламя, распространение 104—116  
Подобие 33—38  
движения жидкости в трубах 35—36  
движения тел в бесграничной жидкости 35—36  
движения тел на поверхности тяжелой жидкости 37  
определение подобных явлений 34  
параметры 34  
планетных атмосфер 37—39  
правило пересчета результатов моделирования на природу 34  
условия 34

Пограничный слой на плоской пластинке 118—121  
Поток с поперечным сдвигом, турбулентный 180  
вязкий слой 191  
законы подобия 181—183  
пристеночная область 184  
полуэмпирическая теория 184—186 со взвешенными частицами 200—205  
стратифицированной жидкости 196—200  
Пятна перемешанной жидкости в стратифицированной среде, расплывание 223—233

**Размерность**  
анализ см. Анализ размерностей  
классы систем единиц измерения  
24  
независимость 27  
определение 25  
системы единиц измерения 24  
формула размерности 26—27  
**Разрушение**, законы подобия 159—165

**Солитоны** 127—128  
автомодельная интерпретация 130  
**Спектр**  
показателей степени автомодельных  
переменных 125—129  
скоростей распространения бегу-  
щих волн 105, 111, 125—129

**Турбулентность** 165  
взаимодействие с гравитационными  
волнами 209, 216  
возбуждение колеблющейся решет-  
кой 210—215, 221—223  
изотропная, однородная 167—168  
законы подобия 168—177  
экспериментальные исследования  
171—177  
локально-изотропная 177  
законы подобия 178—179  
потока с поперечным сдвигом, см.  
Поток с поперечным сдвигом, тур-  
булентный

расплывание турбулентного слоя  
218  
статистическое описание 166  
в стратифицированной жидкости  
196—205, 223

**Уравнения**  
Бюргерса 102  
движения газа 45, 68, 79  
Кармана—Хауэрза 168  
Навье—Стокса 118  
пограничного слоя 118  
теплопроводности 41  
упругого равновесия 148  
фильтрации 54—55  
**Устойчивость**  
автомодельных решений 135—139  
бегущих волн 131—134  
пламени 133—134  
решения модифицированной задачи  
о тепловом источнике 135—139

**Фильтрация**  
в упругой пористой среде 55  
в упруго-пластической пористой  
среде 55—56  
закон Дарси 54  
законы подобия 59, 61, 97  
уравнения 54—55  
**Фрактали** 139—144  
локальная однородность и самопо-  
добие 146  
мера Хаусдорфа 143  
неполная автомодельность 144—147

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА . . . . .	3
ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	5
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	11
Глава 1. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЕ . . . . .	24
1.1. Размерность . . . . .	—
1.2. Анализ размерностей . . . . .	28
1.3. Подобие . . . . .	33
Глава 2. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ К ПОСТРОЕНИЮ ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ . . . . .	40
2.1. Сильные тепловые волны . . . . .	45
2.2. Сильные взрывные волны . . . . .	—
2.3. Автомодельность. Промежуточная асимптотика . . . . .	49
Глава 3. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА О МГНОВЕННОМ ТЕПЛОВОМ ИСТОЧНИКЕ: АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОГО РОДА . . . . .	53
3.1. Модифицированная задача о мгновенном тепловом источнике . . . . .	—
3.2. Вывод основного уравнения . . . . .	54
3.3. Прямое применение анализа размерностей в модифицированной задаче о мгновенном тепловом источнике . . . . .	56
3.4. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика . . . . .	57
3.5. Автомодельное предельное решение . . . . .	59
Глава 4. ЗАДАЧА О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ С ПОТЕРЯМИ ИЛИ ПРИТОКОМ ЭНЕРГИИ НА ФРОНТЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ И ЗАДАЧА О КОРОТКОМ УДАРЕ: АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА . . . . .	66
4.1. Модифицированная задача о сильном взрыве . . . . .	—
4.2. Прямое применение анализа размерностей в модифицированной задаче о точечном сильном взрыве . . . . .	68
4.3. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика . . . . .	69
4.4. Автомодельное предельное решение . . . . .	72
4.5. Качественное исследование нелинейной задачи на собственные значения . . . . .	74
4.6. Задача о коротком ударе . . . . .	78
4.7. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика . . . . .	79
4.8. Автомодельное предельное решение . . . . .	81
4.9. Законы сохранения энергии и импульса в задаче о коротком ударе . . . . .	82
4.10. Задача о взрыве на плоской границе раздела — промежуточные асимптотики . . . . .	85

<b>Глава 5. КЛАССИФИКАЦИЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ И АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ . . . . .</b>	<b>87</b>
5.1. Полная и неполная автомодельность . . . . .	—
5.2. Автомодельные решения первого и второго рода . . . . .	93
<b>Глава 6. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ . . . . .</b>	<b>100</b>
6.1. Решения типа бегущих волн . . . . .	—
6.2. Ударная волна Бюргерса — стационарная бегущая волна первого рода . . . . .	102
6.3. Пламя — стационарная бегущая волна второго рода . . . . .	104
6.4. Нелинейная задача на собственные значения . . . . .	110
6.5. Распространение пламени по реагирующей смеси — промежуточная асимптотика . . . . .	112
<b>Глава 7. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ — СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ . . . . .</b>	<b>116</b>
7.1. Анализ размерностей и группы преобразований . . . . .	—
7.2. Пограничный слой на пластинке . . . . .	118
7.3. Предельные автомодельные решения . . . . .	121
7.4. Вращение жидкости в цилиндрическом сосуде . . . . .	123
7.5. Спектр показателей степени в автомодельных переменных	125
7.6. Устойчивость инвариантных решений . . . . .	131
7.7. Устойчивость автомодельных решений . . . . .	135
<b>Глава 8. ФРАКТАЛИ МАНДЕЛЬБРОТА И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ . . . . .</b>	<b>139</b>
8.1. Представление о фракталях. Фрактальные кривые . . . . .	—
8.2. Неполная автомодельность фракталей . . . . .	144
<b>Глава 9. ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ УПРУГОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ . . . . .</b>	<b>147</b>
9.1. Задача о равновесии упругого клина под действием пары сил, приложенной в его вершине . . . . .	—
9.2. Парадокс Стернберга — Койтера. Промежуточная асимптотика решения неавтомодельной задачи . . . . .	149
9.3. Использование автомодельных решений для оценки жесткости клина . . . . .	156
9.4. Законы подобия хрупкого и квазихрупкого разрушения . . . . .	159
<b>Глава 10. ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ИЗОТРОПНАЯ ОДНОРОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ . . . . .</b>	<b>165</b>
10.1. Проблема турбулентности . . . . .	—
10.2. Изотропная однородная турбулентность . . . . .	167
10.3. Вырождение изотропной однородной турбулентности при пренебрежимо малых третьих моментах . . . . .	168
10.4. Вырождение изотропной однородной турбулентности при конечных третьих моментах . . . . .	171
10.5. Локально-изотропная турбулентность . . . . .	177
<b>Глава 11. ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ПОТОК С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ . . . . .</b>	<b>179</b>
11.1. Пристеночная область турбулентного потока с поперечным сдвигом . . . . .	—
11.2. Пристеночная область турбулентного потока с поперечным сдвигом — полуэмпирическая теория и гипотезы автомодельности Колмогорова . . . . .	184
11.3. Законы подобия турбулентного пристеночного течения с продольным градиентом давления . . . . .	186
11.4. Нестационарные явления в вязком слое турбулентного потока с поперечным сдвигом . . . . .	189

Глава 12. ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ГЕОФИ- ЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ . . . . .	193
12.1. Течения с сильно устойчивой стратификацией . . . . .	—
12.2. Законы подобия приземного слоя атмосферы . . . . .	196
12.3. Режим предельного насыщения пристеночного турбулент- ного сдвигового потока со взвесью . . . . .	200
12.4. Верхний термоклин в океане — бегущая тепловая волна . . .	205
12.5. Сильное взаимодействие турбулентности с внутренними вол- нами. Заглубление турбулизованной области . . . . .	209
12.6. Разрушение внутренних волн и растекание пятен переме- шанной жидкости в устойчиво стратифицированной жидкости	223
12.7. Некоторые явления, связанные с турбулентностью, в устой- чиво стратифицированной жидкости . . . . .	233
ПОСЛЕСЛОВИЕ . . . . .	239
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	240
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	250

Григорий Исаакович Баренблatt

---

ПОДОБИЕ,  
АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ,  
ПРОМЕЖУТОЧНАЯ  
АСИМПТОТИКА

---

Редактор О. В. Лапина. Художник Б. А. Денисовский.  
Технический редактор Л. М. Шишкова. Корректор Л. Б. Емельянова.

ИБ № 1454

Сдано в набор 28.05.82. Подписано в печать 30.09.82. М-30843. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>, бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 16. Кр.-отт. 16. Уч.-изд. л. 17,2.  
Тираж 1900 экз. Индекс МОЛ-160. Заказ № 208. Цена 2 руб. 80 коп.  
Гидрометеоиздат, 199053, Ленинград, 2-я линия, д. 23.

Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, г. Ленинград, Прачечный переулок, 6.