СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ

Под общей редакцией В. Е. Зуева

Том 7

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Том 1

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕМПЕРАТУРЫ И ГАЗОВЫХ КОМПОНЕНТ АТМОСФЕРЫ

Том 2

ОПТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ

Том 3

СПЕКТРОСКОПИЯ АТМОСФЕРЫ

Том 4

ОПТИКА АТМОСФЕРНОГО АЭРОЗОЛЯ

Том 5

ОПТИКА ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЫ

Том 6

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА АТМОСФЕРЫ

Том 7

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ

Том 8

ДИСТАНЦИОННОЕ ОПТИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ

Том 9

ОПТИКА АТМОСФЕРЫ И КЛИМАТ

АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ

Том 7

В. Е. Зуев, И. Э. Наац

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ

ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1990

УДК 551.501+551.510+535.533:34

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук А. Д. Егоров (Главная геофизическая обсерватория им. А. И. Воейкова), канд. физ.-мат. наук В. У. Хаттатов (Центральная аэрологическая обсерватория)

Излагаются методы решения обратных оптических задач применительно к дистанционному зондированию атмосферы. Основное внимание уделяется разработке методов дистанционного определения локальных характеристик светорассеяния, микрофизических характеристик аэрозольных образований и оперативного контроля их пространственно-временной изменчивости. Предполагается, что в качестве технических средств оптического зондирования используются многочастотные (наземные и бортовые) лидары, спектральные фотометры космического базирования, поляризационные нефелометры, а также измерительные комплексы, составленные из этих средств.

Предназначено для специалистов в области геофизики, метеорологии, оптики и физики атмосферы, а также для работников других специальностей, использующих в своих исследованиях вычислительные средства оперативной обработки косвенных измерений.

The monograph "Inverse problems of atmospheric optics" by V. E. Zuev and I. E. Naats is concerned with methods for solving inverse optical problems as applied to laser sounding of the atmosphere. The authors focus attention on the development of methods for remote measurement of local light-scattering characteristics, microphysical characteristics of atmospheric aerosol and routine monitoring of their spatiotemporal variability. Multifrequency (ground-based and airborne) lidars, space-borne spectral photometers, polarization nephelometers as well as measurement complexes comprising these facilities are suggested to be employed for laser sounding.

The monograph is addressed to specialists in geophysics, meteorology, optics and physics of the atmosphere and to other researchers who come in touch with computing devices for operative processing of indirect measurements.

$З \frac{1805040400-016}{069(02)-90} 5-90$

ISBN 5-286-00110-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография является очередным томом в серии книг, посвященных современным проблемам оптики атмосферы. Основное внимание уделяется теории обратных задач светорассеяния аэрозольной и молекулярной компонентами и ее применению в оптических методах дистанционного зондирования атмосферы. Актуальность монографии обусловливается необходимостью разработки теории оптического зондирования атмосферы, ее систематизированного изложения в рамках единого методологического подхода, созданием вычислительных методов и программных комплексов обработки оптических данных по светорассеянию. В частности, для того чтобы в полной мере реализовать информационные возможности оптических систем лазерного зондирования рассеивающей компоненты, необходима прежде всего теория обратных задач светорассеяния аэрозольными системами. Развитие оптических средств исследования атмосферы из космоса требует разработки теории касательного зондирования, учитывающей влияние на перенос излучения подстилающей поверхности и эффектов многократного рассеяния. И наконец, осознание того важного обстоятельства, что только комплекс оптических средств при синхронном зондировании в состоянии обеспечить получение адекватной информации о состоянии атмосферы, требует разработки теории оптического мониторинга как единой совокупности взаимосвязанных обратных оптических задач. Результаты исследований, полученные авторами в перечисленных выше направлениях, составляют основу настоящей монографии. Частично эти результаты излагались ранее в монографиях авторов [17, 33, 36] и ряде других работ.

Характерными особенностями настоящей работы являются, во-первых, единство теоретического подхода к обратным задачам светорассеяния (метод оптических операторов) и, во-вторых, то, что предлагаемые авторами численные методы решения большого числа обратных оптических задач излагаются в наглядной алгоритмической форме и могут быть непосредственно использованы в программном обеспечении для обработки экспериментальной информации. В связи с этим монография представляет особый интерес для прикладников, использующих вычислительные средства для оперативной обработки оптических измерений.

Монография состоит из четырех разделов. Это прежде всего теория обратных задач светорассеяния полидисперсными системами частиц, теория многочастотного лазерного зондирования как основного оптического метода дистанционного оперативного контроля пространственно-временной изменчивости оптических характеристик атмосферы, теория многочастотного касательного зондирования рассеивающей компоненты атмосферы и основы теории оптического мониторинга. В заключительной главе изложены методы теории аппроксимации, позволяющей прогнозировать спектральный ход оптических характеристик светорассеяния в тех интервалах, где они недоступны непосредственным измерениям, а также корректно учитывать эффекты поглощения излучения в атмосферно-оптических исследованиях.

Книга предназначена для широкого круга специалистов по геофизике, метеорологии, оптике и физике атмосферы, а также для тех, кто использует в своих исследованиях оптические методы диагностики дисперсных рассеивающих сред и вычислительные средства для интерпретации косвенных измерений.

Авторы считают своим долгом выразить признательность сотрудникам Института оптики атмосферы В. Д. Бушуеву и Б. С. Костину за выполненные расчеты, которыми иллюстрируется изложение основного материала монографии, а также О. В. Чубаровой и Н. К. Осокиной за помощь в техническом оформлении рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Основное внимание в монографии уделяется явлению рассеяния оптического излучения и решению соответствующих обратных задач применительно к дистанционному оптическому зондированию атмосферы. В ней обобщаются результаты исследований, полученные авторами и их сотрудниками в последние годы по методам интерпретации оптических измерений. Именно явление светорассеяния в первую очередь определяет то, что принято понимать под «оптикой атмосферы» [27]. С другой стороны, оно лежит в основе дистанционных методов исследования полей физических и оптических параметров атмосферы. В монографии значительное место отводится построению эффективных алгоритмов оперативной обработки и интерпретации оптической информации, которая может быть получена с использованием таких измерительных систем, как спектральные радиометры, многочастотные лидары, поляризационные нефелометры, спектральные фотометры, установленные на космических платформах и т. п., а также измерительных комплексов, которые могут быть составлены из указанных оптических систем. Это, по мнению авторов, должно способствовать более широкому использованию методов решения обратных задач светорассеяния в практике атмосферно-оптических исследований. Что же касается математических аспектов теории интерпретации косвенных измерений, которые необходимо сопутствуют любому исследованию по обратным задачам, то их изложение в основном дается в краткой форме и по возможности элементарно. Во многих случаях, где это оказывалось возможным, изложение основного материала сопровождалось численными примерами. В тех разделах, где речь идет о некорректных задачах, широко используется известная аналогия между линейным интегральным уравнением и линейной алгебраической системой. Поэтому для большей ясности в понимании и прочтении формульного материала интегральные операторы во многих местах можно заменять соответствующими матричными аналогами. В целом содержание монографии достаточно замкнуто и не требует, по мнению авторов, излишне частого обращения к дополнительной литературе. Вместе с тем авторы не гарантируют легкого чтения всех без исключения разделов монографии. В ряде мест естественно требуется определенная проработка и осмысление материала, особенно для той категории читателей, которая впервые знакомится с обратными задачами оптики атмосферы или собирается практически использовать ту или иную вычислительную схему интерпретации в своей работе.

В монографии излагаются только те обратные задачи оптики атмосферы, которые так или иначе находят свое применение в методах активного и пассивного зондирования рассеивающей компоненты атмосферы. В этом отношении можно утверждать, что монография в равной степени посвящена теории оптического зондирования атмосферы на основе явления рассеяния оптического излучения. Это усиливает ее прикладную направленность. Композиционно монография состоит из четырех глав. Содержание их взаимоувязано, и предпочтительно последовательное прочтение всего материала.

В первой главе изложена теория обратных задач светорассеяния полидисперсными системами частиц. Как известно, атмосферные аэрозоли играют существенную роль в физических и химических процессах, происходящих в атмосфере, а также в значительной степени обусловливают пространственно-временную изменчивость ее оптических характеристик. Помимо этого, явление аэрозольного светорассеяния широко используется в дифференциальных методиках зондирования газовых компонент атмосферы на основе эффектов молекулярного поглощения. Здесь аэрозоли играют роль диффузно-распределенного трассера. Решение обратных задач молекулярного рассеяния не вызывает особых затруднений, чего уже нельзя сказать о рассеянии на аэрозолях. Сложный характер взаимодействия оптического излучения с аэрозольными системами делает задачу интерпретации соответствующих оптических данных весьма затруднительной. Обратные задачи оптики дисперсных рассеивающих сред следует рассматривать как особый класс обратных задач оптики атмосферы. Соответствующую теорию вычислительных методов удобно строить на основе так называемых оптических операторов теории светорассеяния полидисперсными системами частиц. Оптические операторы осуществляют взаимные преобразования одних оптических характеристик светорассеяния локальными объемами дисперсных сред в другие. Так, с помощью соответствующего оператора, зная спектральный ход аэрозольного коэффициента ослабления, можно прогнозировать спектральный ход коэффициента рассеяния, либо обратного рассеяния и т. п. Для построения указанного оператора требуется знание показателя преломления аэрозольного вещества и морфологии частиц. Ниже в основном будет использоваться предположение о сферичности частиц рассеивающей среды. Операторный подход весьма просто распространяется на молекулярное рассеяние, что позволяет в рамках единого методологического подхода построить теорию оптического зондирования рассеивающей компоненты атмосферы.

В первой главе метод оптических операторов излагается на примере теории светорассеяния полидисперсной системой сферических частиц с привлечением теории дифракции Ми. Вводя оптические операторы взаимного преобразования элементов матрицы рассеяния Мюллера полидисперсным аэрозолем, удается построить замкнутую теорию поляризационного зондирования локальных объемов воздуха. Практическое использование этой теории осуществляется в методах лазерной нефелометрии аэрозольных образований в атмосфере. Исходя из параметров Стокса рассеянного локальным объемом дисперсной среды света строится система операторных уравнений для определения спектра размеров аэрозольных частиц, вещественной и мнимой частей показателя преломления аэрозольного вещества.

Эти уравнения можно рассматривать как основу микроструктурного анализа дисперсных сред из оптических измерений. В главе излагаются методы численного построения регуляризирующих оптических операторов, предназначенных для обработки экспериментальной информации. Исследуются основные свойства этих операторов с учетом их последующего применения в итерационных схемах оперативной обработки оптических измерений.

При разработке теории микроструктурного анализа дисперсных рассеивающих сред из оптических измерений необходимо в ряде случаев учитывать морфологию частиц. Качественные методики учета морфологии реальных частиц в обратных задачах светорассеяния можно разработать на основе так называемого вероятностно-геометрического подхода, кратким изложением которого заканчивается первая глава монографии. Используя меры симметрии формы частиц зондируемой дисперсной среды, удается построить параметрические модификации для интегральных представлений аэрозольных оптических характеристик, которые, в свою очередь, приводят к приближенным одномерным обратным задачам аэрозольного светорассеяния. Разумеется, в общем случае обратные задачи светорассеяния для систем несферических частиц должны быть трехмерными. Однако их постановка и соответствующие расчетно-теоретические исследования в практическом отношении мало оправданы и, естественно, не вошли в настоящую монографию. Теоретическая разработка многомерных обратных задач светорассеяния применительно к атмосферно-оптическим исследованиям осуществлялась в ранее опубликованных работах авторов, как, например, [17, 35, 38].

Развитый в первой главе метод оптических операторов используется во второй главе как рабочий аппарат при построении теории многочастотной лазерной локации рассеивающей компоненты атмосферы. Изложение теории лазерного зондирования в основном носит конспективный характер, поскольку ранее она подробно излагалась в работах авторов [17, 36]. Основное внимание уделяется изложению алгоритмов обработки и интерпретации данных двух- и трехчастотного зондирования аэрозолей нижней атмосферы, осуществляемого с целью контроля пространственно-временной изменчивости их оптических характеристик. Информационные возможности лидаров и соответствующая техника интерпретации оптических данных иллюстрируются практическим примером локации нижней стратосферы. В связи с тем что многочастотные лидары могут служить средством для исследования атмосферных процессов, интересна постановка таких обратных задач, которые бы включали в себя и обратные задачи светорассеяния, и обратные задачи аэрозольной кинетики. В частности, синтез теории лазерного зондирования и обратной задачи турбулентной диффузии открывает возможность оперативного определения поля коэффициентов турбулентной диффузии в пограничном слое атмосферы. Использование в схемах обработки данных уравнений аэрозольной кинетики одновременно позволяет прогнозировать оптические характеристики атмосферы в пределах соответствующих временных интервалов. Это направление в теории обратных задач оптики атмосферы следует считать одним из наиболее перспективных, в котором сочетаются задачи оптики и физики атмосферы, а также и метеорологии. Теория этого класса обратных задач достаточно сложна, и еще требуются значительные усилия для получения практически значимых результатов. В монографии одного из авторов [33] можно найти краткое введение в теорию обратных задач светорассеяния полидисперсной системой коагулирующих частиц, а также аэрозольной системой частиц, взаимодействующей с полем влажности. В соответствии с тематикой монографии, означенной ее названием, в рассматриваемой главе авторы подробно излагают простые методики интерпретации локационных данных, предназначенные для оперативного контроля оптического состояния атмосферы, включая и варианты одночастотного зондирования. В последнем случае лидары используются для определения стратификации атмосферных аэрозолей.

Теории оптического мониторинга рассеивающей компоненты атмосферы, осуществляемого комплексом оптических средств, включающим, в частности, наземные либо бортовые лидары, а также спектральные фотометры, измеряющие интенсивности рассеянного солнечного света в различных направлениях, посвящена третья глава монографии. В основе аналитических и соответственно алгоритмических построений так же, как и ранее, лежат оптические операторы и их матричные аналоги. Выводятся основные операторные уравнения теории оптического мониторинга, в котором определяющую роль играет метод касательного зондирования и его геометрическая орбитальная схема. Дается дальнейшее развитие метода корректирующих функций, который ранее был введен в теорию обратных задач светорассеяния при построении методик интерпретации локационных данных. Изложение материала сопровождается примерами численного анализа свойств основных операторов перехода, используемых в вычислительных схемах обработки оптической информации. В заключительном разделе главы изложены основы теории оптического мониторинга системы атмосфера — подстилающая поверхность. Выведено интегральное уравнение для определения спектрального альбедо подстилающей поверхности и дан анализ его основных свойств. Указанные выше результаты получены в предположении однократного рассеяния излучения в атмосфере. Следует заметить, что по ряду причин в монографию не вошли обратные задачи для уравнения переноса излучения в сферической атмосфере, которые позволяли бы интерпретировать угловое распределение интенсивности диффузно-рассеянного света на ее верхней границе, доступного измерению орбитальными оптическими системами. Теория этого класса обратных оптических задач интенсивно разрабатывается прежде всего применительно к проблеме изучения свойств подстилающей поверхности [7, 47].

В заключительной главе монографии излагается теория аппроксимации оптических характеристик рассеивающей компоненты атмосферы. Типичной задачей, которая решается в рамках этой теории, является восстановление непрерывного спектрального хода любой из характеристик светорассеяния по дискретному набору приближенных измерений. В атмосферно-оптических исследованиях выбор этих измерений увязывается с так называемыми окнами прозрачности. Изложенный в главе метод решения аппроксимационных задач (метод обратной задачи) позволяет одновременно осуществлять интерполяцию и экстраполяцию характеристик в спектральные интервалы, где их непосредственное измерение недоступно из-за сильного молекулярного поглощения либо в силу каких-то иных причин. В последнем случае типичным примером является прогноз аэрозольных характеристик рассеяния в ближние УФ- и ИК-области по измерениям в видимом диапазоне. Методы аппроксимации в полной мере применимы и для угловых характеристик. Иллюстрацией этого служат примеры восстановления непрерывного углового хода аэрозольных индикатрис рассеяния по некоторым опорным ее измерениям в центральной области углов. При этом оказывается возможной оценка значений индикатрисы (то же самое коэффициента направленного светорассеяния) для таких важных направлений, как рассеяние строго вперед или назад.

Взаимный прогноз оптических характеристик светорассеяния локальных освещенных объемов атмосферы, соответствующих различным спектральным интервалам, является одним из главных достоинств изложенной в монографии теории оптического зондирования рассеивающей компоненты атмосферы. Алгоритмы, которые численно решают эту задачу, реализуются с помощью регуляризирующих операторов восстановления и прогноза (экстраполяции). Операторный подход придает указанной теории вполне законченный вид. Остается лишь заметить, что аналогичный подход должен быть развит и в теории поглощения оптического излучения в атмосфере. Только в этом случае теория оптического зондирования поглощающей компоненты будет служить эффективной основой дистанционного контроля метеорологических полей в атмосфере. Речь идет, прежде всего, о теории оптического мониторинга атмосферы средствами активного (CO_2-лидары) и пассивного зондирования в ИК-диапазоне. В заключительном разделе главы изложены подходы к анализу и численному решению нелинейных обратных задач светорассеяния. Эти задачи, как правило, касаются более тонких аспектов взаимодействия оптического излучения с зондируемой средой и в целом являются более информативными в физическом отношении. Интересно, что некоторые из этих задач, и в частности, те, которые связаны с исследованием аэрозольных полидисперсных систем, с помощью простых аналитических преобразований могут быть сведены к решению вполне корректных в математическом отношении функциональных уравнений, каковыми являются интегральные уравнения второго рода.

В силу ограниченного объема монографии авторы дали лишь самое общее рассмотрение обратных задач, связанных с зондированием атмосферы на основе спектроскопических эффектов. Затронуты лишь вопросы построения регуляризирующих методик интерпретации локационных данных, получаемых по методу дифференциального поглощения. Этот класс обратных оптических задач имеет важное прикладное значение в разработке методов дистанционного определения профилей концентрации газовых компонент атмосферы [16]. Более полное изложение регуляризирующих методик интерпретации данных, полученных по методу дифференциального поглощения, можно найти в монографии авторов [17] (см. также [24, 45]). Использование эффектов молекулярного поглощения в схемах касательного зондирования описано в монографии [23].

Не представлялось возможным коснуться в монографии обратных задач, связанных с нелинейными эффектами взаимодействия оптического излучения с компонентами атмосферы [14, 45], атмосферной рефракцией [1] и турбулентностью [14]. С учетом этого обстоятельства следует признать, что название монографии несколько шире содержащегося в ней материала. Вместе с тем, если акцентировать внимание на математических аспектах теории оптических обратных задач, то в монографии рассмотрены практически все виды тех интегральных уравнений и их систем, к которым сводятся обратные атмосферно-оптические задачи независимо от их конкретного физического содержания. В частности, если вести речь о некорректных задачах, то в монографии изложены эффективные алгоритмы обращения интегральных уравнений Фредгольма, Вольтерра, простейшие нелинейные уравнения, а также интегральные уравнения в форме интеграла Стилтьеса. Особое внимание уделено построению вычислительных схем численного решения систем функциональных уравнений, включающих и интегральные с ядрами, зависящими от неизвестных параметров. В этом отношении содержание монографии обладает достаточной общностью. На примере обратных задач светорассеяния представилось возможным рассмотреть методы численного решения тех функциональных уравнений, к которым сводятся наиболее распространенные обратные задачи оптики атмосферы. Подобные аналогии указываются в тексте монографии и сопровождаются соответствующими ссылками на литературу.

Регуляризирующие алгоритмы, используемые авторами в монографии, в основном построены на основе обращения интегральных уравнений первого рода на компактных множествах решений, аналитическая структура которых выбирается априори с учетом физического характера задачи. Подобные алгоритмы обладают достаточной эффективностью и простотой. Как правило, они могут быть реализованы с применением малых вычислительных машин, широко используемых в системах оперативной обработки оптических данных. В этих алгоритмах последовательности приближенных решений сходятся равномерно, и можно достаточно просто строить диалоговые системы обращения и анализа оптических данных. Пример подобной системы описан в работе авторов [8]. Подробное изложение методов обращения некорректных задач на компактных множествах функций дано в обстоятельной работе [49]. Применительно к оптическим задачам они также излагались в монографии одного из авторов [33]. При желании ознакомиться со строгой теорией регуляризации читатель может обратиться к работе [29].

В монографии не затрагиваются так называемые вероятностные подходы к регуляризации некорректных задач. Их ясное изложение требует привлечения таких математических понятий, как вероятностные меры и сходимости по вероятностям. Здесь уместно рекомендовать обзор [39], где делается попытка строгого изложения метода статистической регуляризации с привлечением указанных выше понятий.

К сожалению, не представилось также возможным в силу ограниченного объема монографии обсуждение влияния статистического характера измерительных шумов на ошибки решения обратных оптических задач. Этот недостаток в какой-то мере авторы компенсируют ссылкой на обстоятельные работы [11, 45].

Каждая глава заканчивается кратким заключением, в котором обсуждаются вопросы дальнейших теоретических исследований в соответствующих направлениях, а также возможные практические применения изложенных результатов.

ГЛАВА 1. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СВЕТОРАССЕЯНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНЫМИ СИСТЕМАМИ ЧАСТИЦ. ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Оптика атмосферы в значительной мере определяется рассеянием света на молекулах и частицах [27]. При решении задач теории рассеяния света аэрозолями принято считать, что в любом локальном объеме воздуха при нормальных условиях их можно представить как систему однородных сферических частиц различного размера. В связи с этим в пределах настоящей главы излагаются теория и численные методы решения обратных задач светорассеяния полидисперсными системами сферических частиц. Разумеется, указанная система частиц рассматривается не более как морфологическая модель (если акцентировать внимание на форме рассеивателей, играющих важную роль в подобных задачах) реальной дисперсной рассеивающей среды. Оптическое соответствие модели и среды требует надлежащей проверки, о чем подробно говорится в заключительном разделе главы. В основе аналитических построений излагаемой ниже теории лежит понятие оператора перехода, осуществляющего преобразование одного элемента матрицы полидисперсного рассеяния в другой. В результате для матрицы Мюллера, адекватно описывающей прямые задачи светорассеяния системами частиц, удается построить матрицу интегральных (матричных) операторов взаимного преобразования ее элементов.

Используя эти операторы, обратные задачи светорассеяния можно свести к решению систем интегральных уравнений, что иллюстрируется в главе на примере теории поляризационного зондирования атмосферы. Этот оптический метод технически реализуется с помощью поляризационных нефелометров и бистатических схем зондирования. Поскольку операторы перехода, определенные на совокупности элементов матрицы Мюллера, играют существенную роль и в теории, и в практике обработки оптических измерений, в главе дается обстоятельный анализ их основных свойств. В частности, показана их компактность и непрерывность, возможность их представления в виде интегральных операторов, приведена структура регуляризованного аналога, что весьма важно в случаях их применения в схемах обработки экспериментальной информации. Кратко изложены основы их спектрального анализа. Во избежание формализма авторы используют известные аналогии между интегральными операторами и матрицами.

Поскольку обращение данных по светорассеянию на аэрозолях часто осуществляется в целях определения их микроструктуры в пределах зондируемого объема атмосферы, в главе дается краткое введение в методы численного решения этого класса некорректных задач. При изложении основ микроструктурного анализа дисперсных сред из оптических данных используются представления характеристик светорассеяния полидисперсными системами в виде интегралов Стилтьеса. Это позволяет, с одной стороны, учесть разрывный характер спектра размеров реальных аэрозолей в локальных объемах, с другой стороны, строить эффективные алгоритмы обращения оптических данных. Поскольку обстоятельное изложение этих вопросов требует привлечения достаточно сложных математических средств, авторы ограничились лишь простыми примерами и алгоритмами (подробнее см. [32, 33]). Операторный подход к теории светорассеяния системами частиц может быть применен и к полидисперсным аэрозолям, форма которых отлична от сферической. В связи с этим в главу включен раздел, в котором даны общий анализ этой сложной задачи и краткое введение в теорию обратных задач для систем несферических частиц, случайно ориентированных в пространстве освещенного объема. Изложение основывается на введении в оптику дисперсных сред вероятностно-геометрических мер симметрии формы рассеивающих частиц.

1.1. Операторы взаимного преобразования элементов матрицы рассеяния полидисперсными системами частиц

1.1.1. Матрица рассеяния поляризованного света полидисперсной системой сферических частиц

Рассеяние поляризованного света в оптике дисперсных сред, примером которых могут служить аэрозольные образования в атмосфере, удобно описывать с помощью векторов Стокса, падающего $\mathbf{I}^{(0)}$ и рассеянного $\mathbf{I}^{(s)}$ потоков и матрицы их взаимного преобразования $\hat{S}$ [6]. В этом случае имеет место соотношение

$$\mathbf{I}^{(s)} = k^{-2}\hat{S}\mathbf{I}^{(0)}, \qquad (1.1)$$

где $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны. Элементы матрицы $\hat{S}$ определяются свойствами рассеивающих частиц. Если частицы имеют форму, отличную от сферической, но случайно ориентированы в пространстве рассеивающего объема, то соответствующая матрица $\hat{S}$ имеет шесть независимых элементов и записывается в следующем виде:

$$\hat{S} = \{S_{ij}\} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & -S_{34} & S_{44} \end{vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Для отдельной сферической частицы соответствующая матрица $\hat{S}$ содержит только четыре независимых элемента, которые выражаются через функции безразмерной интенсивности i_j ($j=1$, 2, 3, 4) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &S_{11}(x,\ \vartheta)=S_{22}(x,\ \vartheta_1)=[i_2(x,\ \vartheta)+i_1(x,\ \vartheta)]/2;\\ &S_{12}(x,\ \vartheta)=S_{21}(x,\ \vartheta)=[i_2(x,\ \vartheta)-i_1(x,\ \vartheta)]/2;\\ &S_{34}(x,\ \vartheta)=S_{44}(x,\ \vartheta)=i_3(x,\ \vartheta);\\ &S_{34}(x,\ \vartheta)=S_{43}(x,\ \vartheta)=i_4(x,\ \vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

В последнем выражении $x=2\pi r/\lambda$, где r — радиус сферической рассеивающей частицы, ϑ — угол рассеяния. Функции $i_j(x,\vartheta)$ определяются теорией рассеяния электромагнитных волн на сфере [6]. В этой теории основные соотношения, необходимые для расчета характеристик светорассеяния, имеют следующий вид:

$$i_1=|S_1S_1^*|;\quad i_2=|S_2S_2^*|;\quad i_3=\mathrm{Re}\,(S_1S_2^*);\quad i_4=\mathrm{Im}\,(S_1S_2^*), \tag{1.4}$$

где

$$S_1(x,\ \vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\{a_n\pi_n(\cos\vartheta)+b_n\tau_n(\cos\vartheta)\}; \tag{1.5а}$$

$$S_2(x,\ \vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\{a_n\tau_n(\cos\vartheta)+b_n\pi_n(\cos\vartheta)\}. \tag{1.5б}$$

Коэффициенты a_n и b_n являются функциями дифракционного параметра x и комплексного показателя преломления $\bar{m}$ и выражаются через функции Риккати — Бесселя. Функции π_n и τ_n рассчитываются через полиномы Лежандра [6].

Характерной особенностью функций безразмерной интенсивности $i_j(x,\vartheta)$ является их аддитивность при переходе от рассеяния на одной частице к рассеянию ансамблем частиц, что позволяет достаточно просто найти элементы матрицы рассеяния полидисперсными системами сферических частиц.

Предположим, что распределение числа частиц по размерам в рассматриваемом ансамбле описывается функцией плотности $n(r)$. Последнее означает, что число частиц, размеры которых попадают в интервал $(r,\ r+dr)$, равно $n(r)dr$. Если плотность распределения $n(r)$ задана в интервале $R=[R_1,\ R_2]$ (интервал возможных размеров частиц рассматриваемого ансамбля), то функции безразмерной интенсивности для полидисперсного ансамбля независимых рассеивателей могут быть записаны в виде интегралов

$$\bar{i}_j(\lambda,\ \vartheta)=\int\limits_R i_j(2\pi r\lambda^{-1},\ \vartheta)\,n(r)\,dr,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{1.6}$$

Ясно, что совокупность функций $\{\bar{i}_j\}$ в соответствии с (1.3) определяет некую матрицу $\bar{S}$, которую можно рассматривать в качестве матрицы рассеяния поляризованного света полидисперсной системой сферических частиц. Нетрудно видеть, что матрица $\bar{S}$ имеет тот же вид, что и $\hat{S}$, однако, с точки зрения аналитических свойств ее элементов, она существенно отлична от последней. Действительно, элементы $\bar{S}_{ij}$ являются функциями только двух переменных λ и ϑ, а не трех, как это имеет место для элементов матрицы $\hat{S}$, и, во-вторых, все они представляются в виде параметрических интегралов с одной и той же весовой функцией $n(r)$. Последнее обстоятельство дает основание полагать, что совокупность этих элементов может рассматриваться как система взаимосвязанных (или взаимопреобразуемых) функций. То, что это так, мы покажем ниже, начав рассмотрение с системы четырех функций безразмерной интенсивности, определяемых интегралами (1.6).

1.1.2. Операторы взаимного преобразования для функций интенсивности рассеяния системами частиц

Для простоты изложения будем считать, что значение λ фиксировано, и тогда функции интенсивности рассеяния сферической частицей i_j зависят от переменных ϑ $(0\leqslant\vartheta\leqslant\pi)$ и r $(R_1\leqslant r\leqslant R_2)$. В соответствии с интегральным представлением (1.6), функции $\bar{i}_j$, описывающие рассеяние плоской оптической волны системой частиц, будут функциями одной переменной, а именно угла рассеяния ϑ. Для дальнейшего анализа удобно прибегать к операторной форме записи основных выражений, в частности, ниже будем писать для (1.6)

$$\bar{i}_j = A_j n, \quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1.7а}$$

где A_j — интегральный оператор с ядром $i_j(2\pi r/\lambda)$ (то же самое $i_j(r,\vartheta)$). В ряде случаев возникает необходимость подчеркнуть, что $\bar{i}_j$ рассматриваются как функции угла рассеяния ϑ. Тогда (1.7а) будем писать в виде

$$\bar{i}_j(\vartheta) = (A_j n)(\vartheta), \quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{1.7б}$$

При численном решении линейных интегральных уравнений интегральные операторы (то же самое интегралы) заменяются соответствующими матрицами, построение которых начинается с выбора дискретных систем узлов $\{\vartheta_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ k\}$ из области $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ и $\{r_l,\ l=1,\ \ldots,\ m\}$ из $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ и интерполяционных аналогов для подынтегральных функций. В соответствии с этим наряду с (1.7) будем использовать и векторную форму представления полидисперсных характеристик светорассеяния, а именно

$$\mathbf{i}_j = A_j \mathbf{n}, \quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1.8}$$

где A_j — матрица с элементами $\{A_{j\nu l}\}$ $(\nu=1,\ \ldots,\ k;\ l=1,\ \ldots,\ m)$, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{n}$ — векторы с компонентами $\bar{i}_\nu=i(\vartheta_\nu)$ и $n_l=n(r_l)$ соответственно. Для простоты записи выражений не будем вводить каких-либо специальных обозначений для различия интегральных операторов и их матричных аналогов. Так, например, в (1.8) следовало бы писать $\hat{A}_j$ вместо A_j, поскольку ранее последнее использовалось для обозначения интегрального оператора. Однако поскольку в (1.8) слева от оператора стоит вектор, то это однозначно указывает на характер преобразования. В тех случаях, когда требуется по тексту прямое сопоставление указанных двух операторов, для матриц будем использовать верхний значок «^». Следует подчеркнуть, что матрица $\hat{A}_j$ размером $k \times m$ в (1.8) далеко не исчерпывает свойств интегрального оператора A_j в представлениях (1.7). Предполагается, что об эквивалентности $\hat{A}_j$ и A_j можно говорить лишь при $k, m \to \infty$. К тому же при данных k и m матрицу $\hat{A}_j$ можно построить несколькими альтернативными способами, один из которых может быть признан как наилучший для данной конкретной обратной задачи. Подробнее на этих вопросах мы остановимся во второй главе, а сейчас лишь заметим, что матрицы $\hat{A}_j$ можно с той или иной долей приближения рассматривать как дискретные аналоги линейных интегральных операторов A_j.

Теперь из совокупности $\{\bar{i}_j, j=1, \ldots, 4\}$ выберем две функции, скажем, $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$, и запишем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_1 n &= \bar{i}_1, \\ A_2 n &= \bar{i}_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

относительно распределения $n(r)$. Будем далее полагать, что каждое из этих двух уравнений в принципе вполне состоятельно для определения с необходимой точностью спектра размеров при известных правых частях $\bar{i}_1(\vartheta)$ и $\bar{i}_2(\vartheta)$. Разумеется, для этого требуется выполнение определенных условий. В частности, необходимо, чтобы ядра $i_1(r, \vartheta)$ и $i_2(r, \vartheta)$ в области своего определения $[R \times \Theta]$ были непрерывны и ограничены. Далее необходимо также, чтобы искомая функция $n(r)$ и измеряемые $\bar{i}_1(\vartheta)$ и $\bar{i}_2(\vartheta)$ принадлежали компактным множествам Φ, B_1 и B_2 соответственно. При этих условиях интегральные операторы, как известно [10], вполне непрерывны и обратимы, что можно представить двумя эквивалентными непрерывными отображениями, скажем, $A_1 : \Phi \to B_1$ и $A_1^{-1} : B_1 \to \Phi$. Решая в отдельности каждое из рассматриваемой пары уравнений, найдем $n = A_1^{-1}\bar{i}_1$ и $n = A_2^{-1}\bar{i}_2$. Если $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$ связаны с одним и тем же освещенным объемом и моментом времени, то найденные решения в пределах точности обращения должны совпадать друг с другом, что необходимо влечет наличие между $\bar{i}_1(\vartheta)$ и $\bar{i}_2(\vartheta)$ вполне определенной функциональной зависимости. В операторном виде построить эту зависимость не составит труда. Действительно, имеем

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}_2 &= A_2 A_1^{-1} \bar{i}_1; \\ \bar{i}_1 &= A_1 A_2^{-1} \bar{i}_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

В соответствии с аналитическими построениями уравнения (1.10) можно рассматривать как результат исключения из системы (1.9) спектра размеров $n(r)$. Произведение двух операторов можно рассматривать как единый оператор, вводя соответствующее обозначение. В частности, будем обозначать $A_2A_1^{-1}$ через E_{21}, а $A_1A_2^{-1}$ через E_{12}. Тогда (1.10) можно переписать как

$$\left.\begin{aligned}\bar{i}_2 &= E_{21}\bar{i}_1,\\ \bar{i}_1 &= E_{12}\bar{i}_2.\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Нетрудно видеть, что операторы E_{21} и E_{12} связаны между собой соотношением

$$E_{21}E_{12} = I, \tag{1.12}$$

где I — единичный оператор $(I\bar{i}=\bar{i})$. Построенные таким образом операторы определяют пару новых преобразований, а именно

$$\left.\begin{aligned}E_{12} &: B_2 \to B_1;\\ E_{21} &: B_1 \to B_2,\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

где B_1 и B_2 — множества оптических характеристик типа $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$. Подчеркнем следующее принципиальное предположение: для нахождения операторов E_{12} и E_{21} (то же самое матричных аналогов $\widehat{E}_{12}$ и $\widehat{E}_{21}$) необходимо знать показатель преломления вещества частиц и предполагаемые границы размеров R_1 и R_2. Первой, и возможно, наиболее важной их особенностью является независимость их от спектра размеров частиц исследуемой дисперсной среды. В расчете этих операторов помимо указанных выше физических параметров участвуют лишь монодисперсные функции интенсивности рассеяния $i_1(2\pi r\lambda^{-1}, \vartheta)$ и $i_2(2\pi r\lambda^{-1}, \vartheta)$ в соответствии с предположением о сферичности формы рассеивающих частиц. С учетом этого обстоятельства операторы E_{12} и обратный ему E_{21} выступают в обратных задачах как некоторые обобщенные характеристики светорассеяния полидисперсной системой частиц, определяемые только морфологией частиц, их показателем преломления и возможными наибольшим и наименьшим размерами частиц. Дальнейшее изучение свойств операторов типа E_{12} и E_{21} будет продолжено ниже, а сейчас обратимся к алгебраизованным аналогам этих операторов.

По всей видимости, наиболее просто пояснить суть, а главное, технику взаимного преобразования оптических характеристик $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$ можно на примере векторных уравнений (1.8). Предположим, что матрица $\{a_{\nu l}^{(1)}\}$, соответствующая оператору A_1, невырождена, т. е. $\det\{a_{\nu l}^{(1)}\} \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A_1^{-1}, и решение $\mathbf{n} = A_1^{-1}\mathbf{i}$ единственно. При невырожденности матрицы $\{a_{\nu l}^{(2)}\}$ соответствующей оператору A_2, получаем пару взаимнооднозначных векторных преобразований:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{i}_2 &= E_{21}\mathbf{i}_1;\\ \mathbf{i}_1 &= E_{12}\mathbf{i}_2.\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Для матричных операторов в (1.14) выполняется равенство (1.12), в правой части которого теперь стоит единичная матрица.

Выше рассматривались взаимные преобразования между парой $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$. Поскольку в целом процесс светорассеяния полидисперсной системой сферических частиц определяется четырьмя функциями безразмерной интенсивности, то, следуя излагаемой здесь теории, можно построить полную матрицу операторов перехода $\{E_{ij}\}$. Для каждого из этих операторов имеем

$$\bar{i}_i = E_{ij}\bar{i}_j, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{1.15}$$

Семейство этих операторов удовлетворяет очевидным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &E_{ij} = E_{ji}^{-1}; \\ &E_{ii} = I, \quad i,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для матричных аналогов $\widehat{E}_{ij}$, соответствующих указанным операторам E_{ij}. Поскольку эти операторы осуществляют взаимные преобразования оптических характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц, то в дальнейшем их будем называть оптическими операторами перехода. Роль этих операторов в оптике дисперсных сред и физический смысл преобразований, осуществляемых ими, в полной мере мы раскроем ниже при построении теории оптического зондирования рассеивающих сред.

1.1.3. Операторы перехода для элементов матрицы рассеяния

Поскольку элементы матрицы рассеяния $\bar{S}$ для полидисперсной системы частиц, находящихся в единичном освещенном объеме дисперсной среды, однозначно определяются функциями безразмерной интенсивности $\bar{i}_j$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, то нетрудно построить соответствующие операторы взаимного преобразования для функций $\bar{S}_{ij}(\vartheta)$. В частности, из выражений (1.3), которые имеют место и для характеристик светорассеяния полидисперсными ансамблями, следуют соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{S}_{11} = [E_{21}\bar{i}_1 + \bar{i}_1]/2; \\ &\bar{S}_{12} = [E_{21}\bar{i}_1 - \bar{i}_1]/2. \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Из первого выражения можно записать

$$\bar{i}_1 = 2(E_{21} + I)^{-1}\bar{S}_{11}.$$

Подставляя его во второе, приходим к следующей операторной форме взаимного преобразования элементов $\bar{S}_{12}$ и $\bar{S}_{11}$:

$$\bar{S}_{12} = (E_{21} + I)^{-1}(E_{21} - I)\bar{S}_{11}. \tag{1.18}$$

В дальнейшем операторы перехода между элементами $\bar{S}_{ij}$ матрицы $\bar{S}$ будем обозначать через W, следуя работам [30, 36], где впервые эти операторы вводились в теорию обратных задач оптики атмосферного аэрозоля. В соответствии с этим (1.18) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{S}_{12}=W_{21}\bar{S}_{11}, \tag{1.19а}$$

где $W_{21}=(E_{21}+I)^{-1}(E_{21}-I)$. Аналогично строятся и остальные операторы перехода:

$$\bar{S}_{33}=2E_{31}(E_{21}+I)^{-1}\,\bar{S}_{11}=W_{31}\bar{S}_{11}; \tag{1.19б}$$

$$\bar{S}_{34}=E_{43}\bar{S}_{33}=W_{43}\bar{S}_{33}. \tag{1.19в}$$

Введенных трех операторов W_{21}, W_{31} и W_{43} вполне достаточно для построения возможных взаимных преобразований между элементами матрицы Мюллера $\bar{S}$. Общая схема этих преобразований может быть представлена в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{S}_{11}\xrightarrow{W_{21}}\bar{S}_{12}\xrightarrow{I}\bar{S}_{21};\\
&\bar{S}_{11}\xrightarrow{I}\bar{S}_{22}\xrightarrow{W_{31}}\bar{S}_{33}\xrightarrow{I}\bar{S}_{44};\\
&\bar{S}_{33}\xrightarrow{W_{43}}\bar{S}_{34}\xrightarrow{-I}\bar{S}_{43}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.20а}$$

Приведенная схема показывает, что если известен для примера первый элемент $\bar{S}_{11}$ матрицы рассеяния $\bar{S}$, то чисто вычислительным путем (с помощью соответствующего программного комплекса) можно восстановить всю матрицу. Значение этого факта для теории и практики оптических исследований дисперсных рассеивающих сред совершенно очевидно. Использование оптических операторов позволяет минимизировать таким образом требуемый объем измерительной информации в экспериментах по определению оптических характеристик дисперсных сред. В каждом конкретном случае эффективность решения указанных задач определяется мерой соответствия исходных предположений, что будет иллюстрироваться ниже.

Необходимо заметить, что схему взаимных преобразований (1.20а) элементов матрицы светорассеяния полидисперсными системами сферических частиц можно сделать более ясной и простой, если из нее исключить тождественные преобразования, осуществляемые оператором I. Введем систему чисел $\bar{S}_1=\bar{S}_{11}$, $\bar{S}_2=\bar{S}_{12}$, $\bar{S}_3=\bar{S}_{33}$ и $\bar{S}_4=\bar{S}_{34}$, тогда исходная матрица $\bar{S}$ примет вид

$$\begin{vmatrix}
\bar{S}_1 & \bar{S}_2 & 0 & 0\\
\bar{S}_2 & \bar{S}_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \bar{S}_3 & \bar{S}_4\\
0 & 0 & -\bar{S}_4 & \bar{S}_3
\end{vmatrix},$$

а схема взаимных преобразований для системы функций $\{\bar{S}_i(\vartheta)\}$ запишется в простой операторной форме

$$\bar{S}_j=W_{ji}\bar{S}_i,\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{1.20б}$$

в которой операторы перехода удовлетворяют соотношениям (1.16).

В заключение остается отметить, что построенная чисто формальным путем матрица операторов перехода $W=\{W_{ij}\}$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$, однозначно соответствующая матрице рассеяния $S=\{S_{ij}\}$, более полно описывает процесс рассеяния поляризованного света системой частиц. Во всяком случае, теория, опирающаяся на пару матриц $\bar{S}$ и W, в рамках единого операторного подхода включает в себя не только прямые задачи оптики дисперсных сред, но и обратные.

1.1.4. Матрица операторов перехода и вектор Стокса

В оптических экспериментах по светорассеянию реальными дисперсными средами измерению доступны квадратичные функционалы от компонент электрического вектора поля излучения, что и обусловило введение в прикладную оптику параметров Стокса и функции безразмерной интенсивности рассеяния. Используя теперь матрицу оптических операторов W как аппарат исследования совокупности характеристик светорассеяния системами частиц, обратимся к анализу компонент вектора Стокса рассеянного света. Вместо матрицы $\hat{S}$ в (1.1) будем рассматривать матрицу $\hat{D}=k^{-2}\hat{S}$. Ясно, что матрица операторов взаимных преобразований элементов $\bar{D}_{ij}$ останется той же, что и для элементов матрицы $\{\bar{S}_{ij}\}$. Для полидисперсной системы сферических частиц преобразование (1.1) можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \bar{I}_1^{(s)} &= \bar{D}_{11}I_1^{(0)} + \bar{D}_{12}I_2^{(0)};\\ \bar{I}_2^{(s)} &= \bar{D}_{12}I_1^{(0)} + \bar{D}_{11}I_2^{(0)};\\ \bar{I}_3^{(s)} &= \bar{D}_{33}I_3^{(0)} + \bar{D}_{34}I_4^{(0)};\\ \bar{I}_4^{(s)} &= -\bar{D}_{34}I_3^{(0)} + \bar{D}_{33}I_4^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Из первых двух выражений системы (1.21) имеем

$$\bar{D}_{11} = (\bar{I}_2^{(s)}I_2^{(0)} - \bar{I}_1^{(s)}I_1^{(0)})/((I_2^{(0)})^2 - (I_1^{(0)})^2). \tag{1.22}$$

$$\bar{D}_{12} = (\bar{I}_2^{(s)}I_1^{(0)} - \bar{I}_1^{(s)}I_2^{(0)})/((I_2^{(0)})^2 - (I_1^{(0)})^2). \tag{1.23}$$

С другой стороны, в соответствии с (1.19а) элементы $\bar{D}_{11}$ и $\bar{D}_{22}$ как функции угла рассеяния ϑ связаны между собой функционально и, следовательно, параметры Стокса $\bar{I}_1^{(s)}$ и $\bar{I}_2^{(s)}$ рассеянного ансамбля частиц света также будут связаны между собой соответствующим функциональным уравнением. Иными словами, как функции угла ϑ они образуют пару взаимозависимых функций. Нетрудно построить это соотношение, используя (1.22) и (1.23). Имеем

$$a_2W_{21}\bar{I}_2^{(s)} - a_1W_{21}\bar{I}_1^{(s)} = -a_1\bar{I}_2^{(s)} + a_2\bar{I}_1^{(s)}, \tag{1.24}$$

где введены следующие обозначения:

$$a_1 = I_1^{(0)}/((I_2^{(0)})^2 - (I_1^{(0)})^2);$$

$$a_2 = I_2^{(0)}/((I_2^{(0)})^2 - (I_1^{(0)})^2).$$

Параметры $I_i^{(0)}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ характеризуют падающую оптическую волну, и, следовательно, величины a_1 и a_2 в (1.24) можно считать константами для данного оптического эксперимента. В частности, для линейно поляризованного света с вектором $\mathbf{I}^{(0)} = \{1, 0, 1, 0\}$ $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ и (1.24) принимает наиболее простой вид, а именно

$$\bar{I}_2^{(s)} = W_{21}\bar{I}_1^{(s)}. \tag{1.25}$$

Подобное соотношение справедливо и для круговой поляризации независимо от направления вращения электрического вектора, поскольку в этом случае также $a_1 = -1$ и $a_2 = 0$. Для эллиптической поляризации коэффициенты a_1 и a_2 в выражении (1.24) одновременно отличны от нуля, и соотношение между $\bar{I}_2^{(s)}$ и $\bar{I}_1^{(s)}$ имеет вид

$$(a_2W_{21} + a_1I)\bar{I}_2^{(s)} = (a_1W_{21} + a_2I)\bar{I}_1^{(s)}. \tag{1.26}$$

Напомним, что выражения в скобках суть операторы, действующие на функции $\bar{I}_2^{(s)}(\vartheta)$ и $\bar{I}_1^{(s)}(\vartheta)$. Что же касается (1.25), то здесь W_{21} — интегральный оператор, непосредственно преобразующий функцию $\bar{I}_1^{(s)}(\vartheta)$ в $\bar{I}_2^{(s)}(\vartheta)$. Поскольку подобные преобразования имеют место только для полидисперсных систем частиц, то в обозначениях параметров Стокса мы сохраняем черту сверху, как признак того, что они представимы параметрическими (полидисперсными) интегралами. Ясно, что любую из указанных компонент как функцию угла ϑ представим в виде

$$\bar{I}_i^{(s)}(\vartheta) = \int_R I_i^{(s)}(r, \vartheta)\, n(r)\, dr, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{1.27}$$

где величины $I_i^{(s)}(r, \vartheta)$ связаны с рассеянием на отдельной частице.

Подобный анализ можно провести и для остальных компонент вектора Стокса. В частности, из третьего и четвертого выражений в (1.21) имеем

$$\bar{D}_{33} = (\bar{I}_4^{(s)}I_4^{(0)} + \bar{I}_3^{(s)}I_3^{(0)})/((I_3^{(0)})^2 + (I_4^{(0)})^2); \tag{1.28}$$

$$\bar{D}_{44} = (\bar{I}_3^{(s)}I_4^{(0)} - \bar{I}_4^{(s)}I_3^{(0)})/((I_3^{(0)})^2 + (I_4^{(0)})^2). \tag{1.29}$$

Подставляя (1.28) и (1.29) в (1.19в), находим второе функциональное соотношение между параметрами Стокса рассеянного ансамблем частиц поляризованного света, а именно

$$(a_4W_{43} + a_3I)\bar{I}_4^{(s)} = (a_4I - W_{43})\bar{I}_3^{(s)}, \tag{1.30}$$

где

$$a_3 = I_3^{(0)}/((I_3^{(0)})^2 + (I_4^{(0)})^2); \quad a_4 = I_4^{(0)}/((I_3^{(0)})^2 + (I_4^{(0)})^2).$$

Для вектора $\mathbf{I}^{(0)}=\{1, 0, 1, 0\}$ $a_3=1$, $a_4=0$, и (1.30) принимает вид

$$\bar{I}_4^{(s)} = -W_{43}\bar{I}_3^{(s)}. \tag{1.31}$$

И, наконец, используя (1.19б), находим последнее соотношение между компонентами вектора $\mathbf{I}^{(s)}$, а именно

$$a_2W_{31}\bar{I}_2^{(s)} - a_1W_{31}\bar{I}_1^{(s)} = a_3\bar{I}_3^{(s)} + a_4\bar{I}_4^{(s)}. \tag{1.32}$$

Если ограничиться случаем $\mathbf{I}^{(0)}=\{1, 0, 1, 0\}$, то из (1.32) следует простая операторная связь между $\bar{I}_3^{(s)}$ и $\bar{I}_1^{(s)}$:

$$\bar{I}_3^{(s)} = -W_{31}\bar{I}_1^{(s)}. \tag{1.33}$$

Напомним, что, поскольку компоненты вектора $\mathbf{I}^{(s)}$ зависимы и для них выполняется известное соотношение

$$(\bar{I}_1^{(s)})^2 = (\bar{I}_2^{(s)})^2 + (\bar{I}_3^{(s)})^2 + (\bar{I}_4^{(s)})^2,$$

то построенных выше трех выражений (1.25), (1.31) и (1.33) вполне достаточно для их взаимного перехода. Из (1.31) и (1.33) нетрудно выразить $\bar{I}_4^{(s)}$ через $\bar{I}_1^{(s)}$. Находим

$$\bar{I}_4^{(s)} = W_{43}W_{31}\bar{I}_1^{(s)} = W_{41}\bar{I}_1^{(s)}. \tag{1.34}$$

Последнее выражение интересно в двух отношениях. Во-первых, оно свидетельствует о наличии некой алгебры для операторов W_{ij} $(i, j=1, 2, 3, 4)$, а во-вторых, указывает на возможность выразить компоненты вектора Стокса рассеянного света $\bar{I}_2^{(s)}$, $\bar{I}_3^{(s)}$ через $\bar{I}_1^{(s)}$. Последнее обстоятельство очень важно в прикладных исследованиях по оптике дисперсных сред. Таким образом, выполненные выше аналитические построения показывают, что с помощью оптических операторов перехода для элементов матрицы рассеяния $\bar{D}$ исследуемой полидисперсной системы частиц компоненты вектора Стокса рассеянного излучения можно представить как совокупность взаимозависимых функций угла рассеяния. Существование матрицы подобных операторов $\{W_{ij}\}$ для полидисперсных систем частиц и возможность ее априорного расчета для заданной морфологии частиц могут быть положены в основу разработки теории методов оптического зондирования дисперсных сред. В пределах настоящей главы эту возможность мы проиллюстрируем на примере теории поляризационного зондирования аэрозольных систем, частицы которых по форме не слишком отличаются от сферических.

1.2. Оптические операторы в теории поляризационного зондирования рассеивающих компонент атмосферы

1.2.1. Определение характеристик дисперсных сред по данным поляризационного зондирования

Определение спектра размеров частиц в пределах некоторого рассеивающего объема по данным оптического зондирования является одной из основных обратных задач оптики дисперсных сред. Если речь идет об аэрозольных системах, то пространственно-временная изменчивость функции распределения $n(r)$, отнесенная к единичному рассеивающему объему, является источником информации о химико-физических процессах в атмосфере, в которых аэрозоли так или иначе принимают участие. Используя уравнение аэрозольной кинетики, можно сформулировать некоторые обратные задачи физики атмосферы и разработать методы дистанционного определения полей основных метеопараметров. Краткое введение в теорию подобных задач можно найти в монографии [33]. Однако, возвращаясь к микроструктурному анализу дисперсных сред из оптических измерений, следует отметить, что эта задача не определена, если неизвестен показатель преломления аэрозольного вещества. Действительно, полидисперсные интегралы вида (1.27) зависят от комплексной величины $\bar{m}=\bar{m}'-\bar{m}''i$, где $\bar{m}'$ и $\bar{m}''$ — соответственно вещественная и мнимая части показателя преломления. Следовательно, мы должны рассматривать более сложную обратную задачу теории светорассеяния, решением которой являются распределение $n(r)$ и показатель $\bar{m}$.

В пределах данного параграфа будет изложен метод решения подобной задачи при условии, что совокупность исходных оптических измерений представлена параметрами Стокса $\bar{I}_j^{(s)}(\vartheta)$ ($j=1, 2, 3, 4$), где угол рассеяния пробегает некоторые значения из интервала $\Theta=(\vartheta_{\min}, \vartheta_{\max})$. В дальнейшем интервал углов рассеяния Θ, реализуемый в соответствующем оптическом эксперименте, будем называть интервалом оптического зондирования. Если в качестве измерительного оптического прибора используется поляризационный нефелометр, то интервал зондирования Θ может охватить углы от 0 до 180°. При дистанционном лазерном зондировании атмосферы по бистатической схеме в эксперименте реализуется область углов, как правило, больших 90°. Поскольку рассеяние плоской оптической волны характеризуется параметрами Стокса, то оптические эксперименты по светорассеянию исследуемыми дисперсными средами, в которых измеряются именно эти параметры, относят к поляризационным методам оптического зондирования. В связи с этим ниже будем употреблять термин «поляризационное зондирование». Следует, однако, заметить, что в оптических экспериментах измеряются, как правило, не сами параметры $\bar{I}_j^{(s)}$, а интенсивности потоков света $P_j^{(s)}$, рассеянные освещенными объемами среды и достигающие приемника. Указанные величины в приближении однократного рассеяния связаны друг с другом достаточно простым соотношением

$$\mathbf{P}^{(s)}=B\mathbf{I}^{(s)}, \tag{1.35}$$

где B — некоторая функция расстояния z до освещенного объема, угла рассеяния ϑ и параметров приемопередающей системы. Совокупность величин $P_j^{(s)}$ будем обозначать единым термином «оптический сигнал».

Теперь посмотрим, каким образом могла бы быть решена сформулированная выше обратная задача для совокупности измеренных величин (функции угла ϑ) $P_j^{(s)}$ ($j=1, 2, 3, 4$) с использованием изложенного выше операторного подхода к теории светорассеяния полидисперсными системами частиц. Соответствующие аналитические построения будут ограничены выводом основных функциональных уравнений и их общим анализом. В силу этого их следует рассматривать как введение в общую теорию поляризационного метода оптического зондирования полидисперсных систем. Возможно, что для практического применения и не понадобится столь общая постановка обратной задачи светорассеяния, поскольку в практике атмосферно-оптических исследований постоянно сталкиваемся с ограниченными объемами измерительной информации, не допускающими одновременной оценки всех возможных физических параметров дисперсной среды.

Обратимся к системе (1.21), связывающей компоненты векторов $\mathbf{I}^{(0)}$ и $\mathbf{I}^{(s)}$ с элементами матрицы рассеяния полидисперсной системы сферических частиц, и выпишем отдельно первую пару уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \bar{I}_1^{(s)} &= \bar{D}_{11} I_1^{(0)} + \bar{D}_{12} I_2^{(0)}; \\ \bar{I}_2^{(s)} &= \bar{D}_{12} I_1^{(0)} + \bar{D}_{11} I_2^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

Нетрудно видеть, что эта система уравнений вполне определена относительно функций $\bar{D}_{11}(\vartheta)$ и $\bar{D}_{12}(\vartheta)$, несущих непосредственно информацию о микрофизических характеристиках рассеивающей дисперсной среды. Ее решения были записаны выше, в форме (1.22) и (1.23) соответственно. Если допустить, что поляризация зондирующего излучения выбрана таким образом, что $I_2^{(0)}=0$, то первый элемент матрицы рассеяния $\bar{D}_{11}$, называемый обычно коэффициентом направленного светорассеяния, выразится очень просто через $I_1^{(0)}$ и $\bar{I}_1^{(s)}$, а именно $\bar{I}_1^{(s)}=\bar{D}_{11} I_1^{(0)}$. Вводя отношение $a_1^{(s)}=\bar{I}_1^{(s)}/I_1^{(0)}$ в последнее равенство, найдем

$$\bar{D}_{11}=a_1^{(s)}. \tag{1.37}$$

Поскольку функция $a_1^{(s)}(\vartheta)$, где ϑ — угол рассеяния, непосредственно определяется в эксперименте, то в рассматриваемом случае можно говорить о прямом измерении оптической характеристики $\bar{D}_{11}(\vartheta)$. Если $a_1^{(s)}(\vartheta)$ найдена в эксперименте с ошибкой, не превышающей 5—10 % в области углов $(0, \pi)$, то обращение характеристики $\bar{D}_{11}(\vartheta)$ дает вполне состоятельную оценку спектра размеров частиц, о чем подробнее будет сказано ниже. Соответствующая обратная задача требует знания показателя преломления аэрозольного вещества. Вместе с тем, если априори для системы сферических частиц известны оптические константы вещества $\bar{m}'$ и $\bar{m}''$, то в равной мере определена и матрица операторов $\{W_{ij}\}$, которая была построена выше, в предыдущем разделе. Если в первое уравнение системы (1.36) ввести оператор W_{21} путем замены $\overline{D}_{12}$ на $W_{21}\overline{D}_{11}$, то получим новое функциональное (операторное) уравнение относительно $\overline{D}_{11}$, а именно

$$c_2^{(0)} W_{21}\overline{D}_{11} + \overline{D}_{11} = a_1^{(s)}, \tag{1.38}$$

где $c_2^{(0)} = I_2^{(0)}/I_1^{(0)}$. Поскольку операторы типа W являются интегральными, то (1.37) является интегральным уравнением второго рода, и, следовательно, его решение принадлежит к корректно поставленным математическим задачам. Уравнение (1.38) в отличие от (1.37) позволяет найти элемент $\overline{D}_{11}$ при произвольной поляризации падающего излучения. Конечно, в последнем случае необходима вполне определенная априорная информация об исследуемой дисперсной среде, так как расчет матричного аналога $\widehat{W}_{21}$ для оператора W_{21} требует привлечения расчетных формул теории Ми. Таким образом, уравнение (1.38) позволяет найти функцию $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ по измерениям только одной компоненты $\overline{I}_1^{(s)}$ при произвольном векторе $\mathbf{I}^{(0)}$. Поскольку в случае произвольной поляризации первое уравнение системы (1.36) само по себе не определено в силу наличия в нем двух неизвестных функций $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ и $\overline{D}_{12}(\vartheta)$, то можно утверждать, что введение оператора W_{21} по существу эквивалентно сокращению объема измерительной информации. В излагаемом подходе элементы $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ и $\overline{D}_{12}(\vartheta)$ определяются по $\overline{I}_1^{(s)}(\vartheta)$ с привлечением той информации, которая, образно говоря, содержится в теории Ми, т. е. в теории, описывающей процесс рассеяния оптической волны сферической частицей размера r и с заданным показателем преломления. Подобная возможность технически реализуется с помощью оператора W_{21}. Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует основное назначение операторов типа W в излагаемой теории поляризационного зондирования дисперсных сред. Их применение позволяет доопределить те уравнения теории оптического зондирования, которые не определены из-за отсутствия соответствующей измерительной информации.

Вернемся к уравнению (1.38). Если его численное решение строить на основе метода последовательных приближений, т. е. в соответствии с итерационной схемой вида

$$c_{2j}^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}\overline{D}_i^{(p-1)} + \overline{D}_j^{(p)} = a_{ij}^{(s)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.39}$$

где p — номер приближения, $c_{2j}^{(0)} = c_2^{(0)}(\vartheta_j)$, $\overline{D}_j = \overline{D}_{11}(\vartheta_j)$ и $\{\omega_{ij}\} = \widehat{W}_{21}$, то требуется, как известно [50], удовлетворить условию

$$\| c_2^{(0)} W_{21} \| < 1. \tag{1.40}$$

Поскольку для падающего поляризованного излучения имеет место равенство

$$I_1^{(0)^2} = I_2^{(0)^2} + I_3^{(0)^2} + I_4^{(0)^2}, \tag{1.41}$$

то $c_2^{(0)}(\vartheta) \leqslant 1$ для всех углов ϑ из области $(0, \pi)$. В связи с этим остается показать, что

$$\|W_{21}\| < 1. \tag{1.42}$$

Операторы, удовлетворяющие этому условию, принято называть операторами сжатия [3, 22].

Если исходить из равенства (1.41), неравенства [5]

$$\overline{I}_1^{(s)^2} \geqslant \overline{I}_2^{(s)^2} + \overline{I}_3^{(s)^2} + \overline{I}_4^{(s)^2} \tag{1.43}$$

и выражений для $\overline{D}_{ij}$ предыдущего раздела (1.22), (1.23) и (1.28), (1.29), то нетрудно показать справедливость неравенства

$$\overline{D}_{11}^2 \geqslant \overline{D}_{12}^2 + \overline{D}_{33}^2 + \overline{D}_{34}^2. \tag{1.44}$$

Соотношения (1.44) вполне достаточно, чтобы строго доказать требуемое неравенство (1.42). Подробнее техники доказательства неравенств типа (1.42) для операторов перехода будем касаться ниже, в третьей главе. Они играют очень важную роль при построении итерационных схем обработки оптических данных.

Заканчивая изложение вопросов, связанных с определением коэффициента направленного светорассеяния $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ для аэрозольной системы частиц по данным поляризационного зондирования, следует указать еще на одно важное применение операторов W. В соответствии с (1.37) функция $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ может быть найдена и при зондировании исследуемой дисперсной среды неполяризованным светом, для которого $\mathbf{I}^{(0)} = \{I_1^{(0)}, 0, 0, 0\}$. Если при этом существует возможность обоснованного расчета операторов W_{ij}, то можно оценить и все остальные элементы $\overline{D}_{ij}$. В результате удается решить очень важную прикладную задачу, а именно по данным зондирования аэрозольной системы неполяризованным светом спрогнозировать ее «отклик» на падающую поляризованную волну. Возможность решения подобных прогностических задач является еще одним достоинством метода оптических операторов, или, что более точно, метода обратной задачи теории светорассеяния полидисперсными системами. Перечисленные возможности реализуются с помощью соответствующих программных комплексов по обработке и интерпретации оптических данных [8].

Вместе с тем следует заметить, что информационные возможности оптических операторов W в анализе и интерпретации данных по светорассеянию в полной мере могут быть раскрыты при решении более сложных оптических задач, нежели те, о которых речь шла выше. Дело в том, что структура матрицы $\{D_{ij}\}$ для системы сферических частиц весьма проста, и при решении исходной системы функциональных уравнений (1.21) теории поляризационного зондирования особых трудностей не возникает. Другое дело, когда нам приходится сталкиваться в атмосферно-оптических исследованиях с более сложными по структуре матрицами рассеяния. Примером здесь может служить полидисперсная система несферических частиц, случайно ориентированных в освещенном объеме. В ряде случаев подобная система частиц в большей степени соответствует реальным аэрозольным системам, нежели ансамбль сферических частиц. В соответствии с (1.2) систему уравнений, связывающую элементы $\overline{D}_{ij}$ с компонентами векторов Стокса $\mathbf{I}^{(s)}$ и $\mathbf{I}^{(0)}$, теперь следует писать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\overline{I}_1^{(s)} &= \overline{D}_{11}I_1^{(0)} + \overline{D}_{12}I_2^{(0)};\\ \overline{I}_2^{(s)} &= \overline{D}_{12}I_1^{(0)} + \overline{D}_{22}I_2^{(0)};\\ \overline{I}_3^{(s)} &= \overline{D}_{33}I_3^{(0)} + \overline{D}_{34}I_4^{(0)};\\ \overline{I}_4^{(s)} &= -\overline{D}_{34}I_3^{(0)} + \overline{D}_{44}I_4^{(0)}.\end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

Система (1.45) не определена, поскольку содержит шесть неизвестных функций угла рассеяния ϑ. Для преодоления этой трудности необходимо соответствующим образом увеличивать объем экспериментальных измерений, прибегая к зондированию исследуемой дисперсной среды излучением с различной поляризацией. В силу технической сложности подобные эксперименты навряд ли выполнимы в условиях реальной атмосферы. Имеющиеся к настоящему времени данные, как правило, получены на лабораторном оборудовании [5].

Альтернативное решение этой задачи можно осуществить на основе оптических операторов W_{ij}, доопределяющих систему (1.45) операторными уравнениями связи между неизвестными функциями $\overline{D}_{ij}$. При использовании вычислительных методов здесь возникают значительные, но вполне преодолимые трудности, связанные с расчетом характеристик светорассеяния несферических частиц, о чем скажем подробнее в заключении настоящей главы. Однако не следует также упускать возможность определения матриц $\widehat{W}_{ij}$ по соответствующим экспериментальным данным, полученным средствами поляризационного зондирования модельных аэрозольных систем в лабораторных условиях. Подобные обратные задачи оптики дисперсных сред обсуждались ранее в монографии авторов [17].

Первые два уравнения системы (1.45) по $\overline{I}_1^{(s)}(\vartheta)$ и $\overline{I}_2^{(s)}(\vartheta)$ не позволяют найти элементы $\overline{D}_{11}$, $\overline{D}_{12}$ и $\overline{D}_{22}$. Однако вводя в первое уравнение оператор W_{21}, мы делаем его вполне определенным. Полученное таким путем уравнение принадлежит к тому же типу, что и рассмотренное ранее уравнение (1.38).

В завершении излагаемой здесь теории поляризационного зондирования дисперсных сред остается рассмотреть вопросы, связанные с определением показателя преломления аэрозольного вещества. При построении соответствующих расчетных методик будем полагать, что коэффициент направленного светорассеяния $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ уже определен ранее одним из рассмотренных способов. Для нахождения показателя преломления по компонентам вектора $\mathbf{I}^{(s)}$ уже не требуется знать их абсолютные значения либо отношения $a_i^{(s)} = \overline{I}_i^{(s)}/I_1^{(0)}$. В связи с этим можно перейти к поляризационному вектору $\mathbf{c}^{(s)}=\{1,\ c_2^{(s)},\ c_3^{(s)},\ c_4^{(s)}\}$, вводя его компоненты в соответствующие расчетные формулы. Перепишем сначала систему (1.36), используя оператор W_{21}:

$$\left.\begin{aligned} P_1^{(s)} &= B\overline{I}_1^{(s)}, & \overline{I}_1^{(s)} &= I_1^{(0)}\overline{D}_{11} + I_2^{(0)}W_{21}\overline{D}_{11}; \\ P_2^{(s)} &= B\overline{I}_2^{(s)}, & \overline{I}_2^{(s)} &= I_1^{(0)}W_{21}\overline{D}_{11} + I_2^{(0)}\overline{D}_{11}. \end{aligned}\right\} \quad (1.46)$$

Вводя отношение $c_2^{(s)}=\overline{I}_2^{(s)}/\overline{I}_1^{(s)}=P_2^{(s)}/P_1^{(s)}$, независящее от аппаратурной функции $B(z,\vartheta)$, определение которой для бистатического поляризационного лидара [17] — дело весьма не простое, (1.46) можно свести к следующему уравнению:

$$I_1^{(0)}W_{21}\overline{D}_{11} + I_2^{(0)}\overline{D}_{11} = c_2^{(s)}\left(I_1^{(0)}\overline{D}_{11} + I_2^{(0)}W_{21}\overline{D}_{11}\right).$$

Запись этого уравнения можно заметно упростить, если обозначить через $c_2^{(0)}$ отношение $I_2^{(0)}/I_1^{(0)}$ и ввести величину $g=(c_2^{(0)}-1)/(c_2^{(0)}-c_2^{(s)})$, которая, естественно, является функцией угла рассеяния ϑ. С учетом этих замечаний окончательно имеем

$$gW_{21}\overline{D}_{11}=\overline{D}_{11}. \quad (1.47)$$

В этом уравнении неизвестным является оператор W_{21}, поскольку неизвестен показатель преломления $\overline{m}=\overline{m}'-i\overline{m}''$. Следует особо подчеркнуть, что оператор W_{21} не зависит от функции распределения частиц по размерам. Поэтому если функция $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ найдена в эксперименте, то определение $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$ из уравнения (1.47) не требует априорных знаний о спектре размеров частиц. В этом отношении излагаемый здесь способ оценки констант $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$, основанный на параметрической зависимости оператора $W_{21}(\overline{m}',\ \overline{m}'')$, существенно отличается своей математической строгостью и эффективностью от многочисленных методик, в основе которых лежит параметрическая зависимость оптических характеристик от микроструктуры и показателя преломления.

Теперь остается использовать третье и четвертое уравнения в системе (1.21). Вводя по аналогии $c_3^{(s)}$ и $c_4^{(s)}$, получаем

$$\left(-c_2^{(0)}c_3^{(s)}W_{21}+c_3^{(0)}W_{31}+c_4^{(0)}W_{41}\right)\overline{D}_{11}=c_3^{(s)}\overline{D}_{11}, \quad (1.48)$$

$$\left(-c_2^{(0)}c_4^{(s)}W_{21}+c_4^{(0)}W_{31}-c_3^{(0)}W_{41}\right)\overline{D}_{11}=c_4^{(s)}\overline{D}_{11}. \quad (1.49)$$

Выражения (1.47—1.49) образуют полную систему операторных уравнений теории поляризационного зондирования полидисперсной системы частиц, которая зависит от показателя $\overline{m}$. В общем случае, как уже было показано выше, определение $\overline{D}_{11}$ требует задания оператора W_{21}, т. е. знаний параметров $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$, поэтому указанная система трех уравнений, строго говоря, не является переопределенной. К тому же следует иметь в виду, что в силу неравенства (1.44) операторы W_{ij} в последних трех уравнениях нельзя считать полностью независимыми. Поэтому для определения двух величин $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$ у нас фактически имеется два операторных уравнения (1.48) и (1.49). Поскольку обычно вычислительный алгоритм строится по методу наименьших квадратов, то предпочтительно использовать совместно все три уравнения, объединяя их общей оптической невязкой. Заметим, что в случае линейно поляризованного падающего света, когда $c^{(0)}=\{1, 0, 1, 0\}$, исходная система трех уравнений принимает наиболее простой вид, а именно:

$$\left.\begin{aligned} W_{21}\overline{D}_{11} &= c_2^{(s)}\overline{D}_{11}; \\ W_{31}\overline{D}_{11} &= c_3^{(s)}\overline{D}_{11}; \\ W_{41}D_{11} &= -c_4^{(s)}\overline{D}_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

Оптические невязки для этих уравнений можно записать в следующем виде:

$$\rho_i(\overline{m}', \overline{m}'') = \| W_{i1}(\overline{m}', \overline{m}'')\overline{D}_{11} - c_{i\sigma}^{(s)}\overline{D}_{11}\|_{L_2(\Theta)}. \tag{1.51}$$

Вектор $c_\sigma^{(s)}$ есть σ — приближение для исходного в норме l_2 [10, 21, 43]. Определение $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$ осуществляется путем совместной минимизации оптических невязок. В тех случаях, когда приходится прибегать к оператору W_{21} для определения $\overline{D}_{11}$, схема вычислений строится по методу последовательных приближений.

В заключение необходимо заметить, что любая пара уравнений в системе (1.50) формально определяет не только константы $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$, а и некие функции $\overline{m}'(r)$ и $\overline{m}''(r)$. Действительно, любое из уравнений (1.50) приводится к виду

$$\int_{R_1}^{R_2} Q_{i1}[\overline{m}'(r), \overline{m}''(r), r, \vartheta]\,dr = f_i(\vartheta). \tag{1.52}$$

Поэтому систему (1.51) фактически следует заменить системой нелинейных интегральных уравнений указанного типа (уравнения Урысона [26]). Физические задачи, для которых существенна зависимость $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$ от размера частиц, возникают при исследовании оптическими методами аэрозольных систем, взаимодействующих, например, с полем влажности [19, 23]. Соответствующие практические примеры, связанные с интерпретацией поляризационных индикатрис, приводились ранее в работе авторов [17].

В заключение отметим, что изложенная выше теория оптического зондирования технически реализуется с использованием таких систем, как поляризационные нефелометры открытого и закрытого объемов и поляризационные бистатические лидары (см. монографию [17]).

1.2.2. К теории микроструктурного анализа аэрозольных полидисперсных систем из оптических измерений

Изложенная выше структура решающего алгоритма касалась решения системы (1.21) относительно оптических характеристик, а именно коэффициента направленного светорассеяния $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ и оптических констант $\bar{m}'=\mathrm{Re}(\bar{m})$ и $\bar{m}''=\mathrm{Im}(\bar{m})$ вещества частиц исследуемой дисперсной среды. Теперь обратимся к определению функции распределения $n(r)$ на основе численного обращения вектора $\mathbf{D}_{11}$ с компонентами $\bar{D}_{11}(\vartheta_l)$, $l=1, \ldots, n$. Исходное интегральное уравнение (1.39) для этой задачи будем записывать в следующем виде:

$$\int\limits_R K_{11}(x, \vartheta) s(r)\, dr = \bar{D}_{11}(\vartheta), \quad \vartheta \in \Theta. \tag{1.53}$$

Ядро интегрального уравнения $K_{11}(x, \vartheta) = (i_1(x, \vartheta) + i_2(x, \vartheta))/2\pi x^2$, где $x=2\pi r\lambda^{-1}$, а исходная функция $s(r)=\pi r^2 n(r)$ характеризует распределение геометрического сечения частиц в единичном рассеивающем объеме по их размерам. Выбор именно этой функции в качестве неизвестной далеко не случаен. Каждая частица в данном направлении ϑ рассеивает падающее на нее излучение пропорционально в первом приближении ее геометрическому сечению (то же самое поверхности). Поэтому в уравнении (1.53) множитель $s(r)dr$ имеет размерность, обратную линейному размеру, т. е. L^{-1} (ниже, если не оговорено специально, будем считать, что L^{-1} измеряется в км$^{-1}$), а это как раз соответствует размерности измеренной оптической характеристики $\bar{D}_{11}$ (коэффициенту направленного светорассеяния). Выбрав функцию $s(r)$ в качестве исходного распределения, ядро уравнения (1.53) становится безразмерным так же, как и функции безразмерной интенсивности $i_j(x, \vartheta)$. По аналогии $K_{11}(x, \vartheta)$ называют фактором эффективности рассеяния. Помимо указанного выше обстоятельства, распределение $s(r)$ обладает рядом и других аналитических свойств, которые также делают его выбор предпочтительным при обращении интегрального уравнения (1.53) по сравнению с функцией плотности $n(r)$, но об этом мы скажем несколько позже.

Уравнение (1.53) показывает, что определение $s(r)$ в принципе можно осуществить двумя способами. Первый из них может состоять в том, что в эксперименте измеряется угловой ход коэффициента направленного светорассеяния $\bar{D}_{11}(\vartheta)$ в дискретном множестве фиксированных углов $\{\vartheta_l, l=1, \ldots, n\}$. Во втором случае фиксируется угол ϑ, а измерения осуществляются по длинам волн $\{\lambda_i, i=1, \ldots, n\}$. Естественно, возникает вопрос о том, какой же из указанных вариантов предпочтительнее. К сожалению, в общей постановке однозначно на него ответить трудно, поэтому мы остановимся на некоторых частных аспектах поставленного выше вопроса, важных, однако, для практических приложений.

Если фиксируется угол ϑ, то имеем интегральное уравнение

$$\int\limits_R K_{11}(r, \lambda/\vartheta) s(r)\, dr = \bar{D}_{11}(\lambda/\vartheta), \quad \lambda \in \Lambda. \tag{1.54а}$$

При обратной ситуации

$$\int\limits_R K_{11}(r, \vartheta/\lambda) s(r)\, dr = \bar{D}_{11}(\vartheta/\lambda), \quad \vartheta \in \Theta. \tag{1.54б}$$

Ясно, что в зависимости от размеров области R и особенностей аналитического поведения в ней искомого распределения $s(r)$ в ряде случаев лучше может быть обусловлено первое уравнение, а иногда — второе. Конечно, в практике атмосферно-оптических исследований атмосферных аэрозолей определяющим зачастую является наличие тех или иных технических средств, однако всегда необходимо общее представление об информационных возможностях оптических методов зондирования и тех технических систем, с помощью которых они реализуются.

Прежде всего, обратим внимание на то, что функция $D_{11}(\lambda|\vartheta)$ в (1.54а) формально определена в бесконечной области значений λ, а именно, $(0, \infty)$. Конечно, практически, когда область размеров $R=[R_1, R_2]$ конечна, а это, как правило, всегда выполняется для реальных дисперсных сред, естественно ограничиться конечными интервалами оптического зондирования Λ. Однако в этом случае выбор границ интервала $\Lambda=[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ должен существенно зависеть от границ области R: чем шире ее размеры, тем шире должен быть и спектральный интервал Λ. Оптическое зондирование в широких спектральных интервалах влечет необходимость учета зависимости показателя преломления от λ, т. е. введения в обратные задачи по существу нового распределения $\overline{m}(\lambda)$. Напомним, что распределениями мы называем любые положительные функции. В последнем примере имеются в виду условия $\overline{m}'(\lambda)>0$ и $\overline{m}''(\lambda)\geqslant 0$ для всех λ из спектрального интервала Λ. Ядро интегрального уравнения (1.54а) усложняется и становится функционалом от $\overline{m}(\lambda)$, что подчеркивается при необходимости записью $K_{11}[\overline{m}(\lambda), r, \lambda]$. При этом подразумевается, что значение угла рассеяния ϑ фиксировано. Для того чтобы избежать указанной зависимости, существенно усложняющей решение обратной задачи, а в ряде случаев делающей ее просто неопределенной, пытаются выбрать интервал Λ очень узким. К сожалению, практически это не всегда удается. Например, для атмосферной дымки в приземном слое область возможных размеров охватывает интервал (0,05; 3 мкм), поэтому выбор в качестве Λ видимого диапазона длин волн (0,4; 0,7 мкм) может быть неэффективным. В соответствующем оптическом эксперименте по зондированию атмосферной дымки мы просто не получим информации, которая позволяла бы нам судить о всем спектре размеров частиц с требуемой достоверностью. Это специфика оптического зондирования аэрозольных систем, осуществляемого в конечных спектральных интервалах. В силу этого обстоятельства теория микроструктурного анализа дисперсных сред, осуществляемого на основе численного обращения уравнения (1.54а), включает в себя методики оптимального выбора интервала оптического зондирования Λ.

Для угловых оптических измерений ситуация несколько отлична, поскольку без существенных ограничений можно считать, что интервал зондирования Θ охватывает практически всю область возможных углов рассеяния $(0, \pi)$. Поэтому угловые измерения, хотя и относятся к конечному интервалу углов, «представляют» через интегральное уравнение (1.54б) практически весь спектр размеров независимо от размеров области R. Это очень важная особенность угловых измерений, которую необходимо учитывать при разработке систем оптического зондирования дисперсных сред.

В связи с вышеизложенным интересно отметить следующее обстоятельство. При интерпретации оптических характеристик светорассеяния в практике атмосферно-оптических исследований зачастую прибегают к параметрическим представлениям функции распределения $n(r)$. В тех работах, где речь идет об оценке микроструктурных характеристик атмосферных дымок по угловому ходу $D_{11}(\vartheta)$ (либо других элементов матрицы светорассеяния, см., например, [17]), предпочитают, как правило, использовать унимодальные распределения в качестве модельных. Это объясняется тем, совершенно естественным обстоятельством, что унимодальная модель $s_M(r, r_s)$ при надлежащем выборе модального радиуса практически всегда удовлетворяет условию

$$\min_{r_s} \| (K_{11}s_M)(\vartheta) - \overline{D}_{11,\sigma}(\vartheta) \| \leqslant \sigma \| \overline{D}_{11,\sigma}(\vartheta) \|, \tag{1.55}$$

где нормы определены в функциональном пространстве $L_2(\Theta)$, которое трансформируется в конечномерное пространство l_2 при замене функций в (1.55) их векторными аналогами. Следует заметить, что реальное распределение, конечно, может иметь несколько максимумов, но один из них явно преобладает и, следовательно, в большей мере проявляет себя в угловом ходе измеряемой оптической характеристики при данной точности измерений σ. Поэтому, какие бы априорные предположения об искомом спектре размеров не делались, ясно лишь одно, что любая положительная функция $n(r)$, удовлетворяющая граничным условиям $n(R_1) = n(R_2) = 0$, должна иметь по крайней мере один глобальный максимум внутри R. Это простейшее свойство функций, которые в принципе могут рассматриваться как решения двух интегральных уравнений (1.54). Угловые измерения, характеризуя, прежде всего, в целом искомое распределение, несут в себе информацию о его общих аналитических свойствах, что и находит свое выражение в тех моделях, которые рекомендуются в работах по интерпретации поляризационных (индикатрисных) измерений [44].

Следует отметить, что в теории обратных задач распределения типа $s_M(r)$, найденные с использованием ограничений типа (1.55), принято называть квазирешениями. Этим подчеркивается их отличие от функций, которые считаются действительными решениями соответствующих функциональных уравнений. Ниже термин «квазирешение» будет употребляться в тех случаях, когда требуется особо указать на приближенный (оценочный) характер полученного решения.

При интерпретации же спектральных оптических характеристик, какой, в частности, является объемный коэффициент аэрозольного ослабления β_{ex}, зачастую используют параметрическую модель степенного вида $n_M(r, \nu) = ar^{-\nu}$. Это распределение при зондировании атмосферных дымок в видимой области спектра Λ также оказывается приемлемым в смысле неравенства (1.55), однако это уже случается значительно реже.

Из практики атмосферно-оптических исследований известно, что если определение $\beta_{ex}(\lambda)$ осуществлено по спектральному ходу всей оптической толщи атмосферы $\tau(\lambda)$, измеренной солнечным радиометром, то можно удовлетворить неравенству

$$\min_{\nu} \| (K_{ex} s_M)(\lambda) - \beta_{ex}(\lambda) \| \leqslant \sigma \| \beta_{ex}(\lambda) \| \qquad (1.56)$$

и оценить параметр ν указанной выше модели. Однако, если $\beta_{ex}(\lambda)$ измерено для локальных рассеивающих объемов, когда эффекты пространственного осреднения спектра размеров несущественны, простейшая степенная модель не пригодна.

Степенная функция может характеризовать спектр размеров лишь локально, т. е. в узком подынтервале размеров $\Delta(R)$, а не во всей области возможных размеров R. В частности, степенная функция в R не может удовлетворить указанным выше граничным условиям, которые входят в само определение функции распределения частиц по размерам. При расширении интервала оптического зондирования Λ, естественно, приходится расставаться с указанной простейшей моделью и заменять ее кусочно-непрерывными функциями, для которых степенной показатель ν меняется при переходе от одного частного подынтервала $\Delta(R)$ к другому. Примеры подобных моделей приводятся в работах [46, 55]. Так проявляют себя особенности интегральных уравнений (1.54а, б) в практике оптических исследований аэрозолей.

Возвращаясь к поставленному выше вопросу, следует все же заметить, что для целей микроструктурного анализа дисперсных сред предпочтительно иметь совокупность спектральных и угловых измерений. Действительно, угловые измерения важны в том отношении, что позволяют при обращении с большей относительной достоверностью судить о спектре размеров в целом. Под этим понимается возможность более уверенно оценить границы искомых распределений R_1 и R_2 и эффективные размеры доминирующей фракции частиц. К сожалению, интервал предельного разрешения $\Delta_{\min}(r)$ микроструктурного анализа зондируемой полидисперсной системы остается зачастую все же большим и, главное, он не может быть заметно уменьшен при увеличении числа угловых измерений. Это в целом свидетельствует о низкой обусловленности оптических данных $\{\bar{D}_{11}(\vartheta_l),\ l = 1, \ldots, n\}$ для практически приемлемых значений ошибок σ $(0{,}05 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}15)$. Детальный численный анализ информативности индикатрисы атмосферных дымок $\mu(\vartheta) = 4\pi \bar{D}_{11}(\vartheta)/\beta_{sc}$ дан в работе авторов [17]. В частности, показано, что для указанного интервала значений σ (ошибка дается в относительной шкале, т. е. отнесена к $\max \bar{D}_{11}(\vartheta_l)$) допустимый интервал $\Delta(\vartheta)$ между соседними отсчетами составляет 10—20°. Уменьшение этого интервала, по существу, ничего не дает с точки зрения уменьшения интервала разрешения $\Delta_{\min}(r)$ по микроструктуре. Конечно, увеличение числа измерений может быть использовано для сглаживания измеряемых характеристик и некоторого ослабления влияния случайных ошибок на устойчивость обращения, но это уже другой вопрос, имеющий лишь косвенное отношение к микроструктурному анализу из оптических измерений. В этом отношении величина $\Delta_{\min}(r)$ для спектральных измерений может достигать заметно меньших значений при прочих равных условиях.

Методы оценки $\Delta_{\min}(r)$ при оптическом зондировании дисперсных сред в спектральных интервалах Λ применительно к дистанционному микроструктурному анализу атмосферных аэрозолей подробно описаны в работе [32]. Здесь мы не будем их касаться, поскольку они требуют для своего изложения не очень простых математических построений. Укажем лишь, что при зондировании дымок в видимой области при погрешности измерений $\sigma \leqslant 5\ \%$ вполне достижимо разрешение $\Delta_{\min}(r) \leqslant 0{,}2$ мкм. В результате оказывается возможным по спектральному ходу $\beta_{sc}(\lambda)$ либо $\beta_{\pi}(\lambda)$ путем обращения выявлять бимодальные распределения при условии, конечно, если максимумы разнесены друг от друга на расстояние, превышающее 0,2 мкм. Соответствующие примеры приведены в монографиях [17, 33].

Таким образом, становится ясным высказанное выше утверждение о целесообразности совместного обращения угловых и спектральных измерений при микроструктурном анализе дисперсных сред. Спектральные измерения дают возможность вскрыть особенности локального поведения спектра размеров, а угловые — характеризовать его в целом. Уместно также напомнить здесь о высокой чувствительности измерений $\bar{D}_{11}(\vartheta)$ при $\vartheta \to 0$ к изменению правой границы R_2 исследуемой полидисперсной системы, что служит основой эффективных методик интерпретации ореольных индикатрис [17].

Относительная низкая чувствительность угловых измерений к тонкой структуре спектра размеров обусловливается, конечно, ядром соответствующих интегральных уравнений $K_{11}(x, \vartheta)$. Основным «носителем» информации о спектре размеров являются амплитуды Ми $a_n(x)$ и $b_n(x)$, зависящие от размера r и λ (см. (1.5)). Функции τ_n и π_n зависят только от угла ϑ. Интенсивности i_j суть квадратичные формы от $a_n(x)$ и $b_n(x)$, в которых τ_n и π_n играют роль коэффициентов, независимых от r. Вариации $s(r)$ тем существеннее проявляют себя в полидисперсных функциях $\bar{i}_j$, чем сильнее меняются $a_n(2\pi r\lambda^{-1})$ и $b_n(2\pi r\lambda^{-1})$ по r и λ. Отсюда становится ясной роль в обратных задачах светорассеяния дисперсными средами спектральных оптических измерений. Кстати, в связи с вышеизложенным интересно заметить, что единообразие аналитической структуры i_j, т. е. то, что они являются квадратичными формами от $a_n(x)$ и $b_n(x)$ с коэффициентами $\pi_k(\vartheta)$, $\tau_k(\vartheta)$ $(k, k'=1, \ldots)$, делает их в совокупности зависимыми друг от друга. Конечно, вскрыть эту зависимость аналитическими средствами по аналогии с тем, как это делалось на примере системы функций $\overline{i_j}$ через операторы взаимного перехода E_{ij}, трудно. Однако это обстоятельство так или иначе необходимо учитывать, чтобы разумно ограничивать объемы измерений в экспериментах по светорассеянию.

В заключение кратко коснемся той неопределенности интегральных уравнений (1.54), которая обусловливается незнанием границ R_1 и R_2 области возможных размеров R частиц зондируемой полидисперсной среды. Строгий анализ, выполненный в работах [17, 33], показывает, что в принципе может быть поставлена и решена обратная задача светорассеяния, в которой неизвестными являются и распределение $s(r)$ и границы интервала R. В этом случае исходные интегральные уравнения (1.54) преобразуются в нелинейные интегральные уравнения (типа Урысона [26]). Поскольку нелинейные функциональные уравнения имеют несколько альтернативных решений даже при вполне разумных исходных ограничениях, решение обратной задачи светорассеяния по микроструктурному анализу становится неоднозначным. Истоки этой неоднозначности лежат в том, что различные полидисперсные системы частиц, характеризуемые парой $(s(r), R)$, могут иметь близкие оптические характеристики. В связи с этим при обращении конкретных оптических данных приходится всегда прибегать к приближенной оценке значений R_1 и R_2. Соответствующие практические методики неоднократно излагались ранее в работах авторов [17, 36]. Некоторые из них будут затрагиваться ниже.

1.2.3. Разделение молекулярной и аэрозольной компонент рассеяния методами поляризационного зондирования

В условиях реальной атмосферы светорассеяние складывается из двух факторов, а именно рассеяния на аэрозолях и молекулах воздуха. Поэтому, прежде чем решать обратные задачи и делать какие-либо выводы о физических параметрах атмосферы, необходимо оценить вклад в рассеяние каждой из указанных компонент в измеренные оптические сигналы. Поставленная задача имеет особое значение при исследовании верхней и средней атмосферы оптическими методами. В рамках теории поляризационного зондирования, которая излагалась выше, нетрудно построить общие функциональные уравнения для совместного определения оптических характеристик указанных двух компонент. Действительно, поскольку теперь общая матрица светорассеяния D, преобразующая вектор $\mathbf{I}^{(0)}$ в $\mathbf{I}^{(s)}$, равна сумме двух матриц, а именно аэрозольного рассеяния $\overline{D}^{(\text{a})}$ и молекулярного $D^{(\text{м})}$, то по аналогии с (1.36) имеем

$$\left.\begin{aligned} \overline{I}_1^{(s)} &= I_1^{(0)}\overline{D}_{11} + I_2^{(0)}\overline{D}_{12} + \beta_{sc}^{(\text{м})}\left(I_1^{(0)}M_{11} + I_2^{(0)}M_{12}\right); \\ \overline{I}_2^{(s)} &= I_1^{(0)}\overline{D}_{12} + I_2^{(0)}\overline{D}_{11} + \beta_{sc}^{(\text{м})}\left(I_1^{(0)}M_{12} + I_2^{(0)}M_{22}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1.57)$$

При записи уравнений (1.57) опущен надстрочный индекс «а», поскольку верхней черты над $\overline{D}_{ij}$ вполне достаточно для отличия характеристик рассеяния. Матрица молекулярного рассеяния $\{D_{ij}^{(\text{м})}\}$ в (1.57) представлена в виде произведения объемного коэффициента $\beta_{sc}^{(\text{м})}$ и нормированной матрицы $\{M_{ij}\}$. Последняя имеет структуру, близкую к матрице $\{\overline{D}_{ij}\}$, с той разницей, что в ней $M_{34}=M_{43}=0$ [14].

В последней системе неизвестными являются функции $\overline{D}_{11}(\vartheta)$, $\overline{D}_{12}(\vartheta)$ и величина $\beta_{sc}^{(\text{м})}$. Что касается значений M_{ij}, то они просто выражаются через тригонометрические функции угла ϑ. Ясно, что система (1.57) не определена и выбором поляризационного вектора $\mathbf{c}^{(0)}$ ее не удается сделать определенной. Введение оптического оператора W_{21} — единственный способ доопределить (1.57) и корректно поставить обратную задачу. Действительно, в последнем случае (1.57) сводится к системе:

$$\left.\begin{aligned} c_2^{(0)}W_{21}\overline{D}_{11}+\overline{D}_{11}+\beta_{sc}^{(\text{м})}\left(M_{11}+c_2^{(0)}M_{12}\right)=a_1^{(s)};\\ W_{21}\overline{D}_{11}+c_2^{(0)}\overline{D}_{11}+\beta_{sc}^{(\text{м})}\left(M_{12}+c_2^{(0)}M_{22}\right)=a_2^{(s)}.\end{aligned}\right\}\qquad(1.58)$$

Эта система принимает более простой вид, если положить $\mathbf{c}^{(0)}=\{1, 0, 1, 0\}$, а именно

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}_{11}+\beta_{sc}^{(\text{м})}M_{11}=a_1^{(s)};\\ W_{21}\overline{D}_{11}+\beta_{sc}^{(\text{м})}M_{12}=a_2^{(s)}.\end{aligned}\right\}\qquad(1.59)$$

Из системы (1.59) нам требуется найти функцию $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ и постоянную $\beta_{sc}^{(\text{м})}$. Вместе с тем ясно, что формально система двух функциональных уравнений определяет две неизвестные функции. Поэтому можно утверждать, что (1.59) содержит в себе больше информации, нежели нам требуется в рассматриваемой задаче при обращении измерений $a_1^{(s)}(\vartheta)$ и $a_2^{(s)}(\vartheta)$. Действительно, разделяя неизвестные в (1.59), приходим к двум уравнениям:

$$W_{21}\overline{D}_{11}+q\overline{D}_{11}=f,\qquad(1.60)$$

где $q=-M_{12}/M_{11}$ и $f=\left(M_{11}a_2^{(s)}-M_{12}a_1^{(s)}\right)/M_{11}$, и

$$a_2^{(s)}-W_{21}a_1^{(s)}=\beta_{sc}^{(\text{м})}\left(M_{12}-W_{21}M_{11}\right).\qquad(1.61)$$

Уравнение (1.60) так же, как и (1.38), принадлежит к интегральным уравнениям второго рода, и нет необходимости останавливаться на нем подробно. Более интересным с содержательной точки зрения является второе уравнение (1.61). Ясно, что оно определяет некую константу $\beta_{sc}^{(\text{м})}$ в том случае, если отношение $\left(a_2^{(s)}-W_{21}a_1^{(s)}\right)/\left(M_{12}-W_{21}M_{11}\right)$ не зависит от угла рассеяния ϑ. Чтобы удовлетворить этому условию, требуется взаимосогласованность экспериментальных данных $\{a_1^{(s)}, a_2^{(s)}\}$ и априори привлекаемой информации, представленной здесь матрицами $\{\overline{D}_{ij}\}$ (то же самое операторами W_{ij}) и $\{M_{ij}\}$. Таким образом, в процессе интерпретации представляется возможность как-то оценить меру соответствия привлекаемой априорной информации реальной ситуации в эксперименте.

Оставшиеся два уравнения, аналогичные (1.57) и касающиеся компонент $\bar{I}_3^{(s)}$ и $\bar{I}_4^{(s)}$, могут быть использованы для определения (либо уточнения исходных приближений) величин $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$. Вводя компоненты поляризационного вектора $\mathbf{c}^{(s)}$, можно их записать в следующем виде:

$$\left(c_3^{(s)} I + c_2^{(0)} c_3^{(s)} W_{21} - c_3^{(0)} W_{31} - c_4^{(0)} W_{41}\right) \overline{D}_{11} =$$

$$= \beta_{sc}^{(\text{м})} \left(-c_3^{(s)} M_{11} - c_2^{(0)} c_3^{(s)} M_{12} + c_3^{(0)} M_{33}\right).$$

$$\left(c_4^{(s)} I + c_2^{(0)} c_4^{(s)} W_{21} - c_4^{(0)} W_{31} + c_3^{(0)} W_{41}\right) \overline{D}_{11} =$$

$$= \beta_{sc}^{(\text{м})} \left(-c_4^{(s)} M_{11} - c_4^{(0)} c_4^{(s)} M_{12} + c_4^{(0)} M_{33}\right). \qquad (1.62)$$

Уравнения системы (1.62) заметно упрощаются, если ввести вектор $\mathbf{c}^{(0)} = \{1, 0, 1, 0\}$, как это неоднократно делалось выше, и тогда все три операторных уравнения, зависящие от оптических констант $\overline{m}'$ и $\overline{m}''$, запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \left(c_2^{(s)} I - W_{21}\right) \overline{D}_{11} &= \beta_{sc}^{(\text{м})} \left(-c_2^{(s)} M_{11} + M_{12}\right); \\ \left(c_3^{(s)} I - W_{31}\right) \overline{D}_{11} &= \beta_{sc}^{(\text{м})} \left(-c_3^{(s)} M_{11} + M_{33}\right); \\ \left(c_4^{(s)} I + W_{41}\right) \overline{D}_{11} &= \beta_{sc}^{(\text{м})} \left(-c_4^{(s)} M_{11} + M_{33}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1.63)$$

При $\beta_{sc}^{(\text{м})}$ значительно меньше $\beta_{sc}^{(\text{а})}$, т. е. в случае когда можно пренебречь вкладом молекулярного рассеяния, (1.63) превращается в систему (1.50) предыдущего раздела. Представленные выше операторные уравнения решают полностью задачу разделения аэрозольной и молекулярной компонент рассеяния по данным поляризационного зондирования. В заключение можно заметить, что обычно в практике атмосферно-оптических исследований предпочитают разделение компонент рассеяния осуществлять более простым путем, а именно предварительно оценивать значение $\beta_{sc}^{(\text{м})}$ по профилям температуры и давления. Конечно, это требует сопутствующих измерений, которые, кстати сказать, не всегда могут обеспечить требуемое пространственное разрешение. Дело в том, что рассмотренная выше теория касалась локальных объемов атмосферы, и предполагалось, что соответствующая оптическая информация получена с помощью поляризационных нефелометров (самолетные оптические лаборатории [20]) либо бистатических лидаров [56]. Указанные оптические системы зондирования обеспечивают получение больших объемов измерительной информации и с высоким пространственным разрешением. В рамках изложенной выше теории мы пытались решить сложную задачу разделения компонент рассеяния чисто оптическим путем, не прибегая к помощи метеорологических измерений и тем более к стандартным моделям молекулярной атмосферы. С учетом этого сложность математических построений, которые приведены выше, вполне оправдана практической важностью решаемой задачи.

1.3. Оптические операторы. Свойства и методы численного построения

1.3.1. Интегральные операторы и компактные множества непрерывных функций

Поскольку операторы перехода W являются произведениями двух операторов, один из которых является интегральным, а второй — обратным к интегральному, то необходимо кратко остановиться на основных свойствах интегральных операторов и методах их обращения. Последняя задача эквивалентна анализу и поиску решения операторного уравнения вида $Ks=\beta$, где K — интегральный оператор. В обратных задачах светорассеяния полидисперсными системами частиц естественно полагать, что искомое решение s принадлежит множеству функций положительных и ограниченных в области своего определения R. Подобные функции принято называть распределениями. В дальнейшем их множество будем обозначать через $\Phi=\{s;\ 0\leqslant s\leqslant s_{\max};\ r\in R\}$ и называть множеством возможных решений указанного выше интегрального уравнения. Помимо этих свойств можно полагать, что распределение $s(r)$ является также непрерывным в интервале R. Подобное предположение не является обязательным, но в пределах данного параграфа оно позволит более ясно и просто изложить специфику математической задачи, связанной с обращением характеристик β. Никаких других предположений об аналитических свойствах распределений $s(r)$ делать не будем. Обычно используемое предположение о дифференцируемости искомых функций в задачах микроструктурного анализа просто неприемлемо из физических соображений [33, 36], да и к тому же оно совершенно излишне при решении интегральных уравнений, множество возможных решений которого может включать в себя и суммируемые функции.

В обратных задачах оптики дисперсных сред в первом приближении можно полагать, что ядра соответствующих интегральных уравнений также являются непрерывными функциями в области своего определения. Правда, это аналитическое свойство ядер далеко не очевидно. Так, например, факторы полного рассеяния $K_{sc}(r,\lambda)$ и обратного $K_{\pi}(r,\lambda)$ в теории Ми представляются следующими рядами:

$$K_{sc}(r,\ \lambda)=x^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right); \tag{1.64а}$$

$$K_{\pi}(r,\ \alpha)=x^{-2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(a_n-b_n)\right|^2, \tag{1.64б}$$

где $x=2\pi r\lambda^{-1}$, а $a_n(x)$ и $b_n(x)$ являются дробно-рациональными функциями вида

$$a_n(x)=\frac{\psi_n(x)\,\psi_n'(\overline{m}x)-\overline{m}\psi_n(\overline{m}x)\,\psi_n'(x)}{\xi_n(x)\,\psi_n'(\overline{m}x)-\overline{m}\psi_n(\overline{m}x)\,\xi_n'(x)}; \tag{1.65а}$$

$$b_n(x)=\frac{\overline{m}\psi_n(x)\,\psi_n'(\overline{m}x)-\psi_n(\overline{m}x)\,\psi_n'(x)}{\overline{m}\xi_n(x)\,\psi_n'(\overline{m}x)-\psi_n(\overline{m}x)\,\xi_n'(x)}. \tag{1.65б}$$

Функции ψ_n и ξ_n являются фукциями Риккати — Бесселя. Знаменатели этих выражений могут обращаться в нуль и, следовательно, ядра $K_\pi(x)$ и $K_{sc}(x)$ в принципе могут иметь точки разрыва. Однако плотность точек разрыва, как показывает практика вычислений, не столь высока, чтобы заметно усложнять обращение соответствующих интегральных уравнений. Поэтому в дальнейшем будем полагать ядра указанного типа непрерывными функциями дифракционного параметра x.

Одним из фундаментальных свойств интегральных операторов K с непрерывными ограниченными ядрами является то, что они любое множество ограниченных функций преобразуют в компактные множества непрерывных функций. Подчеркивая это обстоятельство, говорят, что оператор K с непрерывным ядром на множестве ограниченных функций Φ является компактным оператором. Из приведенного свойства оператора K следует одно чрезвычайно важное обстоятельство. Исходное множество Φ независимо от того, является ли оно подмножеством пространства $C(R)$ всех непрерывных функций, заданных на R, или нет, его образ $B=\{\beta=Ks,\ s\in\Phi\}$ есть компактное множество непрерывных функций. Поскольку само по себе пространство непрерывных функций C, заданных на любом конечном носителе, не является компактом, то преобразование, осуществляемое интегральным оператором, приводит к сужению исходного функционального пространства. Естественно, что, обращая функции β из компактного подмножества B $(B\subset C)$, мы не можем получить решение s, которое бы принадлежало более широкому классу функций, каковым, например, является множество C. Возникающая таким образом неопределенность зачастую интерпретируется как некорректность задач, связанных с решением операторных уравнений первого рода. Не будем усложнять изложение материала имеющимися многочисленными трактовками понятия некорректности, полагая, что приведенных выше рассуждений вполне достаточно для понимания подходов к конструированию вычислительных алгоритмов обращения, которые будут описаны ниже. Формальное изложение теории некорректных задач можно найти в работах [18, 48].

Возвращаясь к решению исходного уравнения $Ks=\beta$, необходимо сделать следующий очевидный вывод: коль скоро исходные функции принадлежат компакту в C, то и искать искомое решение s следует также на некотором компактном множестве решений Φ_M, являющемся подмножеством Φ. Этот вывод правомерен и постулируется в так называемой топологической лемме [48], согласно которой интегральный оператор K обратим на компакте B и его образ $\Phi_M = \{s;\ s = K^{-1}\beta;\ \beta \in B\}$ есть снова компакт. Таким образом, если мы имеем дело с парой компактных множеств B (множество исходных данных) и Φ_M (множество возможных решений), то обращение оператора K, преобразующего Φ_M в B, является корректной в математическом отношении задачей. В самом общем виде подход к обращению β состоит в том, что вначале осуществляют сужение Φ до компакта Φ_M, а затем из Φ_M выбирают конкретную функцию s^*, которая минимизирует невязку исходного уравнения, т. е. величину $\rho(Ks, \tilde{\beta})$, характеризующую расстояние между известной точкой $\tilde{\beta}$ из B и ее образом $\beta = Ks$, где s пробегает компакт Φ_M. Поскольку множество исходных данных не обязано быть компактом, т. е. может не совпадать с множеством B (множество образов оператора K), то совершенно естественно напрашивается аппроксимационный подход, при котором за решение обратной задачи принимается элемент s^*, образ которого дает наилучшее приближение известной функции $\tilde{\beta}$ функциями из множества B. Примером $\tilde{B}$ может служить множество B_σ, элементы которого суть σ-приближения для характеристик $\beta \in B$.

Сужение исходного множества Φ до Φ_M можно рассматривать как доопределение обратной задачи и осуществлять его самыми разнообразными способами, но в любом случае желательно, чтобы это доопределение было минимальным. Имеется в виду, что априори используемой информации должно быть равно столько, чтобы трансформировать Φ в Φ_M. Переопределение ведет к чрезмерному сужению Φ, а следовательно, и к «обеднению» получаемых решений. В связи с этим обратимся к конкретному примеру выделения компакта C_M из множества непрерывных функций C. Эта операция в анализе хорошо известна и основывается на том утверждении, что компакт C_M должен состоять из непрерывных функций, в совокупности обладающих двумя свойствами, а именно: равномерной ограниченностью и равностепенной непрерывностью. Первое из этих свойств состоит в существовании такой постоянной M, что для всех f из C_M удовлетворяется неравенство

$$|f| \leqslant M. \tag{1.66а}$$

Второе свойство требует существования константы h такой, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant h\,|x_1 - x_2|, \tag{1.66б}$$

для любой функции f из C_M и любой пары точек x_1, x_2 из области задания X.

Таким образом, фиксируя некоторую пару чисел M и h из множества непрерывных функций C, определенных на интервале X, выделяем некоторое вполне определенное подмножество $C(M, h)$. Ясно, что $C(M, h)$ существенно у́же исходного множества всех непрерывных функций C. В вычислительной практике построение множества возможных решений уравнения $Ks=\beta$ может осуществляться самыми разнообразными способами, но в любом случае сужение C должно быть таковым, чтобы его функции удовлетворяли условиям (1.66а, б), т. е. принадлежали компакту.

В микроструктурном анализе дисперсных сред функции, описывающие спектры размеров, помимо того, что непрерывны, являются еще и положительными, и, следовательно, уже исходное множество распределений Φ являлось подмножеством C. В результате имеют место следующие очевидные соотношения:

$$\Phi_M=\Phi(M,\ h)\subset\Phi=C^{+}(s\in C;\quad s\geqslant 0)\subset C, \tag{1.67}$$

где через C^{+} обозначено множество всех положительных непрерывных функций. В следующем параграфе будут подробно рассмотрены вопросы конструирования компактов при численном обращении оптических характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц. Необходимо подчеркнуть, что компактные множества функций являются классом корректных решений для интегральных уравнений первого рода, и их построение обязательно в любом численном методе независимо от того, осуществляется это явно или нет. В том случае, когда подобное конструирование осуществляется явно с использованием тех или иных предположений об аналитических свойствах искомых функций, соответствующие методы обращения получили название методов обращения на компактах. Поскольку методы построения конкретных компактов весьма разнообразны, то, следуя работе [28], можно говорить не о методе, а о принципе обращения уравнений первого рода на компакте. Это один из наиболее сильных и неформальных подходов к интерпретации экспериментальных данных, осуществляемой на основе численного решения интегрального уравнения первого рода.

Как уже указывалось выше, вычислительный алгоритм в методе обращения на компакте основывается на вариационной задаче для функционала $\rho(Ks,\ \beta_\sigma)$ на компакте Φ_M, где β_σ есть σ-приближение «точной» оптической характеристики β_0. Вычислительная процедура реализуется путем построения последовательности $\{s^{(p)},\ p=1,\ \ldots\}$ такой, что $\rho(Ks^{(p)},\ \beta_\sigma)<\rho(Ks^{(p-1)},\ \beta_\sigma)$, в силу чего указанная последовательность называется минимизирующей.

Допустим, что эта последовательность сходится, поскольку, в силу очевидных причин невязка исходного уравнения $\rho(Ks,\ \beta_\sigma)$ непрерывно зависит от распределений s из Φ_M и, следовательно, должна достигать на этом компакте верхней и нижней граней. Если минимизирующая последовательность в целом принадлежит компакту, то в соответствии с теоремой Арцелла [10] из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к точному решению (разумеется, если последнее принадлежит сконструированному компакту Φ_M). Таким образом, метод обращения на компакте гарантирует нам равномерную сходимость последовательности приближенных решений к точному. Это свойство приближенных решений подразумевает, что элемент $s^*(r)$, доставляющий нижнюю грань невязки $\rho(Ks, \beta_\sigma)$ на Φ_M, удовлетворяет условию

$$|s_0(r) - s^*(r)| \leqslant \Delta(\sigma),$$

где $\Delta(\sigma)$ — малая величина, зависящая от погрешности σ таким образом, что $\Delta(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$. Равномерность приближения особенно важна в тех задачах, когда необходимо знать особенности локального поведения искомых решений обратной задачи. Последнее в полной мере относится и к микроструктуре реальных аэрозольных систем, определяемой из оптических измерений. Дело в том, что спектр размеров частиц, находящихся в воздухе, непрерывно меняется и в силу взаимодействия частиц друг с другом, и влияния на него поля влажности. Указанные факторы приводят к внутренней перестройке спектра размеров частиц, т. е. к существенной локальной изменчивости распределений во времени. В силу этого спектр размеров частиц является носителем информации о физических процессах в атмосфере, и можно строго в математическом отношении сформулировать соответствующий класс обратных задач, исходя из уравнений аэрозольной кинетики. Поскольку подобные обратные задачи скорее относятся к физике атмосферы, нежели к оптике, то здесь на них останавливаться не будем (см. монографию [33]).

При решении интегральных уравнений методом обращения на компактах в вычислительных схемах явно отсутствует обратный оператор K^{-1}, даже если и оговариваются формально условия обратимости исходного оператора K. В силу этого можно говорить о неявной форме построения обратного оператора в процессе обращения оптических данных. По аналогии можно говорить и о неявной форме операторов перехода типа W, для которых в этом случае имеет место следующая вычислительная схема:

$$\beta_j = K_j s \to s^* \to K_i s^* = \beta_i. \tag{1.68}$$

В соответствии с этой схемой переход от β_j к β_i осуществляется путем численного построения элемента s^*, путем минимизации $\rho(K_j s, \beta_j)$ на Φ_M. Относительно схемы (1.68) следует сделать несколько сугубо практических замечаний.

Функции β_σ, измеряемые в эксперименте, содержат реализации случайных процессов, и, следовательно, в совокупности экспериментальные данные никоим образом не могут образовывать компакта B. В лучшем случае они образуют подпространство непрерывных функций [25], которое ниже будем обозначать через B_σ, отличая его от компактов $B = \{\beta;\ \beta = Ks,\ s \in \Phi\}$ и $B_M = \{\beta;\ \beta = Ks,\ s \in \Phi_M\}$. Введение в схему (1.68) функций β_σ ничего в ней по существу не меняет. Можно полагать, что множество измеренных функций B_σ и множество функций B_M, генерируемых интегральным оператором K на Φ_M, в совокупности объединяются в единое нормированное пространство, где роль нормы играет введенная выше невязка для обращаемого уравнения $\rho(Ks, \beta_\sigma)$. В соответствии с этим за методом обращения на компакте стоит построение элемента наилучшего приближения в некотором метрическом (нормированном) пространстве.

В заключение приведем без доказательства следующее утверждение: если s^* удовлетворяет условию $\rho(Ks^*, \beta_\sigma) < \sigma$, то $\rho(\beta_0, \beta_\sigma) < \sigma$ и $\rho(s_0, s^*) < \varepsilon(\sigma)$, где $\varepsilon = O(\sigma)$. Это утверждение гарантирует нам близость полученного решения s^* (как решение вариационной задачи для функционала ρ на компакте Φ_M) к точному решению s_0. В дальнейшем будем опускать доказательства подобных утверждений, поскольку работа в целом ориентирована на прикладные исследования и в ней отдается предпочтение неформальному изложению обратных задач. Возможно, это не самый лучший способ изложения обратных задач, но более ясный и доступный. Использованные выше математические понятия в случае необходимости уяснения их смысла можно найти в любом учебнике по функциональному анализу (предпочтение можно отдать элементарному введению в функциональный анализ [10]).

1.3.2. Регуляризирующие операторы перехода

При изложении основных свойств интегральных операторов в качестве исходного функционального множества выше использовалось множество непрерывных функций C. Что же касается обратного оператора K^{-1}, то он уже не определен на множестве непрерывных функций, каким, в частности, является в экспериментальных исследованиях множество исходных данных B_σ. Его непосредственное численное построение лишено практического смысла в силу явно выраженной неустойчивости его дискретных (матричных) аналогов к малым возмущениям в β_σ. Введем в рассмотрение оператор K^*, сопряженный к данному интегральному оператору K, и перейдем к новому уравнению вида

$$K^*Ks = K^*\beta_\sigma, \tag{1.69}$$

где в соответствии с определением K^* правая часть есть функция

$$(K^*\beta_\sigma)(\eta) = \int_\Lambda K(\eta, \lambda)\,\beta_\sigma(\lambda)\,d\lambda, \quad \eta \in R. \tag{1.70}$$

Поскольку ядро $K(\eta, \lambda)$ (тоже $K(r, \lambda)$) по предположению непрерывная функция в области своего определения $[R \times \Lambda]$, то пространство функций $\overset{*}{B}_\sigma$, порождаемое оператором K^* на множестве исходных данных B_σ, будет компактным множеством непрерывных функций. Но если $\overset{*}{B}_\sigma = \{\overset{*}{\beta}_\sigma,\ \overset{*}{\beta}_\sigma = K^*\beta_\sigma,\ \beta_\sigma \in B_\sigma\}$ — компакт, а K^*K — некий интегральный оператор с ядром, определенным в области $[R \times R]$, то обращение интегрального уравнения

$$\overset{*}{K}Ks = \overset{*}{\beta}_\sigma, \quad \overset{*}{\beta}_\sigma \in \overset{*}{B}_\sigma \tag{1.71}$$

в математическом отношении есть корректно поставленная задача в том смысле, что оператор $(K^*K)^{-1}$ вполне непрерывен на B^*_σ.

Нетрудно видеть что рассматриваемый оператор K^*K по построению симметричен и положительно определен и, следовательно, существенно отличен от исходного оператора K, который, естественно, принадлежит в этом случае к более широкому классу интегральных операторов. Анализ и методы построения решений интегральных уравнений с симметричными ядрами весьма полно освещены в литературе [50]. В этом смысле замена исходного интегрального уравнения $Ks=\beta$ уравнением $K^*Ks=\beta^*$ существенно упрощает задачу обращения данных. Естественно, возникает вопрос о том, в какой мере подобное «упрощение» правомерно и что при этом мы теряем в решении. Ответить на этот вопрос в полной мере не представляется возможным, и нет необходимости его обсуждать. К тому же в настоящее время в теории интегральных операторов отсутствует ответ и на более простой вопрос: в какой мере оператор K^*K характеризует свойства исходного оператора K. Подобная задача была поставлена в обстоятельной работе [51], посвященной анализу обусловленности матричных операторов. Известно, что основным аналитическим средством изучения свойств симметричных интегральных операторов и их обращения, является разложение искомых функций в ряды по ортогональным системам собственных функций этих операторов. Основные теоремы и техника вычислений подробно изложены в монографиях [10, 50].

Обозначим через $\{v_k,\ k=1, \ldots\}$ систему собственных функций оператора K^*K, через $\{u_k,\ k=1, \ldots\}$ систему собственных функций оператора KK^* и через μ_k^2 — собственные числа, пронумерованные в порядке убывания. Для указанных интегральных операторов имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &K^*Kv_k=\mu_k^2 v_k, \quad v_k=\mu_k^{-1}K^*u_k; \\ &KK^*u_k=\mu_k^2 u_k, \quad u_k=\mu_k^{-1}Kv_k, \quad k=1, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.72}$$

Система $\{v_k,\ u_k,\ \mu_k^2,\ k=1, \ldots\}$ называется сингулярной системой исходного интегрального оператора K. Вводя коэффициенты разложения $c_k(s)$ искомой функции $s(r)$ в ряд по системе $\{v_k\}$ из уравнения $Ks=\beta$, нетрудно получить соотношение

$$c_k(s)=c_k(\beta)\,\mu_k^{-1}, \quad k=1, \ldots \tag{1.73}$$

В последнем выражении $c_k(\beta)$ — коэффициенты разложения функции β по системе функции u_k, т. е. это величины (β, u_k). Сходимость ряда $\sum c_k(s)v_k(r)$ может быть вполне приемлемой, если последовательность $c_k(\beta)$ убывает достаточно быстро, а среди чисел μ_k нет слишком малых значений. К сожалению, последние условия не всегда выполняются, и поэтому практически прибегают к дополнительной стабилизации указанного ряда. Простейший прием стабилизации (то же самое регуляризации) сходимости состоит в замене уравнения (1.71) близким ему уравнением вида

$$(K^*K+\alpha I)s=\beta_\sigma^*, \tag{1.74}$$

где $\alpha > 0$ — достаточно малое число, выбор которого определяется как уровнем ошибок измерения σ правой части, так и скоростью убывания последовательности $\{\mu_k^2\}$ при $k \to \infty$. С учетом замены (1.74) соотношение (1.73) примет вид

$$c_k(s_\alpha) = c_k(\beta_\sigma)\,\mu_k/(\mu_k^2 + \alpha), \quad k = 1, \ldots \tag{1.75}$$

Знаменатель этого выражения не обращается в нуль при $\alpha > 0$, даже если в спектре собственных чисел встречаются нулевые значения. В силу этого совокупность чисел $c_k(s_\alpha)$ всегда ограничена, следовательно, будет ограничена и норма $\|s_\alpha\| = \sum c_k^2(s_\alpha)$, чего нельзя было сказать о величине $\sum c_k^2(s)$. Таким образом, если β_σ в метрике L_2 имеет ограниченную норму, то функция

$$s_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1} K^*\beta_\sigma, \quad \alpha > 0 \tag{1.76}$$

в этой же метрике также будет иметь ограниченную норму. Построенные таким образом функции s_α можно рассматривать в качестве приближенных решений исходной обратной задачи. Основным аналитическим свойством этих функций (то же самое параметрического семейства Φ_α) является их суммируемость с квадратом, т. е. ограниченность интегралов $\int\limits_R s_\alpha^2(r)\,dr$. Можно полагать, что при определенных условиях решения s_α будут близкими к s_0 в смысле метрики L_2. Для этого необходимо потребовать как минимум выполнения неравенства

$$\|Ks_\alpha - \beta_\sigma\| \leqslant \sigma \|\beta_\sigma\|. \tag{1.77}$$

Рассмотренный выше способ построения приближенных решений в силу замены исходного уравнения (1.71) неким близким ему уравнением (1.74) может быть отнесен к методам качественной теории интегрального уравнения первого рода. Поэтому совсем неудивительно использование в подобных случаях терминов «псевдообращение» и «псевдообратный оператор» и т. п. [2, 28]. Практические применения вычислительной схемы (1.76) оправданы в тех ситуациях, когда целью обращения является не само решение, а оценка с его помощью неких функционалов, имеющих тот или иной физический смысл. Для нас данный подход удобен в том отношении, что позволяет построить в явной форме операторы перехода между оптическими характеристиками дисперсных сред. Действительно, из (1.76) следует выражение для обратного оператора

$$K_\alpha^{-1} = (K^*K + \alpha I)^{-1} K^*, \tag{1.78}$$

осуществляющего преобразование $\beta_\sigma \to s_\alpha$. Как уже отмечалось выше, обе функции суммируемы и в целом принадлежат пространству L_2 (точнее, $s_\alpha \in \Phi_\alpha \subset L_2(R)$, а $\beta_\sigma \in B_\sigma \subset L_2(\Lambda)$). Если измеряется оптическая характеристика β_1 и известно ее σ-приближение

$\beta_{1\sigma}$, то преобразование $\beta_1 \to \beta_2$ можно осуществить теперь с помощью оператора

$$W_{21}^{(\alpha)} = K_2 K_{1\alpha}^{-1}, \tag{1.79}$$

где $K_{1\alpha}^{-1}$ определяется выражением (1.78). Нетрудно показать, что построенный таким образом оператор $W_{21}^{(\alpha)}$ является компактным оператором, т. е. он, действуя на последовательности ограниченных функций из множества оптических данных $B_{1\sigma}$, порождает последовательности, равномерно сходящиеся. Действительно, по построению s_α ограничены и их можно считать суммируемыми по Риману. Поскольку ядро $K_2(r, \lambda)$ интегрального оператора K_2 выше условились считать непрерывной функцией, то преобразование $K_2 : s_\alpha \to \beta_{2\alpha}$ генерирует компакт $B_{2\alpha} = \{\beta_{2\alpha};\ \beta_{2\alpha} = W_{21}^{(\alpha)} \beta_{1\sigma}\}$. Таким образом, мы располагаем математическим аппаратом прогноза оптических характеристик типа β_2 по измерениям неких других оптических характеристик дисперсных сред, скажем β_1, доступных в данном эксперименте. Введенный выше неопределенный параметр α принято называть параметром регуляризации. Выше мы касались причин, обусловливающих использование этого термина. Поэтому оператор K_α^{-1} принято называть регуляризирующим, следовательно, и у нас есть все основания называть оператор $W_{21}^{(\alpha)}$ также регуляризирующим. Преобразование $\beta_{1\sigma} \to \beta_{2\alpha}$, осуществляемое этим оператором, обладает требуемой для практических приложений устойчивостью.

1.3.3. Операторы перехода в пространстве коэффициентов фурье-разложений оптических характеристик

Сингулярная система $\{v_k,\ u_k,\ \mu_k^2,\ k = 1,\ \ldots\}$ интегрального оператора K позволила нам сконструировать приближенное решение соответствующего операторного уравнения. Используя этот аппарат, можно провести содержательный анализ и операторов перехода, т. е. преобразований $W_{21} : \beta_1 \to \beta_2$, где β_1 и β_2 — две оптические характеристики светорассеяния полидисперсной системой частиц, рассматриваемые как функции угла рассеяния ϑ в пределах $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$, либо длины волны λ в пределах спектрального интервала оптического зондирования Λ. Поскольку конструирование оператора W_{21} осуществляется по двум интегральным операторам K_1 и K_2, то введем две сингулярные системы $\{v_{1k},\ u_{1k},\ \mu_{1k}^2\}$ и $\{v_{2k},\ u_{2k},\ \mu_{2k}^2\}$ в соответствии с (1.72). Коэффициенты разложения регуляризированного аналога $\beta_{2\alpha}$ искомой характеристики β_2 по системе $\{u_{2k}\}$ могут быть представлены следующим выражением:

$$c_l(\beta_{2\alpha}) = \sum_{k=1} \mu_{1k}\mu_{2l} (\mu_{1k}^2 + \alpha)^{-1} c_k(\beta_{1\sigma})(v_{1k},\ v_{2l}). \tag{1.80}$$

Обозначим через

$$\omega_{lk}^{(\alpha)} = \mu_{1k}\mu_{2l}\left(\mu_{1k}^2 + \alpha\right)^{-1}\left(v_{k1},\ v_{2l}\right), \tag{1.81}$$

а числа $c_l(\beta_{2\alpha}) = c_{2l\alpha}$ и $c_k(\beta_{1\sigma}) = c_{1k\sigma}$ будем рассматривать как компоненты двух векторов $\mathbf{c}_{2\alpha}$ и $\mathbf{c}_{1\sigma}$. Тогда (1.80) можно представить в виде матричного преобразования

$$\mathbf{c}_{2\alpha} = W_{21}^{(\alpha)}\mathbf{c}_{1\sigma}, \tag{1.82}$$

где элементы матричного оператора определяются (1.81). Построенный таким образом оператор $W_{21}^{(\alpha)}$ можно рассматривать как некий аналог исходного оператора перехода W_{21}. Оператор $W_{21}^{(\alpha)}$ в (1.82) позволяет найти коэффициенты фурье-разложения функции $\beta_{2\alpha}$ по ортонормированной системе $\{u_{2k}\}$, если известны коэффициенты разложения исходной (измеренной) функции $\beta_{1\sigma}$ по системе функций $\{u_{1k},\ k=1, \ldots\}$. В обозначении мы всюду сохраняем индексы α и σ, подчеркивая их взаимосвязь, а также то важное обстоятельство, что вектор $\mathbf{c}_1$ известен приближенно, и результатом преобразования являются некоторые регуляризованные приближения для искомой функции β_2.

Считая, что системы функций $\{v_{1k}\}$ и $\{v_{2k}\}$ ортонормированы, можно воспользоваться оценкой

$$|(v_{1k},\ v_{2l})| \leqslant (v_{1k},\ v_{1k})^{1/2}(v_{2l},\ v_{2l})^{1/2} \leqslant 1,$$

которая приводит к следующему неравенству:

$$\left|\omega_{lk}^{(\alpha)}\right| \leqslant \mu_{1k}\mu_{2l}\left(\mu_{1k}^2 + \alpha\right)^{-1}. \tag{1.83}$$

Полученное соотношение наглядно показывает, как сингулярные числа μ_{1k} и μ_{2k} влияют на элементы матрицы $\{\omega_{lk}^{(\alpha)}\}$. Неравенство (1.83) может использоваться также для оценки параметра регуляризации α. Однако здесь не будем касаться подобных вопросов, поскольку численное определение сингулярных систем интегральных операторов является достаточно сложной вычислительной задачей, существенно превосходящей задачу построения преобразований $\beta_{1\sigma} \to \beta_{2\alpha}$ на основе простых алгебраизованных аналогов этих операторов. В силу этого обстоятельства приведенный выше анализ представляет скорее, теоретический, нежели практический интерес.

1.3.4. Использование априорной информации в построении регуляризирующих операторов перехода

Обратимся вновь к соотношению (1.76). Нетрудно показать, что распределение s_α, определяемое этим выражением, доставляет минимум функционалу вида

$$T_\alpha(s) = \|Ks - \beta_\sigma\|^2 + \alpha\|s\|^2, \tag{1.84}$$

где нормы взяты для пространства L_2 [43]. Первый член справа есть не что иное, как невязка исходного уравнения $Ks = \beta$, когда в правой части β заменяется на β_σ. Второй член связан с вводимыми ограничениями на норму получаемых решений. Заметим, что поскольку в рассматриваемых здесь задачах размерности β и s различны, то перед вторым слагаемым необходимо ввести размерный масштабный множитель, который мы опустили в целях упрощения записи выражений.

Допустим, что для зондируемой дисперсной среды можно указать распределение s_M, как некое наиболее вероятное. Тогда естественно потребовать в качестве исходного априорного ограничения не минимальности нормы решения, а наименьшего его отклонения от s_M в пределах области возможных размеров частиц R. В этом случае функционал (1.84) можно переписать в виде

$$T_\alpha(s) = \| Ks - \beta_\sigma \|^2 + \alpha \| s - s_M \|^2. \tag{1.85}$$

Элемент s_α, который минимизирует этот функционал на множестве решений Φ_α, определяется следующим выражением:

$$s_\alpha = s_M + K_\alpha^{-1}(\beta_\sigma - \beta_M), \tag{1.86}$$

где $\beta_M = Ks_M$, т. е. модельная оптическая характеристика, соответствующая модельному распределению s_M. Оператор K_α^{-1}, как и ранее, определяется согласно (1.78).

Рассмотренный принцип априорного доопределения обратной задачи может быть применен и при построении преобразований $\beta_1 \to \beta_2$. Поскольку в данном случае речь идет о преобразовании оптических характеристик, то в качестве исходных данных должны быть выбраны две модельные оптические характеристики, скажем β_{1M} и β_{2M}. В этом случае схема преобразования по аналогии с (1.86) записывается

$$\beta_{2\alpha} = \beta_{2M} + W_{21}^{(\alpha)}(\beta_{1\sigma} - \beta_{1M}), \tag{1.87}$$

где оператор перехода определяется так же, как и ранее, т. е. согласно (1.79). Второй член может быть интерпретирован как некая информация, получаемая в эксперименте о β_2 по измерениям $\beta_{1\sigma}$. Выражение (1.87) (кстати, так же, как и (1.86)) вполне корректно с точки зрения сходимости приближенных аналогов к искомым функциям. В частности, если β_{1M} и β_{2M} заменить на точные значения $\beta_{1,0}$ и $\beta_{2,0}$, устремить к нулю (тоже $\alpha = O(\sigma^2) \to \to 0$), то $\beta_{2\alpha}$ будет стремиться к β_{20}. Следует заметить, что преобразование $\beta_{1\sigma} \to \beta_{2\alpha}$, осуществляемое по схеме (1.87), несколько отличается от ранее рассмотренного, т. е. от преобразования, осуществляемого собственно оператором $W_{21}^{(\alpha)}$. Априорное доопределение операции прогноза значений β_2 по измерениям $\beta_{1\sigma}$ путем введения моделей β_{1M} и β_{2M} оправдано в тех случаях, когда эти модели не слишком отличаются от действительных измеряемой и прогнозируемой характеристик, т. е. от $\beta_{1,0}$ и $\beta_{2,0}$, и случайная компонента в $\beta_{1\sigma}$, обусловленная ошибками измерения, весьма существенна. Практика обработки экспериментального материала свидетельствует о том, что введение β_{1M} и β_{2M} в вычислительную схему перехода целесообразно в тех случаях, когда прогнозируются значения β_2 для длин волн, лежащих вне интервала оптического зондирования Λ, в котором измеряются значения $\beta_{1\sigma}$.

1.3.5. Операторы восстановления и аппроксимация характеристик светорассеяния полидисперсными системами

Излагаемый метод оптических операторов теории светорассеяния дисперсными средами может быть использован и для решения так называемых аппроксимационных задач для характеристик светорассеяния. В частности, для атмосферной оптики интересна задача восстановления непрерывного спектрального хода аэрозольных характеристик светорассеяния в том или ином спектральном интервале по ряду дискретных измерений, осуществляемых, скажем, в окнах прозрачности. При решении подобных задач исходным предположением является представимость оптических характеристик для любой длины волны λ параметрическим интегралом, который в сокращенной записи имеет вид $\beta(\lambda)=(Ks)(\lambda)$. Если известны значения $\beta_{\sigma i}=\beta_\sigma(\lambda_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ из интервала Λ, то можно прибегнуть к обращению указанной совокупности данных и найти некоторое приближение $s_\alpha(r)$ для действительной функции плотности $s_0(r)$. Как уже указывалось выше, если Λ достаточно широк в том смысле, что распределение $s(r)$ вполне «представлено» совокупностью измерений $\{\beta_{\sigma i}\}$, то можно надеяться на выполнение условия

$$\|s_0-s_\alpha\|<\delta\|s_0\|, \tag{1.88а}$$

где $\delta=O(\sigma)$, как только

$$\|Ks_\alpha-\beta_\sigma\|\leqslant\sigma\|\beta_0\|. \tag{1.88б}$$

Найденное распределение s_α можно теперь использовать для прогноза значений рассматриваемой оптической характеристики $\beta(\lambda)$ для любой наперед заданной длины волны λ, разумеется, при известной зависимости $\overline{m}(\lambda)$. Вычисления осуществляются в соответствии с выражением

$$\beta_\alpha(\lambda_j)=(Ks_\alpha)(\lambda_j), \quad j=1, \ldots, n'. \tag{1.89}$$

Поскольку s_α есть функция вектора $\boldsymbol{\beta}_\sigma$, то (1.89) следует рассматривать как преобразование этого вектора в вектор $\boldsymbol{\beta}_\alpha$ с любой наперед заданной размерностью n'. Если выполняется условие (1.88б), то с учетом неравенства

$$\|\beta_\sigma-\beta_0\|<\sigma\|\beta_0\|$$

выполнится и условие

$$\|\beta_\alpha-\beta_0\|<\sigma\|\beta_0\|, \tag{1.90}$$

Таким образом, просто и естественно на основе методов обращения строится аппарат для аппроксимации оптических характеристик светорассеяния дисперсными средами по экспериментальным данным. Как и ранее, в операторах взаимного перехода оптических характеристик в изложенном методе аппроксимации определяющая роль, конечно, принадлежит оператору K_α^{-1}, в силу этого его можно назвать методом обратной задачи светорассеяния. Более подробное изложение этого метода аппроксимации и его приложения в атмосферно-оптических исследованиях будет рассматриваться ниже. В заключение коснемся лишь формальной связи этого метода с операторами перехода типа W.

В рамках операторного подхода построение аппроксимирующего аналога β_α по измерениям β_σ можно рассматривать как преобразование $\beta_\sigma \to \beta_\alpha$, осуществляемое неким оператором $V^{(\alpha)}$. Ясно, что этот оператор можно представить в виде произведения двух операторов, а именно

$$V^{(\alpha)} = K K_\alpha^{-1}. \tag{1.91}$$

В силу этого $V^{(\alpha)}$ является также регуляризирующим оператором и может быть использовано при обработке экспериментальных данных. Очевидна также и аналогия между операторами $V^{(\alpha)}$ и $W^{(\alpha)}$. Действительно, если осуществляется преобразование $\beta_{1\sigma} \to \beta_{1\alpha}$, то $V^{(\alpha)}$ есть не что иное, как $W_{11}^{(\alpha)}$.

На этом мы заканчиваем построение теории светорассеяния полидисперсными системами частиц — теории, в которой прямые и обратные задачи изложены в рамках единого операторного подхода. В дальнейшем речь будет идти в основном о приложениях этой теории, и нам понадобятся матричные аналоги соответствующих операторов. В матричной форме операторы восстановления осуществляют преобразование векторов, а именно

$$V_{n'n}^{(\alpha)} \beta_\sigma = \beta_\alpha. \tag{1.92}$$

Исходный вектор β_σ имеет размерность n и представляет собой не что иное, как совокупность исходных измерений $\{\beta_\sigma(\lambda_i),\ i = 1, \ldots, n\}$. Получаемый в результате преобразования вектор имеет размерность n', и за ним стоит совокупность прогнозируемых значений $\{\beta_\alpha(\lambda_j),\ j = 1, \ldots, n'\}$. Выбор n' и $\{\lambda_j\}$ может быть совершенно произвольным и не связанным с n и $\{\lambda_i\}$. Матрица $V_{n'n}^{(\alpha)}$ рассчитывается в соответствии с выражением

$$V_{n'n}^{(\alpha)} = K_{n'm} \left[K_{mn}^{\mathrm{T}} K_{nm} + \alpha I_{mm}\right]^{-1} K_{mn}^{\mathrm{T}}. \tag{1.93}$$

Надстрочный индекс «т» связан с операцией транспонирования матриц. Поскольку в рассматриваемых преобразованиях меняются размерности векторов, их пришлось указывать в подстрочных индексах соответствующих матриц. Схема вычислений матрицы K_{nm} будет приведена ниже. Соответственно для оператора W_{21}, осуществляющего преобразование $\beta_1 \to \beta_2$, где β_1 и β_2 — любые две оптические характеристики локального объема рассеивающей дисперсной среды, матричный аналог размерностью $n' \times n$ задается подобным выражением

$$W_{n'n}^{(\alpha)} = K_{2n'm} \left[K_{1mn}^{\mathrm{T}} K_{1nm} + \alpha I_{mm}\right]^{-1} K_{1mn}^{\mathrm{T}}. \tag{1.94}$$

Этот матричный оператор преобразует измеренный вектор $\beta_{1\sigma}$ размерностью n в вектор $\beta_{2\alpha}$ размерности n' в соответствии с выражением

$$W_{n'n}^{(\alpha)}\beta_{1\sigma}=\beta_{2\alpha}. \tag{1.95}$$

Поскольку вектор $\beta_{1\sigma}$ ассоциирован в преобразовании с числом n, а $\beta_{2\alpha}$ — с n', мы сочли возможным в целях упрощения записи опустить у матричного оператора подстрочные индексы «21», полагая, что это не вызовет какой-либо путаницы в используемых обозначениях. Последнее выражение приведено также и для того, чтобы особо подчеркнуть то обстоятельство, что оператор $W_{n'n}^{(\alpha)}$ помимо перехода (прогноза) от β_1 к β_2 одновременно решает и аппроксимационные задачи, т. е. выполняет те же функции, что и оператор восстановления $V_{n'n}^{(\alpha)}$. Практическое применение изложенного выше аппарата (тоже метода оптических операторов) требует разработки и создания соответствующего программного комплекса, который может основываться на формулах теории Ми (см. п. 1.3), если в качестве исходной морфологической модели реальной дисперсной среды используется полидисперсная система сферических частиц. Такой комплекс был создан и подробно описан в работе [8] (программный комплекс «Спектр»). Ниже мы дадим его краткое описание и проиллюстрируем технику операторного метода обработки оптической информации на примере интерпретации и анализа данных по светорассеянию дымками пограничного слоя атмосферы, полученных с помощью спектральных нефелометров.

1.4. Обращение оптических характеристик светорассеяния дисперсных сред на компактных множествах распределений

1.4.1. Примеры простейших компактов и параметризация обратных задач

В предыдущем разделе указывалась та роль, которую играют компактные множества распределений в обращении интегрального оператора K в оптике дисперсных сред. Ни один метод интерпретации данных по светорассеянию атмосферными аэрозолями не обходится без соответствующего конструирования компактного множества распределений, даже если это и не всегда осознается явно. Редкая работа по исследованию аэрозолей оптическими методами обходится без так называемых микроструктурных моделей и соответствующих им модельных спектров размеров. Примерами могут служить такие распределения, как

$$n(r)=\begin{cases} a_1 & \text{при } r_1\leqslant r\leqslant r_2, \\ a_2 r^{-\nu} & \text{при } r_2<r\leqslant r_3; \end{cases} \tag{1.96а}$$

$$n(r)=ar^{\alpha}\exp\{-r^{\nu}b\},\quad 0\leqslant r<\infty; \tag{1.96б}$$

$$n(r)=(N\sigma/\pi^{1/3}r)\exp\{-\delta^2\ln^2 r/r_0\}. \tag{1.96в}$$

Каждая из этих аналитических моделей характеризуется определенным набором исходных параметров. Так, например, первая модель считается заданной, если определены все ее параметры, т. е. величины a_1, r_1, r_2, a_2, ν, r_3. Совокупность этих параметров удобно представлять в виде вектора $\mathbf{a}$ с компонентами a_j ($j=1, \ldots, m$). Тогда модельное распределение $s(r)=\pi r^2 n(r)$ запишется как $s(r, \mathbf{a})$. Соответствующая ему оптическая характеристика $\beta(\lambda)=(Ks)(\lambda)$ называется модельной оптической характеристикой и является, помимо длины волны λ, функцией m параметров a_j, что подчеркивается записью $\beta(\lambda, \mathbf{a})$. Если при интерпретации оптических измерений $\{\beta_{\sigma i}, i=1, \ldots, n\}$ применимо предположение о возможности аппроксимировать действительный спектр размеров исследуемой дисперсной среды с приемлемой погрешностью одной из указанных выше моделей, то априори необходимо задать область возможных пределов изменения соответствующих параметров a_j ($j=1, \ldots, m$). Эту область будем обозначать через Ω_m. Включает она в себя открытые интервалы $(a_{j,\min}, a_{j,\max})$. По всей видимости, вполне понятно, почему речь идет об открытых интервалах. Априори нельзя утверждать, что j-й параметр распределения принимает значения $a_{j,\min}$ либо $a_{j,\max}$, можно лишь полагать, что a_j не меньше $a_{j,\min}$ и не больше $a_{j,\max}$. Подобные предположения вполне приемлемы. В силу этого обстоятельства ниже будем часто использовать именно открытые интервалы в качестве областей возможного изменения тех или иных величин, не делая более каких-либо специальных пояснений на этот счет.

Совокупность векторов $\mathbf{a}$, компоненты которых пробегают в совокупности область Ω_m, далее будем считать принадлежащими векторному пространству Ψ_m. При определении конкретных значений параметров a_j по измерениям $\{\beta_{\sigma i}, i=1, \ldots, n\}$ решают аппроксимационную задачу путем минимизации нормы $\|\beta_\sigma(\lambda)-\beta(\lambda, \mathbf{a})\|$ в $L_2(\Lambda)$ или в дискретном варианте $\|\boldsymbol{\beta}_\sigma-\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a})\|$ в l_2, где модельный вектор $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a})$ имеет компоненты $\beta(\lambda_i, a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_m)$. Напомним, что последняя норма обычно называется оптической невязкой и обозначается через $\rho(\boldsymbol{\beta}_\sigma, \boldsymbol{\beta})$. В рассматриваемом случае можно просто писать $\rho(\mathbf{a})$. В качестве решения обратной задачи выбирается вектор $\mathbf{a}^*$, минимизирующий эту невязку при условии, конечно, что $\rho(\mathbf{a}^*)\leqslant\sigma$. Это условие указывает на то, что для измеренного вектора $\boldsymbol{\beta}_\sigma$ мы подобрали вполне приемлемую аппроксимацию из параметрического семейства оптических моделей B_m, порождаемых вектором $\mathbf{a}$ и соответствующим параметрическим полидисперсным интегралом. С учетом (1.88) можно надеяться, что полученное распределение $s(r, \mathbf{a}^*)$ будет близким к действительному распределению $s_0(r)$. Характер этой «близости» требует особого рассмотрения, и к нему мы вернемся несколько позже. Очевидно, нет надобности доказывать, что модельные характеристики $\beta(\lambda, \mathbf{a})$, используемые для аппроксимации измеренной функции $\beta_\sigma(\lambda)$, образуют компактное множество.

Компактным является исходное множество $\Phi_m = \{s(r, \mathbf{a}),\ \mathbf{a} \in \Psi_m\}$, значит, между B_m и Φ_m существует взаимно однозначное соответствие, что и является гарантией корректности процедуры обращения. При доказательстве компактности параметрического семейства Φ_m определяющими являются непрерывность и ограниченность функции $s(r, a_1, \ldots, a_m)$ по переменным a_j, которые меняются в ограниченных интервалах. Изложенный выше метод обращения часто называют методом подбора подходящей модели.

Алгоритмическая задача решается последовательным построением некой минимизирующей последовательности векторов $\mathbf{a}^{(p)}$, удовлетворяющей условию $\rho(\mathbf{a}^{(p)}) > \rho(\mathbf{a}^{(p+1)})$. Последовательность $\{\mathbf{a}^{(p)}\}$ принадлежит Ψ_m, а соответствующие распределения $s(r, \mathbf{a}^{(p)})$ — компакту Φ_m. Эти два условия вместе гарантируют равномерную сходимость последовательности аппроксимирующих функций $\beta(\lambda, \mathbf{a}^{(p)})$. Описанный здесь подход к интерпретации оптических данных достаточно широко используется в атмосферно-оптических исследованиях атмосферных аэрозолей, поэтому мы несколько подробно изложили его математическую суть, оттенив, прежде всего, то обстоятельство, что его корректность обусловливается априорным заданием компакта исходных распределений Φ_m (аналитической модели распределений и параметрической области Ω_m). Уместно заметить, что любой метод обращения так или иначе связан либо с априорным заданием исходных компактных множеств возможных решений, либо с их алгоритмическим конструированием в процессе обращения экспериментальных данных. Таким образом, понятие компактного множества функций из абстрактного топологического понятия превращается в конструктивную основу методик обращения экспериментальных данных.

Возвращаясь снова к методу подбора оптимальной модели, следует отметить ряд его существенных недостатков. Во-первых, это методологический недостаток, который состоит в том, что повышение точности измерений не гарантирует повышения точности определения искомой микроструктуры. Необходима уверенность, что действительно распределение $s_0(r)$ принадлежит семейству Φ_m, т. е. само является параметрическим распределением указанного вида. Иными словами, необходимо, чтобы $s_0(r) = s(r, \mathbf{a}_0)$, где $\mathbf{a}_0$ — один из векторов Ψ_m. В противном случае $\|s_0(r) - s(r, \mathbf{a})\|$ не становится малым при $\sigma \to 0$. В подобных ситуациях говорят, что исходная аналитическая модель выбрана неудачно. Второе обстоятельство чисто технического плана и связано с нелинейной зависимостью невязки $\rho(\mathbf{a})$ от искомых параметров a_j. Поэтому обычно оценивают не более двух параметров, задавая остальные на основе предварительно имеющейся информации.

С учетом отмеченных двух обстоятельств могут быть сделаны следующие рекомендации. В качестве искомых параметров лучше всего выбирать величины, характеризующие распределение в целом, т. е. такие параметры, которые применимы для любой аналитической модели исходного спектра. Например, это могут быть: общая концентрация частиц в единичном рассеивающем объеме $N=\int\limits_R n(r)rd$, средний размер частиц $\bar{r}=\int\limits_R rn(r)dr$ и т. п.

Подробно техника обращения данных по светорассеянию аэрозольными системами изложена в монографии авторов [17], поэтому в заключение ограничимся лишь двумя общими замечаниями.

Параметризация обратной задачи светорассеяния может быть оправдана в случаях, когда требуется в конечном итоге знать не сами распределения, а некоторые функционалы от этих распределений. В частности, нетрудно видеть, что N и $\bar{r}$ суть функционалы от $n(r)$. В определенных пределах N и $\bar{r}$ слабо зависят от особенностей аналитического поведения моделей $n(r)$ в пределах области R. Другим примером функционалов (т. е. функций, аргументы которых суть сами функции) являются оптические характеристики $\beta[s(r),\lambda]=(Ks)(\lambda)$. Поэтому восстановление полного спектрального хода характеристики $\beta(\lambda)$ по измеренному вектору β_σ также слабо зависит от каких-то особенностей локального поведения соответствующих распределений $s_\alpha(r)$. Подобные примеры можно продолжить.

Второе замечание касается общей оценки метода моделей в обращении оптических данных. Задание аналитической модели искомой функции при решении интегрального уравнения может оказаться излишним переопределением обратной задачи. Соответствующие компакты в аналитическом отношении оказываются чрезмерно «жесткими» и поэтому мало эффективными в информационном смысле. В связи с этим в целом подобный подход может квалифицироваться не более как метод качественной интерпретации данных. Более эффективными являются, конечно, подходы, в которых исходные компакты обладают бóльшими аналитическими возможностями в аппроксимации действительных распределений. Подобные модели излагаются ниже.

1.4.2. Гистограммы распределений и метод линейных систем

Линейное интегральное уравнение достаточно просто трансформируется в линейную алгебраическую систему путем замены искомого распределения $s(r)$ соответственно подобранным линейным аналогом $y(r, \mathbf{s})$. Модельное распределение $y(r, \mathbf{s})$ должно линейно зависеть от компонент $s_l=s(r_l)$ вектора $\mathbf{s}$, и тогда имеет место соотношение

$$\int\limits_R K(r, \lambda_i)\,y(r, \mathbf{s})\,dr=\sum_{l=1}^{m}\overline{K}_{il}s_l, \quad i=1, \ldots, n. \tag{1.97}$$

Предполагается, что при $m\to\infty$ $y(r,\mathbf{s})\to s_0(r)$ в соответствующей метрике, выбор которой определяется исходным принципом конструирования модельного распределения. Если в нашем распоряжении имеется n измерений оптической характеристики $\beta(\lambda)$, то в соответствии с (1.97) имеем систему

$$\sum_{l=1}^{m} \overline{K}_{il} s_l = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.98}$$

решение которой определяет вектор $\mathbf{s}$, а следовательно, и некоторое модельное распределение $y(r, \mathbf{s})$, которое и несет в себе информацию о действительном спектре размеров частиц исследуемой среды.

Очевидно, что множество возможных аналитических моделей $y(r, \mathbf{s})$, удовлетворяющих (1.97), может быть весьма обширным. Выбор конкретной из них определяется соображениями как физического, так и аналитического характера. В простейшем случае это может быть просто ступенчатая функция, которую применительно к распределениям, т. е. положительным функциям, принято называть гистограммой. Будем обозначать это распределение через $\bar{y}(r, \mathbf{s})$ или просто $\bar{y}(r)$.

С первого взгляда подобная модель может показаться слишком простой в аналитическом отношении, однако по сравнению с другими возможными моделями она более адекватно отражает свойства реальных микроструктур, особенно если последние связаны с локальными объемами дисперсных сред. Действительно, обратимся к некоторому освещенному объему, в котором содержится N частиц, и их возможные размеры лежат в пределах интервала R. Размеры каждой отдельной частицы ансамбля r_j никогда не могут быть известными, и поэтому разумный способ описания микроструктуры состоит в покрытии области R системой непересекающихся интервалов $\{\Delta_l\}$ длиной $\Delta_l(r)$ и определении чисел $\Delta_l(N)$, соответствующих числу частиц, попавших в l-й интервал покрытия. Подобная процедура оправдана не только конечностью $N = \sum \Delta_l(N)$ для малых локальных объемов, но и тем, что любой метод микроструктурного анализа имеет конечное разрешение по размерам. Возвращаясь к модели $\bar{y}(r, \mathbf{n})$, в качестве компонент вектора $\mathbf{n}$ можно выбрать отношение $\Delta_l(N)/\Delta_l(r)$, и тогда будут иметь место следующие соотношения:

$$\int_{\Delta_l} \bar{y}(r, \mathbf{n})\, dr = \Delta_l(N), \quad l = 1, \ldots, m, \tag{1.99}$$

которые и определяют аналитическую конструкцию выбранной выше модели. Распределение это суть кусочно-непрерывная (—постоянная) функция. В точках r_l оно терпит разрыв первого рода, и амплитуда соответствующего скачка равна

$$\bar{y}(r_l + 0) - \bar{y}(r_l - 0) = n_{l+1} - n_l. \tag{1.100}$$

Если числа n_l в совокупности ограничены и m конечно, то множество подобных распределений $\overline{\Phi}$ компактно. Разумеется, что распределения из этого множества уже не являются непрерывными функциями, но этого и не требуется для решения интегральных уравнений. Указанные решения просто должны быть суммируемыми функциями. Этому требованию вполне удовлетворяет наша модель (то же самое гистограмма). Введение ограничений на числа n_l осуществляется, как обычно, путем ограничения нормы векторов $\mathbf{n}$ в процессе обращения, что немедленно нас приводит к операторам типа K_α^{-1} и соответственно векторам $\mathbf{n}_\alpha$. Множество $\overline{\Phi}_\alpha$, которому принадлежат распределения $\bar{y}(r, \mathbf{n}_\alpha) = \bar{y}_\alpha(r)$, где $\|\mathbf{n}_\alpha\| \leqslant n_{\max}$ образуют компакт. Компактным является и векторное пространство $\overline{\Psi}_m = \{\mathbf{n};\ \mathbf{n} \in \Psi_m,\ \|\mathbf{n}\| \leqslant n_{\max}\}$. Между $\overline{\Phi}_\alpha$ и $\overline{\Psi}_m$ существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому вектору $\mathbf{n}_\alpha$ соответствует одно распределение $\bar{y}_\alpha(r)$, и наоборот. Доказательство соответствующих утверждений мы опускаем (см., например, [33]).

Все, что говорилось относительно модели $\bar{y}(r, \mathbf{n})$, в полной мере относится и к модели $\bar{y}(r, \mathbf{s})$, с той лишь разницей, что числа $\Delta_l(N)$ должны быть заменены на числа $\Delta_l(S)$, а $\sum \Delta_l(S) = S$ характеризует полное геометрическое сечение частиц, находящихся в рассматриваемом объеме среды. Если модель $\bar{y}(r, \mathbf{s})$ подставить в (1.97), то получим эквивалентную линейную систему, а именно

$$\sum_{l=1}^{m} \overline{K}_{il}\Delta_l(S) = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.101а}$$

где

$$\overline{K}_{il} = \int_{\Delta_l} K(r,\ \lambda_i)\, dr/\Delta_l(r). \tag{1.101б}$$

При рассмотрении того или иного метода численного обращения необходимо кратко оговаривать вопросы сходимости последовательности приближенных решений к действительным распределениям. Как и ранее, не будем прибегать к излишнему формализму, который во многих случаях весьма тривиален, особенно если предполагать, что искомая функция $s_0(r)$ в операторном уравнении $Ks = \beta$ и алгоритмически получаемая последовательность приближенных решений принадлежат одному и тому же компакту. Практически, однако, подобное предположение часто нарушается, в чем нетрудно убедиться на примере обратной задачи светорассеяния.

Во-первых, заметим, что если вектор $\boldsymbol{\beta}_\sigma$ в правой части указанного выше уравнения фиксирован, то распределения $\bar{y}_\alpha(r)$, получаемые с помощью оператора K_α^{-1}, при изменении α в пределах области (α_1, α_2) образуют некоторую последовательность функций или параметрическое семейство. Если погрешность в правой части уравнения последовательно убывает, то α также убывает, и последовательность $\{\bar{y}_\alpha(r)\}$ $(\alpha \to 0)$ стремится к некоторому предельному распределению $\bar{y}_0(r)$. Напомним, что все рассматриваемые здесь распределения суть ступенчатые функции, порождаемые векторами $\mathbf{s}$ из $\overline{\Psi_m}$. Распределение $\bar{y}_0(r)$ считается «точным» решением нашей обратной задачи в классе ступенчатых функций (гистограмм). К сожалению, спектр размеров реальной дисперсной среды, строго говоря, не принадлежит к подобному семейству функций.

Как уже говорилось выше, если в локальном объеме среды находится N частиц, размеры которых r_j $(j=1, \ldots)$ неизвестно каким образом распределены в области $R=[R_1, R_2]$, то спектр размеров $n_0(r)$ есть функция, принимающая дискретные значения в точках r_j. При этом $N=\sum n_j$. Подобные функции называют решетчатыми. Дискретные ансамбли частиц требуют для своего адекватного описания дискретных (разрывных) распределений. Однако если представить, что последовательное построение ступенчатых распределений типа $\bar{y}(r, \mathbf{n})$ сопровождается непрерывным увеличением числа интервалов m, покрывающих область R, то мы должны получать все более и более точное представление о значениях $\{n_j, r_j, j=1, \ldots\}$ по значениям $\{\Delta_l(N), \Delta_l(r), l=1, \ldots, m\}$. Конечно, не может быть и речи о равномерной сходимости функций $\bar{y}(r, \mathbf{n})$ к $n_0(r)$ при $m \to \infty$, поскольку эти функции в аналитическом отношении существенно различны и принадлежат в силу этого различным функциональным множествам. Тем не менее в указанном выше смысле можно говорить, что гистограммы $\bar{y}(r, \mathbf{n})$ более адекватно характеризуют плотности распределений дискретных ансамблей частиц, нежели какие-то другие модельные распределения. Поэтому совсем неудивительно, что экспериментальные данные о микроструктуре аэрозолей приводятся, как правило, в форме гистограмм.

Так называемые стандартные модели и, в частности, те, которые представлены выражениями (1.96), вторичны и порождены попыткой аппроксимировать реальные спектры размеров стандартными аналитическими аналогами. Особой необходимости в подобных моделях при построении теории микроструктурного анализа, включая, в частности, и оптические методы, естественно нет. Модельные распределения могут представлять интерес в разработке качественных методов интерпретации оптических измерений, а также в методах прикладного анализа оптических характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц, которые будут изложены в четвертой главе. Представленный в данном пункте материал можно рассматривать не более как краткое введение в теорию микроструктурного анализа полидисперсных систем методами оптического зондирования. Строгое ее изложение требует использования интеграла Стилтьеса, в связи с чем мы отсылаем читателя к работам [32, 33], а ниже рассмотрим пример интерпретации оптических данных.

1.4.3. Пример интерпретации данных трехчастотного лазерного зондирования аэрозолей нижней стратосферы

На рис. 1.1 *а* представлен спектральный ход аэрозольного коэффициента обратного рассеяния $\beta_\pi(\lambda)$ для слоя $\Delta(z)=1{,}5$ км, находящегося на высоте $z=13{,}5$ км. Измерения осуществлялись с помощью трехчастотного лидара на длинах волн 0,53; 0,69; 1,06 мкм. Пример заимствован из работы [36], где дан подробный анализ методик интерпретации оптических данных, получаемых

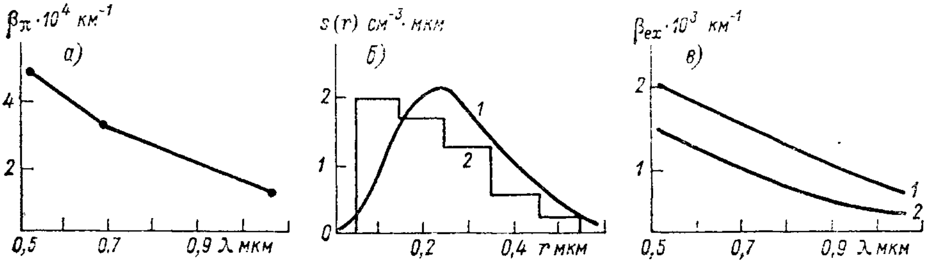

Рис. 1.1.

а) измеренная характеристика $\beta_\pi(\lambda)$ для трех значений λ [36]; *б*) восстановленные распределения $s_M(r)$ и $\bar{s}(r)$ (кривые *1* и *2* соответственно); *в*) прогнозируемый спектральный ход аэрозольного ослабления.

при зондировании аэрозолей нижней стратосферы. Результаты обращения этих данных даны в виде двух распределений на рис. 1.1, *б*. Первое из них получено с использованием параметрической модели (1.96б) (модифицированное гамма-распределение), второе — с использованием линейной модели $\bar{y}(r, s)$ (гистограммы). Построение первого решения (кривая *1*) связано с численным решением нелинейной системы уравнений

$$\beta_\pi(r_s,\ S,\ \lambda_i)=\beta_{\pi\sigma}(\lambda_i), \quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{1.102}$$

относительно параметров r_s (модальный радиус распределения $s(r)$) и $S=\int s(r)\,dr$. Параметры модели распределения α и γ при этом выбираются априори (в соответствии, например, с рекомендациями работы [12]). При построении численного алгоритма систему (1.102) удобно записывать в виде

$$S\overline{K}_{\pi i}(r_s)=\beta_{\pi\sigma i}, \quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{1.103}$$

где $\overline{K}_{\pi i}(r_s)$ — полидисперсный фактор эффективности обратного рассеяния, определяемый интегралом

$$\overline{K}_{\pi i}(r_s)=\int\limits_0^\infty K(r,\ \lambda_i)\,\varphi(r_s,\ r)\,dr; \tag{1.104а}$$

$$\varphi(r_s,\ r)=\left(\frac{\alpha+2}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha+3}{\gamma}}\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\alpha+2}\frac{\gamma}{r_s\,[(\alpha+3)/\gamma]}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\alpha+2}{\gamma}\left(\frac{r}{r_s}\right)^\gamma\right\}. \tag{1.104б}$$

Обе функции $s(r_s, S, r)$ и $\bar{y}_\alpha(r)$ являются решениями обратной задачи светорассеяния, поскольку удовлетворяют неравенству $\rho(\beta_\pi, \beta_{\pi\sigma}) \leqslant \Delta_\pi(\sigma)$, где $\Delta_\pi(\sigma)$ — допустимое значение оптической невязки для данных оптических измерений. Следуя [28], подобные решения следует называть квазирешениями. Этим термином подчеркивается то обстоятельство, что обратная задача допускает несколько приближенных решений в зависимости от выбранной аналитической модели искомого распределения. Полученные нами решения близки друг к другу по интегральным параметрам, таким как полное геометрическое сечение S и средний размер $\bar{r}$ (то же самое медиана). Однако их локальное поведение заметно отличается друг от друга в области размеров R. В частности, первое распределение указывает на практическое отсутствие малых частиц в спектре размеров, в то время как второе свидетельствует об обратном. Однако в большей степени мы должны доверять второму распределению $\bar{y}(r)$.

Действительно, для первой модели характерна локализация частиц в окрестности моды r_s и быстрое убывание значений $s(r_s, S, r)$ вправо и влево от этой точки. При использовании этой модели в схеме обращения искомому решению мы как бы навязываем искусственно подобное аналитическое свойство. Вторая модель, т. е. ступенчатое распределение, свободна от подобного недостатка, и поэтому ей в этом отношении можно доверять в большей мере. В частности, как следует из $\bar{y}_\alpha(r)$, распределение $s_0(r)$ монотонно убывает в области размеров [0,1; 0,6 мкм], и поэтому его можно в принципе удовлетворительно аппроксимировать степенной функцией с отрицательным показателем, т. е. моделью типа (1.96а). Конечно, следует иметь в виду, что в данном примере явно недостаточно трех измерений $\beta_{\pi\sigma}(\lambda)$, чтобы получить достоверные оценки для пяти компонент опорного вектора $\mathbf{s}$ из решения вырожденной системы (1.101). Поэтому и нет особых оснований подробно обсуждать локальное поведение действительного распределения $s_0(r)$ по решению $\bar{y}_\alpha(r)$. Для нас было важно проиллюстрировать влияние аналитических свойств модельных распределений, выбираемых в качестве возможных решений обратных задач, на характер получаемой информации о спектре размеров полидисперсной системы частиц.

В заключение обратимся к преобразованию $\beta_\pi \to \beta_{ex}$, которое можно осуществить в данном примере. На рис. 1.1 *в* приведены кривые $\beta_{ex}(r_s, S, \lambda)$ и $\beta_{ex,\alpha}(\lambda) = (K\bar{y}_\alpha)(\lambda)$. Естественно, что поскольку решения $s(r_s, S, r)$ и $\bar{y}_\alpha(r)$ отличаются друг от друга в области размеров (0,1; 0,6 мкм), то и соответствующие им аппроксимирующие аналоги будут отличны. Первое распределение $s(r_s, S, r)$ в целом сдвинуто вправо относительно гистограммы $\bar{y}_\alpha(r)$, т. е. в область больших частиц. Поскольку соответствующий фактор $K_{ex}(x)$ для данных R и Λ в целом растет с ростом x в интервале $X = (2\pi\lambda_{\min}R_2^{-1}, 2\pi\lambda_{\max}R_1^{-1})$ (рис. 1.2), то первая кривая $\beta_{ex}(\lambda)$ располагается выше второй. В пределах данного эксперимента не представляется возможным судить в полной мере о достоверности значений аэрозольного коэффициента ослабления, определяемых по вектору $\beta_{л\sigma}$. Для этого необходимы как минимум

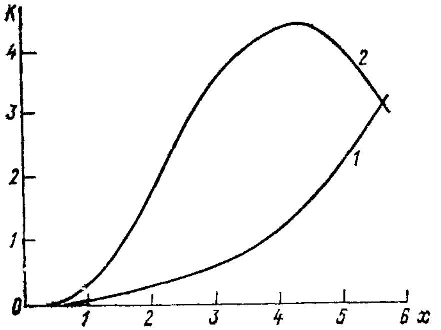

Рис. 1.2. Сглаженные факторы $K_л(x)$ и $K_{sc}(x)$ при $\overline{m}=1,5-0_i$ (кривые 1 и 2 соответственно).

гарантии достоверности априорных оценок показателя преломления аэрозольного вещества. Подробно методики оценки эффективности преобразований вида $\beta_л \to \beta_{ex}$ будут рассмотрены ниже.

1.4.4. Интегральные распределения в обратных задачах светорассеяния

Выше упоминалось о том, что множество всех непрерывных распределений Φ в общем случае не является компактным само по себе и, следовательно, в силу топологической леммы не может служить основой для построения сходящейся последовательности приближенных решений при обращении интегральных уравнений первого рода. В связи с этим любой вычислительный алгоритм так или иначе основывается на предварительном сужении (ограничении) Φ до некоторого компакта. В предыдущем примере рассматривались два возможных варианта простейших компактов применительно к проблеме микроструктурного анализа аэрозолей из оптических измерений. Первый из них состоял из параметрического семейства модельных распределений, второй — из гистограмм, ограниченных по абсолютному значению и размерности m. В пределах данного раздела мы построим еще один простейший компакт, который так же, как и предыдущий, приводит к методу линейных систем при обращении оптических характеристик, и его распределения также согласованы с дискретным характером реальных спектров размеров рассеивающих ансамблей частиц. Построение указанного компакта начнем с рассмотрения простого примера, иллюстрирующего, в частности, почему множество непрерывных распределений Φ не является компактом.

Выберем из множества непрерывных функций Φ некоторое распределение, скажем $s(\omega, r)=1-\sin\omega r$, где $\omega>0$ и $r\in R$. Эта функция действительно всюду непрерывна, положительна и ограничена. Для двух значений r_1 и r_2 из области возможных размеров частиц $(R_1\leqslant r\leqslant R_2)$ имеет место оценка

$$|s(\omega,\ r_2)-s(\omega,\ r_1)|\leqslant\omega\,|r_2-r_1|.$$

Параметр ω может быть сколь угодно большим, и при этом распределение $s(\omega, r)$ не меняет указанных выше свойств, т. е. остается положительным, ограниченным и непрерывным. При изменении параметра ω в пределах области $\Omega(\omega)=(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ совокупность указанных моделей образует параметрическое семейство (множество, последовательность и т. п.). Нетрудно видеть, что для подобного параметрического семейства функций выбор конечной константы h в неравенстве (1.66б) требует прямых ограничений на область $\Omega(\omega)$. Таким образом, для того чтобы из распределений $s(\omega, r)$ построить компакт $\Phi=\{s(r, \omega)\}$, нужно «выбросить» функции с большими значениями ω, которые в дальнейшем будем в целях простоты называть сильно осциллирующими либо нерегулярными.

Необходимо иметь в виду, что если некоторое распределение $s(r)$ есть сумма двух распределений, скажем $s_0(r)$ и $s(\omega, r)$, где первую компоненту $s_0(r)$ можно считать регулярной в указанном выше смысле, то аналитические свойства $s(r)$ все же определяются в большей степени второй компонентой $s(\omega, r)$. Дело состоит в том, что хотя обычно $s_0(r)$ по абсолютным значениям может всюду превосходить осциллирующую компоненту $s(\omega, r)$ в интервале R, для производных это, как правило, не выполняется, т. е. имеет место неравенство $|s_0'(r)|\leqslant|s'(\omega, r)|$. Поэтому композицию распределений в целом следует отнести к функциям с нерегулярным аналитическим поведением. Для того чтобы из них построить множество регулярных распределений, скажем удовлетворяющих условиям (1.66) и в силу чего образующих компакт, необходимо надлежащим образом удалить («отфильтровать») нерегулярные компоненты.

Источником нерегулярных компонент, конечно, является эксперимент, поскольку в любых измерениях содержатся реализации случайных процессов (шумы), которые в аналитическом плане представляются весьма нерегулярными функциями и, естественно, не удовлетворяют тем функциональным уравнениям, которые решаются в процессе интерпретации данных. Подробное описание аналитических свойств реализаций случайных процессов можно найти в обстоятельной работе [25].

Обратимся теперь к интегральным распределениям и вычислим $S(\omega, r)$ для только что рассмотренных функциональных моделей. Имеем

$$S(\omega, r)=\int\limits_{R_1}^{r} s(\omega, r')\,dr'=r-\omega^{-1}(1-\cos\omega r).$$

Выбирая, как и ранее, две точки r_1 и r_2 в области возможных значений R, находим оценку

$$|S(\omega, r_2)-S(\omega, r_1)|\leqslant|1+\sin\omega(r_2-r_1)|\,|r_2-r_1|\leqslant 2|r_2-r_1|,$$

которая, как видно, не зависит от параметра ω. Это неравенство позволяет утверждать, что первообразная от нерегулярной компоненты $s(\omega, r)$ становится регулярной компонентой для интегральных распределений. Проще это формулируется так: множество непрерывных ограниченных интегральных распределений является компактным множеством непрерывных функций. Таким образом, мы приходим к следующему важному практическому выводу: если характеризовать микроструктуру дисперсных сред интегральными распределениями и формулировать обратную задачу светорассеяния относительно этих распределений, то обращение полидисперсных интегралов будет корректно поставленной математической задачей.

Интегральные распределения типа $S(r)$ удовлетворяют одному очень важному свойству, которое их выделяет из широкого класса положительных непрерывных функций (т. е. класса Φ). Если выбрать две точки, скажем r_1 и r_2 в R, то $S(r_1) \leqslant S(r_2)$ при условии, что $r_1 \leqslant r_2$ (и наоборот). Иными словами, распределения $S(r)$ нигде не убывают с ростом r. В простейшем случае это могут быть функции, монотонно возрастающие. Подчеркивая это отличительное свойство интегральных распределений, их множества будем обозначать через $\Phi\uparrow$. Очевидны следующие соотношения $\Phi\uparrow \subset \Phi_M \subset \Phi$, которые иллюстрируют факт сужения Φ до компакта $\Phi\uparrow$ при переходе к интегральным функциям распределения. По определению $\Phi\uparrow = \{S(r);\ S(r_2) \geqslant S(r_1)$ при $r_2 \geqslant r_1\}$.

Переход к интегральным распределениям меняет и форму интегрального представления оптических характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц. Теперь для них должен использоваться интеграл Стилтьеса, т. е. представление вида

$$\beta(\lambda) = \int_R K(r, \lambda)\, dS(r). \tag{1.105}$$

Введение интеграла Стилтьеса в обратные задачи светорассеяния существенно расширяет информационные возможности оптических методов микроструктурного анализа дисперсных рассеивающих сред. Не имея возможности останавливаться на этом сколько-нибудь подробно в пределах данной работы (см. монографию [33]), обратимся вновь к модели $\bar{y}(r)$, использованной в предыдущем примере. Ясно, что для гистограммы $\bar{y}(r)$ интегральное распределение суть непрерывная (во всех без исключения точках области R) ломаная линия $Y^{(1)}(r)$. Подставляя это модельное распределение в (1.105), находим соответствующую линейную форму

$$\int_R K(r, \lambda)\, dY^{(1)}(r) = \sum_{l=1}^{m} \overline{K}_l(\lambda)\, \Delta_l(S), \tag{1.106}$$

где, как и ранее, $\overline{K}_l(\lambda)$ определяется интегралом (1.101б). В принципе модель интегрального распределения в виде ломаной линии можно ввести независимо от ранее рассмотренной гистограммы. Действительно, будем считать, что отыскивается распределение $S(r)$ из $\Phi\uparrow$. Вводя опорный вектор $\mathbf{S}$ с компонентами $S_l = S(r_l)$, можно построить подходящий аппроксимационный аналог (то же самое вспомогательную модель) $Y(r, \mathbf{S})$. Кусочно-линейная аппроксимация приводит нас к простейшей модели $Y^{(1)}(r, \mathbf{S})$. Следует заметить, что поскольку $S(r_{l+1}) \geqslant S(r_l)$, то компоненты вектора $\mathbf{S}$ удовлетворяют теперь условию

$$S_{l-1} \leqslant S_l \leqslant S_{l+1}, \quad l = 1, \ldots, m. \tag{1.107}$$

Множество векторов $\mathbf{S}$, компоненты которых удовлетворяют этому условию, будем обозначать через $\Psi_m\uparrow$. Модель $Y^{(1)}(r, \mathbf{S})$ приводит к следующей обратной задаче в алгебраизованном варианте:

$$G_{nm}\mathbf{S} = \beta; \quad \mathbf{S} \in \Psi_m\uparrow; \quad \beta \in B_n, \tag{1.108}$$

где элементы матрицы G_{nm} размерностью $n \times m$ равны

$$G_{il} = \overline{K}_{i,\,l-1} - \overline{K}_{il}, \quad l = 1, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.109}$$

Сопутствующая ей обратная задача для модели $\bar{y}(r)$, в которой находится вектор $\mathbf{\Delta}_S$ с компонентами $\Delta_l(S) = S_{l+1} - S_l$, имеет вид

$$K_{nm}\mathbf{\Delta}_S = \beta, \quad \mathbf{\Delta}_S \in \Psi_m, \quad \beta \in B_n. \tag{1.110}$$

Обратные задачи, соответствующие линейным системам (1.108) и (1.110), естественно, различны, поскольку различны исходные матрицы, и искомые векторы принадлежат различным векторным пространствам. Не будем вникать в математические тонкости и пытаться ответить на вопрос, как решения $Y^{(1)}(r, \mathbf{S})$ и $\bar{y}(r, \mathbf{\Delta}_S)$ соотносятся между собой для данного экспериментального вектора β_σ в правой части соответствующих систем. Подробнее об этом изложено в работе [33]. Отметим лишь, что гистограмму $\bar{y}(r, \mathbf{\Delta}_S)$ можно считать производной от интегрального распределения $Y^{(1)}(r, \mathbf{S})$. В общем случае аппроксимационные модели типа $Y(r, \mathbf{S})$ могут быть недифференцируемыми. Например, это имеет место для ступенчатого интегрального распределения $\overline{Y}(r, \mathbf{S})$. Если микроструктура исследуемой дисперсной среды характеризуется подобным распределением, то представление (1.105) по-прежнему сохраняет смысл, поскольку интеграл Стилтьеса с разрывными распределениями вполне определен. Интересно, что при этом распределение $\overline{Y}(r, \mathbf{S})$ не имеет плотности, и, следовательно, обычная обратная задача светорассеяния в форме интеграла Римана теряет смысл. В рассматриваемой разрывной модели в качестве компонент искомого вектора выбираются значения $S_l = S(r_l + 0)$ [33]. В общем случае дискретизация интегрального представления (1.105) осуществляется в соответствии с выражением

$$\int\limits_R K(r, \lambda_i)\, dS(r) = \sum_{l=1}^{m} K_i(\xi_l)\, \Delta_l(S), \tag{1.111}$$

где ξ_l — некоторая точка интервала $\Delta_l = (r_l, r_{l+1})$. Интервалы Δ_l, покрывающие область возможных размеров R, здесь вторичны, поскольку исходной является последовательность узлов S_l по кривой $S(r)$. Напомним, что интеграл Стилтьеса по определению берется вдоль кривой; в данном случае это интегральное распределение $S(r)$ либо его аппроксимационная модель $Y(r, \mathbf{S})$.

В заключение остается заметить, что интеграл Стилтьеса для обратных задач оптики атмосферы совершенно естествен и применяется во многих приложениях. Достаточно напомнить, что все интегралы теории переноса суммируются по $d\tau(z)$, где $\tau(z)$ — оптическая толщина, скажем, от z_1 до z. Правда, при вычислениях обычно спешат избавиться от подобного дифференциала, хотя он нисколько не мешает построению компактных вычислительных схем. Во всяком случае при обращении интегральных уравнений это бесспорно в силу возможного сужения исходного множества решений Φ до компакта $\Phi\uparrow$. Причем для построения этого компакта не потребовалось вводить какие-то искусственные ограничения и тем более привлекать какую-либо априорную информацию об искомом спектре размеров.

1.4.5. Вычислительная схема обращения оптических характеристик на множестве интегральных распределений

При подстановке в уравнение (1.108) измеренного вектора β_σ вычислительный алгоритм его обращения в соответствии с аппроксимационным подходом строится на основе вариационной задачи для квадратичного функционала

$$\rho^2(\mathbf{S}) = \| \beta_\sigma - G_{nm}\mathbf{S} \|^2_{l_2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_{i\sigma} - \sum_{l=1}^{m} G_{il} S_l \right)^2. \qquad (1.112)$$

В качестве решения принимается вектор $\mathbf{S}^*$, доставляющий минимум квадратичной функции ρ^2 на множестве векторов $\Psi_m\uparrow$. Практически вычисления осуществляются на основе построения некой последовательности векторов $\mathbf{S}^{(p)}$ из $\Psi_m\uparrow$, такой, что $\rho(\mathbf{S}^{(p)}) < \rho(\mathbf{S}^{(p-1)})$, а в качестве решения принимается вектор с индексом p^*, начиная с которого выполняется неравенство

$$\rho(\mathbf{S}^{(p)}) \leqslant \Delta(\sigma), \quad (p \geqslant p^*),$$

где $\Delta(\sigma)$ — величина, сравнимая по порядку с σ. Указанная последовательность называется минимизирующей. Конечно, необходимы соответствующие гарантии того, что указанная последовательность сходится к точному решению $\mathbf{S}_0$, когда $\sigma \to 0$.

Если квадратичный функционал $\rho^2(\mathbf{S})$ имеет единственный глобальный минимум на векторах из $\Psi_m\uparrow$, то и решение вариационной задачи будет также единственным. Это утверждение достаточно очевидно и нет особой надобности его доказывать. (Формальные аспекты излагаемых здесь вопросов можно найти в работе [42]). Укажем лишь на то, что квадратичный функционал $\rho^2(\mathbf{S})$ является выпуклым функционалом как m-мерная парабола по аргументам $S_1, \ldots, S_m$. В подобном случае для единственности экстремума необходимо и достаточно, чтобы область задания функционала была также выпуклой. Сконструированное выше векторное пространство $\Psi_m\uparrow$ в полной мере удовлетворяет этому требованию, так как является не только компактным, но еще и выпуклым. Поскольку между $\Psi_m\uparrow$ и $\Phi\uparrow$ существует взаимно однозначное соответствие, то все это в полной мере относится и к множеству интегральных распределений $\Phi\uparrow$. В связи с этим покажем, что $\Phi\uparrow$ действительно является выпуклым. Множество $\Phi\uparrow$ будет выпуклым в том случае, если из принадлежности ему двух распределений, скажем $S_1(r)$ и $S_2(r)$, следует также и принадлежность ему распределения $S_3(r)$, которое определяется согласно выражению

$$S_3(r) = \gamma S_1(r) + (1-\gamma) S_2(r),$$

где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ и $r \in R$. В соответствии с основным свойством функции из $\Phi\uparrow$ любое распределение $S(r)$ должно удовлетворять условию $S(r_1) \leqslant S(r_2)$ для любых точек r_1 и r_2 из R, если $r_1 < r_2$. В данном случае речь идет о том, что должно выполняться неравенство

$$\gamma S_1(r_1) + (1-\gamma) S_2(r_1) \leqslant \gamma S_1(r_2) + (1-\gamma) S_2(r_2).$$

Справедливость последнего доказывается весьма просто. Перепишем его в виде

$$\gamma [S_1(r_2) - S_1(r_1)] + (1-\gamma)[S_2(r_2) - S_2(r_1)] \geqslant 0.$$

Выражения в квадратных скобках положительны, поскольку $S_1(r)$ и $S_2(r)$ нигде не убывают в области R с ростом r. Константа γ положительна по определению, и поэтому последнее неравенство очевидно. Таким образом, вариационный подход, реализуемый на основе алгоритмического построения минимизирующей последовательности в $\Psi_m\uparrow$, гарантирует однозначность решения обратной задачи в форме (1.108). Разумеется, этого уже нельзя сказать о решении системы (1.110). Для исследования подобных задач нужны иные аналитические подходы, и мы их уже в какой-то мере касались в разделе 1.3.2, когда говорили о так называемых регуляризирующих операторах. Доказательство выпуклости множества интегральных распределений приводилось не только в целях обоснования вычислительного алгоритма, но и с тем, чтобы показать еще одно важное аналитическое свойство, присущее этим функциям. В соответствии с выпуклостью каждое распределение можно считать композицией двух других интегральных распределений, если подобрать надлежащим образом константу γ.

Теперь нам следует указать способ построения минимизирующей последовательности векторов $\{S^{(p)}, p=1, \ldots\}$. Следует сразу оговорить, что эти методы могут быть самыми разнообразными. Их классификации и исследованию посвящены обстоятельные монографии [42, 43]. Ниже мы изложим один из простейших вариантов численного построения минимизирующей последовательности, причем, возможно, далеко не лучший с точки зрения быстродействия. Однако в тех случаях, когда размерность обратных задач невелика в силу малой размерности обращаемого вектора $\boldsymbol{\beta}_\sigma$, описанный ниже алгоритм вполне эффективен и реализуется с помощью простых вычислительных средств.

Введем нормированный вектор $\mathbf{q}=\{q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}\}$, который получается из $\mathbf{S}$ путем нормировки его компонент на $S(r=R_2)=S_{m+1}=S$. Тогда $\rho^2(\mathbf{S})$ можно рассматривать как функцию полного геометрического сечения S полидисперсной системы и вектора $\mathbf{q}$, за которым стоит нормированное интегральное распределение $q(r)\leqslant 1$. Выражение для соответствующей невязки будем записывать в виде

$$\rho^2(S, \mathbf{q})=S^2\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{\beta}_{i\sigma}-\sum_{l=1}^{m}\varphi_{il}\,\Delta_l(q)\right)^2, \tag{1.113}$$

где $\widetilde{\beta}_{i\sigma}=\beta_{i\sigma}S^{-1}$, а $\varphi_{il}=\overline{K}_l(\lambda_i)$. Если считать постоянную S известной, скажем, в нулевом приближении, то остается найти вектор $\mathbf{q}$ путем минимизации (1.113). Простейшим при этом является метод координатного спуска, когда минимизация значений $\rho^2(S, q_1, \ldots, q_m)$ осуществляется на каждом шаге по одной из фиксированных переменных, скажем q_j. С этой целью для суммы в правой части (1.113) введем обозначение $\widetilde{\rho}^2(\mathbf{q})$ и перепишем ее в следующем виде:

$$\widetilde{\rho}^2=\sum_{i=1}^{n}\left\{\widetilde{\beta}_{i\sigma}-\sum_{l=1}^{j-2}\varphi_{il}\,\Delta_l(q)+\varphi_{i,\,j-1}q_{j-1}-\varphi_{ij}q_{j+1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=j+1}^{m}\varphi_{il}\,\Delta_l(q)-(\varphi_{i,\,j-1}-\varphi_{ij})\,q_j\right\}^2. \tag{1.114}$$

Выражение (1.114) наглядно подчеркивает тот очевидный факт, что сумма справа является параболой по каждой из частных координат q_j $(j=1, \ldots, m)$. Если предположить, что известны все компоненты вектора $\mathbf{q}$, за исключением q_j, то найти $\overset{*}{q}_j$, доставляющее минимум этой сумме, не составляет труда. Для этого нам необходимо найти экстремальную точку частной параболы $\widetilde{\rho}^2(q_j\,|\,q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_m, 1)$. Технически это осуществляется следующим образом.

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор

$$\mathbf{q}^{(j,\,p-1)}=\{q_1^{(p)}, \ldots, q_{j-1}^{(p)}, q_j^{(p)}, q_{j+1}^{(p-1)}, \ldots, q_m^{(p-1)}, 1\}.$$

Смысл верхнего индекса $(j,\ p-1)$ вполне ясен: речь идет о векторе, составленном из j компонент искомого вектора, известных в p-м приближении, и последующих $(m-j)$ компонент, известных в $(p-1)$-м приближении. Продвигая последовательно переменный индекс j от 1 до m, получим искомый вектор в p-м приближении. В связи с этим запись $\mathbf{q}^{(m,\,p-1)}$ эквивалентна $\mathbf{q}^{(p)}$. Это продвижение осуществляется последовательной (покоординатной) минимизацией квадратичной формы (1.114). Подставляя вектор $\mathbf{q}^{(j,\,p-1)}$ в (1.114), можно построить следующее выражение:

$$\tilde{\rho}^2\left(\mathbf{q}^{(j,\,p-1)}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{A_{ij}^{(p-1)}-c_{ij}q_j^{(p)}\right\}^2, \tag{1.115а}$$

где

$$A_{ij}^{(p-1)}=\tilde{\beta}_{i\sigma}-\sum_{l=1}^{j-2}\varphi_{il}\,\Delta_l^{(p)}(q)-\sum_{l=j+1}^{m}\varphi_{il}\,\Delta_l^{(p-1)}(q)+$$

$$+\varphi_{i,\,j-1}q_{j-1}^{(p)}-\varphi_{ij}q_{j+1}^{(p-1)}; \tag{1.115б}$$

$$c_{ij}=\varphi_{i,\,j-1}-\varphi_{ij}. \tag{1.115в}$$

Полагая, что вычисление компонент искомого вектора осуществляется в указанном выше направлении, считаем известными на данный момент все компоненты с индексами $l<j$ и $l>j$. Значение q_j^*, минимизирующее (1.115а) в этих условиях, рассчитывается по следующей формуле:

$$q_j^*=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}^{(p-1)}c_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{n}c_{ij}^2. \tag{1.116}$$

Если полученное таким образом значение q_j^* удовлетворяет условию

$$q_{j-1}^{(p)}\leqslant q_j^*\leqslant q_{j+1}^{(p-1)}, \tag{1.117}$$

то его можно принять в качестве $q_j^{(p)}$ и перейти к определению следующей компоненты q_{j+1} в p-м приближении. Если условие (1.117) не выполняется, то это означает, что точка минимума частной параболы (1.115а) лежит вне указанного интервала. В этом случае в качестве $q_j^{(p)}$ должно быть взято одно из граничных значений $q_{j-1}^{(p)}$ либо $q_{j+1}^{(p-1)}$ в зависимости от того, какая из величин $\tilde{\rho}^2(q_j^{(p)}=q_{j-1}^{(p)}|\ldots)$ или $\tilde{\rho}^2(q_j^{(p)}=q_{j+1}^{(p-1)}|\ldots)$ принимает меньшее значение. В соответствии с описанной вычислительной схемой всегда гарантируется выполнение следующих двух главных условий, а именно: $\rho^2(\mathbf{q}^{(j,\,p-1)})\geqslant\tilde{\rho}^2(\mathbf{q}^{(j,\,p)})$ для всех j и p и $\mathbf{q}^{(j,\,p-1)}\in\in\Psi_m\uparrow$. Таким образом, последовательность векторов $\{\mathbf{q}^{(j,\,p)}\}$ $(p=1,\ \ldots)$ действительно является минимизирующей последовательностью в $\Psi_m\uparrow$. Процесс минимизации осуществляется до выполнения условия

$$\max_{j\leqslant m}\left|q_j^{(p)}-q_j^{(p-1)}\right|\leqslant\Delta_{\min}(q), \tag{1.118}$$

где $\Delta_{\min}(q)$ — достаточно малое число, выбор которого согласован с ошибками оптических измерений σ. В первом приближении можно полагать, что $\Delta_{\min}(q)$ есть произведение минимальной относительной ошибки измерений, скажем, $\varepsilon_{\min}$ на некоторый коэффициент η, который можно рассматривать как рабочий параметр вычислительной схемы. Его значение определяется многими факторами, среди которых определяющим является обусловленность исходного матричного (то же самое интегрального) оператора. Однозначно определить понятие обусловленности и тем более дать ее количественную оценку достаточно трудно, поэтому здесь мы не обсуждаем этих вопросов. В первом приближении можно считать, что чем выше обусловленность данной обратной задачи, тем меньше ошибки измерений сказываются на ошибках решения. Для хорошо обусловленной задачи ошибки в решении примерно равны ошибкам в исходных данных. В связи с этим можно полагать, что $\eta \geqslant 1$. В конечном итоге определяющим является численный эксперимент по обращению модельных оптических характеристик, учитывающий по возможности все особенности конкретных экспериментов.

После определения вектора $\mathbf{q}$ уточняем значение S путем минимизации невязки (1.113) по этому параметру, потребовав выполнения условия $\rho^2(S^*, \mathbf{q}) \leqslant \Delta^2(\sigma)$. Для оценки начального приближения $S^{(0)}$ можно воспользоваться представлением $\beta(\lambda) = S\bar{K}(\lambda)$, где $\bar{K}(\lambda)$ — полидисперсный фактор. Оценить значения $\bar{K}(\lambda)$ можно численными методами, прибегая к каким-либо параметрическим распределениям, либо исходить из многочисленных оптических моделей аэрозольных образований в атмосфере [15]. Для таких распространенных в теории оптического зондирования факторов, как $\bar{K}_\pi(\lambda)$, $\bar{K}_{ex}(\lambda)$ и $\bar{K}_{sc}(\lambda)$, можно использовать и приближенные аналитические оценки, не прибегая к численному интегрированию и формулам Ми. Подобные оценки можно найти в монографиях [17, 36].

Совсем необязательно в вычислительную схему обращения вводить нормированное интегральное распределение $q(r)$. Можно решать обратную задачу проще, считая неизвестным исходное интегральное распределение $S(r)$. Вместо (1.113) для оптической невязки можно записать выражение

$$\rho^2(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_{i\sigma} - \sum_{l=1}^{m} \varphi_{il} \Delta_l(S) \right)^2 . \tag{1.119}$$

Затем вводим в вычислительную схему следующий вектор:

$$\mathbf{S} = \{S_1 = q_1 S_m, \ S_2, \ \ldots, \ S_m, \ S_{m+1} = q_m^{-1} S_m\},$$

где числа q_1 и q_m заданы априори. Значения q_1 и $(1 - q_m)$ суть квантили распределения в окрестности границ R_1 и R_2. Не вдаваясь в подробности, заметим лишь, что распределение $S(r)$ (и особенно $s(r)$) в окрестности границ, как правило, плохо «представлено» оптическими измерениями, и поэтому резонно его здесь доопределить априори. Это делается с помощью квантилей, увязав их выбор с погрешностью $\varepsilon_{\min}$. Методики приближенного определения величин q_1 и $(1 - q_m)$ в задачах обращения спектральных характеристик светорассеяния атмосферными дымками изложены в монографии [36]. В остальном расчетные соотношения строятся в полном соответствии с вышеизложенным, и их повторять не будем. Возможны и другие варианты вычислительных алгоритмов [33].

1.4.6. Численные примеры и практические рекомендации

На рис. 1.3 представлен пример численного обращения спектрального хода коэффициента ослабления $\beta_{ex}(\lambda)$ атмосферной

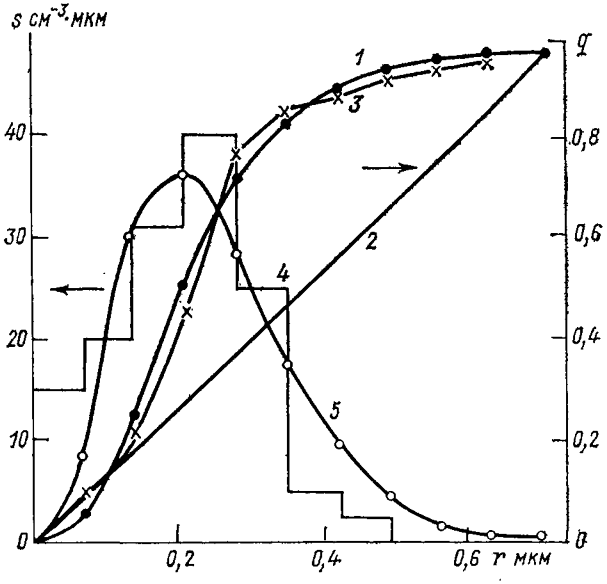

Рис. 1.3. Пример численного обращения коэффициента ослабления для модельной дымки (дымки Н [12]) заданного в пяти точках спектрального интервала $\Lambda = (0{,}44;\ 0{,}94$ мкм).

1 — модельное распределение $q_0(r)$; *2* — начальное приближение $q^{(0)}(r)$; *3* — полученное решение; *4* — соответствующая решению гистограмма плотности; *5* — модельная плотность $s_M(r)$.

дымкой, микроструктурная модель которой описывается гамма-распределением (модель «дымка Н» из [12]). Обращение указанной оптической характеристики осуществлялось в соответствии с изложенной выше методикой. В качестве фактора $K_{ex}(r, \lambda)$ использовалась простейшая в теории дифракции аналитическая модель, а именно

$$K(\rho) = 2 - 4 \sin \rho/\rho + 4(1 - \cos^2 \rho)/\rho^2,$$

где $\rho = 4(\overline{m} - 1)r/\lambda$. Исходное нормированное распределение $q_0(r)$ на рис. 1.3 представлено кривой *1*. Построение минимизирующей последовательности в данном примере началось с распределения $q^{(0)}(r)$, в качестве которого выбрана прямая линия, соединяющая точки ($R_1=0$; $q(R_1)=0$) и ($R_2=0{,}7$; $q(R_2)=1$). Подобную функцию можно считать самым «простым» распределением из множества возможных решений $\Phi\uparrow$ рассматриваемой обратной задачи. Ему соответствует функция плотности, всюду постоянная в области возможных размеров частиц. Решением обратной задачи яв-

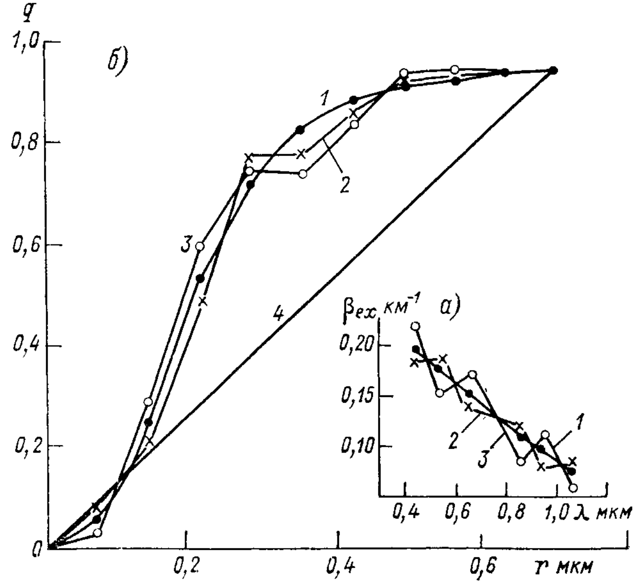

Рис. 1.4.
а) «возмущенные» оптические характеристики $\beta_{i\sigma}=\beta_{i0}[1+(-1)^i\sigma]$, где $\beta_0(\lambda)$ — из предыдущего примера (см. рис. 1.3); *б*) соответствующие решения обратной задачи для $\sigma\leqslant 0{,}05$ (кривая *2*) и $\sigma\leqslant 0{,}1$ (кривая *3*); кривые *1* и *4* — модельное распределение $q_0(r)$ и начальное приближение $q^{(0)}(r)$.

ляется кривая *3*, полученная при $\Delta_{\min}(q)\leqslant 0{,}01$, что соответствует ошибке квадратур на уровне 1—2 %. На этом же рисунке представлена гистограмма $\{\Delta_l(S)/\Delta_l(r)\}$, характеризующая плотность распределения частиц по размерам исследуемой дисперсной среды. Оптическое зондирование осуществлялось в диапазоне $\Lambda=[0{,}44;\ 0{,}94$ мкм$]$ на пяти длинах волн, равномерно расположенных в этом интервале. Устойчивость решений к «возмущениям» исходных данных иллюстрируется соответствующими кривыми, представленными на рис. 1.4. Наличие ошибки в априорном задании соответствующего значения показателя преломления, естественно, сказывается на точности обращения. На рис. 1.5 это влияние иллюстрируется зависимостью ошибок $\varepsilon_q=\|\mathbf{q}_0-\mathbf{q}\|$ от σ и $\Delta\bar{m}$. В первом приближении эффективность обращения оптических данных можно характеризовать отношением ε_q/σ («коэффициентом усиления ошибок»). Для рассмотренного примера эта величина не превышает двух, что вполне приемлемо с практической точки зрения. Следует иметь в виду, что величина ε_q/σ определяется не только эффективностью методики обращения, но и информативностью исходных оптических данных.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. В ряде случаев информативность исходных оптических данных может быть весьма низкой, что приводит к заметной зависимости получаемых решений $q(r)$ (а также и параметра S) от выбора нулевого приближения $q^{(0)}(r)$ в схеме обращения. В рассмотрен-

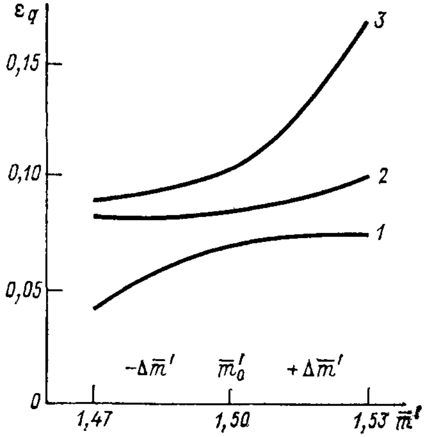

Рис. 1.5. Зависимость ошибок восстановления распределений от σ и $\Delta\bar{m}$.
1) $\sigma \leqslant 0{,}02$, 2) $\sigma \leqslant 0{,}05$, 3) $\sigma \leqslant 0{,}1$.

ном выше примере этого не наблюдалось, по крайней мере, при $\sigma \geqslant 0{,}05$. В этом примере в качестве $q^{(0)}(r)$ можно было выбрать любую подходящую функцию, в том числе и такую «примитивную» модель, как линия, исходящая из начала координат. Однако если сузить интервал оптического зондирования Λ либо взять в качестве модельного распределения широкий спектр размеров ($R_2 \leqslant 3$ мкм, например), то мы немедленно столкнемся с упомянутой выше зависимостью. Ее появление ни в коей мере нельзя относить к недостаткам описанного алгоритма, поскольку она проистекает из известных свойств плохо обусловленных линейных систем. В связи с этим в качестве нулевого приближения $q^{(0)}(r)$ можно рекомендовать так называемое нормальное решение системы (1.110), которое находится следующим образом:

$$\mathbf{\Delta}_S^{(\alpha)} = \left(K_{mn}^{\mathrm{T}} K_{nm} + \alpha I_{mm}\right)^{-1} K_{mn}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_\sigma. \tag{1.120}$$

Выбор параметра α подчинен условиям $\rho \leqslant \sigma \|\boldsymbol{\beta}_\sigma\|$ и $\Delta_l^{(\alpha)}(S) \geqslant 0$. Компоненты вектора $\mathbf{q}^{(\alpha)}$, который затем принимается в качестве $\mathbf{q}^{(0)}$, вычисляются согласно выражению

$$q_l^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k^{(\alpha)}(S) \Big/ \sum_{k=1}^{m} \Delta_k^{(\alpha)}(S). \tag{1.121}$$

Этот способ выбора нулевого приближения и завершает построение алгоритмов для численного обращения аэрозольных оптических характеристик на компактных множествах распределений.

В заключение сделаем одно замечание. Выше при построении вычислительной схемы обращения оптических данных мы исходили из интеграла Стилтьеса и вспомогательного интегрального распределения $Y^{(1)}(r)$, которое всюду непрерывно в области R и обладает суммируемой, по Риману, производной, т. е. плотностью распределения. Последнее обстоятельство позволяло нам достаточно просто построить соответствующий представлению (1.105) суммационный аналог. В общем случае, когда исходная модель $Y(r)$ по условию задачи должна содержать нерегулярную (например, разрывную) компоненту, алгебраизация интегрального уравнения требует применения иных аналитических подходов. Построение методов численного решения подобных обратных задач светорассеяния можно найти в работе [33]. Вместе с тем и в рамках такой модели, как $Y^{(1)}(r)$, можно вполне содержательно решать задачи микроструктурного анализа дисперсных сред и учитывать, в частности, дискретную структуру спектра размеров. Речь идет здесь о тех случаях, когда спектр размеров состоит из отдельных, разнесенных по области R фракций частиц, каждая из которых локализуется в узких интервалах $\Delta_l(r)$. Как было показано в работе [36], признаком подобной нерегулярности в спектре размеров может служить нерегулярный ход измеренных спектральных характеристик. Под нерегулярностью здесь понимается то, что измеренную оптическую характеристику $\beta(\lambda)$ не удается удовлетворительно аппроксимировать полидисперсными интегралами с непрерывными сплошными распределениями. Подобная ситуация достаточно типична при обращении данных по светорассеянию, относящихся к малым освещенным объемам либо полученных в условиях слабой замутненности. При обращении соответствующих оптических данных оказывается, что результирующие погрешности аппроксимации измеренных характеристик $\beta_\sigma(\lambda)$ модельными $(KY)(\lambda)$ оказываются, как правило, выше ошибок измерения. Последнее можно интерпретировать как несоответствие рабочей модели $Y(r)$, лежащей в основе вычислительной схемы обращения, типу действительного распределения $S_0(r)$. Во второй главе мы введем новые аналитические модели вспомогательных распределений $Y(r)$, которые могут быть более эффективными в обработке данных по аэрозольному светорассеянию.

1.5. К учету морфологии частиц в обратных задачах аэрозольного светорассеяния

Обратные задачи оптики дисперсных сред, о которых речь шла выше, основывались на предположении сферичности частиц. Эти системы выступали в качестве моделей реальных дисперсных сред, частицы которых, естественно, в большей или меньшей степени отличны от сферических. Ясно, что указанное отличие формы частиц приводит к определенным ошибкам в микроструктурном анализе дисперсных сред при обращении соответствующих данных оптического зондирования. Если отказаться от указанной модели, то, с одной стороны, возникают трудности с применением теории Ми в вычислительных схемах обращения данных, с другой — становятся малообоснованными одномерные интегральные представления для оптических характеристик светорассеяния. Действительно, для классификации сферических частиц по размерам в некотором освещенном объеме среды достаточно одного линейного параметра, роль которого обычно играет радиус r. Микроструктура подобного ансамбля частиц описывается одномерным распределением. Если частицы ансамбля имеют более сложную геометрическую форму, то для их классификации по размерам требуется уже несколько геометрических параметров, что немедленно влечет введение многомерных распределений для описания микроструктуры среды.

Обратные задачи светорассеяния, постановка которых связана с микроструктурным анализом дисперсных сред методами оптического зондирования, приводят к решению многомерных интегральных уравнений. Так, например, если полидисперсная система состоит из эллипсоидальных частиц, то их можно классифицировать по трем линейным параметрам, роль которых могут играть полуоси a, b, c. Следует заметить, что выбрать единую систему трех линейных параметров для построения функций распределения частиц по размерам можно лишь в том случае, если все они имеют одну и ту же геометрическую форму. Подобным примером как раз и является упомянутая выше система эллипсоидальных частиц. В более общих случаях дать адекватное описание того, что понимать под микроструктурой дисперсной среды, совсем непросто.

Ниже кратко излагается один из возможных качественных подходов к постановке обратных задач светорассеяния и микроструктурному анализу реальных дисперсных сред. Ранее и более подробно его основы обсуждались в работах авторов [17, 36].

1.5.1. Интегральные представления характеристик светорассеяния полидисперсными системами выпуклых случайно-ориентированных частиц

При построении характеристик светорассеяния системами частиц в качестве определяющего геометрического параметра можно использовать площадь их проекции $p(\mathbf{k})$ на плоскость, перпендикулярную направлению, определяемому волновым вектором падающей оптической волны $\mathbf{k}$. Сечение рассеяния индивидуальной частицей в этом случае выразится произведением этой площади на соответствующий фактор эффективности рассеяния, который, помимо всего прочего, является функцией угла рассеяния ϑ. Поскольку сечение рассеяния всего ансамбля частиц — аддитивная функция числа частиц при условии независимости рассеивателей, то открывается конструктивная возможность введения многомерных распределений и построения интегральных представлений для характеристик светорассеяния системами частиц. Соответствующие построения выполнялись ранее в работах [17, 36], и здесь они в полном объеме приводиться не будут.

Для большей определенности и ясности излагаемого материала будем использовать предположение о том, что частицы исследуемой среды имеют выпуклую форму и случайно ориентированы в освещенном объеме. Подобную морфологическую модель можно считать вполне состоятельной в оптике атмосферного аэрозоля или, как принято иногда говорить, в оптике реальных рассеивающих сред. Для частиц указанного ансамбля такие важные для описания светорассеяния геометрические характеристики, как средняя проекция $\bar{p}$, средняя секущая (хорда) $\bar{l}$ и объем v, связаны простым соотношением, а именно $\bar{p}\bar{l}=v$. Наличие этой зависимости между указанными геометрическими параметрами позволяет ввести в микроструктурный анализ вполне содержательное двухмерное распределение [36]

$$d\overline{P}(\bar{l}, v)=\bar{l}^{-1}v\,dN(\bar{l}, v) \qquad (1.122)$$

и им описывать спектр размеров частиц исследуемого ансамбля, т. е. функцией $N(\bar{l}, v)$.

Используя дифференциальную меру (1.122), интегральное представление для характеристики светорассеяния полидисперсной системы частиц теперь запишется в следующем виде:

$$\overline{D}(\vartheta, \lambda)=\iint\limits_{\Omega}\overline{T}(\bar{l}, v, \vartheta, \lambda)\,\bar{l}^{-1}v\,dN(\bar{l}, v), \qquad (1.123)$$

где T — соответствующий полидисперсный фактор эффективности рассеяния выпуклой частицей с геометрическими параметрами $\bar{l}$ и v, а Ω — область интегрирования ($\Omega=[[\bar{l}_{\min}, \bar{l}_{\max}]\times[v_{\min}, v_{\max}]]$).

Имея оптические измерения $\{\overline{D}_\sigma(v_j, \lambda_i), j, i=1, \ldots\}$, относящиеся к единичному объему рассеивающей среды, и используя аппроксимационный подход, т. е. минимизируя нормы $\|\overline{D}_\sigma-\overline{D}\|$, можно найти функцию $N(\bar{l}, v)$ и тем самым оценить спектр размеров частиц зондируемой среды. Конечно, рассчитывать на то, что факторы $\overline{T}$ удастся найти из теории дифракции, как это имело место для сферических частиц, не приходится. В изложенном подходе их следует определять из эксперимента по светорассеянию на соответствующих модельных монодисперсных системах частиц. Однако это не единственный способ нахождения $\overline{T}$. В принципе можно измерения проводить на реальных полидисперсных средах, но сопровождать их измерениями функций распределения $N(\bar{l}, v)$. Постановка соответствующей обратной задачи светорассеяния позволяет найти факторы $T(\bar{l}, v, \vartheta, \lambda)$ при известных $\overline{D}(\vartheta, \lambda)$ и $N(\bar{l}, v)$.

Алгоритмические схемы подобных обратных задач оптики дисперсных сред обсуждались ранее в работе авторов [17]. Следует заметить, что выше мы нигде не делали предположений о конкретной геометрической форме частиц рассеивающей среды, что, однако, не мешало нам содержательно сформулировать обратную задачу светорассеяния и предложить метод микроструктурного анализа реальных дисперсных сред. Разумеется, что оценка его эффективности в полной мере может быть выполнена при наличии соответствующего экспериментального материала. Использование при выборе дифференциального элемента меры (1.122) вероятностно-геометрических характеристик частиц позволяет назвать изложенный выше подход к микроструктурному анализу вероятностно-геометрическим. Случайная ориентация частиц в освещенных объемах в какой-то мере служит его физическим обоснованием.

1.5.2. Меры симметрии частиц и параметрические модификации одномерных интегральных уравнений

Следует заметить, что двухмерный микроструктурный анализ с точки зрения практических приложений в оптике и физике атмосферного аэрозоля достаточно сложен. С одной стороны, требуется большой объем измерительной информации, а с другой — достаточно сложная вычислительная схема обращения двухмерных интегральных уравнений. Поэтому разумно попытаться двухмерную обратную задачу свести к одномерной, прибегая к определенным частным допущениям. Ниже это будем делать на основе введения некоторых геометрических параметров, характеризующих меру отклонения формы рассеивающих частиц от сферической. Впервые этот подход был изложен в работе [36].

Отклонение формы тел от сферической в геометрии принято характеризовать мерами симметрии [52]. Не существует единого способа введения подобных геометрических характеристик, и поэтому в прикладных задачах это делается с учетом тех или иных конкретных особенностей и требований. Применительно к задаче микроструктурного анализа, связанного с решением интегрального уравнения (1.123), можно прибегнуть к помощи известного изопараметрического неравенства, а именно $(4\bar{p})^3 - 36\pi v^2 \geqslant 0$ [4]. Нижняя грань (т. е. равенство нулю) достигается только для тел сферической формы. Поэтому, если ввести геометрический параметр Θ, положив $(4\bar{p})^3 - 36\pi v^2\Theta = 0$, то его величина должна служить характеристикой того, в какой мере рассматриваемое выпуклое тело с параметрами $\bar{p}$ и v асимметрично по форме. Для тела, обладающего полной симметрией, $\Theta = 1$. В соответствии с изопараметрическим неравенством этим телом является шар. Во всех других случаях $\Theta > 1$. Введенный параметр Θ, хотя и характеризует симметрию тела (в нашем случае речь идет о рассеивающих частицах), строго говоря, еще не является мерой симметрии. В соответствии с формальным определением [52], мерой симметрии является величина, обратная к Θ. Действительно, полагая

$\eta(\bar{l}, v) = \Theta^{-1}(\bar{l}, v)$, нетрудно показать справедливость следующих соотношений:

$$\sup_{\bar{l},\, v} \eta(\bar{l}, v) = 1, \quad \eta > 0,$$

что находится в полном соответствии с теми требованиями, которые предъявляются к мерам симметрии выпуклых тел [52]. В связи с этим параметр η можно назвать коэффициентом асимметрии формы рассеивающей частицы. В нашей задаче удобнее все же использовать параметр Θ, который согласно определению равен отношению $16\, v/9\pi \bar{l}^3$.

Построение одномерной обратной задачи светорассеяния для полидисперсной среды можно рассматривать с физической точки зрения как ее замену некой оптически эквивалентной системой сферических частиц. В оптике аэрозоля подобную эквивалентность принято устанавливать по равенству либо объемов, либо полных поверхностей, и тогда остается лишь подобрать надлежащим образом линейный размер эквивалентной сферы. Используя введенный выше параметр Θ, нетрудно найти соответствующие соотношения: $\bar{l}_0 = \Theta^{1/3}\bar{l}$ и $\bar{l}_0 = \Theta^{1/2}\bar{l}$. Поскольку для тела сферической формы средний диаметр $\bar{l}_0 = 4r/3$, то исходный полидисперсный интеграл типа (1.105) может быть переписан в следующем виде:

$$\beta(\lambda) = \int_L K(\bar{l}_0, \lambda)\,(9\pi \bar{l}_0^2/16)\, dN(\bar{l}_0). \tag{1.124}$$

Если теперь ввести в (1.124), скажем, первое из указанных выше соотношений, то придем к новому полидисперсному интегралу, зависящему от параметра Θ, а именно:

$$\beta(\lambda, \Theta) = \int_L K(\Theta^{1/3}\bar{l}, \lambda)\,(9\pi \bar{l}_0^2/16)\, dN(\bar{l}_0). \tag{1.125}$$

Поясним кратко смысл записанного интегрального выражения. Интеграл (1.125) можно рассматривать в качестве характеристики светорассеяния ансамблем частиц при условии, что сечение их рассеяния может быть заменено сечением рассеяния сферами равного им объема и средним диаметром $\bar{l}_0 = \Theta^{1/3}\bar{l}$. Подобная эквивалентность может быть установлена только на основе анализа соответствующего экспериментального материала. Подобные исследования известны, и здесь можно сослаться в качестве примера на обстоятельную работу [53].

Считая, что асимметрия тел несущественно меняется в среднем по ансамблю частиц, зависимостью параметра Θ от $\bar{l}$ и v в первом приближении можно пренебречь. Интегральное представление (1.125) приводит тогда к одномерной обратной задаче, позволяющей оценить спектр размеров частиц зондируемой среды при наличии некоторой асимметрии их формы. Ясно, что найденное распределение $N(\bar{l})$ дает весьма приближенное представление о действительном спектре размеров частиц реальной среды. Оценка эффективности подобных обратных задач может быть выполнена лишь на конкретном экспериментальном материале. Все, что изложено выше, следует рассматривать не более как качественный подход к определению микроструктуры реальных дисперсных сред методами оптического зондирования. В этом подходе понятие «реальность» дисперсной среды связывается с возможностью учета асимметрии ее частиц в процессе обращения данных по светорассеянию. В остальном используются формулы теории Ми и все описанные выше вычислительные схемы обращения оптических данных.

Применение этой методики требует априорной оценки значений параметра Θ для зондируемой дисперсной среды. Ниже приводятся некоторые численные оценки этого параметра для частиц элементарной геометрической формы. В более общих случаях оценка вероятностно-геометрических параметров $\bar{p}$, $\bar{l}$ и Θ для рассеивающих частиц может быть выполнена с использованием специальных вычислительных процедур. Методики их построения можно найти в работах [31, 34]. Соответствующие оценки могут быть найдены и прямым путем по микрофотографиям частиц на импакторных подложках [53, 55].

Предположим, что частицы рассматриваемой дисперсной среды имеют эллипсоидальную форму. Вводя коэффициенты асимметрии тела по осям $\xi_1 = a/c$ и $\xi_2 = b/c$, где c — наименьшая из осей эллипсоида, можно найти выражение для расчета параметра Θ (то же функции $\Theta(\xi_1, \xi_2)$). Указанное расчетное соотношение приводилось ранее в работах авторов [17]. На рис. 1.6 приведена функция $\eta(\xi_1, \xi_2)$ (мера симметрии) для эллипсоидальной частицы. Параметр η быстро убывает по мере роста значений величин ξ_1 и ξ_2, что делает возможным применение методов теории возмущений к полидисперсным интегралам, рассматривая их как функционалы от распределения $\eta(\xi_1, \xi_2)$. Кроме того, при $\xi_1 \to 1$ и $\xi_2 \to 1$ $\eta(\xi_1, \xi_2)$ также стремится к единице, и эллипсоидальная частица превращается в сферическую. Трудно ответить на вопрос, в какой мере было бы оправдано построение подобной теории возмущений для целей микроструктурного анализа атмосферных аэрозолей. В настоящее время существуют методы расчета характеристик светорассеяния частицами цилиндрической формы. Интересно оценить для них значения параметра Θ. Нетрудно показать с помощью прямых вычислений, что

$$\Theta(\xi) = 2(1+\xi)^3/9\xi^2,$$

где $\xi = h/r$, h — высота цилиндра и r — радиус основания. Наименьшее значение, которого достигнет функция $\Theta(\xi)$, равно $^3/_2$ при $\xi = 2$. Таким образом, из всех цилиндров наиболее симметричным является тот, для которого высота равна диаметру основания. Подобные примеры можно продолжить, особенно для тел, ограниченных поверхностями второго порядка. Однако на этом мы закончим изложение вопросов, связанных с построением одномерных интегральных представлений для характеристик светорассеяния полидисперсными системами несферических частиц, основываясь на вероятностно-геометрическом подходе к описанию микроструктуры дисперсных сред.

В заключение отметим, что одномерные параметрические интегралы в случае необходимости можно строить и на основе иных

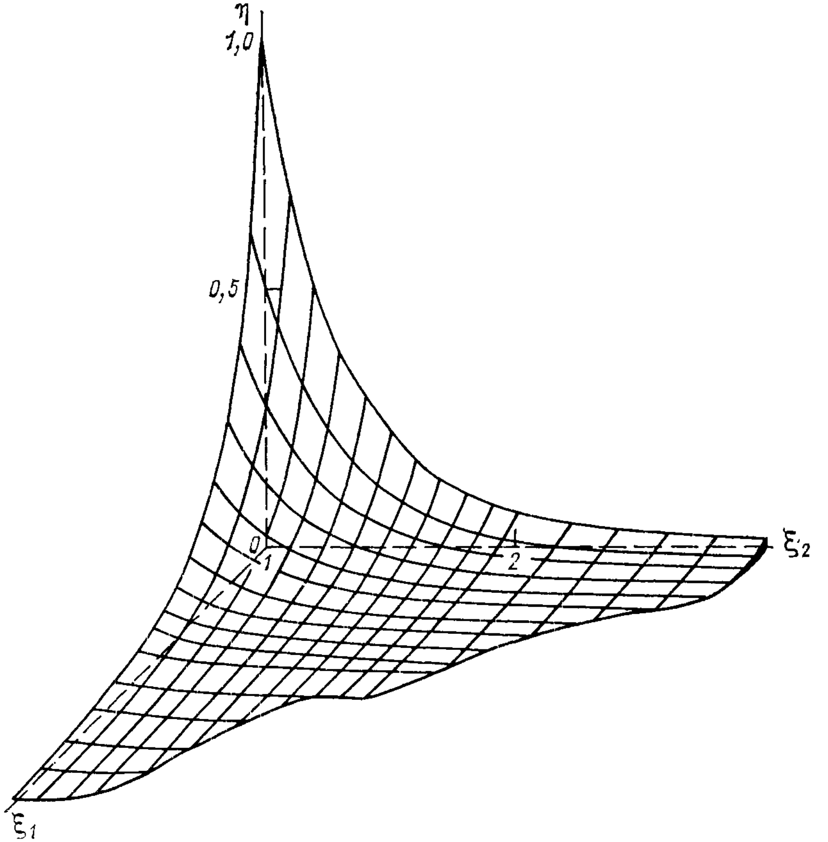

Рис. 1.6. Вид функции $\eta(\xi_1, \xi_2)$ для частиц эллипсоидальной формы.

дифракционных формул, нежели тех, которые дает теория Ми. Например, вполне можно использовать там, где это оправдано, теорию дифракции света на цилиндрах. Выразив обычные линейные параметры r и h через $\bar{l}$ и Θ и считая затем Θ маломеняющимся по ансамблю частиц, из (1.123) можно построить соответствующий одномерный аналог $\bar{D}(\vartheta, \lambda, \Theta)$. Ядра в этом случае будут определяться формулами, отличными от рядов Ми [5, 9]. В более общей постановке параметры r и h заменяются на $\bar{l}$ и v, и строится двухкратный интеграл с распределением $N(\bar{l}, v)$. К сожалению, подобные построения в оптике атмосферного аэрозоля мало оправданы, если, конечно, не касаться каких-то специальных случаев. То, что известно к настоящему времени о светорассеянии на частицах атмосферного аэрозоля, вполне подтверждает правомерность изложенного выше подхода. Это позволяет надеяться на то, что получаемые оценки микроструктуры реальных сред путем обращения характеристик светорассеяния на основе представлений типа (1.125) будут вполне состоятельными в практическом отношении. Соответствующий пример приводился ранее в работе авторов [17].

1.5.3. Морфология частиц атмосферных дымок и обратные задачи светорассеяния

Известно, что морфология аэрозольных образований в атмосфере является достаточно сложной. Это можно, в частности, видеть на примере, представленном на рис. 1.7 и относящемся к атмосферной дымке. Исходным материалом для построения гистограммы служили заборы частиц из воздуха на подложку самолетного импактора при полете в горизонтальном направлении на высоте около 500 м. Работа [55], откуда заимствован данный пример, ставилась с целью оценки возможного влияния морфологии частиц реального аэрозоля на оптические характеристики светорассеяния и результаты их обращения. Основным оптическим средством являлся поляризационный бистатический лидар.

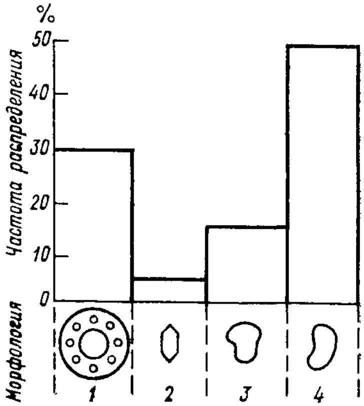

Рис. 1.7. Пример морфологического анализа атмосферной дымки [55].

1 — фракция, состоящая из капель серной кислоты; *2* — кристаллы; *3* — неустойчивые конгломераты из пористых частиц; *4* — устойчивые, почти симметричные частицы.

Представленный пример дает всего лишь одну реализацию возможной морфологии атмосферной дымки, однако ее можно считать вполне характерной для нормальных условий. Главное, что отсюда следует, это композиционный характер рассматриваемой полидисперсной системы частиц. Среда явно состоит из фракций частиц, имеющих различную геометрическую форму. Кстати, это в равной мере относится и к их химическому составу. Поскольку не представляется возможным дать адекватное описание морфологии частиц в целом по ансамблю, характеризовать оптику подобной аэрозольной системы можно лишь в рамках изложенного выше вероятностно-геометрического подхода к описанию ее микроструктуры. В этом случае построение соответствующих полидисперсных интегралов не требует аналитического задания геометрической формы отдельных частиц. Для основной фракции, классифицируемой как частицы, близкие к сферическим, морфологический анализ показывает, что примерно из 450 частиц 400 частиц по проекции на столик микроскопа неотличимы от сфер, лишь 50 следует отнести к эллипсоидам с $\xi \geqslant 2$. В целом частицы дымки

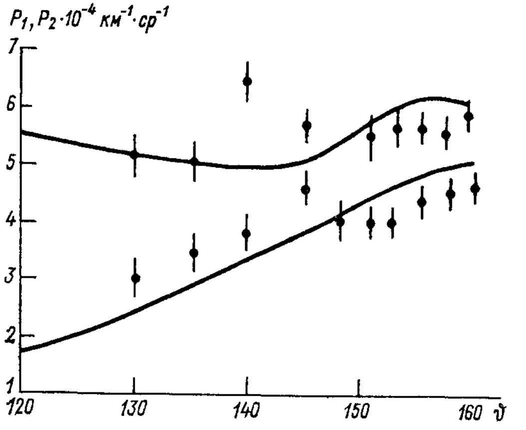

Рис. 1.8. Измеренные значения $P_{1i} = 4\pi \bar{i}_1(\vartheta_i)/\beta_{sc}$ и $P_{2i} = 4\pi \bar{i}_2(\vartheta_i)/\beta_{sc}$ (точки) и соответствующие им аппроксимирующие аналоги (непрерывные кривые нижняя и верхняя соответственно), полученные методами обращения по данным [56].

достаточно симметричны, если, конечно, не считать фракцию кристаллических частиц.

С использованием бистатического поляризационного лидара (теория этого метода зондирования рассеивающей компоненты подробно изложена в предыдущей монографии авторов [17]) можно определить высотный ход элементов матрицы $\{\bar{D}_{ij}\}$ аэрозольного рассеяния для углов в задней полусфере. В качестве примера на рис. 1.8 нанесены измеренные значения $P_{1i} = (4\pi \bar{i}_1(\vartheta_i)/\beta_{sc})$ и $P_{2i} = (4\pi \bar{i}_1(\vartheta_i)/\beta_{sc})$ для аэрозольного слоя, расположенного на высоте около 800 м, и указаны соответствующие ошибки [56]. При наличии подобных данных правомерна постановка следующих двух вопросов. Во-первых, можно ли в принципе обратить эти данные в предположении сферичности частиц зондируемой дымки. Во-вторых, если и существует подобное решение (вернее, квазирешение, см. п. 1.3), то в какой мере по нему можно судить о реальном спектре размеров. Как показывают расчеты, выполненные авторами работы [55], ответы на оба вопроса можно считать положительными в пределах погрешности измерений (не ниже 20 %). Сплошными линиями на рис. 1.8 приведены соответствующие экспериментальным данным $\{P_{1i\sigma}\}$ и $\{P_{2i\sigma}\}$ аппроксимирующие характеристики $P_1(\vartheta)$ и $P_2(\vartheta)$, полученные методом подбора наилучшего модельного распределения (см. п. 1.4.1). Сопоставление найденного распределения $n_M(r)$ с данными прямого микроструктурного анализа зондируемых аэрозолей указывает на состоятельность результатов обращения.

Аналогичные исследования по оптике реального аэрозоля (например, атмосферных дымок), увязанные с данными прямых микроструктурных и морфологических измерений, проводились неоднократно. Наиболее обстоятельной в этом отношении можно считать, по всей видимости, монографию [9]. Если не касаться специальных аэрозольных систем, к которым должны быть отнесены прежде всего кристаллические облака и кристаллическая

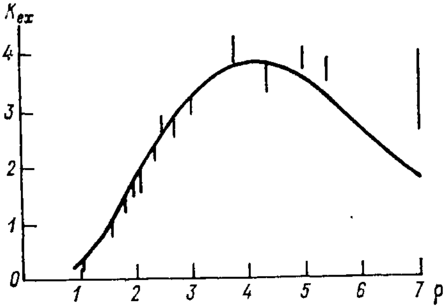

Рис. 1.9. Измеренные значения коэффициента ослабления частицами цилиндрической формы при их различных ориентациях (вертикальные отрезки) и аппроксимирующая кривая, полученная по формулам Ми в предположении равенства объемов соответствующих частиц [54].

фаза смешанных облаков, можно полагать, что модельная полидисперсная система сферических частиц в методах оптического зондирования атмосферных аэрозолей обеспечивает вполне приемлемую эффективность микроструктурного анализа.

В связи с этим хотелось бы обратить внимание на то обстоятельство, что размеры частиц атмосферных дымок сопоставимы по порядку величины с длинами волн, используемыми в оптическом зондировании. В этой ситуации оказывается, что вполне приемлемо можно аппроксимировать факторы эффективности рассеяния (ослабления) несферических частиц соответствующими факторами сферических частиц, выбирая размеры последних из условия равенства объемов. Соответствующий пример для частиц цилиндрической формы приведен на рис. 1.9 [54]. Размер вертикальных линий соответствует разбросу фактора K_{ex} для цилиндрических частиц при изменении их ориентации в пространстве освещенного объема. Важно отметить, что эти значения получены в соответствующих экспериментах. Подобные аппроксимации для полидисперсных факторов могут быть заметно улучшены, если использовать параметрические представления вида $\beta_{ex}(\lambda, \Theta)$, о которых речь шла выше. Как следствие, это повысит надежность результатов обращения за счет привлечения априорной информации об асимметрии частиц исследуемой дисперсной среды. К сожалению, подобной возможности для фактора обратного рассеяния $K_{л}$ не существует. Его значения в этом отношении подвержены большей изменчивости при изменении геометрической формы рассеивающих частиц.

1.6. Заключение

Оптические операторы, осуществляющие взаимные преобразования различных характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц, вводились в оптику дисперсных сред на примере частиц сферической формы. В настоящее время эта система частиц играет роль основной морфологической модели при решении прямых и обратных задач оптики атмосферного аэрозоля. Заметим, что построение аналогичных операторов для полидисперсных систем, частицы которых имеют иную геометрическую форму, может быть осуществлено аналогичным образом. Действительно, если микроструктуру дисперсной среды описывать распределением $N(\bar{l}, v)$, то соответствующие полидисперсные интегралы будут двухкратными, и, следовательно, операторы типа K_α^{-1} находятся путем численного обращения двухмерных матричных уравнений. Операторы перехода W будут также двухмерными. Поэтому обобщение изложенной в первой главе теории светорассеяния системами частиц на дисперсные среды с произвольной морфологией связано, прежде всего, с увеличением размерности операторов. Хотя это и влечет увеличение объема вычислений при обработке оптической информации, в алгоритмическом плане не вызывает каких-либо особых затруднений. Описанные выше процедуры обращения могут быть достаточно просто расписаны для многомерных обратных задач. Более существенные трудности обусловливаются сложностью решения дифракционных задач при переходе к частицам с формой, отличной от сферической. Обстоятельный обзор по этим вопросам дан в монографии [9].

Не касаясь здесь чисто дифракционных проблем теории светорассеяния, предположим, что в нашем распоряжении имеется вполне приемлемый алгоритм расчета ядер полидисперсных интегралов типа (1.123). Спрашивается, каким образом в этом случае можно было бы сформулировать в рамках операторного подхода задачи морфологического анализа зондируемых дисперсных сред. Напомним, что до сих пор мы занимались микроструктурным анализом и прогнозом оптических характеристик светорассеяния аэрозольных систем в рамках простейшей морфологической модели.

Рассмотрение вопросов морфологического анализа разумно начать с более чем частной задачи, связанной с интерпретацией данных поляризационного зондирования атмосферных дымок. Теория соответствующего оптического метода зондирования строилась в п. 1.2, и в простейшем варианте привела к решению системы операторных уравнений (1.45) при известном поляризационном векторе $\mathbf{c}^{(s)}$. Допустим, что для исследуемого локального объема дисперсной среды показатель преломления $\bar{m}$ известен. Тогда для определения $\bar{D}_{11}(\vartheta)$ и последующего микроструктурного анализа достаточно решить первое уравнение указанной системы, рассчитав предварительно оператор W_{21} с использованием формул теории Ми. Но если правомерно применение теории Ми при обработке измерений в данном эксперименте, то элемент $\overline{D}_{11}(\vartheta)$ матрицы рассеяния должен также удовлетворять и двум оставшимся уравнениям системы (1.45). Формально они должны превращаться в тождества. Конечно, при обработке экспериментального материала можно вести речь лишь о приближенных равенствах. Таким образом, система (1.45) в принципе дает возможность оценить, в какой мере применимо предположение о сферичности частиц в эксперименте по светорассеянию при прочих равных условиях.

При зондировании атмосферных дымок эту возможность предпочтительно реализовать на основе параметрического представления (1.125). В этом подходе два оставшихся уравнения позволяют оценить параметр Θ либо распределение $\Theta(\bar{l})$ в зависимости от объема измерений и их точности. Знание подобного распределения позволяет более корректно осуществить обращение оптических данных в рамках теории Ми и получить более достоверную оценку микроструктуры реальной аэрозольной среды. Соответствующий пример из практики атмосферно-оптических исследований приводился ранее в работе авторов [17]. Подобную коррекцию результатов обращения в определенной степени можно рассматривать как простейший морфологический анализ полидисперсной системы, близкой по морфологии к системе сферических частиц.

Аналогичные возможности открываются и в том случае, когда интерпретируются данные оптического зондирования системы частиц несферической формы, случайно-ориентированных в пространстве освещенного объема. В этом случае система операторных уравнений, аналогичная (1.45), имеет бо́льшую размерность, поскольку исходная матрица рассеяния содержит шесть независимых элементов. Правда, теперь для того, чтобы найти все элементы $\overline{D}_{ij}$, недостаточно использовать при зондировании один тип поляризации (то же самое одну реализацию вектора $\mathbf{I}^{(0)}$). Необходимо использовать систему векторов $\{\mathbf{I}_\nu^{(0)}\}$, т. е. осуществлять в полном смысле этого термина поляризационное зондирование дисперсной среды. Исходя из априорных знаний морфологии, можно выбрать некоторую дифракционную модель в качестве рабочей в схеме интерпретации с последующей корректировкой результатов обращения так, как это описывалось выше. В качестве подобных моделей могут быть выбраны системы частиц цилиндрической либо эллипсоидальной формы [38].

В последнее время определенные успехи достигнуты в разработке алгоритмов по расчету характеристик светорассеяния выпуклыми многогранниками в приближении геометрической оптики [40]. Меняя число возможных граней многогранника, можно построить алгоритмическим путем некое семейство морфологических моделей для схем интерпретации данных поляризационного зондирования кристаллических облаков в атмосфере [35]. Возможность оперировать множеством моделей в процессе интерпретации оптических данных позволяет осуществить в полном смысле морфологический анализ дисперсных сред.

Практический интерес в атмосферно-оптических исследованиях имеет разработка теории оптического зондирования атмосферы на основе светорассеяния системами ориентированных кристаллов. Ориентацию частиц в атмосфере обычно увязывают с наличием силовых полей и, в частности, электрического [13]. Исходя из расчетно-аналитических методов определения диаграмм рассеяния гексагональными частицами, развитыми в работах [37, 41], могут быть предложены методики интерпретации данных лазерного поляризационного зондирования кристаллических облаков и дистанционного определения преобладающей ориентации их частиц. Можно полагать, что исследования в этом направлении приведут к разработке оптического метода дистанционного зондирования силовых полей в атмосфере и, естественно, к новым обратным задачам теории светорассеяния.

ГЛАВА 2. МЕТОД МНОГОЧАСТОТНОГО ЛАЗЕРНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ

Одним из перспективных методов оперативного контроля пространственно-временной изменчивости оптического состояния атмосферы является лазерная импульсная локация. Исследование ее информационных возможностей при решении разнообразных прикладных задач и вопросы технической реализации соответствующих измерительных комплексов освещены в монографиях [6, 7, 15, 21, 22]. Однако в полной мере возможности этого нового оптического метода могут быть реализованы только в случае одновременного зондирования атмосферы на нескольких длинах волн с использованием перестраиваемых по частоте лазеров. Это утверждение справедливо при решении таких задач, как дистанционное зондирование атмосферных аэрозолей в целях определения их микрофизических характеристик, при необходимости одновременного учета эффектов рассеяния и поглощения в интерпретации локационных сигналов и т. п.

Обоснование принципиальной возможности решения сложных информационных задач, таких как определение полей оптических характеристик светорассеяния в атмосфере, аэрозольных микрофизических характеристик, метеопараметров, концентрации загрязняющих дисперсных и газовых компонент и т. д., потребовало разработки теории многочастотной лазерной локации [18, 21]. В пределах настоящей главы дается краткое изложение основ этой теории, основанной на операторном подходе к обратным задачам светорассеяния и развитого в предыдущей главе. В этом отношении можно говорить еще об одном применении операторов перехода к разработке теории конкретного оптического метода зондирования. Напомним, что в первой главе речь шла о методе поляризационного зондирования локальных объемов рассеивающей среды.

Интерпретация совокупности локационных сигналов, принимаемых из рассеивающей атмосферы и соответствующих различным частотам (измерительным каналам), сводится в общем случае к решению системы функциональных уравнений. В нее входят уравнения переноса оптических сигналов и интегральные уравнения, связывающие аэрозольные микрофизические параметры с характеристиками светорассеяния. Построение вычислительных схем численного решения этой системы осуществляется с привлечением соответствующих операторов теории светорассеяния.

Следует заметить, что введение операторов, связывающих, в частности, спектральный ход аэрозольного коэффициента обратного рассеяния с ходом коэффициента ослабления, можно рассматривать как способ априорного доопределения указанной системы, в которой интегральные уравнения относятся к некорректно поставленным математическим задачам. Действительно, предположение о сферической форме частиц дисперсной компоненты позволяет через оптические операторы дополнить систему обращаемых уравнений тем конкретным физическим содержанием о процессе светорассеяния оптических волн, которое заключено в теории дифракции Ми. В результате система новых уравнений хотя и становится более частной, но зато при прочих равных условиях лучше обусловленной. Именно в этом заключается содержательный смысл развиваемого в монографии метода оптических операторов теории светорассеяния дисперсными средами.

Основное внимание в главе уделяется итерационным схемам решения систем локационных уравнений. Обсуждаются условия их сходимости и показано, что в ряде случаев ее нарушение может быть связано с несоответствием априорных допущений условиям реального эксперимента. С учетом практических приложений подробно изложена простейшая параметрическая методика интерпретации данных двухчастотного лазерного зондирования аэрозолей.

Интересными могут быть также применения многочастотной лазерной локации в исследовании пограничного слоя, в котором пространственно-временная изменчивость микроструктуры аэрозолей определяется процессами турбулентной диффузии. Ниже показана возможность синтеза обратных задач аэрозольного светорассеяния и турбулентной диффузии дисперсной компоненты в целях разработки оптического метода дистанционного определения поля коэффициентов турбулентности в пределах пограничного слоя.

В ряде случаев результаты интерпретации данных многочастотной лазерной локации могут заметно зависеть от ошибок априорного выбора показателя преломления аэрозольного вещества. Знание этих оптических констант необходимо, в частности, для корректного построения соответствующих оптических операторов. В главе излагаются методики коррекции результатов интерпретации, основанные на сопутствующих измерениях коэффициентов ослабления (дальности видимости). Последовательное развитие этого подхода к устранению неопределенностей, присущих атмосферно-оптическим наблюдениям, приводит к идее оптического мониторинга атмосферы как совокупности взаимоувязанных обратных оптических задач. Изложение теории подобного мониторинга отнесено в третью главу.

2.1. Основы теории многочастотной локации атмосферных аэрозолей

2.1.1. Операторные уравнения метода

Введенные ранее оптические операторы типа W_{21} и W_{12} теории светорассеяния полидисперсными системами частиц, осуществляющие взаимные преобразования $\beta_1 \to \beta_2$ и $\beta_2 \to \beta_1$ для любой пары характеристик, можно использовать для построения теории оптического зондирования дисперсных сред. Ниже это иллюстрируется на примере метода многочастотного лазерного зондирования атмосферных аэрозолей.

Исходную систему функциональных уравнений, связывающую параметры принимаемых локационных сигналов от единичного объема рассеивающей среды с ее оптическими и микрофизическими характеристиками, в этом методе оптического зондирования будем записывать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&S(z,\ \lambda)=P(z,\ \lambda)\,z^2/B(\lambda)\,P_0(\lambda);\\
&\beta_\pi(z,\ \lambda)\,T(z,\ \lambda)=S(z,\ \lambda);\\
&T(z,\ \lambda)=\exp\left\{-2\int\limits_{Z_1}^{z}\beta_{ex}(z',\ \lambda)\,dz'\right\};\\
&\beta_\pi(z,\ \lambda)=\int\limits_{R(z)}K_\pi(z,\ \lambda,\ r)\,s(z,\ r)\,dr;\\
&\beta_{ex}(z,\ \lambda)=\int\limits_{R(z)}K_{ex}(z,\ \lambda,\ r)\,s(z,\ r)\,dr;\\
&Z_1\leqslant z\leqslant Z_2,\quad \lambda\in\Lambda=[\lambda_{\min},\ \lambda_{\max}].
\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)$$

В этой системе соотношений $P(z,\lambda)$ — амплитуда локационного сигнала, принимаемого от освещенного объема, находящегося на расстоянии z от приемника; $P_0(\lambda)$ — мощность посылаемого светового импульса на рабочей длине волны λ; β_π и β_{ex} — соответственно объемные коэффициенты обратного рассеяния и ослабления по трассе зондирования. Запись $R(z)$ означает зависимость пределов интегрирования R_1 и R_2 от z. Как уже было показано в первой работе [18] по теории многочастотной оптической локации, эта система уравнений вполне определена относительно неизвестных функций $\beta_\pi(z,\ \lambda)$, $\beta_{ex}(z,\ \lambda)$ и $s(z,\ r)$. Никаких иных предположений о связи между оптическими характеристиками β_π и β_{ex} при решении (2.1) не требуется. Этим метод многочастотной лазерной локации существенно отличен от одночастотного варианта, когда мы вынуждены решать одно уравнение переноса локационного сигнала в рассеивающей среде и не можем использовать два последних интегральных уравнения. Их можно считать вполне определенными, поскольку рассматривается рассеивающая среда не вообще, а полидисперсная система сферических частиц с известным показателем преломления $\overline{m}$. Таким образом, ниже идет речь о построении теории оптического зондирования некой модельной дисперсной среды, и, естественно, вопрос об эффективности этой теории в исследовании реальных сред должен решаться в конкретных экспериментах.

Предположение о сферичности частиц зондируемой дисперсной среды и задание профиля $\overline{m}(z)$ в направлении распространения светового импульса доопределяют систему (2.1). В этих условиях вполне определены интегральные операторы K_π, E_{ex}, обратные $K^{-1}_{\pi\alpha}$ и $K^{-1}_{ex,\alpha}$, и, следовательно, определены преобразования $\beta_\pi \to \beta_{ex}$ и $\beta_{ex} \to \beta_\pi$, осуществляемые операторами перехода:

$$\left.\begin{aligned} W^{(\alpha)}_{ex,\ \pi} &= K_{ex}K^{-1}_{\pi\alpha};\\ W^{(\alpha)}_{\pi,\ ex} &= K_\pi K^{-1}_{ex,\ \alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

В пределах данной главы будем строить и использовать эти операторы для одних и тех же длин волн λ (то же самое для дискретных значений λ_i — рабочих длин волн многочастотного лидара). Одновременно в целях упрощения записи аналитических выражений оператор $W^{(\alpha)}_{ex,\ \pi}$ будем обозначать в пределах настоящей главы просто через W, полагая, что это не вызовет особых недоразумений, а $W^{(\alpha)}_{\pi,\ ex}$ — через $\widetilde{W}$. Первый из них действует на β_π (то же самое $\beta_{\pi\sigma}$), второй — на оптическую характеристику β_{ex} (то же $\beta_{ex,\ \sigma}$). Используя оптический оператор перехода W, интегральные уравнения в (2.1) заменяются одним операторным, а именно

$$\beta_{ex}(z,\ \lambda) = (W\beta_\pi)(z,\ \lambda), \tag{2.3}$$

и вся система соотношений (2.1) приобретает компактный вид

$$\beta_\pi(z,\ \lambda)\exp\left\{-2\int\limits_{Z_1}^{z}(W\beta_\pi)(z',\ \lambda)\,dz'\right\} = S(z,\ \lambda),\quad \lambda \in \Lambda. \tag{2.4}$$

Это функциональное уравнение относительно оптической характеристики $\beta_\pi(z,\ \lambda)$. Для дискретного набора длин волн зондирования уравнению (2.4) следует придать векторную форму, вводя векторы $\boldsymbol{\beta}_\pi$ с компонентами $\beta_\pi(\lambda_i,\ z)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$. Компоненты этого вектора зависят от z. Для этих компонент имеем систему n уравнений вида

$$\beta_{\pi i}(z)\exp\left\{-2\int\limits_{Z_1}^{z}(W\boldsymbol{\beta}_\pi)_i(z')\,dz'\right\} = S_i(z),\quad i=1,\ \ldots,\ n \tag{2.5}$$

или в более удобной для вычислений форме:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{\pi i}(z)\exp\left\{-2\int\limits_{Z_1}^{z}\beta_{ex,\ i}(z')\,dz'\right\} = S_i;\\ &\boldsymbol{\beta}_{ex} = W\boldsymbol{\beta}_\pi,\quad Z_1 \leqslant z \leqslant Z_2,\quad i=1,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Второе векторное уравнение можно переписать для отдельных компонент, т. е. в виде

$$\beta_{ex,\ i} = \sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\beta_{\pi j},\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{2.7}$$

которое наглядно иллюстрирует то обстоятельство, что значение характеристики β_{ex} для фиксированного λ_i определяется всеми компонентами второй характеристики, т. е. всем спектральным ходом $\beta_\pi(\lambda)$ в пределах интервала оптического зондирования Λ. Ясно, что чем шире этот интервал и чем больше взято длин волн зондирования, тем более достоверно и эффективно осуществляется преобразование $\beta_\pi \to \beta_{ex}$. В этом отношении зондирование в узких спектральных интервалах Λ, особенно в условиях, когда исследуемая дисперсная среда обладает широким спектром размеров, сталкивается с определенными трудностями при интерпретации локационных сигналов.

Соотношение (2.7) имеет место для полидисперсной системы рассеивающих частиц, находящихся в освещенном объеме воздуха. В связи с этим необходимо учитывать и молекулярное рассеяние, привлекая аналогичные соотношения для характеристик светорассеяния этой компонентой. В соответствии с теорией рэлеевского рассеяния имеем

$$\left.\begin{aligned} \beta_{sc,\,i}^{(\text{м})} &= a^{(\text{м})}\lambda_i^{-4}; \\ \beta_{\pi i}^{(\text{м})} &= b^{(\text{м})}\lambda_i^{-4}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

где $a^{(\text{м})}$ и $b^{(\text{м})}$ — некоторые постоянные, не зависящие от длины волны λ. Верхний индекс «м» означает, как и ранее, что рассматриваемые характеристики светорассеяния относятся к молекулярной компоненте атмосферы. Ниже будем употреблять индекс «а» при необходимости подчеркнуть принадлежность соответствующих характеристик аэрозольной компоненте. Из (2.8) получаем

$$\beta_{sc,\,i}^{(\text{м})} = c^{(\text{м})}\beta_{\pi i}^{(\text{м})}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (2.9)$$

где $c^{(\text{м})}$ — некоторая константа $(c^{(\text{м})} = 3\pi/8)$. Таким образом, для молекулярного рассеяния имеет место покомпонентное преобразование вектора $\beta_\pi^{(\text{м})}$ в вектор $\beta_{sc}^{(\text{м})}$ и обратно. В этом отношении молекулярное рассеяние обладает простейшими операторами взаимного преобразования оптических характеристик светорассеяния. Завершая сопоставление этих преобразований, выпишем пару соотношений, которые нам понадобятся ниже, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \beta_{sc}^{(\text{м})} &= cI\beta_\pi^{(\text{м})}; \\ \beta_{sc}^{(\text{а})} &= W\beta_\pi^{(\text{а})}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

В численных расчетах приходится разбивать трассу зондирования на отдельные интервалы длиной Δz, границами которых служат точки $\{z_k,\ k = 1, \ldots\}$. Обозначив через β_{ik} величину $\beta_\pi(\lambda_i, z_k)$, систему (2.5) перепишем в следующем виде:

$$\beta_{ik} \exp\left\{-2\,\Delta z \sum_{j=1}^{n} \omega_{ijk}\beta_{jk}\right\} = S_{ik}T_{i,\,k-1}^{-1}, \qquad (2.11)$$

$$i = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots$$

Система уравнений (2.11) для каждого фиксированного k может быть решена по итерационной схеме

$$\beta_i^{(p)} \exp\left\{-2\,\Delta z \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\beta_j^{(p-1)}\right\} = S_i T_i^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.12}$$

где p — номер итерации. Как показано в работе [18], необходимым и достаточным условием сходимости этой схемы является выполнение неравенства

$$2\,\Delta z\, \| W \| \cdot \| \beta_\pi \| < 1. \tag{2.13}$$

При этом $\|\beta_\pi\| = \max \beta_{\pi i}$, а величина $\|W\|$ может быть определена любым способом в зависимости от того, что понимать под нормой матрицы (см. [1]). С определенной долей приближения строгое неравенство (2.13) можно заменить более простым и наглядным соотношением, а именно

$$\| \mathbf{\Delta}_\tau \| \leqslant {}^1/_2, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{\Delta}_\tau = \Delta z \boldsymbol{\beta}_{ex}$, а компоненты $\beta_{ex,\,i} = \beta_{ex}(\lambda_i)$. Аналогично, вводя в рассмотрение оператор $\widetilde{W}$, можно построить следующее функциональное уравнение:

$$\left(\widetilde{W}\beta_{ex}\right)(z,\ \lambda) \exp\left\{-2 \int_{Z_1}^{z} \beta_{ex}(\lambda,\ z')\, dz'\right\} = S\,(z,\lambda). \tag{2.15}$$

Формально уравнения (2.15) и (2.4) эквивалентны друг другу, однако их информационные возможности несколько различны и зависят от таких факторов, как ошибки априорного задания показателя преломления аэрозольного вещества, измерительных ошибок и оптической толщины τ зондируемого слоя (Z_1, Z_2). Соответствующие вопросы подробно изложены в монографии [21]. Уравнения (2.15) предпочтительно использовать в тех случаях, когда требуется определить прежде всего высотный ход аэрозольного коэффициента ослабления по данным многочастотного лазерного зондирования.

Решением любой из построенных выше систем уравнений являются высотные профили коэффициента обратного рассеяния $\beta_\pi(z, \lambda)$, ослабления $\beta_{ex}(z, \lambda)$ и функций плотности $s(z, \lambda)$, характеризующих микроструктуру зондируемого аэрозольного образования. С точки зрения контроля оптического состояния атмосферы наибольший интерес, очевидно, представляет определение профилей оптической характеристики $\beta_{ex}(z,\ \lambda)$. Использование в вычислительных схемах обращения локационных данных оптических операторов типа W позволяет одновременно решать и экстраполяционные задачи, т. е. эффективно решать задачи аналитического продолжения спектрального хода $\beta_{ex}(z,\ \lambda)$ вправо и влево от границ интервала оптического зондирования $\Lambda = [\lambda_{\min},\ \lambda_{\max}]$. Одновременно с этим при известных значениях вещественной $\overline{m}'$ и мнимой $\overline{m}''$ частей комплексного показателя преломления $\overline{m}$ можно оценить $\beta_{cs}(z, \lambda)$ и профиль отношения β_{sc}/β_{ex}, характеризующего альбедо исследуемого аэрозольного слоя. Таким образом, метод многочастотного лазерного зондирования в рамках изложенной выше теории позволяет определить весь комплекс оптических характеристик, необходимый для решения задач переноса радиации в данном слое. Неопределенность, вносимая в результаты интерпретации ошибками в профилях $\overline{m}'(z)$ и $\overline{m}''(z)$, может быть заметно уменьшена с помощью методик коррекции, о чем речь пойдет ниже (см. п. 2.3.3).

Что же касается поля микроструктуры, то его оперативный контроль важен при изучении распространения в атмосфере дисперсных выбросов и физико-химических процессов, в которых аэрозольные частицы принимают участие. С учетом вышеизложенного можно констатировать, что объем информации, получаемый с помощью многоволнового лидара, может быть весьма обширным, и это должно стимулировать их создание и более широкое применение в атмосферно-оптических исследованиях. Лидары как информационно-измерительные системы обеспечивают высокое пространственное разрешение при зондировании параметрических полей. Получаемая информация, как правило, относится к малым (локальным) объемам атмосферы. Предельное значение интервала пространственного разбиения $\Delta_{\min}(z)$ в направлении зондирования сопоставимо с длиной светового цуга, т. е. с величиной $c\Delta t/2$, где Δt — длительность генерируемого светового импульса.

Вторая особенность лидаров состоит в том, что амплитуда принимаемого локационного сигнала $P(z, \lambda)$ пропорциональна оптической характеристике $\beta_\pi(z, \lambda)$. Последнее означает, что оптическая локация есть, по существу, метод прямого измерения коэффициента обратного светорассеяния для локального объема рассеивающей среды. В отличие от этого другие возможные методы и схемы оптического зондирования не позволяют определять непосредственно оптические характеристики локальных объемов. К ним, например, относится метод касательного зондирования, теорию которого мы подробно рассмотрим в следующей главе. В полной мере это относится и к трассовым измерениям спектральной прозрачности (интегралов ослабления) с помощью радиометров. В этом случае особенно характерны большие пространственные осреднения. Для теории и практики атмосферно-оптических исследований указанное свойство импульсной локации имеет принципиальное значение.

2.1.2. Пример восстановления спектра размеров частиц по данным многочастотного лазерного зондирования атмосферных дымок

Система уравнений лазерной локации (2.1) относится к случаю, когда эффектами многократного рассеяния в освещенном объеме зондируемой дисперсной среды можно пренебречь. Учет вклада многократного рассеяния в амплитуду принимаемого локационного сигнала в принципе не составляет особого труда. Техника аналитических построений соответствующих уравнений переноса импульсного оптического сигнала, описываемого параметра Стокса, подробно изложена в работе [24].

В пределах настоящей работы не будем излагать эти вопросы, поскольку они касаются такой важной практической задачи, как лазерная диагностика облаков, и требуют отдельного специального исследования. Заметим лишь, что учет вклада многократного рассеяния приводит к появлению в соответствующих локационных уравнениях новой оптической характеристики светорассеяния, а именно коэффициента направленного светорассеяния $\bar{D}_{11}(\vartheta, \lambda)$, а главное — многократных объемных интегралов. Первая трудность может быть преодолена в рамках операторного подхода, поскольку не составляет труда в предположении сферичности рассеивающих частиц построить операторы перехода для преобразований $\beta_\pi \to \bar{D}_{11}(\vartheta|\lambda)$ и $\beta_\pi \to \bar{D}_{11}(\lambda|\vartheta)$ либо $\beta_{ex} \to \bar{D}_{11}(\vartheta|\lambda)$ (то же самое $\beta_{ex} \to \bar{D}_{11}(\lambda|\vartheta)$) в зависимости от того, какая из двух итерационных схем используется при интерпретации. Соответствующие аналитические построения при учете двухкратного рассеяния уже приводились в работе [19], где одновременно рассмотрены и вопросы сходимости итерационных алгоритмов.

Напомним, что запись $\bar{D}_{11}(\vartheta|\lambda)$ означает угловой ход коэффициента направленного светорассеяния $\bar{D}_{11}(\vartheta, \lambda)$ для фиксированной длины волны. Знание этой характеристики необходимо для вычисления интегралов, входящих в уравнения переноса оптического излучения в рассеивающей среде [24]. Спектральный ход $\bar{D}_{11}(\vartheta, \lambda)$ для фиксированного значения угла ϑ обозначен выше через $\bar{D}_{11}(\lambda|\vartheta)$. Появление многократных интегралов в уравнениях локации, с точки зрения определения микроструктуры зондируемой среды, приводит к определенным затруднениям, которые связаны и с объемом вычислений, и с заметным снижением обусловленности обращаемых функциональных уравнений. Указанные причины объясняют в некоторой степени то обстоятельство, что до сих пор отсутствуют сколько-нибудь убедительные результаты по дистанционному определению микроструктуры облаков средствами оптического зондирования.

В соответствии с имеющимися оценками по облакам [6], влиянием многократного рассеяния в импульсной локации можно пренебречь, если общая оптическая толщина зондируемого слоя не превышает единицы. В силу этого все записанные выше уравнения и схемы обращения локационных сигналов вполне применимы при зондировании атмосферных дымок, туманов и дисперсных загрязнений атмосферы. Во всех этих случаях можно гарантировать выполнение условий:

$$\max_{\lambda, z} \tau(z, \lambda) < 1, \quad \lambda \in \Lambda; \quad z \in [Z_1, Z_2]. \tag{2.16}$$

Если выполняется это условие, то можно полагать, что величина $\Delta_k(\tau) = \tau_{k+1} - \tau_k$, связанная с пространственным интервалом разбиения $\Delta_k(z) = z_{k+1} - z_k$, будет значительно меньше единицы, и тогда уравнения (2.11) и (2.15) можно подвергнуть локальной (послойной) линеаризации, переписав их в более простой и наглядной форме:

$$\left.\begin{aligned} \beta_{\pi ik} &= S_{ik} T_{i,\,k-1}^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n; \\ \beta_{ex,\,ik} &= \sum_{j=1}^{n} \omega_{kij} \beta_{\pi jk}, \quad k = 1, \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{2.17а}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\omega}_{kij} \beta_{ex,\,jk} = S_{ik} T_{i,\,k-1}^{-1}. \tag{2.17б}$$

В этих системах при определении спектрального хода соответствующей оптической характеристики для k-го слоя ослаблением пренебрегается. Учитывается лишь общее ослабление до указанного слоя, представленного членом $T_{i,\,k-1}$. В ряде случаев, когда расстояние до зондируемого слоя с границами Z_1 и Z_2 невелико, этим членом можно пренебречь. Тогда получаем простейший вариант систем локационных уравнений:

$$\beta_{\pi ik} = S_{ik}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots; \tag{2.18а}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\omega}_{kij} \beta_{ex,\,jk} = S_{ik}. \tag{2.18б}$$

Первое уравнение наглядно иллюстрирует то обстоятельство, что метод многочастотного лазерного зондирования является оптическим методом непосредственного (прямого) измерения спектрального хода $\beta_\pi(\lambda)$ для локального объема дисперсной среды, находящегося на расстоянии z от приемной аппаратуры. Для определения спектра размеров частиц остается лишь обратить вектор $\boldsymbol{\beta}_\pi$, компоненты которого в (2.18а) суть амплитуды локационного сигнала. В силу этого метод многочастотного лазерного зондирования как метод микроструктурного анализа не имеет себе равных среди других оптических методов [20]. Имеющиеся на этот счет сомнения [29], как правило, связаны с зависимостью спектрального хода β_π от показателя преломления аэрозольного вещества, который, разумеется, нельзя задать априори с надлежащей точностью по трассе зондирования. Подобные затруднения с точки зрения теории интерпретации данных следует рассматривать как информационную недоопределенность решаемых задач, поэтому разумно прибегнуть к дополнительным оптическим измерениям и ввести их затем в общую схему интерпретации (см. п. 2.3.3).

Обращаясь к системе (2.18б), нетрудно видеть, что определение спектрального хода коэффициентов ослабления по данным многочастотной локации связано с решением некорректно поставленной математической задачи. В полной мере это относится и к определению профиля $\beta_{ex}(z)$ для фиксированного значения λ, что объясняет отсутствие эффективных методик оценки прозрачности атмосферы по лидарным измерениям. Заканчивая изложение теории рассматриваемого метода, следует констатировать, что многочастотные лидары являются достаточно мощными информационно-измерительными комплексами, однако эффективное их применение возможно лишь при наличии соответствующих вычислительных методов и программных комплексов обработки и интерпретации оптических данных.

Что же касается разработки технических средств, то их обстоятельный обзор можно найти в работе [7, 8]. Ниже приводятся основные технические характеристики двух многочастотных лидаров, созданных в Институте физики АН БССР с использованием ОКГ на красителях (табл. 2.1). Подобные лидары позволяют измерять спектральный ход аэрозольного коэффициента обратного рассеяния в приземном слое атмосферы в пределах видимой и ближней ИК областей. На рис. 2.1 приведено несколько реализаций характеристики $\beta_\pi(\lambda)$ для атмосферной дымки по данным работы [9]. На рис. 2.2 даны результаты обращения одной из них. Спектральный ход $\beta_\pi(\lambda)$ измерялся на пяти длинах волн: 0,44; 0,53; 0,68; 0,72; 0,84 мкм. Решение обратной задачи проводилось в пределах интервала размеров ($R_1=0{,}1$ мкм; $R_2=2$ мкм). В соответствующем эксперименте осуществлялся контроль дальности видимости, значение которой было не меньше 30 км. Это значение использовалось при обращении для коррекции выбираемого показателя преломления аэрозольного вещества, о чем подробнее будет сказано ниже. При наличии значительных ошибок измерения более достоверной микроструктурной характеристикой является нормированное интегральное распределение $q(r)$. Гистограммы $\{\Delta_l(S)/\Delta_l(r)\}$ и особенно $\{\Delta_l(N)/\Delta_l(r)\}$ оцениваются с заметно

Таблица 2.1

Технические характеристики лидаров „Глория" и Л-2 [8]

Параметры лидаров	„Глория"	Л-2
Рабочие длины волн, нм	434; 486; 546; 589; 694; 863; 950	360—1100
Энергия излучения в импульсе, Дж	0,005; 0,05; 0,004; 0,015; 0,12; 0,055; 0,065	0,01—0,15
Расходимость излучения, угл. мин	3—4	3
Длительность импульса, нс	25	25
Частота посылки, Гц	0,1	0,1
Диаметр приемного зеркала, м	0,3	0,3
Угол поля зрения, угл. мин.	2; 5; 10; 20	2; 5; 10; 20
Количество одновременно регистрируемых длин волн	4	1
Измерение кросполяризованных компонент локационных сигналов	Есть	Есть

меньшей достоверностью. Для сравнения на рис. 2.2 (пунктиром) приводятся микроструктурные характеристики модельной атмосферной дымки, в основе которой лежат данные прямых импакторных измерений спектров размеров [11].

Повышение точности микроструктурного анализа в данном примере может быть связано, с одной стороны, с повышением точности лидарных измерений, а с другой — с более точным измерением корректирующих значений $\bar{\beta}_{ex}$ для зондируемого слоя (то же самое дальности видимости). Речь идет о сопутствующих

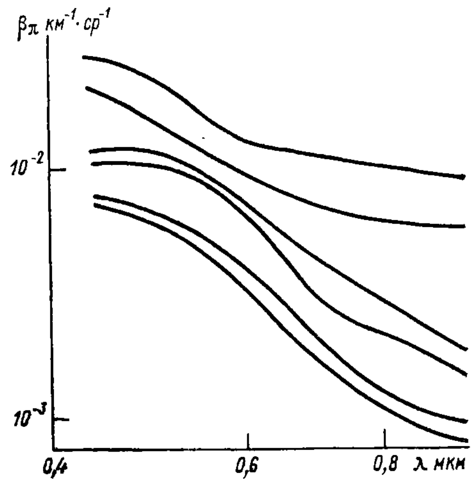

Рис. 2.1. Примеры реализаций спектрального хода коэффициента обратного рассеяния атмосферных дымок, измеренного с помощью многочастотного лидара [9].

измерениях значений $\bar{\beta}_{ex}$ по той простой причине, что они осуществляются относительно простым оптическим прибором, а именно спектральным базовым фотометром. В принципе можно дополнительно измерять и какую-либо другую оптическую характеристику, главное, чтобы эти измерения были увязаны с основными лидарными по времени и месту. В рамках этой методологии предполагается, что показатель преломления $\bar{m}$ в пределах зондируемого аэрозольного слоя не менялся по z и, следовательно, для указанной выше коррекции достаточно определить среднее значение $\bar{\beta}_{ex}$ (то же самое оптическую толщину слоя $\Delta(\tau)=\tau(Z_2)-\tau(Z_1)$). Следует заметить, что микроструктурный анализ атмосферных аэрозолей из оптических измерений предпочтительно связывать либо с локальными объемами, либо с некоторым ограниченным слоем. В рассматриваемом выше примере спектральный ход $\beta_\pi(\lambda)$ определен с ошибкой σ не меньшей 20 %, и поэтому для коррекции результатов обращения вполне было достаточно органичиться контролем дальности видимости (то же самое значением $\bar{\beta}_{ex}$ для $\lambda=0{,}55$ мкм).

В заключение напомним, что оценка микроструктурных характеристик в данном примере осуществлена в предположении

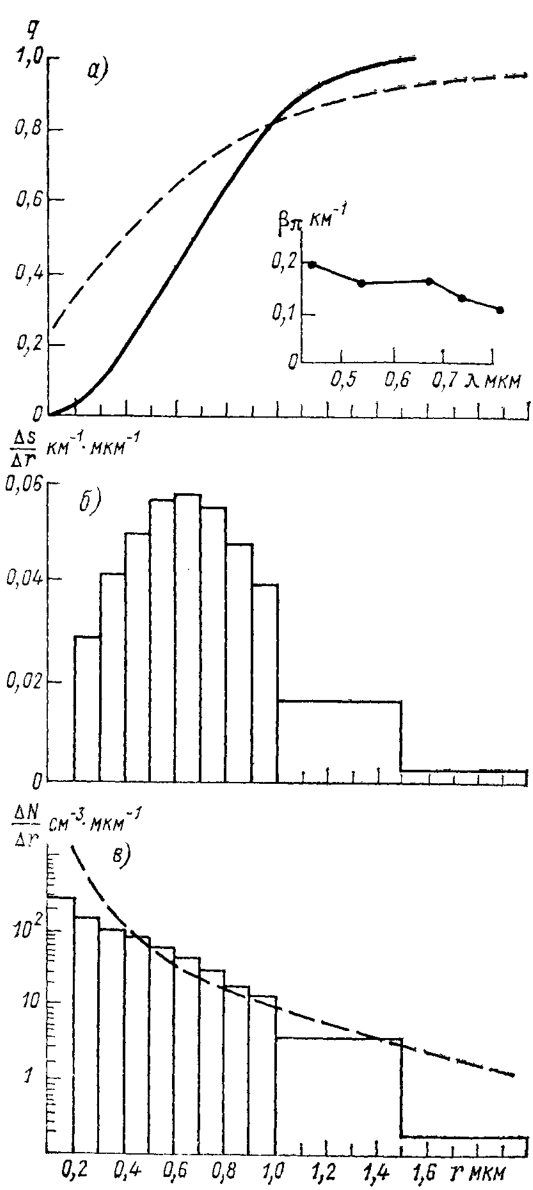

Рис. 2.2. Результаты микроструктурного анализа дымки приземного слоя по данным многочастотного зондирования [9].

а) исходная характеристика $\beta_\pi(\lambda)$ и полученное при обращении нормированное интегральное распределение $q(r)$; *б*) и *в*) гистограммы, характеризующие распределения $s(r)$ и $n(r)$ (пунктирная кривая — модель [11]).

сферичности частиц зондируемой дымки. Основываясь на результатах анализа, выполненного в работе [30], можно полагать, что если погрешность лидарных измерений σ не ниже 10 %, то эффектами несферичности можно пренебречь. Это касается тех аэрозолей, морфология которых близка к представленной на рис. 1.7.

2.1.3. Параметризация вычислительных схем метода многочастотного лазерного зондирования

Из многочастотных лидаров в практике атмосферно-оптических исследований к настоящему времени наибольшее распространение получили двухчастотные системы лазерного зондирования. Как правило, они используют в качестве источников стандартные ОКГ на 0,69 либо 1,06 мкм с удвоителями частоты. В связи с этим представляет определенный практический интерес подробнее изложить теорию двухчастотного лазерного зондирования атмосферных аэрозолей как частный вариант общей теории метода многочастотного зондирования аэрозольных систем. С одной стороны, это позволит более ясно представить содержание самой теории, а с другой — более полно оценить информационные возможности простых измерительных комплексов, какими являются, в частности, двухчастотные лидары.

В этом конкретном случае оптического зондирования обратной задаче светорассеяния дисперсными средами естественно придать параметрическую форму. Малый объем исходных спектральных данных делает малоэффективным применение метода линейных систем. Как показано в работе авторов [6], лишь в случае четырехчастотного лидара целесообразно применение более общих методов интерпретации локационных данных.

Параметризация обратной задачи начинается с выбора модельного спектра размеров. Не касаясь подобных вопросов, поскольку они обстоятельно изложены во многих исследованиях по атмосферной оптике (см., например, [4, 5]), будем исходить из гамма-распределения, которое уже появлялось выше (см. (1.104)). Неизвестными параметрами, подлежащими оценке в процессе обращения данных двухчастотного зондирования, считаем полное геометрическое сечение частиц S в единичном рассеивающем объеме среды и модальный радиус r_s в распределении $s(r)$. В дальнейшем будем использовать для плотности $s(r)$ представление $S\varphi(r, r_s)$, где $\int\limits_R \varphi(r, r_s)\,dr = 1$. Формально для данной аналитической модели область интегрирования R отождествлена с бесконечным интервалом $(0, \infty)$. В расчетах, конечно, R всегда представлено некоторым конечным интервалом R_ε, таким, что $\int\limits_{R_\varepsilon} \varphi(r, r_s)\,dr = 1 - \varepsilon$, где $R_{1\varepsilon} \to 0$ и $R_{2\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Остальные параметры модели α и γ в (1.104) будем считать известными, исходя, например, из рекомендаций обстоятельного исследования [4].

Напомним, что каждая пара значений S и r_s относится к вполне определенному слою $\Delta_k(z)$ в пределах z_k и z_{k+1}. Последовательно интерпретируя данные по трассе зондирования, можно построить профили $S(z)$ и $r_s(z)$, которые, в свою очередь, позволяют рассчитать профиль объемной плотности аэрозолей

$$V(z) = 4S(z)\, r_s(z)(\alpha + 3)/3(\alpha + 2).$$

Последнее выражение получено в предположении, что $\gamma = 1$. Если при этом учесть зависимость всех параметров от времени, то данные двухчастотного лазерного зондирования позволяют, таким образом, построить двухмерные распределения $S(z, t)$ и $r_s(z, t)$. Поскольку импульсные источники света обеспечивают высокое пространственно-временное разрешение, то ясно, что объем получаемой информации о микроструктуре аэрозольных образований весьма обширен даже для двухчастотного лидара.

В параметризованной форме первая система в (2.17а) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{\text{л}1k} = S_{1k} T_{1,\,k-1}^{-1}; \\ &\beta_{\text{л}2k} = S_{2k} T_{2,\,k-1}^{-1}, \quad k = 1, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Для фиксированного k (от же самое k-го слоя по трассе зондирования) имеем обратную задачу светорассеяния в виде системы двух нелинейных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} &S\overline{K}_{\text{л}1}(r_s) = f_1; \\ &S\overline{K}_{\text{л}2}(r_s) = f_2; \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

в которой неизвестными являются S и r_s, а f_1 и f_2 суть правые части в (2.19). Эта система вполне определена, если указано «подходящее» значение показателя преломления аэрозольного вещества. Ниже везде предполагается, что эта оптическая величина постоянна в пределах участка трассы $[Z_1, Z_2]$ и может быть оценена с приемлемой точностью с использованием априорных данных о зондируемом аэрозоле.

Вычислительная процедура интерпретации локационных данных в рассматриваемом случае достаточно проста. Первоначально из системы (2.20) определяется значение r_s. В принципе это можно сделать самыми различными способами, однако в пределах данного исследования будем использовать наиболее распространенный метод, а именно итерационную схему вида

$$r_s^{(p)} = r_s^{(p-1)} - F\left(r_s^{(p-1)}\right), \tag{2.21}$$

где через $F(r_s)$ обозначено отношение

$$\{f_2\overline{K}_1 - f_1\overline{K}_2\}/\{f_2\overline{K}_1' - f_1 K_2'\},$$

в котором производные от полидисперсных интегралов $\overline{K}(r_s, \lambda)$ взяты по искомому параметру r_s. С учетом (1.104) их вычисление не представляет особого труда. Дифференцируя (1.104б) по r_s, можно найти соответствующие аналитические представления для $\partial\overline{K}(r_s, \lambda)/\partial r_s$. Нетрудно видеть, что в схеме (2.21) речь идет о применении метода Ньютона к решению уравнения вида $\varphi(x)=0$.

Определив указанным образом значение $\overset{*}{r_s}$ как предел последовательности $\{r_s^{(p)}, p=1, \ldots\}$, второй параметр S определяется по схеме метода наименьших квадратов, что эквивалентно вычислению по формуле

$$S^* = \sum_{i=1}^{2} f_i \overline{K}_i (\overset{*}{r_s}) \Big/ \sum_{i=1}^{2} \overline{K}_i^2 (\overset{*}{r_s}). \tag{2.22}$$

Зная S^* и $\overset{*}{r_s}$ для k-го слоя, находим соответствующие значения коэффициента ослабления

$$\beta_{ex,\,i} = S^* \overline{K}_{ex,\,i} (\overset{*}{r_s}), \quad i=1,\ 2, \tag{2.23}$$

которые позволяют рассчитать оптическую толщину этого слоя $\Delta_{ik}(\tau)=\beta_{ex,\,ik}\Delta_k(z)$. Таким образом, для k-го слоя определены все требуемые микрофизические параметры и оптические характеристики. Поскольку, в свою очередь,

$$T_{ik} = T_{i,\,k-1} \exp\{-2\,\Delta_{ik}(\tau)\}, \quad k=1, \ldots,$$

то можно перейти к интерпретации локационных сигналов, соответствующих $(k+1)$-му слою. Если при этом окажется, что $\Delta_{ki}(\tau)$ достаточно велико и значение $\exp\{-2\Delta_{ik}(\tau)\}$ заметно отличается от единицы, то целесообразно использовать более общую итерационную схему (2.12), а не ее линеаризованный вариант (2.17а). Однако, за исключением пограничного слоя, как правило, подобных ситуаций не возникает. Что же касается теории лазерной локации облаков в видимом диапазоне, то ее необходимо сразу же строить на более общих уравнених переноса, нежели это делалось выше (см., например, [24]).

Параметризованная форма обратной задачи светорассеяния должна рассматриваться не более как качественный метод интерпретации оптических данных. Это прежде всего метод количественной оценки некоторых интегральных параметров, характеризующих микроструктуру зондируемой дисперсной среды в целом. Как было показано в предыдущей работе авторов [6], получаемое в этом методе решение $s^*(r)=S^*\varphi(r, \overset{*}{r_s})$ не может характеризовать локально поведение действительного распределения $s_0(r)$, за исключением, конечно, тех случаев, когда последнее точно соответствует аналитически выбранному типу моделей. С учетом вышеизложенного зачастую вместо моды r_s в схему обращения целесообразно вводить средний радиус частиц $\bar{r}$ в качестве искомого параметра. Формально $\bar{r}=\int r\varphi(r, r_s)\,dr$ и, следовательно, величины $\bar{r}$ и r_s связаны друг с другом. Введение в вычислительную схему интерпретации распределения $\varphi(r, \bar{r})$ интересно в том отношении, что параметры S и $\bar{r}$ применимы для описания микроструктуры любой дисперсной среды независимо от аналитического вида аппроксимирующего распределения. Значения S^* и $\bar{r}^*$ можно считать конечным результатом интерпретации данных двухчастотного зондирования, не отождествляя используемую в схеме обращения модель $\varphi(r, \bar{r})$ с действительным спектром размеров частиц. Подчеркивая вспомогательный характер подобных функций при интерпретации оптических данных, иногда их будем называть рабочими моделями в алгоритмах обращения.

Заканчивая рассмотрение параметрического подхода к задачам многочастотной лазерной локации, следует заметить, что в нем чисто формально снимается проблема, связанная с неопределенностью границ R_1 и R_2 в исходных полидисперсных интегралах. В силу этого параметрическая форма обращения данных по светорассеянию дисперсными средами, естественно, выигрывает по сравнению с более общими методами, примером которых является метод линейных систем. Кроме того, параметрическая форма позволяет в ряде случаев провести более обстоятельный анализ вычислительной схемы обращения и дать полезные рекомендации по планированию эксперимента и выбору параметров измерительной аппаратуры. Это можно проиллюстрировать следующими аналитическими построениями.

Обратимся к итерационной схеме (2.21). Нетрудно показать, что если последовательность $\{r_s^{(p)}\}$ сходится к r_s^*, то это необходимо влечет выполнение условия

$$f_1\bar{r}(\lambda_2, r_s^*)\overline{K}_2^{-1}(r_s^*) - f_2\bar{r}(\lambda_1, r_s^*)\overline{K}_1^{-1}(r_s^*) \neq 0, \qquad (2.24)$$

где через $\bar{r}(\lambda, r_s)$ обозначен эффективный оптический размер частиц зондируемой среды. Для параметрических моделей его значение определяется следующим выражением:

$$\bar{r}(\lambda, r_s) = \int\limits_R rK(\lambda, r)\varphi(r, r_s)\,dr \Big/ \int\limits_R K(\lambda, r)\varphi(r, r_s)\,dr, \qquad (2.25)$$

в соответствии с которым можно вводить при необходимости сокращенные обозначения $\bar{r}_1 = \bar{r}(\lambda_1, r_s)$ и $\bar{r}_1^* = \bar{r}(\lambda_1, r_s^*)$. Если итерационный процесс расходится, то следует полагать, что либо неудачно заданы параметры рабочей модели, либо сама модель не соответствует данному эксперименту.

В рассмотренной схеме интерпретации данных двухчастотного лазерного зондирования у нас появляется возможность косвенного контроля применимости рабочей модели $\varphi(r, r_s)$ для обработки экспериментальных данных. Следует особо подчеркнуть, что эта особенность вообще присуща итерационным схемам обращения. Во многих случаях скорость сходимости последовательности приближенных решений является, по крайней мере, качественным показателем соответствия решаемых функциональных уравнений реальным зависимостям величин в экспериментах. Подобные примеры будут приводиться ниже. Что же касается рассматриваемого здесь варианта, то итерационная схема (2.21) сходится тем быстрее и тем она устойчивее к ошибкам в f_1 и f_2, чем больше абсолютное значение разности $\{\overline{K}_1^2\bar{r}_2 - \overline{K}_2^2\bar{r}_1\}$. Если считать, что действительное значение параметра r_s лежит в пределах интервала $\Omega(r_s) = (r_{\min}, r_{\max})$, то путем численных расчетов нетрудно подобрать такую пару значений рабочих длин волн лидара λ_1 и λ_2, для которых указанная выше разность принимала бы наибольшее значение. В связи с этим пару (λ_1, λ_2) можно считать выбранной оптимально, если она удовлетворяет условию

$$\max_{\lambda_1, \lambda_2} \min_{r_s \in \Omega} \left| \overline{K}^2(\lambda_1, r_s)\bar{r}(\lambda_2, r_s) - \overline{K}^2(\lambda_2, r_s)\bar{r}(\lambda_1, r_s) \right|.$$

Оптимальность выбора λ_1 и λ_2 в данном случае эквивалентна большей устойчивости решения $(S^*, \overset{*}{r}_s)$ к ошибкам в локационных измерениях, что обеспечивает и большую информативность двухчастотного лазерного зондирования при прочих равных условиях.

В заключение отметим, что хотя проведенный выше анализ касался одной параметрической модели, а именно гамма-распределения частиц по размерам, его результаты качественно справедливы и для других возможных рабочих моделей. Нетрудно повторить соответствующие построения, например, для логнормального модельного распределения. Во всех случаях в соответствующие соотношения входят функционалы $\overline{K}[\varphi, \lambda]$ и $\bar{r}[\varphi, \lambda]$, зависящие от плотности $\varphi(r, r_s)$. На этом мы закончим рассмотрение теории двухчастотного лидара как пример параметрической формы общей теории метода многочастотного лазерного зондирования аэрозольных систем и обратимся к примеру ее практического применения.

2.1.4. Пример интерпретации данных по двухчастотному лазерному зондированию аэрозолей стратосферы

В последние годы заметно расширилось применение двухчастотных лидаров для изучения атмосферных аэрозолей и прежде всего аэрозолей нижней стратосферы. В значительной степени это обусловлено необходимостью оценить возможное влияние антропогенных факторов на состояние стратосферы и выяснить ту роль, которую играют стратосферные аэрозоли на климат планеты. Лидары, использующие в качестве источника стандартные генераторы на 1,06 мкм и их вторые гармоники, обеспечивают потолок зондирования вплоть до 30 км [26]. В пределах настоящего раздела мы рассмотрим результаты подобного зондирования, акцентируя основное внимание, естественно, на методике обращения получаемой оптической информации в рамках изложенного выше параметрического подхода. В основу положены данные, приведенные в работе [26], связанной с систематическим зондированием атмосферы в пределах высот 9—30 км в период с мая по октябрь 1983 г. В это время на состоянии стратосферы сказывалось влияние дисперсных выбросов, сопутствовавших извержению вулкана Эль-Чичон весной этого года. Интерпретация полученных профилей локационных сигналов в целом соответствовала той алгоритмической схеме, которая излагалась выше, хотя в некоторых деталях она была отличной. Отличия обусловливались той априорной информацией об аэрозолях стратосферы, которой располагали авторы работы. Так, в частности, предварительные аэростатные исследования аэрозолей, выполняемые примерно в то же время, показали, что в качестве исходной рабочей модели для спектра размеров частиц может использоваться логнормальный закон распределения, т. е. выражение

$$n(r)=N\varphi(r,\ r_n,\ \sigma)=N\,\{(2\pi)^{1/2}\ln\sigma\}^{-1}\exp\{-(\ln r-\ln r_n)^2/2\ln^2\sigma\}\cdot$$

Для интерпретации данных двухчастотного лазерного зондирования в рамках параметрического подхода определяющую роль играет величина $\Gamma(z)=\beta_\pi(z,\lambda_1)/\beta_\pi(z,\lambda_2)$. В данном примере для каждого z она является функцией двух параметров r_n и σ (если, конечно, не считать значение показателя преломления $\bar{m}$). Предполагалось, что если значение $\tilde{\Gamma}(z)$, соответствующее отношению реальных значений $\tilde{\beta}_{\pi 1}$ и $\tilde{\beta}_{\pi 2}$, удовлетворяет условию $2\leqslant\tilde{\Gamma}(z)\leqslant 3$, то σ можно принять равным 1,8. Если $\tilde{\Gamma}(z)<2$, то $\sigma=1{,}2$. Таким способом преодолевалась неопределенность в априорном задании модельной вспомогательной функции $\Gamma(z,r_n,\sigma)$, ибо далее оставалось найти значение одного неизвестного параметра $\overset{*}{r}_n$. Затем решалось уравнение $\Gamma(z,\ r_s,\ \sigma)=\tilde{\Gamma}(z)$ относительно переменной r_n для каждого слоя $\Delta(z)$ в окрестности z по высоте. В расчетах модельного отношения $\Gamma(r_n,\ \sigma)$ использовались следующие исходные данные: $R_1=0{,}05$ мкм; $R_2=3$ мкм; $\bar{m}_1=\bar{m}(\lambda_1=0{,}53)=1{,}443-0{,}005i$ и $\bar{m}_2=\bar{m}(\lambda_2=1{,}06)=1{,}455-0{,}005i$.

Молекулярное рассеяние выделялось из локационных сигналов на основе предварительной оценки так называемого рассеивающего отношения $\xi(\lambda,\ z)=1+\beta_\pi^{(\mathrm{a})}(\lambda,\ z)/\beta_\pi^{(\mathrm{м})}(\lambda,\ z)$. Конечно, это весьма приближенный метод «разделения» рассеивающих компонент атмосферы, и он вносит определенную методологическую ошибку в результаты обращения. Переход от β_π к значениям β_{ex} осуществлялся по найденным значениям N^* и $\overset{*}{r}_n$ путем вычисления параметрического интеграла $\beta_{ex}[N^*,\overset{*}{r}_n,\ \lambda]$ в соответствии с (2.23). Так выглядит схема обращения данных зондирования в указанной работе. Она служит примером конкретной реализации параметрического подхода к обращению данных по светорассеянию атмосферными аэрозолями в тех случаях, когда систематическое лазерное зондирование атмосферы дополняется периодическими контрольными замерами микрофизических аэрозольных параметров.

На рис. 2.3 представлены результаты обращения одной из реализаций пары локационных сигналов $\tilde{P}(z,\lambda_1)$ и $\tilde{P}(z,\lambda_2)$ (18 октября 1983 г.). Ясно выраженная нерегулярность высотного хода аэрозольных оптических характеристик, особенно выше 27 км, объясняется «загрязнением» стратосферы частицами вулканического происхождения. На рис. 2.3 *а, б, в* указаны их значения (точки), полученные по данным прямых микроструктурных измерений (аэростатные импакторы). Рисунок 2.3 *в* показывает, что в пределах «невозмущенной» стратосферы отношение $\tilde{\Gamma}(z)$ ведет

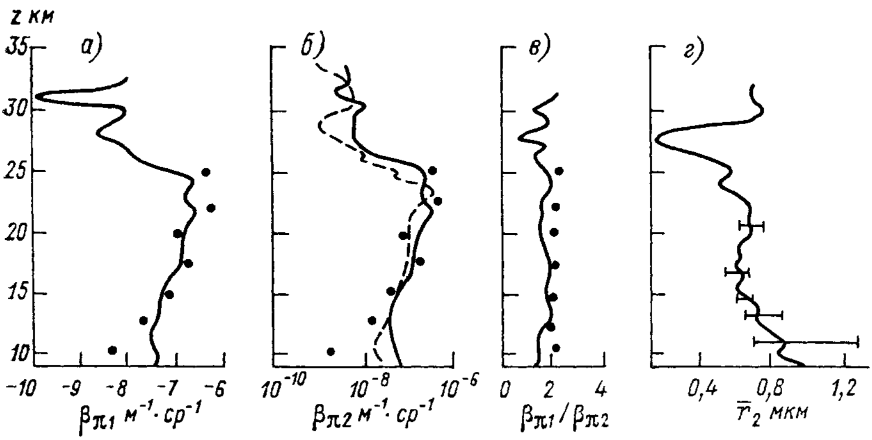

Рис. 2.3. Результаты обращения данных по двухчастотному зондированию аэрозолей стратосферы наземным лидаром [26].

а, б) профили аэрозольных коэффициентов обратного рассеяния (пунктир — то же, неделю спустя); *в*) профиль отношения $\Gamma(z)$; *г*) средний оптически эффективный размер $\bar{r}$ (λ_2=1,06 мкм).

себя достаточно устойчиво. Его значения при этом удовлетворительно согласуются с расчетными данными для сферических рассеивающих частиц с экспериментальным спектром размеров (точки). Как свидетельствовали данные прямого микроструктурного анализа, в области высот $z \geqslant 27$ км была заметно повышена концентрация частиц размером $r > 1$ мкм по сравнению с нижележащими слоями. При лазерном зондировании это обстоятельство проявляет себя весьма явно в высотном ходе значений эффективного оптического размера частиц $\bar{r}(z, \lambda_2)$ на рис. 2.3 *г*. В области $z > 27$ км эта величина достигала значений 1 мкм, что соответствует ее заметному росту по сравнению с обычной «невозмущенной» стратосферой. По сообщениям авторов рассматриваемой работы величина $\bar{r}(z, \lambda_2)$ наибольших значений (примерно 1,4 мкм) достигала в августе 1983 г.

Такова в общих чертах та информация, которую можно извлечь вполне достоверно из данных двухчастотного лазерного зондирования аэрозолей стратосферы. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что во всех случаях речь идет об интегральных характеристиках. Таковыми являются коэффициенты обратного рассеяния $\beta_{\pi 1}$ и $\beta_{\pi 2}$, их отношение $\Gamma(z)$ и средний эффективный оптический размер $\bar{r}_2$. Из всех перечисленных величин наиболее близкой к микроструктурным параметрам является последняя.

В процессе обращения с помощью итерационной схемы определяется значение моды $\overset{*}{r}_n$, но его прямо увязывать с реальным спектром размеров не представляется возможным. По данным прямых микроструктурных измерений этот спектр, как правило, был бимодальным. Поэтому переменная r_n в схеме обращения играет роль формального параметра, что вполне согласуется с той концепцией, которая стоит за термином «рабочая параметрическая модель» спектра размеров в схемах обращения. Однако это не мешает получать достоверные оценки всех указанных выше интегралов (то же самое оптических полидисперсных характеристик). В полной мере это относится и к объемной концентрации частиц, определяемой интегралом от функции $(4\pi/3) \times r^3 N^* \varphi(r, \overset{*}{r}_n)$. В работе [26] приведена таблица значений этого параметра (вернее, массовой концентрации), полученных по данным лазерного зондирования. Сопоставительный анализ указывает на их хорошее согласие с данными прямых микроструктурных измерений.

И наконец, последнее замечание, которое необходимо сделать в связи с анализом локационных данных, касается явно выраженного нерегулярного высотного хода аэрозольных оптических характеристик. Выше уже упоминалось о так называемых регулярных и нерегулярных компонентах функций, которые участвуют в схемах обращения. Регулярные (гладкие) компоненты можно задавать априори в обратных задачах с большей достоверностью, равно как и определять их при обращении экспериментального материала. Сопоставляя рэлеевскую и аэрозольную компоненты рассеяния, первую из них можно считать регулярной, а аэрозольную — нерегулярной. При обработке и интерпретации локационных сигналов это обстоятельство необходимо учитывать, и ниже нам придется к нему неоднократно возвращаться.

2.2. Исследование аэрозолей пограничного слоя атмосферы методом лазерного зондирования

При построении теории метода лазерного зондирования в предыдущем разделе исследуемая дисперсная среда была представлена полидисперсной системой частиц, независимо рассеивающих падающее оптическое излучение. Если говорить о реальных аэрозольных системах, то нельзя не признать, что подобная модель носит несколько абстрактный характер. Частным задачам присуща большая физическая определенность, и это позволяет строить более содержательные методы интерпретации оптических данных. Подобным примером является теория лазерного зондирования аэрозолей пограничного слоя атмосферы. Характерной особенностью в этом случае является наличие вполне определенных физических закономерностей, которые сказываются на пространственно-временной изменчивости микроструктуры аэрозолей в пределах пограничного слоя. Определяющим из них является, как известно, процесс турбулентного переноса аэрозолей.

Взаимодействие аэрозольной системы с полями метеорологических параметров приводит к направленным изменениям спектра размеров в пределах любого локального объема. Математически это выражается в том, что функции плотности по пространственным и временным координатам удовлетворяют некоторым дополнительным функциональным уравнениям. В результате возникает возможность доопределить исходную систему уравнений оптического метода зондирования (например, систему (2.1)) новыми уравнениями и построить частный вариант вычислительной схемы обращения оптических данных. Ниже это осуществляется на примере, когда подобным уравнением является уравнение турбулентного переноса аэрозолей в пограничном слое. То, что теперь учитывается трансформация спектра размеров частиц, обусловленная полем коэффициентов турбулентной диффузии атмосферы, позволяет исследовать это поле методом многочастотной лазерной локации. Ниже дается теоретическое обоснование возможности применения многочастотных лидаров для определения полей метеопараметров на основе явления светорассеяния аэрозолями в пограничном слое атмосферы.

2.2.1. Обратная задача турбулентной диффузии аэрозолей пограничного слоя

Пространственно-временную изменчивость концентрации аэрозолей в пределах единичного объема будем характеризовать функцией плотности $s(\mathbf{z}, t, r)$, где $\mathbf{z}$ — вектор, определяющий положение этого объема в некоторой системе координат. В пределах данного раздела будем опускать переменную r и писать просто $s(\mathbf{z}, t)$, подразумевая, что речь идет о частицах вполне определенного размера. Без ограничения общности полагаем, что направление $\mathbf{z}$ совпадает с вертикалью, и рассматривается поле концентрации аэрозолей только в этом направлении. При этих предположениях достаточно рассматривать функцию двух переменных $s(z, t)$. При наличии явления переноса воздушных масс в пограничном слое атмосферы, вовлекающих в движение и частицы, градиенты поля концентрации аэрозольных частиц должны быть связаны с его временной изменчивостью. Эта связь выражается так называемым уравнением турбулентной диффузии для дисперсной компоненты атмосферы [14].

В нашем случае информация о пространственно-временной изменчивости концентрации аэрозолей по спектру возможных размеров в пределах любого локального объема атмосферы поступает из обращения данных многочастотного лазерного зондирования, поэтому уравнение диффузии аэрозолей нас может интересовать лишь с точки зрения получения информации о коэффициентах турбулентности. Это приводит нас к обратным задачам теории переноса аэрозолей в турбулентной атмосфере. Необходимо напомнить, что совокупность коэффициентов турбулентной диффузии является определяющей характеристикой физического состояния пограничного слоя, поэтому определение профилей этих коэффициентов методами дистанционного оптического зондирования можно отнести к одной из наиболее важных задач физики атмосферы. Ниже дается краткое изложение основных теоретических аспектов этой сложной атмосферно-оптической задачи. В последующих исследованиях по методам оптического мониторинга атмосферы их следует рассматривать как основу для численного моделирования и разработки программных комплексов обработки оптических измерений.

Следуя так называемой полуэмпирической теории турбулентной диффузии вещества в атмосфере, пространственно-временные вариации плотности $s(z, t)$ в пределах локального объема, расположенного в окрестности точки z, описываются уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}, \operatorname{grad} s) = \operatorname{div}(\mathbf{K}, \operatorname{grad}) s + D_g \frac{\partial s}{\partial z}, \tag{2.26}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости ветра; компоненты вектора $\mathbf{K}$ суть числа K_x, K_y, K_z — коэффициенты турбулентной диффузии по осям x, y, z соответственно; D_g — скорость седиментации частиц в поле силы тяжести. При выводе простейшего варианта этого уравнения, которого нам будет вполне достаточно для иллюстрации возможностей метода лазерного зондирования пограничного слоя, полагают справедливыми следующие соотношения:

$$\left|\frac{\partial s}{\partial x}\right| \ll \left|\frac{\partial s}{\partial z}\right|; \quad \left|\frac{\partial s}{\partial y}\right| \leqslant \left|\frac{\partial s}{\partial z}\right|; \quad \left|u_z \frac{\partial s}{\partial z}\right| \ll \left|K_z \frac{\partial s}{\partial z}\right|.$$

С учетом этих допущений (2.26) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial s}{\partial z}\right) + D_g \frac{\partial s}{\partial z}, \tag{2.27}$$

и обратная задача, таким образом, сводится к определению высотного профиля $K_z(z)$.

Однако, прежде чем ставить обратную задачу для уравнения (2.27), его необходимо доопределить соответствующими граничными и начальными условиями, налагаемыми на $s(z, t)$, т. е. вполне определить вначале прямую задачу. В противном случае постановка последующей обратной задачи для рассматриваемого функционального уравнения навряд ли будет корректной.

Полагаем известным, прежде всего, некоторый начальный профиль $s(z, t_0)$. При рассмотрении пограничного слоя атмосферы первое граничное условие, естественно, должно касаться поверхности. В теории турбулентной диффузии пограничного слоя оно записывается в следующем виде:

$$[K_z(z, t)\, \partial s/\partial t + D_g s]_{z=z_0} = Bs(z, t)|_{z=z_0}, \tag{2.28a}$$

где B — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости и характеризующая взаимодействие дисперсной компоненты с подстилающей поверхностью. В частности, при $B=0$ условие (2.28а) соответствует полному отражению аэрозолей от поверхности. При $B\to\infty$ необходимо следует требование $s\to 0$ при $z\to Z_0$ (случай полного поглощения частиц поверхностью). При $0<B<\infty$ дисперсная компонента частично поглощается и отражается. Для верхней границы пограничного слоя, определяемой точкой $Z_п$, имеем очевидное условие

$$K_z(z,\ t)\,\partial s/\partial t + D_g s = 0,\quad z = Z_п. \tag{2.28б}$$

Эти условия делают вполне определенной прямую задачу для исходного уравнения (2.27).

Поскольку оно является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно $K_z(z,\ t)$, нетрудно записать решение в явной форме. Действительно, интегрируя, находим

$$K_z(z,\ t)\,s'_z(z,\ t) = \int\limits_{Z_0}^{z} s'_t(z',\ t)\,dz' - D_g[s(z,\ t) - s(Z_0,\ t)] + c(t), \tag{2.29}$$

где s'_z и s'_t — частные производные $s(z,t)$ по переменным z и t соответственно. Постоянная интегрирования $c(t)$ находится из граничного условия

$$c(t) = K_z(Z_0,\ t)\,s'_z(Z_0,\ t).$$

Привлекая (2.28а), находим

$$c(t) = -(D_g - B)\,s(Z_0,\ t). \tag{2.30}$$

С учетом (2.30) решение (2.29) можно переписать следующим образом:

$$K_z(z,\ t)\,s'_z(z,\ t) = \int\limits_{Z_0}^{z} s'_t(z',\ t)\,dz' - D_g s(z,\ t) + Bs(Z_0,\ t). \tag{2.31}$$

Если подставить в (2.31) $z=Z_n$, то получим выражение

$$K_z(Z_п,\ t)\,s'_t(Z_п,\ t) = \int\limits_{Z_0}^{Z_п} s'_t(z',\ t)\,dz' - D_g s(Z_п,\ t) + Bs(Z_0,\ t).$$

Воспользовавшись теперь граничным условием (2.28б), найдем

$$Bs(Z_0,\ t) = -\int\limits_{Z_0}^{Z_п} s'_t(z',\ t)\,dz'. \tag{2.32}$$

Последнее равенство показывает, что, располагая данными микроструктурного анализа, не требуется априори задавать значение константы B, как это имеет место в прямой задаче турбулентной диффузии. Информация об этой величине содержится в исходном распределении $s(z, t)$, которое в нашем случае определяется обращением оптических измерений $\{P(\lambda_i, z, t), i = 1, \ldots, n\}$.

С учетом (2.32) имеем компактное выражение для определения высотного хода коэффициента турбулентной диффузии в пограничном слое атмосферы

$$K_z(z, t)\, s_z'(z, t) = -\int\limits_z^{z_п} s_t'(z', t)\, dz' - D_g s(z, t). \qquad (2.33)$$

Выражение (2.33) определено для тех точек z по трассе зондирования, для которых $s_z' \neq 0$. Ясно, что там, где отсутствуют градиенты в концентрации дисперсной фракции, отсутствует и турбулентный перенос. В этих точках следует считать $K_z \equiv 0$. Методика построения расчетных соотношений остается той же самой и в тех случаях, когда требуется учесть компоненты $K_x(z, t)$ и $K_y(z, t)$ поля турбулентной диффузии.

Для того чтобы воспользоваться изложенной методикой восстановления профиля K_z, необходимо найти не только распределение $s(z, t)$, но и оценить его пространственные и временные производные, что, естественно, усложняет вычислительные процедуры, связанные с обработкой и интерпретацией локационных сигналов. Для решения указанной вычислительной задачи и построения алгоритмических схем обработки оптической информации вновь прибегнем к методу оптических операторов теории светорассеяния дисперсными средами.

2.2.2. Операторный подход к определению пространственно-временных вариаций аэрозольных характеристик в оптических исследованиях

Допуская пока принципиальную возможность вычисления профилей $s_z'(z, t)$ и $s_t'(z, t)$ по профилям оптических сигналов $P_\sigma(z, t)$, попытаемся построить функциональные уравнения, связывающие указанные производные с производными оптических характеристик $\beta_л$ и β_{ex}. С этой целью нам придется вновь обратиться к интегральным представлениям аэрозольных оптических характеристик. Предположим, что факторы эффективности обратного рассеяния $K_л(\lambda, r)$ и ослабления $K_{ex}(\lambda, r)$ в этих представлениях не зависят от переменных z и t. Это предположение основывается на том допущении, что процесс диффузного переноса частиц воздухом не меняет показателя преломления их вещества. Флуктуации спектра размеров частиц в пределах рассматриваемого объема при турбулентной диффузии обусловливаются флуктуациями скоростей их движения, которые помимо характеристик турбулентного движения воздуха зависят и от размеров самих частиц. С учетом этих замечаний оптические характеристики аэрозольной системы можно представлять в виде следующего интеграла:

$$\beta(z, \lambda) = \int\limits_{R(z)} K(r, \lambda) s(z, r)\, ds, \quad z \in Z, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{2.34}$$

где, как и ранее, $Z = [Z_1, Z_2]$ — пространственный интервал, в пределах которого имеет место (2.34), и $\Lambda = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ — интервал оптического зондирования. Представление (2.34) справедливо как для β_π, так и для β_{ex}. Независимость ядра $K(\lambda, r)$ от z (то же самое t) приводит к простым соотношениям между производными β_z' и s_z'. Действительно, дифференцируя левую и правую части (2.34) по z и учитывая условие $s(z, R_1) = s(z, R_2) = 0$ для всех z в пределах зондируемого слоя, найдем

$$\partial\beta(z, \lambda)/\partial z = \int\limits_{R_1(z)}^{R_2(z)} K(\lambda, r)(\partial s(z, r)/\partial z)\, dr$$

или в операторной форме

$$\beta_z' = K s_z'. \tag{2.35}$$

Здесь, как и ранее, K — интегральный оператор с ядром $K(\lambda, r)$. В результате применительно к задачам многочастотной лазерной локации дисперсных сред можно записать следующие операторные соотношения:

$$\beta = Ks; \quad \beta_z' = Ks_z'; \quad \beta_t' = Ks_t'. \tag{2.36}$$

С помощью (2.36) нетрудно построить операторные соотношения, аналогичные (2.3). В частности, для аэрозольного коэффициента ослабления имеем:

$$\beta_{ex} = W\beta_\pi; \quad \beta_{ex,\,z}' = W\beta_{\pi z}'; \quad \beta_{ex,\,t}' = W\beta_{\pi t}', \tag{2.37}$$

где, как и ранее, $W = W_{ex,\,\pi}^{(\alpha)}$. Теперь остается лишь связать производные $\beta_{\pi z}'$ и $\beta_{\pi t}'$ с S_z' и S_t', используя для этой цели уравнения переноса локационных сигналов в зондируемой дисперсной среде. Дифференцируя $S(z, \lambda)$ по z (см. (2.1)), находим

$$S_z' = (\beta_{\pi z}' - 2\beta_\pi\beta_{ex}) T(z). \tag{2.38}$$

Если система (2.1) была решена ранее относительно β_π и β_{ex}, то функциональное уравнение (2.38) позволяет немедленно найти $\beta_{\pi z}'$ по профилю S_z'. Используя далее оператор $K_{\pi\alpha}^{-1}$ по $\beta_{\pi z}$, находим искомую функцию s_z'. Таким образом достаточно просто в рамках операторного подхода строится вычислительная схема интерпретации локационных данных в целях контроля пространственно-временной изменчивости оптических и микрофизических характеристик аэрозоля. В сущности, не требуется введения в схему каких-то новых операторов. Как и ранее, вполне достаточно пары регуляризирующих операторов $W^{(\alpha)}_{ex,\pi}$ и $K^{-1}_{\pi\alpha}$ (либо $W^{(\alpha)}_{\pi,ex}$ и $K^{-1}_{ex,\alpha}$). Исходной информацией служит теперь массив данных $\{S_{ik\nu}=S(\lambda_i, z_k, t_\nu),\ i=1, \ldots, n;\ k, \nu=1, \ldots\}$. Упомянутая выше пространственно-временная изменчивость оптических характеристик представлена в схеме интерпретации профилями $\beta'_{\pi z}(z, t)$ и $\beta'_{\pi t}(z, t)$ (то же самое $\beta'_{ex,z}$ и $\beta'_{ex,t}$). Изменчивость поля микроструктуры аэрозолей характеризуется при этом s'_z и s'_t соответственно.

Теперь остается рассмотреть технику численного дифференцирования измеряемых профилей $S(z, t)$ по z и t. Поскольку нам известно из лидарных измерений σ-приближение $S_\sigma(z, t)$, содержащее недифференцируемые (шумовые) компоненты, то определение указанных выше производных S'_z и S'_t является нетривиальной задачей. Во всяком случае, техника приведенных разностей здесь неприемлема. Поэтому прибегнем вновь к операторному подходу, построив для этой задачи некоторый регуляризирующий оператор численного дифференцирования первого порядка $D_{1\alpha}$. Как и оператор K^{-1}_α в задачах светорассеяния системами частиц, он также задан на множестве экспериментальных функций. Указанный подход уже ранее апробировался на решении ряда локационных задач и описан в работе авторов [6]. Поскольку в пределах настоящего исследования нам придется неоднократно использовать оператор $D_{1\alpha}$, напомним кратко схему его построения.

Исходным соотношением является интегральное выражение

$$f(x)=f(X_1)+\int_{X_1}^{x} f'(x')\,dx',$$

связывающее значение любой (дифференцируемой) функции f в точке x некоторого интервала $X=[X_1, X_2]$ с ее производной $f'(x)$. Это выражение можно переписать следующим образом:

$$\bar{f}(x)=\int_{X_1}^{X_2} K(x, y)\, f'(y)\, dy, \tag{2.39}$$

где $\bar{f}(x)=f(x)-f(X_1)$ и

$$K(x, y)=\begin{cases}1 & \text{при } X_1\leqslant y\leqslant x,\\ 0 & \text{при } x<y\leqslant X_2.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что (2.39) представляет собой интегральное уравнение относительно искомой производной $f'(x)$ при известной функции $f(x)$. Ядро этого интегрального уравнения первого рода разрывно, поэтому целесообразно построить более приемлемый аналог функциональной зависимости между f' и f. Это достигается путем умножения слева исходного операторного уравнения $Kf'=\bar{f}$ на сопряженный K^*. В остальном техника аналитических построений достаточно формальна и их можно опустить. Результатом является следующее интегральное уравнение относительно $f'(x)$:

$$\int_{X_1}^{X_2} G(x, y) f'(y)\, dy = \tilde{f}(x), \tag{2.40}$$

$$\text{где} \quad \tilde{f}(x) = \int_{x}^{X_2} f(y)\, dy - f(X_1)(X_2 - x);$$

$$G(x, y) = \begin{cases} X_2 - x & \text{при } X_1 \leqslant y \leqslant x, \\ X_2 - y & \text{при } x < y \leqslant X_2. \end{cases}$$

Интегральное уравнение (2.40) имеет непрерывное ядро, и поэтому все, что говорилось ранее в первой главе о корректном решении интегральных уравнений первого рода в классе непрерывных функций, в полной мере применено к нему. В соответствии с этим численное определение f' осуществляется с помощью регуляризирующего оператора G_α^{-1}. Решение имеет вид $f'_\alpha(x) = (G_\alpha^{-1}\tilde{f}_\sigma)(x)$. В дальнейшем мы будем писать $f'_\alpha = D_{1\alpha} f_\sigma$, подразумевая, что $D_{1\alpha}$ суть регуляризирующий оператор для уравнения вида (2.40).

Следует заметить, что роль оператора $D_{1\alpha}$ при обработке экспериментальных данных далеко выходит за рамки собственно численного дифференцирования. Как уже отмечалось выше, формально $f_\sigma(x)$ — недифференцируемая функция, поскольку содержит реализации случайных процессов (шумов). Поэтому применение оператора $D_{1\alpha}$ к f_σ можно рассматривать как операцию выделения из f_σ регулярной (дифференцируемой) компоненты (то же самое «подавления» нерегулярных помех). Все функциональные уравнения, которые лежат в основе обработки данных, как правило, применимы к вполне регулярным функциям. Это, кстати, относится и к системе уравнений переноса зондирующих импульсов в рассеивающей среде, т. е. системе (2.1). Определив f'_α с помощью оператора $D_{1\alpha}$, нетрудно восстановить регулярную компоненту f_α эмпирической функции f_σ. Действительно, в соответствии с (2.39) имеем

$$f_\alpha(x) = \int_{X_1}^{x} f'_\alpha(y)\, dy + f_\alpha(X_1). \tag{2.41}$$

С этой точки зрения оператор $D_{1\alpha}$ можно считать оператором «выделения» регулярных компонент из эмпирических данных. Использование оператора $D_{1\alpha}$ в вычислительной схеме метода многочастотного лазерного зондирования существенно расширяет его возможности. Это касается не только определения S'_z и S'_t и введения новых уравнений типа (2.38), но и возможности решения более сложных физических задач. В частности, выше предполагалось, что зависимостью $\overline{m}(z)$ в пределах зондируемого слоя $Z_1 \leqslant$

$\leqslant z \leqslant Z_2$ можно пренебречь. В противном случае нам пришлось бы вводить производные по z от ядра $K[\overline{m}(z), \lambda, r]$ при построении функциональных уравнений для β_z' и s_z'. Известно, что факторы эффективности теории Ми, и прежде всего такие, как $K_{\pi}(\lambda, r)$, представляются плохо сходящимися рядами, дифференцировать которые непосредственно не представляется возможным. Применение к ним регуляризирующего оператора типа $D_{1\alpha}$, подавляющего осциллирующие компоненты, вполне возможно. Более того, предварительная регуляризация сходимости рядов Ми была бы вообще вполне уместной при решении обратных задач светорассеяния, поскольку непосредственное их использование неоправданно увеличивает объем вычислений при обработке экспериментального материала. Известны многочисленные попытки упростить расчетные выражения теории Ми за счет физических ограничений [4, 23], что совершенно нежелательно в обратных задачах светорассеяния. Вместе с тем это можно сделать и формально, т. е. с помощью операторов «выделения» регулярных компонент в плохо сходящихся (осциллирующих) рядах. Подобную возможность нам представляет введенный выше оператор $D_{1\alpha}$. На этом закончим построение теории оптического зондирования атмосферных аэрозолей, включающей в себя вопросы контроля пространственно-временной изменчивости оптических и микрофизических характеристик, в предположении, что эта изменчивость обусловливается турбулентной диффузией в атмосфере. В работе [19] рассмотрены аналогичные вопросы для случая, когда пространственно-временная изменчивость обусловлена процессами коагуляции и седиментации дисперсной компоненты атмосферы.

Приложения изложенной выше теории не исчерпываются приведенными примерами. Введение в схему обращения оптических данных уравнений аэрозольной кинетики позволяет одновременно решать и задачи оперативного анализа и задачи прогноза оптического состояния атмосферы в той степени, в какой оно обусловливается ее дисперсной компонентой. Изложение этих аспектов теории выходит за рамки настоящего исследования, и мы упоминаем здесь лишь для того, чтобы особо подчеркнуть информационные возможности оптического мониторинга атмосферы в решении физических и оптических задач.

2.2.3. Методики интерпретации данных лазерного зондирования аэрозолей нижней тропосферы

К сожалению, не представляется возможным непосредственно проиллюстрировать все, что говорилось, ввиду отсутствия соответствующих экспериментальных данных. Атмосферно-оптические исследования, материалы которых доступны в публикациях, в основном носят узконаправленный характер. Получаемые в них объемы оптической информации не позволяют применять к ним строгих методов интерпретации и в соответствии с этим не дают сколько-нибудь содержательной количественной информации о параметрических полях в атмосфере. Поэтому ниже рассмотрим вопросы интерпретации данных, полученных с помощью одночастотных лидаров при зондировании аэрозолей нижней тропосферы. Именно здесь аэрозольной компоненте присуща в большей мере изменчивость ее пространственно-временных характеристик. Однако, прежде чем обращаться к анализу и обсуждению экспериментального материала, необходимо сделать несколько замечаний относительно интерпретации локационных сигналов, получаемых при зондировании аэрозолей нижней тропосферы.

При одночастотном зондировании в нашем распоряжении имеется профиль нормированной амплитуды локационного сигнала $S(z)$ на рабочей длине волны лидара λ_0. В этой ситуации отсутствует возможность конструктивного использования операторов перехода $W^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}$ либо $W^{(\alpha)}_{\pi,\,ex}$ и, следовательно, исходное функциональное уравнение $S(z)=\beta_\pi \exp\{-2\tau(z)\}$ остается неопределенным относительно оптических характеристик. Следует сразу заметить, что не существует способа преодолеть эту принципиальную трудность одночастотного варианта зондирования. Слишком мало информации получаем в этом эксперименте, чтобы можно было привлечь к интерпретации априорную физическую информацию. Все существующие к настоящему времени методики интерпретации носят в силу этого обстоятельства качественный характер. Действительно, для реальной атмосферы нельзя задать локально (т. е. для каждой точки z по трассе зондирования) дополнительное функциональное соотношение между $\beta_\pi(z)$ и $\beta_{ex}(z)$. В двухчастотном варианте этого удавалось достичь за счет введения микроструктурных моделей и теории светорассеяния Ми. В случае одночастотного лидара подобной возможности нет. Вместе с тем практика атмосферно-оптических исследований требует разработки методик оценки оптического состояния атмосферы на основе использования простых оптических систем, каким, в частности, является одночастотный лидар. В связи с этим представляется целесообразным дать более или менее строгий анализ информационных возможностей одночастотных лидаров.

Будем считать искомой функцией распределение оптической толщины $\tau(z)$ по трассе зондирования в пределах пространственного интервала $Z=[Z_1,\,Z_2]$. Именно эта интегральная оптическая характеристика представляет наибольший практический интерес в задачах оптического мониторинга атмосферы. С другой стороны, определяя интегральную характеристику в условиях существенной недоопределенности одночастотного локационного уравнения, можно надеяться на относительно большую достоверность.

Удобно ввести в рассмотрение отношение $b(z)=\beta_\pi(z)/\beta_{ex}(z)$. Напомним, что в пределах данного раздела допускается осуществление зондирования в окне прозрачности, и, следовательно, поглощением излучения можно пренебречь. Поэтому в первом приближении $\beta_{ex}(z)\simeq\beta_{sc}(z)$. Задать априори в каждом эксперименте профиль величины $b(z)$ не представляется возможным, как уже об этом говорилось выше. К тому же следует учитывать, что распределение аэрозолей по высоте носит стратифицированный (разрывной) характер, который делает использование так называемых оптических аэрозольных моделей в исследовании пространственно-временной изменчивости методами лазерного зондирования малоэффективным. В связи с этим остается надеяться, что удастся как-то подобрать некоторое среднее значение $\bar{b}$ неизвестной функции $b(z)$ в пределах $[Z_1, Z_2]$, которое бы обеспечивало приемлемую надежность профиля $\tau(z)$, определяемого по измеренному профилю $S_\sigma(z)$. Необходимо подчеркнуть, что выбор $\bar{b}$ должен согласовываться при этом не только с априорной информацией о поведении характеристик $\beta_\pi(z)$ и $\beta_{ex}(z)$, но и с особенностями вычислительного алгоритма. Иными словами, выбор $\bar{b}$ должен зависеть от методики интерпретации локационных данных. Поясним эту мысль конкретными аналитическими построениями. Учитывая, что $\tau(z)$ есть первообразная от $\beta_{ex}(z)$, нетрудно построить следующее интегральное выражение:

$$\tau(z) = \tau(Z_1) + \int_{Z_1}^{z} b^{-1}(z') S(z') \exp\{2\tau(z')\} dz'. \tag{2.42}$$

Относительно $\tau(z)$ это не что иное, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода. В силу этого обстоятельства его численное решение относится к корректно поставленным задачам при замене $S(z)$ на σ-приближение $S_\sigma(z)$.

Следует заметить, что уравнение (2.42) предпочтительно использовать в тех случаях, когда $\tau(z)$ заметно меняется в пределах зондируемого слоя и величина $\exp\{-2\tau(z)\}$ существенно отлична от единицы. При малых значениях $\tau(Z_2)$ (скажем, менее 0,2—0,3) предпочтительна, в силу понятных причин, схема (2.17). С учетом этого обстоятельства уравнение локации в форме (2.42) мы связываем главным образом с задачами лазерной локации аэрозолей пограничного (смешанного) слоя атмосферы, для которого $Z_2 \leqslant \leqslant 3$ км. Решающий алгоритм в этом случае строится по следующей итерационной схеме:

$$\tau^{(p)}(z) = \tau(Z_1) + \int_{Z_1}^{z} b^{-1}(z') S_\sigma(z') \exp\{2\tau^{(p-1)}(z')\} dz', \tag{2.43}$$

которая применяется последовательно для всех z из $[Z_1, Z_2]$. Сопоставляя эту итерационную схему с теми, которые рассматривались ранее (например, (2.12)), ее следует квалифицировать как интегральный вариант уравнения переноса локационных сигналов в рассеивающей атмосфере. Если ранее фильтрация помех в схеме обращения осуществлялась с помощью операторов $W^{(\alpha)}$ и K_α^{-1}, то теперь стабилизация решений достигается за счет действия интегрального оператора на $S_\sigma(z)$ в итерационной схеме (2.43). Нетрудно показать, что схема (2.43) сходится, если выполняется условие

$$\int_{Z_1}^{Z_2} b^{-1}(z)\, S_\sigma(z)\, dz < \exp\{-\tau(Z_2)\}, \tag{2.44}$$

которое является необходимым и достаточным одновременно. Для выполнения неравенства (2.44) необходимы, во-первых, гарантии того, что уравнение (2.42) действительно применимо для рассматриваемой реализации $S_\sigma(z)$ в пределах $[Z_1, Z_2]$, а во-вторых, что профиль $b(z)$ задан надлежащим образом. В этом случае условие (2.44) может служить в некоторой степени показателем соответствия профиля $b(z)$ реализации $S_\sigma(z)$. Несколько большей определенности в интерпретации можно достичь, если считать известным второе граничное значение $\tau(Z_2)$. Тогда из (2.42) следует соотношение

$$\tau(Z_2) - \tau(Z_1) = \int_{Z_1}^{Z_2} b^{-1}(z)\, S_\sigma(z) \exp\{2\tau(z)\}\, dz. \tag{2.45}$$

Поскольку подынтегральное выражение положительно, можно воспользоваться теоремой о среднем и вынести неизвестную функцию $b(z)$ за знак интеграла, вводя значение $b(\xi)$, где ξ — некоторая точка в пределах зондируемого слоя. Если в качестве среднего значения $\bar{b}$ принять $b(\xi)$, то получим оценку (приближенную) для лидарного отношения

$$\bar{b} \approx \int_{Z_1}^{Z_2} S_\sigma(z) \exp\{2\tau(z)\}\, dz / \{\tau(Z_2) - \tau(Z_1)\}. \tag{2.46}$$

В соответствии с этим выражением среднее значение лидарного отношения зависит от профиля $\tau(z)$. Выражение (2.46) подсказывает конструктивный подход к оценке значений лидарного отношения для одночастотных лидаров на основе предварительных численных экспериментов. Не касаясь подробно этого направления возможных исследований, приведем еще одно полезное неравенство. Поскольку $\tau(z)$ нигде не убывает с ростом z от Z_1 до Z_2, то очевидна следующая оценка:

$$c \exp\{2\tau(Z_1)\} \leqslant \bar{b} \leqslant c \exp\{2\tau(Z_2)\}, \tag{2.47}$$

где постоянная $c = \int_{Z_1}^{Z_2} S(z)\, dz / \{\tau(Z_2) - \tau(Z_1)\}$.

Для того чтобы воспользоваться указанными оценками, необходимы значения $\tau(Z_1)$ и $\tau(Z_2)$. Следует иметь в виду, что рассмотренный выше способ выбора среднего $\bar{b}$ сам по себе никоим образом не гарантирует поточечной близости получаемых решений $\tau(z)$ к действительному профилю $\tau_0(z)$ внутри интервала $[Z_1, Z_2]$. По способу введения этой величины гарантируется лишь совпадение решений $\tau^{(p)}(z)$ с $\tau_0(z)$ на концах трассы Z_1 и Z_2. В целом методика интерпретации остается сугубо качественной. Конечно, можно надеяться, что последовательное сужение толщины зондируемого слоя будет приводить к большей достоверности результатов интерпретации. Для преодоления неопределенности решаемой задачи необходимо идти по пути увеличения измерительной информации, и альтернативы здесь не существует.

При использовании одночастотного лидара некоторые возможности в этом направлении открываются за счет осуществления одновременного зондирования по нескольким близлежащим направлениям. Подобный вариант получил название многоуглового зондирования. В этом подходе осуществляется последовательное измерение профилей $S(\mathbf{z}_\nu)$ по лучам $\mathbf{z}_\nu$ ($\nu=1, \ldots$), исходящим из одной точки (точки наблюдения). В результате можно интерпретировать совокупность локационных уравнений, каждое из которых соответствует одному из лучей (направлению зондирования). Чтобы из этих уравнений составить совместную систему и гарантировать практически приемлемые результаты, делается предположение о горизонтальной однородности оптических характеристик светорассеяния компонентами атмосферы. В итоге приходим к следующему параметрическому уравнению:

$$S(z, \gamma)=\beta_\pi(z)\exp\{-2\gamma\tau(z)\}, \tag{2.48}$$

где $\gamma=\sec\vartheta$ и ϑ — угол между рассматриваемым лучом и некоторым исходным направлением, соответствующим $\vartheta=0$ (обычно это вертикаль в точке расположения лидара). Условие горизонтальной однородности в аналитической форме записывается как $\partial\beta(z,\gamma)/\partial\gamma=0$ для β_π и β_{ex} одновременно. Подобное условие может иметь лишь локальный характер, т. е. быть справедливым в узкой области углов зондирования ϑ. Определенные ограничения при этом необходимо накладывать и на геометрическую толщину зондируемого слоя. Имея в своем распоряжении двухмерный массив оптической информации $\{S(z_k, \vartheta_\nu), k, \nu=1,\ldots\}$, можно рассчитывать на большую достоверность в построении искомого профиля $\tau(z)$, нежели это могло иметь место выше. Конечно, нужны гарантии того, что условие горизонтальной однородности выполняется в каждом конкретном случае. Если область изменения угла зондирования ϑ достаточно мала, то можно полагать, что неоднородность рассеивающих свойств невелика. С большей достоверностью это можно гарантировать для молекулярной компоненты рассеяния и с меньшей — для аэрозольной. К счастью, не составляет особого труда оценить, в какой мере в исходных локационных данных проявляет себя указанная неоднородность. Об этом подробно будет сказано ниже, а сейчас приведем основные расчетные соотношения теории многоуглового зондирования.

Для любого фиксированного z (вернее, слоя рассеивающей среды от z до $z+\Delta(z)$) уравнение (2.48) можно писать в следующей форме:

$$\beta_\pi\exp\{-2\gamma\tau\}=S_\sigma(\gamma). \tag{2.49}$$

Правая часть уравнения содержит ошибки эксперимента. Предположим, что для этого уравнения можно указать некоторые нулевые приближения $\beta_\pi^{(0)}$, $\tau^{(0)}$, а параметр γ (то же самое угол зондирования) пробегает ряд дискретных значений $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Обозначим через $S(\beta_\pi, \tau, \gamma)$ левую часть выражения (2.49). Прибегнув затем к разложению этой функции по переменным β_π и τ в ряд Тейлора в окрестности точки $(\beta_\pi^{(0)}, \tau^{(0)})$ и ограничившись линейными членами, можно построить следующую квадратичную форму:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[S_{\sigma j} - \left(\beta_\pi^{(0)} + \Delta_\beta^{(1)} - 2\gamma_j\beta_\pi^{(0)}\,\Delta_\tau^{(1)}\right)\exp\left\{-2\gamma_j\tau^{(0)}\right\}\right]^2 = \rho^2\left(\beta_\pi^{(1)},\ \tau^{(1)}\right), \tag{2.50}$$

где $\Delta_\beta^{(1)} = \beta_\pi^{(0)} - \beta_\pi^{(1)}$; $\Delta_\tau^{(1)} = \tau^{(0)} - \tau^{(1)}$. Величины $\beta_\pi^{(1)}$ и $\tau^{(1)}$ следует считать неизвестными. Их численные значения могут быть найдены путем последовательной минимизации параболы $\rho^2(\beta_\pi^{(1)}, \tau^{(1)})$. Шаг дискретизации $\Delta(z)$ по высоте должен быть достаточно малым, чтобы гарантировать малость Δ_τ и Δ_β для рассматриваемого слоя.

Нетрудно видеть, что в основу данной методики интерпретации данных многоуглового зондирования положен аппроксимационный подход, при котором измеренная функция $S_\sigma(\gamma)$ аппроксимируется параметрической моделью $S(\beta_\pi, \tau, \gamma)$. Роль параметров играют искомые величины β_π и τ. Аналитический вид аппроксимирующей функции $S(\beta_\pi, \tau, \gamma)$ строго соответствует предположению о горизонтальной однородности. Если это предположение не выполняется, то величина $\min \rho^2(\mathbf{S}_\sigma, \Delta_\beta^{(1)}, \Delta_\tau^{(1)})$, характеризующая ошибку аппроксимации, будет заметно превосходить ошибки измерений вектора $\mathbf{S}_\sigma = \{S_{\sigma j},\ j = 1, \ldots, n\}$. Тем самым в процессе решения обратной задачи теории многоуглового зондирования можно косвенно судить о приемлемости результатов.

Описанная методика интерпретации данных многоуглового зондирования, реализующая, по существу, метод наименьших квадратов, далеко не единственна. Не вдаваясь в детали, мы приведем еще одно аналитическое выражение, которое также может служить основой эффективной схемы интерпретации локационных данных. В частности, если считать неизвестной функцию $T(z) = \exp\{-2\tau(z)\}$, то из (2.49) следует простое выражение

$$\ln T(z) = \partial \ln S(z,\ \gamma)/\partial\gamma. \tag{2.51}$$

Смысл его вполне очевиден и состоит в следующем: если рассеивающая среда однородна в горизонтальном направлении, то логарифмическая производная от локационного сигнала по угловому параметру γ постоянна и пропорциональна квадрату функции пропускания $p^2(z) = T(z)$ для любой высоты z. Для большей достоверности соотношения (2.51) его следует рассматривать в узкой области углов, т. е. вблизи точек $\vartheta=0$. В этом случае (2.51) можно писать в виде предельного соотношения

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \ln S(z, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \ln T(z). \tag{2.52}$$

Для того чтобы можно было практически воспользоваться выражениями (2.51) и (2.52), необходимо в схему обработки экспериментальных данных вводить регуляризирующий оператор дифференцирования $D_{1\alpha}$, о котором уже шла речь выше. Заканчивая построение возможных методик интерпретации данных многоуглового зондирования, следует заметить, что в целом мы несущественно продвинулись в преодолении тех информационных неопределенностей, которые присущи одночастотным схемам лазерного зондирования атмосферы. Действительно, условие горизонтальной однородности выполняется лишь в том случае, если зондирование осуществляется по близким направлениям. Но если это так, то в силу наличия погрешностей измеренные профили $S_\sigma(z, \gamma)$ будут взаимозависимыми функциями и, следовательно, в совокупности малоинформативны. Последнее обстоятельство обычно проявляется в неустойчивости результатов обращения. Как показывает практика многоуглового лазерного зондирования, преодолеть указанное противоречие практически не удается.

Обратимся к работе [31], где зондирование осуществлялось на $\lambda=0{,}69$ мкм. Многоугловые измерения $S(z, \gamma)$ проводились для девяти углов в пределах $\gamma=\sec\vartheta\leqslant 5$. Отсчет углов ϑ велся от вертикали, а точность углового разрешения составляла около 0,1°. В качестве исходных данных, которые подвергались интерпретации с помощью уравнений (2.49), брались средние профили сигналов, вычисленные по десяти реализациям. Предварительное усреднение позволяло несколько ослабить влияние шумовой компоненты на результаты интерпретации. Следует заметить, что отношение сигнал-шум в локационных сигналах менялось от 25 до 2. Чем меньше оптическая толщина зондируемого слоя, тем меньше амплитуда принимаемого сигнала и тем больше указанное отношение. Наименьшее из указанных значений приходится на $\Delta(\tau) \leqslant 0{,}01$. Как показали измерения, значения коэффициента обратного аэрозольного рассеяния менялись в пределах от 0,05 до 0,15 км$^{-1}$ в нижней тропосфере. Вся процедура измерения средних $\bar{S}(z, \gamma)$ в экспериментах занимала не более 30—45 мин (подробно методику эксперимента см. в [31]).

Некоторые из наиболее характерных результатов исследования пространственно-временной изменчивости аэрозолей в нижней тропосфере представлены на рис. 2.4. Нормированные амплитуды локационных сигналов даны на рис. 2.4 *а* и соответствуют различным значениям параметра γ. Явно выделяется так называемый «смешанный» слой в пределах высот 3 км. Его существование обусловлено турбулентным перемешиванием воздушных масс. В пределах этого слоя предположение о горизонтальной однородности может быть принято с большими натяжками. Выше атмосфера в значительной степени более однородна. Здесь высотный ход профилей $S_\sigma(z,\gamma)$ в основном обусловлен ослаблением по трассе, т. е. зависит от члена $\exp\{-2\gamma\tau(z)\}$. Результат интерпретации экспериментального материала представлен на рис. 2.4 *б* в виде профиля коэффициента аэрозольного ослабления $\beta_{ex}(z)$.

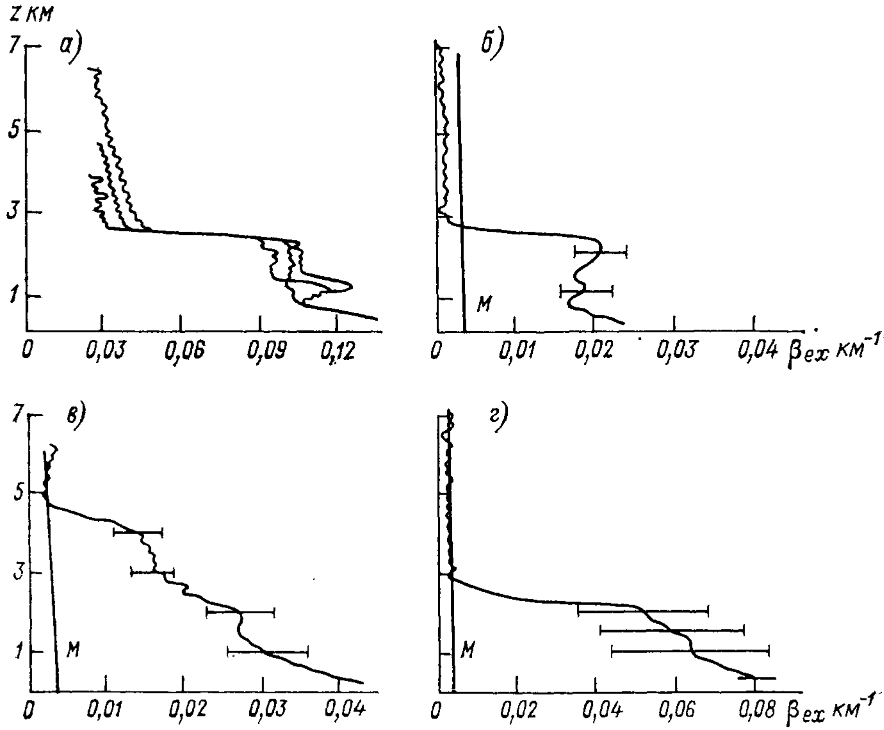

Рис. 2.4.

а) пример реализации профиля $S_\sigma(z, \gamma)$ для трех указанных значений γ; *б*) соответственно восстановленный профиль аэрозольного коэффициента ослабления; *в*, *г*) примеры обработки двух других реализаций $S_\sigma(z, \gamma)$ по данным [31] (M — $\beta_{sc}(z)$ для молекулярной компоненты рассеяния).

Молекулярное рассеяние (кривая M) оценивалось с помощью барометрической формулы по измерениям температуры и давления на поверхности.

Техника численной интерпретации в рассматриваемой работе несколько отличалась от тех вычислительных схем, которые предлагались выше. В частности, искомым распределением считался профиль коэффициента пропускания $p(z) = T^{1/2}(z)$, а лидарное отношение считалось постоянным по всей высоте зондирования. Подобное упрощение обратной задачи оправдано такими факторами, как значительное отношение сигнал-шум при малых τ и заметное возрастание горизонтальной неоднородности аэрозольных характеристик при повышенной замутненности атмосферы. Последнее обстоятельство иллюстрируется двумя кривыми $\beta_{ex}(z)$ (рис. 2.4 *в, г*). В первом случае значение τ возросло до 0,114 против 0,048 в предыдущем примере. Увеличение амплитуды локационного сигнала и соответствующее увеличение отношения сигнал-шум не привели к повышению надежности оценок профиля $\beta_{ex}(z)$. Это наглядно видно по размерам соответствующих доверительных интервалов (отрезки на рис. 2.4). Последний результат (рис. 2.4 *г*) получен в условиях еще большей замутненности пограничного слоя атмосферы. Лидарные измерения проводились непосредственно за прохождением сухого холодного фронта. Предположение о горизонтальной однородности не обеспечивает здесь приемлемой точности интерпретации оптических измерений.

В условиях значительной неопределенности решаемой обратной задачи естественно обратиться к оценке интегральных характеристик рассеивающей среды. Подобной характеристикой может служить общая оптическая толщина зондируемого слоя τ. В табл. 2.2 приведены значения этой величины, полученные двумя методами, а именно: по данным лазерного зондирования и по данным солнечного радиометра [31]. Во всех случаях, когда оптическая толщина $\tau \geqslant 0{,}035$, результаты измерений вполне согласуются друг с другом в пределах тех доверительных интервалов, которые указаны в табл. 2.2. При меньших оптических толщах лидарные измерения дают систематические завышения значений τ по сравнению с радиометром. Поскольку интерпретация носит здесь сугубо качественный характер, то нет особой необходимости проводить анализ причин указанного завышения (некоторые соображения на этот

Таблица 2.2

Значения полной оптической толщи атмосферы, измеренные лидаром и радиометром по данным [31]

Номер эксперимента	Радиометрические измерения	Лидарные измерения
1	0,171±0,023	0,180±0,032
2	0,163±0,010	0,132±0,021
3	0,104±0,015	0,107±0,015
4	0,093±0,033	0,111±0,014
5	0,081±0,008	0,068±0,018
6	0,071±0,012	0,066±0,028
7	0,061±0,013	0,058±0,013
8	0,057±0,010	0,061±0,010
9	0,056±0,014	0,067±0,019
10	0,043±0,002	0,037±0,009
11	0,038±0,002	0,047±0,019
12	0,034±0,005	0,051±0,019
13	0,022±0,003	0,041±0,014
14	0,012±0,002	0,043±0,017

счет приводят авторы рассматриваемой работы). На этом можно закончить изложение иллюстративных примеров по одночастотному лазерному зондированию аэрозолей нижней тропосферы и исследованию особенностей пространственно-временной изменчивости их оптических свойств.

2.3. Численные методы теории многочастотной лазерной локации дисперсных сред

Выше был дан самый общий анализ исходных систем функциональных уравнений метода многочастотного лазерного зондирования полидисперсных систем и указаны подходы к построению вычислительных схем обращения локационных данных. Однако разработка программных систем автоматизированной обработки данных для конкретных измерительных комплексов требует более тщательной алгоритмической проработки. В пределах данного параграфа будут изложены основные результаты, полученные авторами в этом направлении, и даны соответствующие рекомендации по их практическому применению в практике атмосферно-оптических исследований.

2.3.1. Аналитические модели для функций плотности распределения частиц по размерам в обратных задачах оптики дисперсных сред

Напомним, что метод линейных систем, основанный на алгебраизации интегральных представлений для оптических характеристик светорассеяния дисперсными средами, требует априорного задания аналитической модели искомой функции. Частично эти вопросы уже затрагивались выше, когда рассматривались обратные задачи светорассеяния в форме интеграла Стилтьеса (см. п. 1.4). Ниже мы будем исходить из представления оптических характеристик в форме интеграла Римана и считать неизвестной функцией плотность распределения геометрического сечения частиц по размерам в единичном объеме рассеивающей среды, т. е. распределение $s(r)$. При решении обратных задач оптики аэрозоля по данным оптического зондирования в спектральных интервалах хорошо зарекомендовала себя кусочно-квадратичная аппроксимация искомого непрерывного распределения $s_0(r)$. Результаты соответствующих исследований применительно к интерпретации данных по спектральной прозрачности и многочастотного лазерного зондирования подробно изложены в монографиях [6, 21], поэтому ниже ограничимся лишь краткими замечаниями к алгоритмической схеме обращения оптических данных.

В основу рассматриваемой аналитической модели положены следующие априорные соображения. Обычно информация о реальных спектрах размеров представляется в виде гистограмм, характеризующих распределение числа частиц полидисперсного ансамбля по интервалам покрытия Δ_l ($l=1, \ldots, m$) области возможных размеров $R=[R_1, R_2]$. Подобная гистограмма задается совокупностью чисел $\{\Delta_l(N), l=1, \ldots, m\}$ для покрытия $\{\Delta_l\}$. Следует иметь в виду, что прямыми методами микроструктурного анализа наиболее просто определить именно число частиц, попадающих в тот или иной интервал размеров. Что же касается оптических методов исследования микроструктуры, то в этом отношении они обладают большими возможностями. Действительно, в качестве решения обратной задачи светорассеяния в принципе может быть выбрано распределение любого интегрального параметра по размерам частиц. В частности, выше приводился пример распределения полного объема V частиц дисперсной среды по размерам. Выбор полного геометрического сечения S в качестве исходного параметра (то же самое полной меры ансамбля частиц в единичном рассеивающем объеме) удобен в том отношении, что его размерность совпадает с размерностью измеряемых оптических характеристик β. Однако, возвращаясь к указанной выше гистограмме распределения числа частиц N, заметим, что если спектр размеров $n(r)$ — кусочно-постоянная функция, то соответствующее ему распределение $s(r)=\pi r^2 n(r)$ можно считать кусочно-квадратичной функцией в области своего задания R. Соответствующую аппроксимационную модель ниже будем обозначать через $\tilde{s}(r, \mathbf{s})$. Аналитические построения этой модели и соответствующего суммационного аналога для интегрального уравнения могут быть выполнены в следующем порядке.

В интервале $[R_1, R_2]$ выбирается m внутренних точек $\{r_l, l=1, \ldots, m\}$ и строится m непересекающихся интервалов Δ_l, каждый длины $\Delta_l(r)=r_l''-r_l'$, где $r_l'=(r_l+r_{l-1})/2$, $r_l''=(r_{l+1}+r_l)/2$, $r_1'=(R_1+r_1)/2$ и $r_m''=(R_2+r_m)/2$. С узлами $\{r_l\}$ связывается система чисел $\{s_l\}$, которая рассматривается как компоненты вектора $\mathbf{s}$, впоследствии определяемого из решения алгебраизованного варианта соответствующей обратной задачи. Считается далее, что кусочно-квадратичное распределение $\tilde{s}(r, \mathbf{s})$ на каждом из интервалов $\Delta_l=(r_l', r_l'')$ совпадает с параболой вида

$$\tilde{s}_l(r)=s_{l-1}a_{1l}(r)+s_l a_{2l}(r)+s_{l+1}a_{3l}(r), \tag{2.53а}$$

где
$$a_{1l}(r)=\left[r_l r_{l+1}(r_{l+1}-r_l)-(r_{l+1}^2-r_l^2)r+(r_{l+1}-r_l)r^2\right]b_l^{-1};$$
$$a_{2l}(r)=\left[-r_{l-1}r_{l+1}(r_{l+1}-r_{l-1})+(r_{l+1}^2-r_{l-1}^2)r-\right.$$
$$\left.-(r_{l+1}-r_{l-1})r^2\right]b_l^{-1};$$
$$a_{3l}(r)=\left[r_l r_{l-1}(r_l-r_{l-1})-(r_l^2-r_{l-1}^2)r-(r_l-r_{l-1})r^2\right]b_l^{-1};$$
$$b_l=r_l r_{l+1}(r_{l+1}-r_l)-r_{l-1}r_{l+1}(r_{l+1}-r_{l-1})+$$
$$+r_{l-1}r_l(r_l-r_{l-1}). \tag{2.53б}$$

Вводя обозначение $A_{ijl}=\int\limits_{\Delta_l} K(r, \lambda_i)a_{jl}(r)dr$ $(j=1, 2, 3)$, элементы искомого матричного оператора K можно представить в следующем виде:

$$K_{il}=A_{i1, l+1}+A_{i2l}+A_{i3, l-1} \tag{2.54}$$

при условии, что $A_{i1,\,m+1}=A_{i11}=A_{i30}=0$. Таким образом, мы построили алгебраизованный вариант обратной задачи светорассеяния, а именно $K\mathbf{s}=\boldsymbol{\beta}$. Как и во всех предыдущих вариантах, $\mathbf{s}\in\Psi_m^+$. Однако в этой аналитической модели гарантировать положительность аппроксимационной модели $\tilde{s}(r,\mathbf{s})$ всюду в области R уже не представляется возможным. Положительность чисел $\{s_l,\ l=1,\ \ldots,\ m\}$ выступает лишь как необходимое условие положительности модели $\tilde{s}(r,\mathbf{s})$, но его явно недостаточно. В пределах данной работы не будем касаться подробно этих вопросов (ранее они рассматривались в работе [21]).

С точки зрения практики микроструктурного анализа вполне достаточно ограничиться той информацией о реальных спектрах размеров частиц, которая заключена в векторе $\mathbf{s}$. Резонно при обращении оптических данных величины s_l рассматривать как средние значения действительного распределения $s_0(r)$ в локальных интервалах покрытия Δ_l и в соответствии с этим перейти к величинам $\Delta_l(S)=s_l\Delta_l(r)$. Подобный переход оправдан тем обстоятельством, что в микроструктурном анализе фиксировать отсчеты искомых распределений в системе узловых точек не имеет смысла. Доминантой в этом анализе являются система $\{\Delta_l\}$ и соответствующая ее последовательность $\{\Delta_l(S),\ l=1,\ \ldots,\ m\}$. Этого правила мы будем придерживаться и в обратной задаче светорассеяния, что вновь нас приводит к уравнениям типа (1.110) и соответствующей алгоритмической схеме обращения аэрозольных оптических характеристик, описанной в п. 1.4. Естественно, можно не учитывать специфику микроструктурного анализа дисперсных сред и рассматривать аппроксимационную модель $\tilde{s}(r,\ \mathbf{s})$ как средство формальной алгебраизации интегральных уравнений. С этой точки зрения кусочно-квадратичная аппроксимация позволяет строить весьма эффективные квадратуры для полидисперсных интегралов с ядрами теории Ми.

Для иллюстрации этого факта в табл. 2.3 приведены ошибки квадратур, получающиеся при расчете спектрального хода коэффициента обратного рассеяния $\beta_\pi(\lambda)$. Верхняя строка соответствует ошибкам квадратуры, когда исходное распределение $s_0(r)$ является бимодальным с модами $r_{s1}=0{,}2$ и $r_{s2}=0{,}6$ мкм; нижняя строка соответствует более простому распределению, а именно унимодальному с $r_s=0{,}2$ мкм. Численный анализ показывает, что если погрешности оптических измерений не ниже 5 %, то вполне достаточно органичить размерность вектора решения условием $7\leqslant m\leqslant 9$, если использовать данные квадратурные формулы. Выбранные для расчетов длины волн связаны с задачами лазерного зондирования атмосферных аэрозолей с использованием наиболее распространенных оптических генераторов.

Теперь рассмотрим несколько иной подход к конструированию модельного (рабочего) распределения. Если в первом случае каждая компонента $s_l(r)$, из которых составлялась аналитическая модель $\tilde{s}(r,\mathbf{s})$, была локализована в пределах своего подынтервала

Таблица 2.3

Ошибки квадратурных формул (2.52)—(2.54) при вычислении полидисперсных интегралов $\beta_{\pi}(\lambda)$ при различных размерностях вектора s (проценты)

m	λ			
	0,345	0,53	0,69	1,06
3	19,0 17,0	45,0 10,0	51,0 0,7	44,0 2,0
7	1,6 0,9	0,7 0,6	2,4 0,3	3,3 4,0
9	0,03 0,4	1,5 0,5	0,4 0,2	0,3 0,6
15	0,2 0,1	0,01 0,02	0,6 0,1	0,9 0,3

размеров Δ_l, то теперь составляющие модели будем определять во всей области возможных размеров R. Подобной моделью может служить следующая линейная форма:

$$s(r,\ \mathbf{s}) = \sum_{l=1}^{m} s_l g_l(r), \quad r \in R. \tag{2.55}$$

Совокупность функций $\{g_l(r)\}$ иногда называют базисной системой функции. Основное требование, которое к ним предъявляется, это условие взаимной линейной независимости. Выбор базисной системы функций может определяться самыми различными условиями. По всей видимости, одним из распространенных способов выбора подходящей совокупности является построение системы собственных функций оператора K^*K, о котором выше уже шла речь. Хотя эта система и является в некотором смысле оптимальной среди возможных других систем, ее численное построение весьма сложно и практически не всегда оправдано. В связи с этим ниже в качестве модельного распределения $s(r, \mathbf{s})$ будем выбирать многочлены Бернштейна, которые во многих задачах конструктивной теории функций являются эффективным инструментом аналитического исследования [17]. Приложение этого аппарата к решению обратных задач светорассеяния дисперсными средами ранее было дано в работе [2]. В этом подходе каждой функции, в том числе и искомому распределению $s(r)$, где $r \in [R_1, R_2]$, ставится в соответствие многочлен m-й степени вида

$$b_m[s,\ r] = \sum_{k=0}^{m} s\left(R_1 + k\Delta(r)\right) C_m^k \left(r - R_1\right)^k \left(R_2 - r\right)^{m-k} / \left(R_2 - R_1\right)^m, \tag{2.56}$$

где C_m^k — полиномиальные коэффициенты.

Поскольку функция $s(r)$ в правой части (2.56) представлена системой равноотстоящих отсчетов $s_k = s(r = r_k)$, то вместо функционала $b_m[s, r]$ можно писать $b_m(r, \mathbf{s})$, понимая под этим, как и ранее, функцию $s(r, s_1, \ldots s_m)$. Выражение, стоящее справа от s_k, будем обозначать через $p_{mk}(r)$. При $k=1, \ldots, m$ $p_{mk}(r)$ образуют систему базисных функций в рассматриваемом подходе к конструированию аппроксимационной модели. При $m \to \infty$ $b_m[s, r]$ сходится равномерно в интервале R к функции $s(r)$. В этом смысле и понимается утверждение, что каждой функции соответствует единственный многочлен Бернштейна. Для тех задач, которые мы здесь рассматриваем, важным является обратное утверждение, а именно: каждому вектору $\mathbf{s}$ через $b_m(r, \mathbf{s})$ соответствует единственное распределение $s(r)$. Кстати, в предыдущем примере связь модели $\tilde{s}(r, \mathbf{s})$ с вектором $\mathbf{s}$ не была столь однозначной, как в данном случае. В этом отношении $b_m(r, \mathbf{s})$ является вполне корректной аналитической моделью. В частности, из положительности чисел s_l следует положительность $b_m(r, \mathbf{s})$, а значит, и распределения $s(r)$, к которому сходятся указанные многочлены при возрастании степени m.

Многочлены Бернштейна обладают и рядом других замечательных свойств, которых будем касаться ниже при построении на их основе алгоритмов обращения оптических данных. Сейчас приведем два важных аналитических свойства аппроксимационной модели $b_m(r, \mathbf{s})$. Во-первых, известно [16], что если функция, скажем $s(r)$, имеет в области своего определения R ограниченную производную, то производная $b'_m(r, \mathbf{s})$ равномерно сходится к производной $s'(r)$ при $m \to \infty$. Следует заметить, что подобным свойством обладает редкий аппарат в теории приближения функции. Во-вторых, для ограниченности $b_m(r, \mathbf{s})$ вполне достаточно ограниченности компонент искомого вектора $\mathbf{s}$, т. е. чисел s_k ($k=1, \ldots, m$). Эти свойства многочленов $b_m(r, \mathbf{s})$ делают их в какой-то мере подобными простым параметрическим моделям, которые используются широко при численном обращении оптических данных. Однако здесь мы имеем дело с более эффективным вычислительным методом, а именно методом линейных систем. На этом ограничимся рассмотрением аналитических свойств аппроксимационной модели $b_m(r, \mathbf{s})$ для искомого распределения $s(r)$ и вернемся к обратным задачам светорассеяния.

В соответствии с (2.56) имеем

$$(Ks)(\lambda) = (Kb_m)(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} \overline{K}_l(\lambda)\, s_l, \qquad (2.57а)$$

где теперь

$$\overline{K}_l(\lambda) = \int_R K(r, \lambda)\, p_{ml}(r)\, dr. \qquad (2.57б)$$

Когда λ пробегает совокупность значений $\{\lambda_i, i=1, \ldots, n\}$, то (2.57б) определяет матрицу $\{\overline{K}_{il}\}$ и, следовательно, алгебраизованный аналог обратной задачи светорассеяния, а именно:

$$K\mathbf{s}=\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta}\in B_n, \quad \mathbf{s}\in\Psi_m. \tag{2.58}$$

Численное обращение этой модели может быть выполнено с помощью описанного ранее алгоритма. Как и в первом случае, вводим систему чисел $\Delta_l(S)=s_l\Delta_l(r)$ (то же самое вектор $\mathbf{\Delta}_S$) и используем граничные условия $s(R_1)=s_{l=0}=0$ и $s(R_2)=s_m=0$. Последние два условия делают поведение аппроксимирующей модели $b_m(r, \mathbf{s})$ в окрестности концевых точек более регулярным.

В связи с изложенным выше алгоритмом необходимо сделать еще одно замечание принципиального характера. Напомним, что аналитические модели $b_m(r, \mathbf{s})$, с помощью которых отыскиваются приближения для искомых распределений $s_0(r)$, однозначно определяются векторами $\mathbf{s}$. Поэтому нет особой необходимости доказывать, что если вектор $\mathbf{s}$ удовлетворяет условию $\|\mathbf{s}\|_{l2}<M_s$, где M_s — некоторая константа, то соответствующая ему функция $b_m(r, \mathbf{s})$ будет ограничена по норме в L_2. Более того, если имеем последовательность векторов $\{\mathbf{s}_j, j=1, \ldots\}$ из Ψ_m, то соответствующая ей последовательность распределений $b_{mj}(r)=b_m(r, \mathbf{s}_j)$ будет принадлежать компактному множеству непрерывных функций. Последнее утверждение следует из того обстоятельства, что ограниченность нормы $b_{mj}(r)$ в метрике L_2 влечет ограниченность и нормы производной $b'_{mj}(r)$. Таким образом, справедливо очень важное утверждение: нормальные решения системы (2.58) в векторном пространстве $\Psi_m=\{s_l\geqslant 0, \|\mathbf{s}\|\leqslant M_s\}$ гарантируют принадлежность приближенных решений исходного интегрального уравнения классу корректности, т. е. компакту в C.

В заключение приведем несколько примеров численного обращения уравнения (2.58) с ядром $K_{ex}(\lambda, r)$. На рис. 2.5 иллюстрируется влияние ошибок измерения σ на точность восстановления функции плотности $s(r)$ из обращения спектрального хода $\beta_{ex}(\lambda)$. Исходные данные здесь те же, что и в примерах, которые рассматривались в п. 1.5 (см. рис. 1.4). Нетрудно видеть, что ошибки восстановления несущественно превышают ошибки измерения, и следовательно, в нашем распоряжении находится вполне эффективный метод численного обращения экспериментальных данных. Вместе с тем интересно заметить, что рассматриваемый здесь метод обращения векторов β_σ отличается в некоторых отношениях от других вариантов, и в частности, от тех, которые уже описывались ранее.

Прежде всего обращает на себя внимание бóльшая устойчивость решений системы (2.58) относительно возмущений в правой части. Получаемые решения являются более гладкими функциями при прочих равных условиях. Это объясняется тем очевидным обстоятельством, что теперь компоненты $s_l p_{ml}(r)$ искомого распределения суть гладкие функции и заданы на всем интервале R. При использовании, например, такой модели, как $\bar{y}(r, \mathbf{s})$, составляющие

$\bar{y}_l(r)$ были локализованы в узких интервалах Δ_l, и следовательно, в рамках этой модели можно добиться большего разрешения в микроструктурном анализе зондируемой дисперсной среды. Но для того, чтобы реализовать эти информационные возможности, необходима высокая точность оптических измерений. «Качество» исходной информации должно предопределять выбор используе-

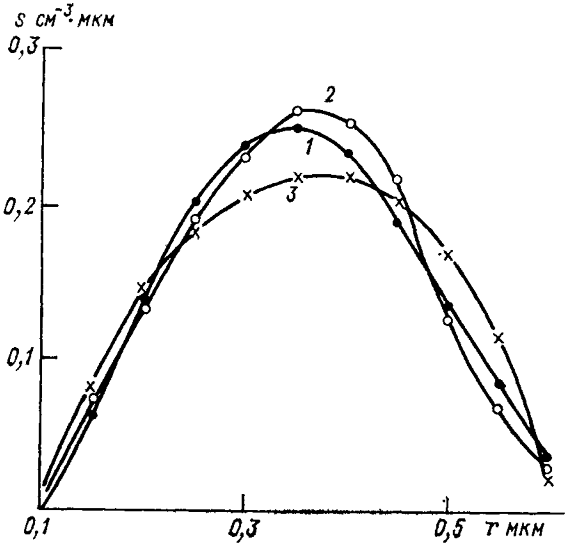

Рис. 2.5. Примеры численного обращения $\beta_{ex,\sigma}$ с использованием рабочей модели (2.56).

1) исходное распределение $s_0(r)$ (дымка H [4]); 2) $\sigma \leqslant 0{,}1$ и 3) $\sigma \leqslant 0{,}2$.

мого метода обращения. В этом отношении модель $b_m(r, s)$ эффективна при обращении оптических данных, известных с погрешностями 10—15 %. Именно эти значения величины σ и выбраны в численных примера, представленных на рис. 2.2 *б*.

Второй особенностью матричного оператора K в (2.58) является его относительно большая зависимость от границ интервала R. Поскольку для аэрозольных систем, как правило, $R_1 \ll R_2$, то вполне достаточно рассмотреть влияние выбора R_2 на решение обратной задачи светорассеяния. Соответствующий пример представлен на рис. 2.6. Несоответствие величины R_2 действительному значению $R_{2,0}$ приводит к явному «искажению» получаемых решений. Соответствующий итерационный процесс в вычислительной схеме обращения сходится очень медленно, и предельное значение невязки $\rho(Ks, \beta_\sigma)$ заметно превышает величину $\sigma \, \| \beta_\sigma \|$ (рис. 2.7). Это обстоятельство может быть использовано для корректировки значений R_2 в процессе обращения экспериментальных данных. Описанные выше две аппроксимационные модели позволяют

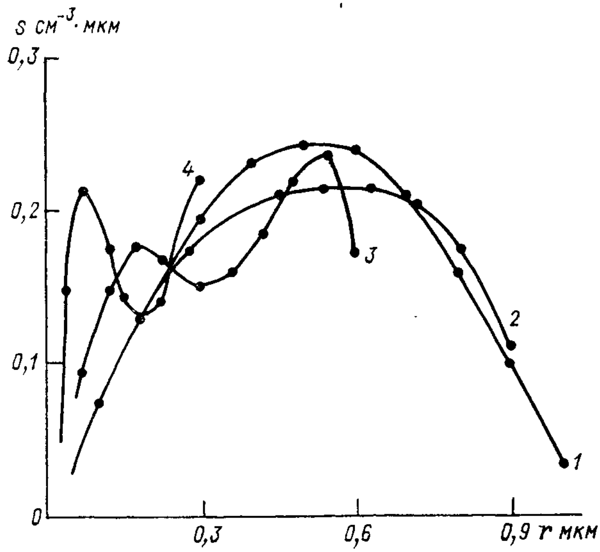

Рис. 2.6. Зависимость решений уравнения (2.58) от выбора правой границы R_2 области возможных размеров частиц.

1) решение при $R_2 = R_{2,0} = 1$ мкм; *2*) $R_2 = 0{,}9$; *3*) $R_2 = 0{,}6$ и *4*) $R_2 = 0{,}3$ мкм.

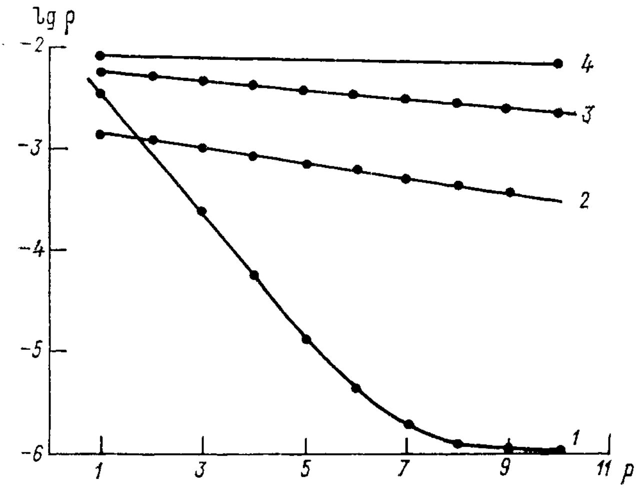

Рис. 2.7. Влияние выбора R_2 на величину невязки $\rho(GS^{(p)}, \beta_{ex})$ и скорость сходимости минимизирующей последовательности в схеме (1.115).

Нумерация кривых соответствует примерам на рис. 2.6.

строить исходные матричные операторы K в схемах численного обращения векторов β и, следовательно, численно находить операторы перехода $\overline{W}$ и восстановления V в схемах интерпретации оптических данных.

2.3.2. Пример численного исследования свойств основных операторов метода

В пределах настоящего раздела приведем результаты численного исследования преобразования $\beta_\pi \to \beta_{ex}$ применительно к задачам многочастотной локации атмосферных дымок приземного слоя. Указанное преобразование в основной итерационной схеме (2.5) осуществляется оператором $W^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}$. В качестве рабочих длин волн лидара будем использовать первую и вторую гармоники ОКГ на стекле с неодимом и рубинового генератора. Необходимость численного анализа информационных возможностей трех- и четырехчастотных лидаров с указанными генераторами обусловлена их практическим применением для изучения естественных (фоновых) аэрозолей, и в частности как средства дистанционного контроля уровня дисперсных загрязнений.

В приводимых ниже численных расчетах полагалось, что область возможных размеров частиц охватывает интервал [0,05; 3 мкм]. Этого вполне достаточно для охвата эффективных размеров аэрозольных частиц в приземном слое атмосферы. В соответствии с имеющимися данными о показателе преломления вещества частиц [10] можно полагать, что величина $\bar{m}' = \mathrm{Re}(\bar{m})$ ограничена интервалом (1,46; 1,54) и мнимая часть $\bar{m}'' = \mathrm{Im}(\bar{m})$ — интервалом (0; 0,005). Правда, нужно заметить, что для аэрозолей в условиях промышленного центра, когда нельзя пренебречь вкладом дисперсных загрязнений, заметно поглощающих излучение оптического диапазона, значение мнимой части $\bar{m}''$ возрастает до 0,02—0,04.

В табл. 2.4 приведены элементы исходных матриц $\{K_{\pi il}\}$ и $\{K_{ex,\,il}\}$ для трехволнового лидара. Они соответствуют матричным преобразованиям $K_\pi \mathrm{s} = \beta_\pi$, $K_{ex}\mathrm{s} = \beta_{ex}$. В расчетах использовалась описанная выше модель $\tilde{s}(r, \mathrm{s})$, которая хорошо себя зарекомендовала в схемах интерпретации данных многочастотного лазерного зондирования аэрозолей нижней тропосферы. Размерность вектора s выбрана равной десяти, что гарантирует ошибку в квадратурах (2.54) не более 1 % для двух- и трехмодальных распределений $s(r)$.

В соответствии с расчетными соотношениями (2.2) нетрудно построить теперь операторы типа W, связывающие векторы β_π и β_{ex}. Подобный пример представлен в табл. 2.5. Ясно, что элементы матрицы $W^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}$, которые в пределах настоящего раздела будем обозначать просто через ω_{ij} (i, $j = 1, 2, 3$), являются функциями параметров α и $\bar{m}$. В представленной таблице можно проследить влияние значений параметра регуляризации α на харак-

Таблица 2.4

Элементы исходных матриц при обращении данных трехчастотного зондирования ($\lambda = 0{,}53$; $0{,}69$; $1{,}06$ мкм). Показатель преломления $\bar{m} = 1{,}5-0i$, $R = [0{,}05;\ 3$ мкм$]$, $\Delta(r) = 0{,}123$ мкм

Матрица	i	l = 1	2	3	4	5
$K_{\pi,il}$	1	0,6751	3,0337	4,4774	2,3813	0,6596
	2	0,3857	1,7436	3,8283	4,4591	2,7957
	3	0,2132	0,6314	1,6402	3,0176	4,2794
$K_{ex,il}$	1	3,2317	2,6358	2,5038	2,3061	2,3901
	2	2,4968	3,7623	1,9666	2,6820	2,4356
	3	1,0711	3,6538	3,9200	2,3843	1,8727

Матрица	i	l = 6	7	8	9	10
$K_{\pi,il}$	1	1,1892	2,4539	2,8542	2,5056	2,3050
	2	1,0671	0,5423	1,2988	2,5691	2,7836
	3	4,6131	3,5405	2,4279	1,2445	0,6349
$K_{ex,il}$	1	2,2031	2,3259	2,1527	2,2860	2,0355
	2	2,1169	2,5617	2,0799	2,3223	2,2112
	3	2,6497	2,8606	2,2031	2,0014	2,3615

теристики матрицы $\{\omega_{ij}\}$. В качестве последних выбраны числа $|\det\{\omega_{ij}\}|$, $\max\limits_{i}\sum\limits_{i=1}^{3}\omega_{ij}$, $\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{3}\omega_{ij}$ и $\sum\limits_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}^2$. Дело в том, что формально дать однозначное определение нормы матричного оператора не представляется возможным [1], поэтому в зависимости от тех или иных требований, сопутствующих рассматриваемой задаче, в качестве нормы $\|W\|$ может быть выбрано любое из последних трех чисел. Напомним, что знание этих норм необходимо для гарантии сходимости итерационных процессов типа (2.12).

Из табл. 2.5 видно, что значения норм оператора $\|W^{(\alpha)}_{ex,\pi}\|$ отличаются несущественно друг от друга и не превышают двух при любом способе их определения. Значения параметра α, указанные в табл. 2.5, выбирались в соответствии с известным соотношением $\alpha \simeq \eta\sigma^2$, где $\eta \geqslant 1$ — доверительный коэффициент, а σ характеризует погрешность измерений обращаемых данных. При численном анализе свойств оператора $W^{(\alpha)}_{ex,\pi}$ следует иметь в виду одно обстоятельство. Компоненты вектора β_{ex}, которые восстанавливаются в схеме интерпретации локационных данных по вектору β_π,

Элементы матрицы $\widehat{W}^{(\alpha)}_{ex,\pi}$ по данным табл. 2.4 при различных значениях параметра регуляризации

α	Матрица $\{\omega_{ij}\}$			$\vert \det \{\omega_{ij}\} \vert$	Норма оператора
$0{,}3 \cdot 10^{-4}$	0,6337	0,2574	0,1071	$0{,}7427 \cdot 10^{-3}$	1,116
	0,6700	0,3131	$0{,}5440 \cdot 10^{-1}$		2,033
	0,7291	0,3080	$0{,}7848 \cdot 10^{-1}$		2,289
$0{,}4 \cdot 10^{-4}$	0,6387	0,2118	0,1500	$0{,}5489 \cdot 10^{-3}$	1,115
	0,6758	0,2507	0,1145		2,030
	0,7154	0,2941	0,1057		1,272
$0{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,6277	0,2029	0,1706	$0{,}7945 \cdot 10^{-3}$	1,114
	0,6634	0,2348	0,1428		1,982
	0,6968	0,2959	0,1214		1,252
$0{,}6 \cdot 10^{-4}$	0,6142	0,2024	0,1819	$0{,}8201 \cdot 10^{-3}$	1,11
	0,6481	0,2304	0,1587		1,942
	0,6791	0,2994	0,1315		1,232
$0{,}2 \cdot 10^{-3}$	0,5022	0,2759	0,2167	$0{,}1842 \cdot 10^{-3}$	1,098
	0,5224	0,3005	0,2079		1,575
	0,5493	0,3646	0,1837		1,118
$0{,}7 \cdot 10^{-3}$	0,3792	0,3928	0,2209	$0{,}2421 \cdot 10^{-4}$	1,091
	0,3916	0,4194	0,2169		1,283
	0,4121	0,4703	0,2089		1,076

суть положительные числа. Наиболее простым способом гарантировать положительность $\beta_{ex,\,i}$ можно, если выбрать положительными все элементы матрицы $\{\omega_{ij}\}$ в процессе ее численной генерации. Как показывает анализ, отрицательные элементы появляются лишь при слишком малых значениях параметра регуляризации. По этим причинам значения α в табл. 2.5 ограничены $\alpha = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$. В частности, при $\alpha = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ имеем матрицу

$$\{\omega_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 0{,}4757 & 0{,}5580 & -0{,}5772 \cdot 10^{-1} \\ 0{,}4917 & 0{,}6756 & -1{,}455 \cdot 10^{-1} \\ 0{,}6629 & 0{,}4551 & -0{,}1319 \cdot 10^{-1} \end{Bmatrix}.$$

Конечно, появление отрицательных элементов в матрице $\{\omega_{ij}\}$ не означает, что некоторые из компонент $\beta_{ex,\,i}$ обязательно будут отрицательными, тем не менее подобной ситуации исключить уже нельзя. Возможно, с точки зрения строгой теории обращения подобные обстоятельства покажутся и незначительными, однако в практическом отношении их учет важен. Действительно, введение условия $\omega_{ij} > 0$ открывает возможность дополнительной (внутренней) коррекции вычислительного процесса обращения оптических данных. Следует также иметь в виду, что удовлетворить указанному условию можно и чисто внешним путем, а именно увеличив объем измерительной информации. В рассматриваемом примере этого можно достичь за счет введения четвертой рабочей длины волны лидара, скажем $\lambda_4=0{,}345$ мкм (второй гармоники рубинового генератора).

Как показывает численный анализ, появление мнимой части $\bar{m}''$ в расчетах приводит к заметному ухудшению свойств матрицы

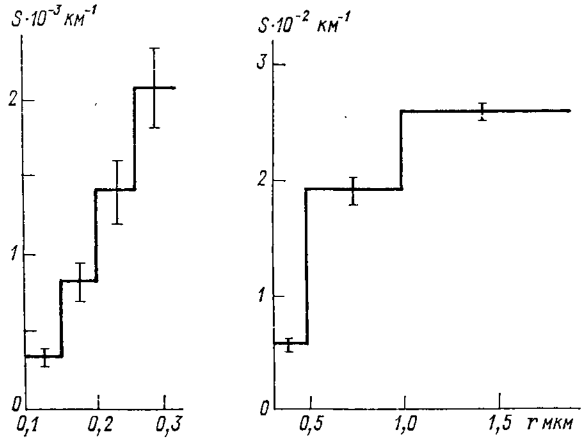

Рис. 2.8. Интегральное распределение $\bar{S}(r)$, полученное усреднением решений $S(r)$ системы локационных уравнений (2.1) при различном характере возмущений в векторах $\mathbf{P}_\sigma=\{P_{i\sigma},\ i=1,\ 2,\ 3\}$ на уровне $\sigma=0{,}1$.

$\{\omega_{ij}\}$ (подробно этот анализ дан в работе [12]). Преобразование $\beta_\pi \rightarrow \beta_{ex}$ становится менее обусловленным, что проявляется, прежде всего, в нарушении условия положительности компонент второго вектора. Это прямое следствие резкого снижения информативности локационных данных при возрастании поглощения зондируемых дисперсных сред.

Теперь дадим краткую характеристику возможностей трехчастотного лидара в определении спектра размеров частиц зондируемого аэрозольного слоя. На рис. 2.8 приведено интегральное распределение $S(r)$, полученное в результате усреднения отдельных решений (то же самое векторов $\mathbf{S}$) обратной задачи (2.6) при наложении на исходный вектор $\mathbf{P}=\{P_i,\ i=1,\ 2,\ 3\}$ различных по характеру возмущений. В качестве последних выбирались систематические смещения, при которых $P_{\sigma i}=P_{0i}\ (1\pm\sigma)$, и «осциллирующие», когда $P_{\sigma i}=P_{0i}[1\pm(-1)^i\sigma]$. Предварительный численный анализ показывает, что подобное моделирование влияния «помех» на точность решения обратных задач рассматриваемого типа дает вполне состоятельные оценки для тех ошибок, которые могут быть обусловлены реальными помехами в экспериментальных данных. Разброс получаемых решений при $\sigma=0{,}1$ указан отрезками на рис. 2.8 для каждой фракции частиц. Решение осуществлялось в интервале возможных размеров (0,05; 2 мкм). Регулярность решений $S(r)$ вблизи границ R_1 и R_2 обусловлена введением в схему обращения граничных условий $S(R_1)=0$ и $S(R_2)=S$ (то же самое $q(R_1)=0$, $q(R_2)=1$). Корректное определение интегрального распределения $S(r)$ на основе рабочей модели $\tilde{s}(r, \mathrm{s})$ позволяет найти интегральное распределение $N(r)$. Соответствующие результаты представлены в табл. 2.6. Надежность микроструктурного анализа существенно повышается особенно в области малых размеров, при использовании дополнительной длины волны $\lambda_4=0{,}345$ мкм (вторая гармоника рубинового генератора). Более подробно методика исследования аэрозолей нижней тропосферы с использованием многочастотных лидаров изложена в монографии авторов [6].

В заключение обратим внимание на одно важное в практическом отношении обстоятельство. Важным свойством оператора $W^{(\alpha)}_{ex,\pi}$, определяющим в первую очередь эффективность преобразования $\beta_\pi \to \beta_{ex}$, является, конечно, его устойчивость относительно возмущений показателя преломления $\bar{m}$. Если в нашем распоряжении имеется экспериментальный вектор $\boldsymbol{\beta}_{\pi\sigma}$, то эффективность прогноза значений $\beta_{ex,i}$ будет одной, а если оператор $W^{(\alpha)}_{ex,\pi}$ используется в итерационной схеме (2.12), то уже другой, причем, как правило, несколько большей. Это объясняется тем обстоятельством, что локационный сигнал $P_{\sigma i}$ зависит от обеих оптических характеристик $\beta_{\pi i}$ и $\beta_{ex,i}$, и поэтому частично информация об искомом векторе $\boldsymbol{\beta}_{ex}$ уже содержится в $\mathbf{P}_\sigma$. Использовать это обстоятельство в схеме обращения можно за счет некоторой коррекции общей невязки в итерационной схеме (2.12) по параметру α. Подробнее о методах коррекции результатов обращения по показателю преломления будет говориться ниже, а сейчас лишь заметим, что именно этот прием обеспечил стабильность результатов по микроструктурному анализу в рассмотренном выше примере.

2.3.3. Численные методы оценки показателя преломления вещества частиц из оптических характеристик

Ошибки, связанные с априорными оценками значений величины $\bar{m}$, могут заметно влиять на точность обращения аэрозольных оптических характеристик. В качестве примера на рис. 2.9 приведены два распределения $s_\alpha(r)$, полученные при обращении одних и тех же локационных данных $\{P_{\sigma i}, i=1, 2, 3\}$ для двух значений $\mathrm{Re}(\bar{m})$. В эксперименте осуществлялось трехчастотное зондирование на длинах волн 0,53; 0,69; 1,06 мкм локального объема атмосферы, удаленного от лидара на 360 м. Подробно эксперимент описан в работе авторов [6]. Кривые на этом рисунке дают наглядное представление о характере влияния вариаций $\Delta\bar{m}$ на получаемые решения обратной задачи светорассеяния. Если исследуе-

Таблица 2.6

Значения функции $N(r)$, получаемые при обращении данных трех- (слева) и четырехчастотного (справа) лазерного зондирования аэрозольного слоя при различных „возмущениях" в локационных сигналах (рабочие длины волн лидара 0,53; 0,69 и 1,06 мкм, во втором случае добавляется 0,345 мкм)

Длина волны, мкм	Точное распре-деление	Осциллирующее возмущение				Систематическое смещение			
		$P_{\sigma i}=P_{0i}\,[1+0{,}1\,(-1)^i]$		$P_{\sigma i}=P_{0i}\,[1-0{,}1\,(-1)^i]$		$P_{\sigma i}=P_{0i}\,[1-0{,}1]$		$P_{\sigma i}=P_{0i}\,[1+0{,}1]$	
0,05—0,10	72	42	57	43	48	51	75	42	62
0,10—0,15	58	36	48	37	41	44	62	37	50
0,15—0,2	45	30	40	31	34	40	49	31	40
0,2—0,25	36	26	33	27	29	31	39	26	32
0,25—0,30	29	22	28	24	24	27	32	22	26
0,30—0,50	12	12	14	14	13	15	15	12	12
0,50—1,00	2,6	2,5	2,8	2,8	2,4	2,8	2,8	2,2	2,3
1,0—1,5	1,2	1,5	0,7	0,6	1,4	1,4	1,2	1,1	1,0
1,5—2,0	0,5	0,7	0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,4	0,5

мый спектр размеров локализован в узкой области размеров (например, $R_2 \leqslant 0{,}8$ мкм), то изменения $\bar{m}$ приводят к систематическим смещениям решений $s_\alpha(r)$. При $R_2=2\ldots3$ мкм значения $\bar{m}$ влияют на вид получаемых решений, т. е. полностью его перестраивают. Поскольку неизвестная величина $\bar{m}$ есть оптическая характеристика, то в принципе ее можно попытаться найти из данных по светорассеянию зондируемой дисперсной среды, как это, например, делалось в теории поляризационного зондирования.

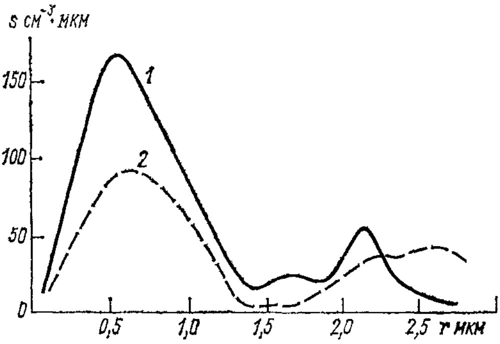

Рис. 2.9. Распределения $s_\alpha(r)$, полученные при обращении экспериментальных данных трехчастотного зондирования аэрозольного слоя на высоте $z=360$ м [6] при различных значениях показателя преломления.

1) $\bar{m}=1{,}50$; 2) $\bar{m}=1{,}54$.

В пределах данного раздела кратко изложим методы численного определения показателя преломления аэрозольного вещества применительно к лазерной локации аэрозолей нижней тропосферы.

Как и ранее, будем полагать, что внутри зондируемого слоя от Z_1 до Z_2 показатель преломления аэрозольного вещества $\bar{m}$ не меняется, и зависимость $\beta_\pi(z)$ и $\beta_{ex}(z)$ от z внутри слоя обусловлена локальными вариациями спектра размеров. В этой ситуации определение $\bar{m}$ для любой длины волны λ можно осуществить на основе сопутствующих измерений спектральной оптической толщи $\tau(\lambda)$ (то же самое среднего для слоя значения $\bar{\beta}_{ex}(\lambda)$). В практике атмосферно-оптических исследований подобные «сопутствующие» измерения осуществляются обычно с помощью спектрального солнечного радиометра [30]. Соответствующая математическая задача формулируется в виде системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} S[\bar{m}_i,\ s_\alpha,\ \lambda_i,\ z_k]=S_{ik\sigma}; \\ B_{ex}[\bar{m}_i,\ s_\alpha,\ \lambda_i]=\bar{\beta}_{ex,\,i\sigma}, \\ i=1,\ \ldots,\ n;\ \ k=1,\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (2.59)$$

Первая система n уравнений (k фиксировано) соответствует n уравнениям лазерной локации. Особо лишь подчеркнута зависимость локационных сигналов от показателя $\bar{m}_i$ и спектра размеров s_α. Для большей ясности напомним полидисперсные интегралы (функционалы): $\beta_\pi[\bar{m}_i, s_\alpha, \lambda_i]$ и $\beta_{ex}[\bar{m}_i, s_\alpha, \lambda_i]$. Если в этой системе положить известными значения $\bar{m}_i=\bar{m}(\lambda_i)$, то она будет вполне определена относительно распределения $s_\alpha(r)$, как это было показано выше, в п. 2.1. Подстрочный индекс «α» указывает на использование регуляризирующих операторов типа $K_{\pi\alpha}^{-1}$ для определения этих распределений. Вторая система уравнений связана с методом спектральной прозрачности. Функционал B_{ex} суть полидисперсный интеграл с ядрами $K_{ex}[\overline{m}(\lambda), r, \lambda]$ и распределением s_α.

Система (2.59) может решаться методом последовательных приближений. Вначале задается некоторое приближенное значение показателя преломления $\overline{m}^{(0)}$ и из первой системы находится $s_\alpha^{(1)}(r)$. Используя это решение, можно уточнить значение $\overline{m}^{(0)}$, найдя $\overline{m}^{(1)}$ из второй системы. Подобные вычисления повторяются требуемое число раз. Поскольку рассматриваемая система нелинейна, то исследование сходимости метода последовательных приближений требует достаточно сложных формальных построений, и мы их приводить не будем. Ограничимся лишь самым общим анализом обратной задачи светорассеяния, которая представлена системой (2.59).

В конечном счете речь здесь идет об определении функций $\overline{m}(\lambda)$ и $s(r, z)$, где $\lambda_{\min} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}$, а $Z_1 \leqslant z \leqslant Z_2$. Если указанный здесь интервал оптического зондирования достаточно узок, то может быть использовано предположение о постоянстве функции $\overline{m}(\lambda)$, что заметно упрощает объем соответствующих вычислений. Действительно, в этом случае для определения константы $\overline{m}$ достаточно одного лишь фотометрического измерения на любой из возможных длин волн λ из интервала Λ. Соответствующее значение $\bar{\beta}_{ex,\sigma}(\lambda)$ можно назвать корректирующим для спектрального интервала оптического зондирования Λ. Речь идет о корректировке результатов интерпретации данных многочастотной лазерной локации по показателю преломления $\overline{m}$. Интегралы $B_{ex}[\overline{m}, s_\alpha, \lambda]$, в которых s_α есть решения систем локационных уравнений для данного $\overline{m}$, будем называть функциями корректировки и обозначать через $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}(\overline{m}, \lambda)$. Для любой фиксированной длины волны λ и соответствующего значения $\bar{\beta}_{ex,\sigma}(\lambda)$ определение $\overline{m}$ связано с решением нелинейного уравнения

$$B_{ex,\pi}^{(\alpha)}(\overline{m}, \lambda) = \beta_{ex,\sigma}(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda. \tag{2.60}$$

Подстрочный индекс «π» в левой части уравнения подчеркивает то обстоятельство, что распределение s_α определено из обращения локационных данных $\{P_{\sigma i},\ i = 1, \ldots, n\}$. В связи с этим, строго говоря, левая часть (2.60) зависит от вектора $\mathbf{P}_\sigma$, $\overline{m}$ и λ. Ясно, что решение уравнения (2.60) будет единственным в том случае, если функция $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}(\overline{m}, \lambda)$ по искомому параметру $\overline{m}$ будет монотонной для данного λ и возможных распределений $s_\alpha(r)$. Исследовать поведение функций корректировки $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}$ для обратной задачи (2.59) можно только методами численного моделирования. В связи с этим мы приведем несколько результатов, относящихся к тем примерам многочастотного лазерного зондирования, которые уже упоминались выше.

На рис. 2.10 приведены функции корректировки для эксперимента по многочастотному зондированию аэрозольной дымки, который уже обсуждался в п. 2.1 (см. рис. 2.2). Для всех длин волн λ, используемых при зондировании, функции корректировки обладают требуемым свойством монотонности, и, следовательно, любая из указанных длин волн может быть использована для фотометрического корректирующего измерения $\bar{\beta}_{ex}(\lambda)$. В преде-

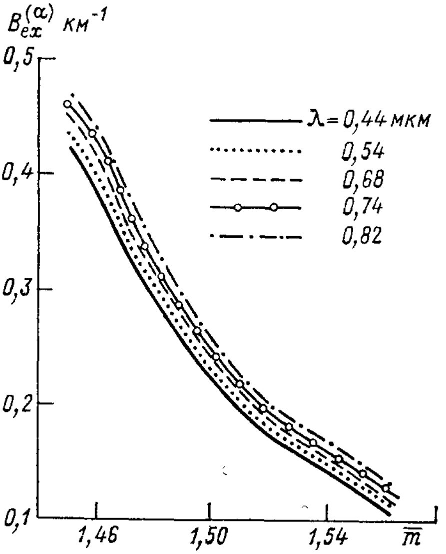

Рис. 2.10. Функция корректировки $B_{ex}^{(\alpha)}(\bar{m}, \lambda)$ для пятичастотного лидара при определении микроструктуры атмосферной дымки (пример на рис. 2.2).

лах данного раздела приводились результаты интерпретации данных по трехчастотному лазерному зондированию аэрозолей нижней тропосферы (см. рис. 2.9). Для измеренных локационных сигналов $P_{\sigma i}$ $(i=1, 2, 3)$ функции корректировки представлены на рис. 2.11. Этот эксперимент сопровождался измерением по горизонтальной трассе коэффициента ослабления $\bar{\beta}_{ex}$ (λ=0,63 мкм). Соответствующая функция корректировки $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}$ (λ=0,63 мкм) представлена на рис. 2.12, где используется для графического решения уравнения корректировки результатов по микроструктурному анализу аэрозолей из лидарных измерений. Здесь же указаны доверительные границы для $\bar{m}^*$ как решений уравнения (2.60) при наличии в правой части ошибок фотометрических измерений.

Рассмотренные примеры относились к случаю, когда требовалось определить вещественную часть показателя преломления $\bar{m}' = \mathrm{Re}(\bar{m})$ в предположении, что мнимая часть $\bar{m}'' = \mathrm{Im}(\bar{m})$ постоянна и не превышает 0,002 для всех длин волн λ из интервала оптического зондирования Λ. Как показывают численные исследования, при выполнении этого условия функции корректировки $B^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}(\overline{m}, \lambda)$ обладают требуемым свойством монотонности. В связи с этим можно полагать справедливым и обратное утверждение, которое заключается в том, что если функции корректировки $B^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}$, вычисляемые в процессе обращения оптических данных $\{P_{\sigma i}, \overline{\beta}_{ex,\,i}\}$, монотонны по $\overline{m}$ для всех рабочих волн лидара λ_i

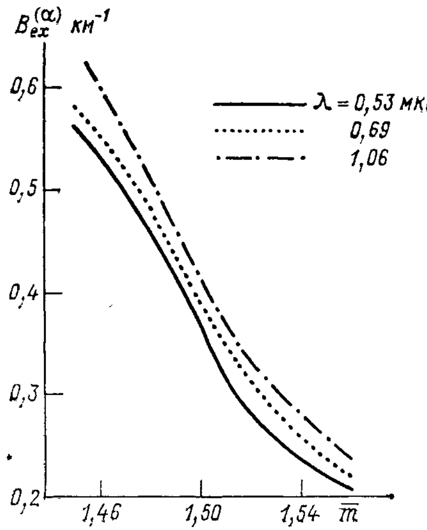

Рис. 2.11. Функция корректировки $B^{(\alpha)}_{ex}(\overline{m}, \lambda)$ для рабочих длин волн трехчастотного лидара в примере обращения экспериментальных данных на рис. 2.9.

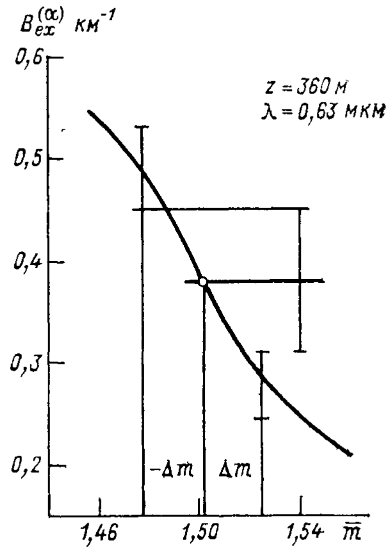

Рис. 2.12. Пример графического решения уравнения (2.60) при обращении данных трехчастотного зондирования дымки (рис. 2.9).

1 — исходная функция корректировки, 2 — измеренное значение коэффициента ослабления.

$(i=1, \ldots, n)$, то дисперсная среда слабо поглощает, и оптические константы не зависят от λ. Подобное предположение далеко не очевидно и основывается здесь на результатах численного моделирования, связанного с оптическими исследованиями атмосферных дымок [13]. Для естественных (фоновых) аэрозолей подобное предположение, по крайней мере, для видимого диапазона выполняется. Для дисперсных загрязнений в условиях промышленного центра этого уже утверждать нельзя. По некоторым данным для атмосферных дымок в условиях города мнимая часть достигает значений 0,02 и более. В этих условиях вполне обоснована постановка обратной задачи светорассеяния, которая бы допускала оценку не только $\overline{m}'$, но и $\overline{m}''$.

При использовании спектральной измерительной аппаратуры дополнительная оптическая информация может быть получена за счет измерения аэрозольного коэффициента рассеяния β_{sc}. В приземном слое атмосферы в принципе можно реализовать такие геометрические схемы зондирования, которые позволяют с использованием одного импульсного лазерного источника измерять профили локационных сигналов $P(z, \lambda)$ в пределах трассы от Z_1 до Z_2, значения $\beta_{cs}(\lambda)$ для некоторых локальных объемов по трассе и оптическую толщу $[\tau(Z_2\lambda) - \tau(Z_1\lambda)]$. Подобный эксперимент осуществляется с помощью трех разнесенных приемников оптического излучения [13]. При наличии указанного объема спектральной информации для коррекции данных интерпретации

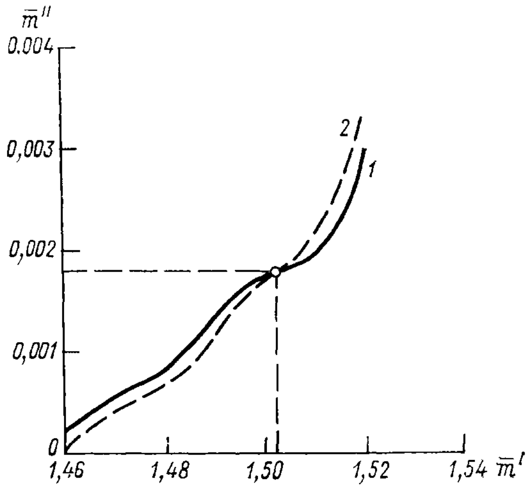

Рис. 2.13. Пример графического решения системы (2.16) для $\lambda=0{,}63$ мкм в численном эксперименте по корректировке данных обращения, полученных с помощью трехчастотного лидара.

в соответствии с изложенной выше методикой можно записать систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &B^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}(\bar{m}',\ \bar{m}'',\ \lambda_i) = \bar{\beta}_{ex,\,i\sigma}; \\ &B^{(\alpha)}_{sc,\,\pi}(\bar{m}',\ \bar{m}'',\ \lambda_i) = \bar{\beta}_{sc,\,i\sigma}, \quad i = 1,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \qquad (2.61)$$

На рис. 2.13 представлен пример графического решения системы (2.61) для одной длины волны $\lambda=0{,}63$ мкм применительно к интерпретации данных трехчастотного лазерного зондирования аэрозолей приземного слоя (см. рис. 2.9). Первая кривая представляет собой множество точек $(\bar{m}', \bar{m}'')$ в соответствующей координатной плоскости, для которых выполняется первое равенство (2.61). Вторая кривая — то же самое для второго уравнения. Пересечение указанных кривых и есть решение системы (2.61). Найденные подобным образом значения $\bar{m}'$ и $\bar{m}''$ позволяют откорректировать данные микроструктурного анализа аэрозольной среды по показателю преломления.

Представленный на рис. 2.11 численный пример указывает на высокую чувствительность методики к вариациям величины $\bar{m}''$. Это является следствием достаточно сильной зависимости коэффициента обратного рассеяния β_π атмосферными аэрозолями для видимого диапазона длин волн от мнимой части показателя преломления. Поэтому если осуществлять интерпретацию локационных данных без достаточно обоснованных предварительных оценок показателя преломления аэрозольного вещества, то это может привести к существенным ошибкам. Принято это обстоятельство относить к недостаткам метода многочастотного лазерного зондирования (см., например, работу [29]). Однако если корректно подходить к использованию этого метода в том понимании, как это излагалось только что выше, то подобные «недостатки» становятся достоинствами метода. Действительно, трудно указать иной метод оптического зондирования атмосферных аэрозолей, который бы обеспечивал определение $\bar{m}'$ и особенно $\bar{m}''$ с указанной выше точностью в условиях натурного эксперимента. При этом речь идет о дистанционном и оперативном контроле «невозмущенной» аэрозольной среды.

Конечно, соответствующий измерительный комплекс оптической аппаратуры достаточно сложен, но он вполне окупается объемом получаемой информации о микрофизических и оптических свойствах аэрозольных образований в атмосфере и их пространственно-временной изменчивости. Совокупность изложенных в этой главе методов интерпретации может рассматриваться как теория подобных информационных систем и как основа для создания программных комплексов оперативной обработки соответствующей оптической информации. Введение функции корректировки очень удобно при изложении вычислительных схем обращения оптических данных. Более того, за ними стоят типичные и часто используемые вычислительные процедуры.

2.3.4. Интегральная форма уравнения лазерной локации и ее применение в задачах оптического мониторинга аэрозолей

Разработку численных методов теории многочастотной лазерной локации завершим построением итерационной схемы обращения данных зондирования, связанной с интегральной формой локационного уравнения (2.42). Это уравнение представляет особый интерес в задачах оптического мониторинга тропосферных аэрозолей. Рассматривая в данном случае конкретный оптический метод исследования атмосферы, понятие оптического мониторинга будем связывать, прежде всего, с определением профиля аэрозольного коэффициента ослабления β_{ex} для соответствующей длины волны λ. Именно эта оптическая характеристика представляет наибольший интерес в переносе оптического излучения в атмосфере. Уравнение (2.42) в целом уже характеризовалось ранее, поэтому прибегнем к его дискретизации и построим соответствующую алгоритмическую схему его численного решения. Для этого по трассе зондирования, ограниченной точками Z_1 и Z_2, выберем систему узлов $\{z_k,\ k=1, \ldots\}$. Для любой, наперед заданной узловой точки z_j нетрудно записать соответствующий уравнению (2.42) суммационный аналог

$$\tau_j = \tau_1 + \sum_{k=2}^{j} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} S(z)\, b^{-1}(z) \exp\{2\tau(z)\}\, dz. \qquad (2.62)$$

Далее частные интегралы в (2.62), исходя из известной теоремы о среднем, представим следующим образом:

$$\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} S(z)\, b^{-1}(z) \exp\{2\tau(z)\}\, dz = b^{-1}(\xi_k) \exp\{2\tau(\xi_k)\} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} S(z)\, dz, \qquad (2.63)$$

где ξ_k — некоторая (неопределенная) точка, лежащая между z_{k-1} и z_k. В дальнейшем будем считать, что $b(z)$ в пределах частных интервалов разбиения $\Delta_k = (z_{k-1}, z_k)$ меняется слабо, и следовательно, $b(z)\quad \beta(\xi_k)$, а $\tau(\xi_k)$ заменим выражением $[\tau(z_{k-1}) + \tau(z_k)]/2$. При этих допущениях дискретный аналог итерационной схемы (2.43) запишется в виде

$$\tau_j^{(p)} = \tau_1 + \sum_{k=2}^{j-1} b_k^{-1} \exp\{\tau_{k-1} + \tau_k\}\, I_k + b_j^{-1} \exp\{\tau_j + \tau_j^{(p-1)}\}\, I_j, \qquad (2.64)$$

где через I_k обозначен интеграл от $S(z)$ в пределах интервала разбиения (z_{k-1}, z_k).

Итерационная схема (2.64) просто обобщается на случай многочастотного лазерного зондирования исследуемого аэрозольного слоя. Для этого в нее вводится двухмерный массив $\{\tau_{ij} = \tau(\lambda_i, z_j),\ i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots\}$, и последовательно для каждого j решается система n уравнений в полном соответствии с рассмотренными ранее итерационными схемами (2.17) и (2.18). Определенность этих систем обеспечивается оператором $W^{(\alpha)}_{\pi, ex}$ в соответствии с развитой выше теорией светорассеяния полидисперсными системами частиц. В данной итерационной схеме этот оператор по вектору $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_i = \beta_{ex,\,i}\Delta_k(z),\ i=1, \ldots, n\}$ позволяет найти вектор $\boldsymbol{\beta}_\pi$ и тем самым оценить значения коэффициентов $b_{\alpha i}$ (спектральный ход лидарного отношения). Формально здесь полная аналогия вычислительным схемам (2.17) и (2.18). Однако с точки зрения практических приложений описанный алгоритм интерпретации данных $\{I_{ij}\}$ существенно отличается от них. В первом случае обратная задача решалась относительно $\beta_\pi(\lambda, z)$ либо $\beta_{ex}(\lambda, z)$, которые можно рассматривать как функции плотности распределения соответствующих физических величин. Во втором случае речь идет об определении интегрального распределения $\tau(\lambda, z)$, которое как функция z принадлежит классу $\Phi\uparrow$. В первом случае фильтрация шумов при численной обработке данных осуществляется только регуляризирующими операторами типа $K^{-1}_{\pi\alpha}$ и $W^{(\alpha)}$. Во втором случае в схему интерпретации вводится дополнительная регуляризация решений по пространственному интервалу $[Z_1, Z_2]$ за счет условий

$$\tau_{i,\,j-1} \leqslant \tau_{ij}, \tag{2.65}$$

выполняемых для всех i и j. В этом отношении итерационная схема (2.64) с условиями (2.65), конечно, выигрывает по сравнению с алгоритмами (2.17) и (2.18).

Для практических приложений, и прежде всего задач оптического мониторинга, интересен вариант одночастотного лазерного зондирования аэрозольного слоя в предположении, конечно, что соответствующие лидарные измерения сопровождаются измерением спектрального хода его оптической толщи. В связи с этим будем считать известными функции $S(z, \lambda_0)$, $\tau(Z_1, \lambda)$ и $\tau(Z_2, \lambda)$. Полагаем, что спектральные фотометрические измерения охватывают интервал $\Delta = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, и рабочая длина волны лидара λ_0 попадает внутрь Λ. Для одночастотного лидара достаточно использовать простейший вариант схемы (2.64), а именно

$$\tau_j^{(p)} = \tau_{j-1} + \bar{b}^{-1} \exp\{\tau_{j-1} + \tau_j^{(p-1)}\} I_j, \tag{2.66}$$

где константа $\bar{b}$ теперь относится ко всему зондируемому слою. Оценка ее значений осуществляется по данным спектральной прозрачности $\{\bar{\beta}_{ex,\,i},\ i=1, \ldots, n\}$ с помощью операторов $W^{(\alpha)}_{\pi,\,ex}$, т. е. с предварительной оценкой характеристик $\bar{\beta}_{\pi\alpha}(\lambda_0)$ и $\bar{\beta}_{ex,\,\alpha}(\lambda_0)$ (программный комплекс «Спектр» [3]). Верхняя черта в обозначениях показывает, что указанные значения являются средними для всего слоя.

Завершая изложение методики интерпретации локационных данных на основе итерационной схемы (2.66), необходимо заметить, что рассмотренный выше способ оценки лидарного отношения $\bar{b}$ является весьма приближенным.

Эффективное использование описанных методик интерпретации требует надлежащего выбора узлов дискретизации $\{z_k,\ k=1, \ldots\}$ по трассе зондирования. Ясно, что они должны выбираться с учетом чувствительности измерительного тракта и характеристик рассеяния зондируемой среды. Если первую величину характеризовать значением $\Delta_{\min}(I)$, то применительно к уравнению (2.62) выбор $\{z_k\}$ разумно подчинить условию

$$\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} S(z)\,dz = \eta\,\Delta_{\min}(I), \tag{2.67}$$

где η — доверительный коэффициент ($\eta \geqslant 1$), определяемый допустимым значением отношения сигнал-шум. Предельная величина $\Delta_{\min}(I)$ определяется параметрами приемно-измерительного тракта лидара, и следовательно, ее можно считать известной. Тогда выражение (2.67) следует рассматривать как уравнение относительно последующей точки дискретизации z_k при заданной предыдущей z_{k-1}. Вычисляя первообразную от локационного сигнала $S(z)$, можно указанным способом последовательно найти и разместить по трассе зондирования узлы дискретизации. Нетрудно показать, что подобная пространственная дискретизация по трассе эквивалентна дискретизации по оптической толще с разрешением не ниже

$$\Delta_{\min}(\tau) \simeq \bar{b}^{-1}\,\Delta_{\min}(l). \tag{2.68}$$

Выражение (2.68) имеет непосредственное отношение к оценке точности определения границы аэрозольного образования в методе лазерной локации. Например, это может быть задача по определению нижней (то же самое верхней) кромки облака. Подставляя в правую часть (2.67) значение $\bar{b}\Delta_{\min}(l)$, найдем наименьший интервал разбиения трассы $\Delta_{\min}(z)$, который определяется чувствительностью лидара $\Delta_{\min}(z)$ и характеристикой рассеяния среды $\bar{b}$.

Итерационная схема (2.66) достаточно просто записывается для многочастотного варианта, а именно

$$\tau_{ij}^{(p)} = \tau_{i,\,j-1} + b_{ij}^{-1}\exp\left\{\tau_{ij}^{(p-1)} + \tau_{i,\,j-1}\right\} I_{ij}, \tag{2.69}$$
$$i = 1,\ \ldots,\ n; \quad j = 1,\ \ldots .$$

Система (2.69) для каждого фиксированного j в соответствии с методами оптических операторов светорассеяния доопределяется векторными преобразованиями $\boldsymbol{\tau} \to \boldsymbol{\beta}_{\pi\alpha}$ и $\boldsymbol{\tau} \to \boldsymbol{\beta}_{ex,\,\alpha}$ и условием (2.65), что делает ее вполне определенной и гарантирует однозначность решения. Рассмотренная итерационная схема интерпретации данных многочастотного зондирования предназначена, прежде всего, для решения задач оптического мониторинга, когда важно знать спектральный и высотный ход оптической толщи атмосферы, т. е. характеристику $\tau(\lambda, z)$.

2.4. Заключение

Изложенные выше теория и численные методы интерпретации данных лазерного зондирования атмосферы касались, главным образом, видимого и ближнего ИК-диапазонов. В задачах дистанционного микроструктурного анализа атмосферных дымок и контроля пространственно-временной изменчивости их оптических характеристик указанные диапазоны оптического зондирования обладают, по всей видимости, наибольшей информативностью. Вместе с тем оптическое зондирование в видимом диапазоне таких аэрозольных образований, как облака, плотные туманы (измороси и т. п.), становится малоэффективным. В частности, весьма затруднительно интерпретировать данные по светорассеянию в силу возрастающего вклада в локационные сигналы фона многократного рассеяния, о чем уже упоминалось в главе. Преодолеть указанную трудность можно, переходя к зондированию облаков лидарами ИК-диапазона, которые технически в настоящее время реализуются главным образом на основе CO_2-лазеров, работающих в диапазоне 10,6 мкм. Методы интерпретации локационных данных в той мере, в какой они обусловливаются рассеянием на аэрозолях, полностью применимы для ИК-диапазона. При этом, конечно, существуют определенная специфика в применении ИК-лидаров и соответственно новые информационные возможности в исследовании аэрозольных образований. Остановимся на их краткой характеристике, учитывая перспективность развития лазерной локации ИК-диапазона.

Прежде всего следует заметить, что в ряде случаев можно заметно упростить методики интерпретации, несущественно теряя в достоверности определения аэрозольных характеристик. Так, например, для рабочей длины волны лидара $\lambda=10{,}6$ мкм показатель преломления водных капель близок к значению $\bar{m}=1{,}179\ldots 0{,}0718$ [27]. Нетрудно видеть, что $\bar{m}'$ несущественно отличается от единицы, а величина $\bar{m}''$ принимает достаточно большое значение (по сравнению, скажем, с $\bar{m}'' \leqslant 0{,}005$ для атмосферных дымок в видимом диапазоне). В этих условиях факторы эффективности $K_\pi(\bar{m}, x)$ и $K_{ex}(\bar{m}, x)$ становятся весьма гладкими функциями, и для них с использованием теории Ми можно построить простые аппроксимационные аналоги. Учитывая при этом, что спектр размеров облачных частиц вполне приемлемо описывается гамма-распределением, удается построить простые и вполне достоверные оценки значений так называемого лидарного отношения. В результате с помощью одночастотного CO_2-лидара можно определять профили водности в облаках. Если учесть при этом, что отношение интенсивности двукратно рассеянного света к однократному для типичных моделей облаков на порядок меньше соответствующего отношения для длин волн видимого диапазона [24], то ИК-лидары следует считать вполне эффективным инструментом оптической диагностики облаков. В ряде случаев с их помощью можно изучать внутреннюю структуру облаков и их динамику. Появление когерентных CO_2-лидаров, позволяющих измерять поляризационные характеристики принимаемых локационных сигналов, делает доступным идентификацию и изучение кристаллических облаков. Подобная возможность была продемонстрирована в работе [25].

Не меньший практический интерес представляет использование лидаров ИК-диапазона для исследования атмосферных дымок. Как показали предварительные численные расчеты [32] и непосредственные измерения [28], наблюдается сильная спектральная зависимость коэффициента обратного рассеяния $\beta_\pi(\lambda)$ в диапазоне [9; 11 мкм], перекрываемого перестраиваемым CO_2-лазером. Ясно, что она обусловлена зависимостью $\bar{m}(\lambda)$ и существенно коррелирует с химическим составом аэрозоля [28]. В связи с этим для ИК-диапазона возможна постановка обратных задач светорассеяния полидисперсным аэрозолем, решение которых позволяет найти и параметры микроструктуры, и идентифицировать химический состав.

Можно указать также на интересную возможность изучения аэрозольной системы, взаимодействующей с полем влажности

$f(z)$. Это взаимодействие проявляется в зависимости показателя преломления аэрозольного вещества и спектра размеров от влажности. Однако для ИК-диапазона первая зависимость более существенно влияет на спектральный ход коэффициента обратного рассеяния. Поэтому, измеряя $\beta_\pi(\lambda, f)$ методом обратной задачи, можно определить функциональную зависимость $\bar{m}(\lambda, f)$. Одновременно с этим проявляется и температурная зависимость значений коэффициента β_π на $\lambda = 10{,}6$ мкм [28]. Таким образом, применение ИК-лидаров можно увязывать непосредственно с оптическими исследованиями метеорологических полей в атмосфере.

ГЛАВА 3. МЕТОД КАСАТЕЛЬНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ И ОПТИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ АТМОСФЕРЫ

В связи с развитием орбитальных средств оптического зондирования атмосферы и подстилающей поверхности возникает необходимость решения целого класса обратных атмосферно-оптических задач и разработки на этой основе соответствующего программного обеспечения интерпретации оптических наблюдений. Если методы зондирования, изложенные в предыдущей главе, носили локальный характер, т. е. были связаны светорассеянием с локальными объемами исследуемой среды, то теперь нам предстоит рассмотреть методы интерпретаций оптических сигналов, формируемых рассеянием света во всей атмосфере. Используемые ниже уравнения переноса имеют теперь более сложную аналитическую форму. Обратные задачи светорассеяния, формулируемые «в целом» для рассеивающей среды, служат теоретической основой оптического мониторинга атмосферы, осуществляемого в целях восстановления полей оптических характеристик из наблюдений рассеянных потоков солнечной радиации. При выводе исходных функциональных уравнений теории зондирования атмосфера как оптическая среда считается сферически однородной.

Как и в предыдущей главе, предполагается, что процесс рассеяния света является определяющим в формировании оптических сигналов и регистрация излучения осуществляется на нескольких частотах, и, следовательно, есть возможность строить вычислительные схемы интерпретации с привлечением оптических операторов теории светорассеяния. Необходимо также указать и на разнообразие возможных геометрических схем зондирования при установке спектральной фотометрической аппаратуры на орбитальных платформах. Ниже в качестве конкретного примера в основном будет использоваться схема касательного зондирования.

Учитывая нерегулярный ход высотного распределения аэрозолей в атмосфере, всем интегральным уравнениям теории зондирования придана форма интегралов Стилтьеса. В главе подробно излагаются численные методы для одночастотного варианта касательного зондирования в силу близости обращаемого интегрального уравнения обратным задачам рефракции и атмосферной топографии. Решение систем функциональных уравнений метода многочастотного касательного зондирования по аналогии с методом лазерного зондирования строится на основе итерационных вычислительных схем, содержащих матричные аналоги оптических операторов перехода. В целях раздельного определения характеристик рассеяния молекулярной и аэрозольной компонент в эти системы вводятся специальные операторы разделения, решающие весьма сложную атмосферно-оптическую задачу. Поскольку сходимость итерационных процедур определяется используемыми оптическими операторами, в главе приводятся результаты численного анализа их основных свойств.

Совместное синхронное использование метода многочастотного касательного зондирования с другими методами (схемами), позволяющими получить дополнительную оптическую информацию, заметно повышает надежность результатов интерпретации. Одновременно с этим открывается возможность более глубокого изучения атмосферы как реальной физической среды. Например, речь может идти о возможности изучения взаимосвязи полей оптических характеристик с полями метеопараметров по данным спутниковых наблюдений.

Глава заканчивается кратким введением в теорию оптического зондирования системы атмосфера — подстилающая поверхность. Для схемы касательного зондирования выводится интегральное уравнение относительно функции распределения величины по поверхности и обсуждается алгоритм его численного решения. Интересно при этом заметить, что для нахождения указанного распределения в принципе может быть выведено несколько подобных уравнений, отличающихся своими ядрами и соответствующих различным семействам линий визирования (то же самое геометрическим схемам). В результате оказывается возможной постановка задачи о выборе наилучшей схемы зондирования альбедо подстилающей поверхности при прочих равных условиях. Имеется в виду выбор того интегрального уравнения, которое лучше обусловлено относительно искомого распределения и, следовательно, в меньшей степени зависит от ошибок оптических измерений и принятых априорных допущений.

В заключение отметим, что в целях ясности изложения проблем оптического мониторинга, его содержания и информационных возможностей авторы ограничились рассмотрением лишь одномерных обратных задач. Практика обработки данных спутникового зондирования в этом отношении требует соответствующих обобщений, рассмотрение которых выходит за рамки настоящей монографии. Авторы были вынуждены также опустить и описание методик коррекции результатов интерпретации по фону многократного рассеяния.

3.1. Метод касательного зондирования атмосферы

3.1.1. Интегральные представления измеряемых оптических величин в методе касательного зондирования

Геометрическая схема рассматриваемого оптического метода дистанционного зондирования атмосферы такова, что в качестве измеряемых величин выступают интенсивности рассеянного солнечного излучения, соответствующие семейству параллельных направлений в атмосфере. Если зафиксировать некоторую систему координат, скажем, (X, Y) на рис. 3.1, то общее направление рассматриваемых линий (секущих) можно задать единым вектором $\mathbf{n}$. Без ограничения общности можно его выбрать параллельным одной из координатных осей, скажем X, как это указано на

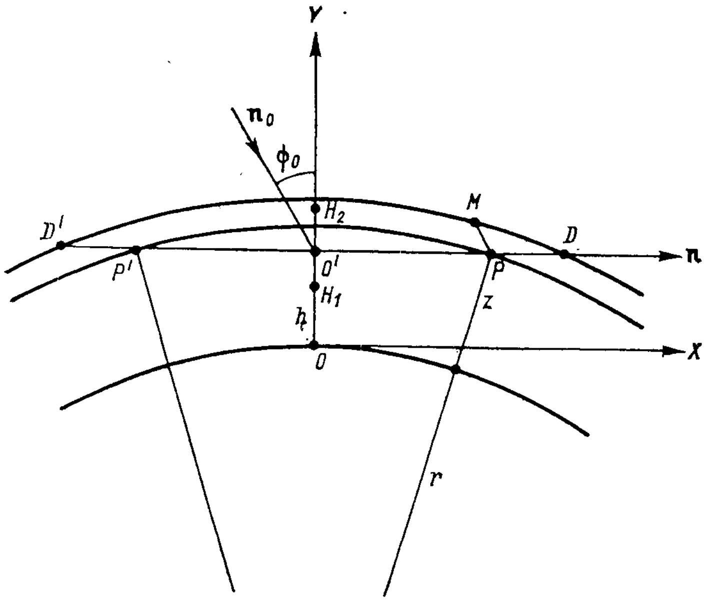

Рис. 3.1. Геометрическая схема метода касательного зондирования (к выводу интегрального представления (3.13)).

рис. 3.1. Направление падающих солнечных лучей можно характеризовать единичным вектором $\mathbf{n}_0$. Угол ψ между $\mathbf{n}_0$ и осью Y определяется, как обычно, из соотношения $\cos\psi = (\mathbf{n}_0, \mathbf{y})$, где единичный вектор $\mathbf{y}$ связан с направлением координатной оси Y (вертикалью в начале координат O). Положение любой из секущих линий, скажем $D'D$ на рис. 3.1, в выбранной геометрической схеме можно характеризовать одним параметром h (ее расстоянием до оси X). В принятых обозначениях интенсивность солнечного излучения, попадающего в точку D на границе сферической атмосферы, запишется в виде следующего интеграла:

$$I(\mathbf{n}_0,\ h) = \int\limits_{D'}^{D} R(P) \exp\left\{-\tau\left(\overline{PD}\right)\right\} dl(P). \tag{3.1}$$

Запись $\overline{PD}$ означает направленный отрезок на секущей $\overline{D'D}$, ограниченный точками P и D. Оптическая толщина $\tau(\overline{PD})$ есть интеграл от коэффициента ослабления $\beta_{ex}(P)$ вдоль этого отрезка, т. е.

$$\tau(\overline{PD}) = \int_P^D \beta_{ex}(P')\, dl(P'). \tag{3.2}$$

Поскольку направление отрезка $\overline{PD}$ совпадает с направлением оси X, выражение для дифференциала упрощается в силу соотношения

$$dl(P) = dx_P, \tag{3.3}$$

где x_P — соответствующая координата точки $P = \{x_P, y_p\}$. Уместно заметить, что систему координат (X, Y) можно выбрать и иначе. В частности, в качестве оси X можно взять касательную на верхней границе атмосферы, а ось Y направить перпендикулярно вниз. В этом случае семейство линий визирования было бы параллельным касательной, что объясняет происхождение термина «касательное зондирование». По существу измерительной процедуры рассматриваемый метод было бы правильнее называть методом параллельных секущих, поскольку в предположении тангенциальной однородности атмосферы выбор направления лучей не играет никакой роли.

Функция источника $R(P)$, входящая в уравнение переноса солнечного излучения (3.1), для рассеивающей атмосферы может быть представлена следующим выражением:

$$R(P) = c(\lambda)_t \left[D_{11}^{(a)}(P, \mathbf{n}_0) + D_{11}^{(м)}(P, \mathbf{n}_0)\right] \exp\{-\tau(\overline{MP})\}, \tag{3.4}$$

если, конечно, пренебречь излучением, которое может попадать на данную секущую $D'D$ снизу, и обусловленным рассеянием нижележащими слоями атмосферы и подстилающей поверхностью. В пределах настоящего параграфа будем рассматривать только это выражение для функции источника. Индексы «а» и «м», так же как и ранее (см. п. 1.3), связаны с аэрозольным и молекулярным рассеянием. Поскольку угол рассеяния солнечного излучения в точках рассматриваемой касательной $D'D$ равен $\psi_0 + \pi/2$ (см. рис. 3.1), то в дальнейшем вместо $D_{11}(P, \mathbf{n}_0)$ будем писать $D_{11}(P, \psi + \pi/2)$ или просто $D_{11}(P, \psi)$. Интенсивность падающего солнечного излучения на длине волны λ в выражении (3.4) представлена величиной $c(\lambda)$. Напомним, что все величины, входящие в (3.4), также суть функции λ. Ослабление солнечного излучения вдоль направленного отрезка $\overline{MP}$ зависит от высотного хода $\beta_{ex}(z)$ в сферически однородной атмосфере. Выражение (3.4) для функции источника справедливо для верхних слоев атмосферы, во всяком случае для $z \geqslant 10$ км, как это следует из оценок, приводимых в работе [12]. В этих условиях при отсутствии поглощения газами в первом приближении можно считать, что

$$\exp\{-\tau(\overline{PM})\} \simeq 1.$$

В дальнейшем будем рассматривать нормированную функцию источника

$$J(P,\ \psi)=\{D_{11}^{(a)}(P,\ \psi)+D_{11}^{(м)}(P,\ \psi)\}/\beta_{ex}(P) \tag{3.5а}$$

и полагать, что измеряемая интенсивность излучения нормируется на постоянную $c(\lambda)$. В некоторых случаях удобно в функцию источника вводить альбедо $\omega=\beta_{sc}/\beta_{ex}$ для рассеивающей компоненты в целом. Тогда последнее выражение примет форму

$$J(P,\ \psi)=\omega(P)\,D_{11}(P,\ \psi)/\beta_{sc}(P). \tag{3.5б}$$

Нормировка коэффициента направленного светорассеяния на объемный коэффициент рассеяния β_{sc} более естественна в оптических задачах. Заметим, что при отсутствии поглощения $\omega(P)=1$ и последние два выражения не отличаются друг от друга. Возвращаясь теперь к исходному интегралу (3.1), перепишем его следующим образом:

$$I(\psi,\ h)=\int_{D'}^{D} J(\psi,\ P)\exp\{-\tau(\overline{PD})\}\,\beta_{ex}(P)\,dl(P). \tag{3.6}$$

Для практических приложений выражению (3.6) целесообразно придать форму параметрического интеграла, заменив координаты точки P x_P и y_P на такие параметры, как h и z, где z — высота точки P (см. рис. 3.1). Это нетрудно сделать, используя следующее параметрическое преобразование:

$$\left.\begin{aligned} x(z,\ h)&=\sqrt{(r+z)^2-(r+h)^2};\\ y(z,\ h)&=h, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

где r — радиус Земли. В соответствии с рассматриваемой здесь схемой зондирования для переменных z и h всегда выполняется условие $h\leqslant z$.

Из (3.7) получаем выражение для дифференциала

$$dx_P=x_z'\,dz=-(r+z)/\sqrt{(r+z)^2-(r+h)^2}\,dz. \tag{3.8}$$

В дальнейшем при построении интегральных уравнений метода касательного зондирования атмосферы будем использовать следующие обозначения:

$$\varphi(z,\ h)=-(r+z)/\sqrt{(r+z)^2-(r+h)^2}; \tag{3.9а}$$

$$\Phi(z,\ h)=\sqrt{(r+z)^2-(r+h)^2}. \tag{3.9б}$$

Очевидно соотношение

$$\varphi(z,\ h)\,dz=d_z\Phi(z,\ h). \tag{3.10}$$

Нетрудно видеть, что $\varphi(z,h)$ имеет особую точку при $z\to h$, в то время как $\Phi(z,h)\to 0$ при тех же условиях. В этом отношении аналитическое поведение вспомогательной функции $\Phi(z,h)$ можно считать более регулярным, нежели $\varphi(z,h)$. Учет подобных обстоятельств важен при разработке методов численного обращения экспериментальных функций, представимых параметрическими интегралами, что уже неоднократно подчеркивалось выше. Следует заметить, что $\varphi(z, h)$ не зависит от свойств рассеивающей среды и является некой характеристикой геометрической схемы зондирования (то же самое метода зондирования).

Напомним, что излагаемая здесь теория метода касательного зондирования относится к случаю, когда справедливо предположение об однородности характеристик рассеивающей атмосферы в тангенциальных направлениях. Учитывается лишь радиальная неоднородность сферической атмосферы. Это предположение ведет нас немедленно к одномерным интегральным уравнениям, т. е. к наиболее простым обратным задачам светорассеяния. Действительно, в условиях радиальной неоднородности справедливы соотношения

$$\beta_{ex}(P) = \beta_{ex}(x_P,\ y_P) = \beta_{ex}(z,\ h) \equiv \beta_{ex}(z). \tag{3.11}$$

Конечно, можно рассматривать и двухмерные задачи, однако они, помимо чисто математических трудностей, требуют значительно больших объемов исходной информации, что не всегда достижимо для современных систем оптического зондирования атмосферы. При выполнении (3.11) имеем

$$\tau(\overline{PD}) = \int_z^H \varphi(z',\ h)\, d\tau(z'), \tag{3.12}$$

где $H = z_D$, $h \leqslant z$ и $d\tau(z) = \beta_{ex}(z)\, dz$. Этим завершается построение интегрального представления для интенсивности рассеянного солнечного излучения, измеряемого в методе касательного зондирования атмосферы. Интеграл (3.6) принимает следующую параметрическую форму:

$$I(h) = 2\int_h^H J(z) \exp\left\{-\int_z^H \varphi(z',\ h)\, d\tau(z')\right\} \varphi(z,\ h)\, d\tau(z). \tag{3.13}$$

Выражение (3.13) есть искомое интегральное представление для интенсивности рассеянной в атмосфере солнечной радиации по параллельным линиям визирования. Исходные допущения, лежащие в основе (3.13), состоят в тангенциальной однородности рассеивающей компоненты атмосферы, возможности пренебречь вкладом многократного рассеяния в атмосфере и влиянием на перенос радиации подстилающей поверхности. Разумеется, что подобные предположения ограничивают интервал возможного изменения переменной h, поэтому совершенно естественно выделять априори некий исходный интервал $[H_1,\ H_2]$ для указанного параметра. Основываясь на результатах исследований, систематизированных в монографии [12], можно полагать, что представление (3.13) вполне эффективно при изучении рассеивающей атмосферы в пределах высот 10—15 км. Если же метод касательного зондирования применяется для высот $h \leqslant 10$ км, то необходимо введение в функцию источника новых составляющих, обусловленных прежде всего рассеянием системы атмосфера—подстилающая поверхность. Эти вопросы мы подробно рассмотрим ниже, а пока продолжим анализ представления (3.13).

Если считать известным профиль $I_\sigma(h)$, измерение которого осуществляется спектральными фотометрами с ИСЗ [11], то (3.13) можно положить в основу определения профиля $\tau(z)$ как оптической характеристики зондируемой атмосферы. Функция $\varphi(z, h)$ известна, поскольку полностью определяется геометрической схемой метода. Для определенности поставленной обратной задачи требуется знание функции $J(z)$. В качественных методиках интерпретации прибегают к априорному заданию аэрозольных индикатрис рассеяния $\mu^{(a)}(\vartheta)=4\pi D_{11}^{(a)}(\vartheta)/\beta_{sc}^{(a)}$. Подобные методики в рамках исследования по обратным задачам светорассеяния навряд ли интересны, поэтому далее будем исходить из принципиальной возможности построения функциональных уравнений между $\tau(z)$ и $J(z)$. И та и другая функция суть оптические характеристики некоторого локального объема атмосферы в окрестности точки z. Следовательно, метод оптических операторов в полной мере применим для решения задачи интерпретации в теории касательного зондирования атмосферы. По аналогии с (2.59) запишем функционал

$$F[\tau(\lambda, z), \psi, z]=J(\psi, \lambda, z), \tag{3.14}$$

заданный на множестве распределений $\tau(\lambda, z)$, где λ пробегает значения из интервала оптического зондирования Λ. Соотношение (3.14) приводит нас к следующему интегральному уравнению относительно профиля $\tau(\lambda, z)$:

$$\int_h^H Q[\tau(z'), z']\,d\tau(z)=I(h), \quad h \in [H_1, H_2]. \tag{3.15}$$

Для упрощения записи мы опустили переменную λ и параметр ψ. Полученное интегральное уравнение является уравнением Вольтерра первого рода относительно оптической толщи $\tau(z)$, и этим оно существенно отличается от уравнения (2.42) в методе лазерного зондирования рассеивающей компоненты атмосферы. Теперь для получения профиля $\tau(z)$ нам необходимо использовать регуляризирующие методики, если говорить о чисто вычислительных аспектах задачи. Вместе с тем следует иметь в виду, что решение интегральных уравнений второго рода относится к классу вполне обусловленных математических задач, и поэтому функциональное уравнение (2.42) относительно $\tau(z)$ бесспорно выигрывает во всех отношениях по сравнению с уравнением (3.15). Так, например, при достаточно малых значениях $\tau(z)$, когда в первом приближении можно считать экспоненциальный член близким к единице, решение уравнения (2.42) сводится к прямому вычислению искомого профиля по измеренному локационному сигналу.

Иными словами, речь идет о прямом методе определения $\tau(z)$. В этом смысле метод лазерного зондирования можно рассматривать как прямой (непосредственный) метод определения оптических характеристик светорассеяния локальными объемами атмосферы. Что же касается уравнения (3.15), то в любой ситуации

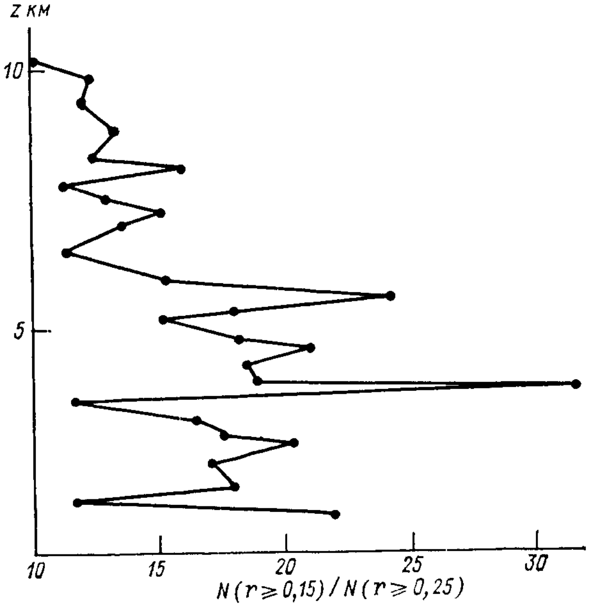

Рис. 3.2. Пример высотного хода аэрозольной микроструктурной характеристики $N(r \geqslant 0{,}15)/N(r \geqslant 0{,}25$ мкм) по данным прямых (самолетных) импакторных измерений счетной концентрации частиц [10].

оно остается интегральным уравнением, и следовательно, за ним стоит косвенный метод дистанционного определения оптических характеристик светорассеяния. Таким образом, сопоставляемые здесь два оптических метода существенно различны с точки зрения обращения измерительной информации. Различны также и их информационные возможности. Подробнее об этом мы будем говорить ниже, а пока вернемся к анализу интегрального уравнения (3.15).

Интеграл в (3.15) суммируется по дифференциальному элементу $d\tau(z)$. Физическим оправданием использования интеграла Стилтьеса в наших уравнениях является нерегулярный (стратифицированный) ход высотного распределения аэрозолей в атмосфере. Поскольку эти распределения, как правило, — разрывные функции, естественной формой интегральных уравнений является интеграл Стилтьеса. Наглядным примером нерегулярности высотного хода аэрозольных характеристик могут служить результаты прямых микроструктурных измерений, представленных на рис. 3.2 по данным работы [10]. Напомним, что алгоритмы численного обращения этих интегралов к тому же заметно проще, нежели интегральных уравнений в форме интеграла Римана. Об этом подробно говорилось выше в связи с введением функционального множества возможных решений интегральных уравнений $\Phi\uparrow$. Правда, в данном случае мы имеем дело с нелинейным интегральным уравнением, однако, как будет показано ниже, это несущественно усложняет структуру решающего алгоритма при обращении данных в методе касательного зондирования.

3.1.2. Алгебраизация интегральных уравнений теории касательного зондирования

Исходные данные в любом методе оптического зондирования атмосферы, как правило, представляются дискретным набором измерений, и поэтому решение соответствующей обратной задачи естественно отыскивать в виде некоторой дискретной совокупности величин. В силу этого обстоятельства дискретизация исходных функциональных уравнений — далеко не формальная операция и тесно связана с информационными возможностями метода зондирования.

Остановимся кратко на построении суммационного аналога для интеграла Стилтьеса в (3.13), полагая, что геометрический параметр h пробегает $(n+1)$ значений из интервала $[H_1, H_2]$. В этом случае имеем систему n подынтервалов $\{\Delta_j, j=1, \ldots, n\}$, покрывающих указанную область значений h. Считая узлы h_j $(j=1, \ldots, n+1)$ границами частичных интервалов, их размеры можно определить согласно выражениям $\Delta_j(h)=h_{j+1}-h_j$, где $h_1=H_1$ и $h_{n+1}=H_2$. Без ограничения общности можно полагать, что в качестве H_2 берется «верхняя граница» атмосферы H, и тогда вместо указанного выше интервала можно рассматривать интервал высот $[h_1, H]$. В дальнейшем при алгебраизации интеграла (3.13) будем использовать одно из простейших представлений для дифференциала $d\tau(z)$, а именно

$$d\tau(z)=\Delta_j(\tau)\,dz/\Delta_j(h). \tag{3.16}$$

При указанном выше разбиении области $[h_1, H]$ интеграл в правой части (3.13) перепишется в следующем виде:

$$\sum_{l=j}^{n}\int_{h_l}^{h_{l+1}} J(z)\exp\left\{-\int_z^H \varphi_j(z')\,d\tau(z')\right\}\varphi_j(z)\,d\tau(z), \tag{3.17}$$

где через $\varphi_j(z)$ обозначено $\varphi(z, h=h_j)$.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что функция $\varphi(z, h)$ при $z\to h$ обращается в бесконечность, в связи с чем требуется определенная осторожность при вычислении частных интегралов в (3.17). Прежде всего заметим, что если $h_l \leqslant z \leqslant h_{l+1}$, то справедливо представление

$$\int_z^H \varphi_j(z')\,d\tau(z') = \sum_{k=l+1}^{n} \int_{h_p}^{h_{k+1}} \varphi_j(z)\,d\tau(z) + \int_z^{h_{l+1}} \varphi_j(z')\,d\tau(z'). \quad (3.18)$$

Поэтому (3.13) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{l=j}^{n} \exp\left\{-\sum_{k=l+1}^{n} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \varphi_j(z)\,d\tau(z)\right\} \times$$

$$\times \int_{h_l}^{h_{l+1}} J(z) \exp\left\{-\int_z^{h_{l+1}} \varphi_j(z')\,d\tau(z')\right\} \varphi_j(z)\,d\tau(z) = I_j/2. \quad (3.19)$$

Теперь укажем способ вычисления интегралов от функции $\varphi_j(z)$ по интервалам Δ_l. Используя (3.9б) и (3.16), можно записать

$$\int_{h_k}^{h_{k+1}} \varphi_j(z)\,d\tau(z) = \int_{h_k}^{h_{k+1}} \left(\Delta_{k^*}(\tau)/\Delta_k(h)\right) d\Phi_j(z). \quad (3.20)$$

Введя обозначение

$$\{\Phi_j(h_{k+1}) - \Phi_j(h_k)\}/\Delta_{k^*}(h) = \psi_{jk},$$

получим

$$\int_{h_k}^{h_{k+1}} \varphi_j(z)\,d\tau(z) = \Delta_k(\tau)\,\psi_{jk}. \quad (3.21)$$

Числа φ_{jk} в совокупности образуют некоторую матрицу, характерную для дискретных представлений интегральных уравнений в теории касательного зондирования. Матрица $\{\psi_{jk}\}$ треугольна, все элементы $\psi_{jk} > 0$. Важным является отсутствие сингулярности в дискретном аналоге исходного интегрального уравнения. К тому же и диагональные элементы матрицы $\{\psi_{jk}\}$ не обращаются в нуль, что также имеет немаловажное значение в схемах численного обращения уравнений типа Вольтерра [23]. Действительно, теперь $\varphi_{j,\,k=j} = \psi_{jj} \neq 0$, что доказывается прямым вычислением. Используя функцию $\Phi_j(z)$, можно записать по аналогии с (3.18)

$$\int_z^{h_{l+1}} \varphi_j(z')\,d\tau(z') = \Delta_l(\tau)\,\{\Phi_{j,\,l+1} - \Phi_j(z)\}/\Delta_l(h). \quad (3.22)$$

Теперь внутренний интеграл в (3.19) примет следующий вид:

$$\int_{h_l}^{h_{l+1}} J(z) \exp\left\{-\frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}\Phi_{j,\,l+1}\right\} \exp\left\{\frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}\Phi_j(z)\right\} \frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}\,d\Phi_j(z).$$

Поскольку $J(z) > 0$ всюду в области $[h_1, H]$, то можно прибегнуть к теореме о среднем и переписать этот интеграл:

$$J(\xi_l)\exp\left\{-\frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}\Phi_{j,l+1}\right\}\int\limits_{h_l}^{h_{l+1}}\exp\left\{\frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}\Phi_j(z)\right\}\frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}d\Phi_j(z). \tag{3.23}$$

Последний интеграл нетрудно вычислить, и он равен

$$\exp\left\{\frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}\Phi_{j,l+1}\right\}-\exp\left\{\frac{\Delta_l(\tau)}{\Delta_l(h)}\Phi_{jl}\right\}.$$

В итоге (3.23) становится равным

$$J(\xi_l)\left[1-\exp\left\{-\Delta_l(\tau)\psi_{jl}\right\}\right].$$

Напомним, что точка ξ_l лежит внутри интервала (h_l, h_{l+1}).

Заменяя $J(\xi_l)$ неким средним значением J_l функции $J(z)$ в указанном интервале и считая, что $\Delta_l(\tau)\psi_{jl} \ll 1$, выражение (3.19) можно представить в окончательном виде:

$$\sum_{l=j}^{n}\exp\left\{-\sum_{k=l+1}^{n}\Delta_k(\tau)\psi_{jk}\right\}J_l\,\Delta_l(\tau)\,\psi_{jl}=I_j/2. \tag{3.24}$$

Используя совокупность измерений $\{I_{j\sigma}, j=1, \ldots, n\}$ и (3.24), получим систему n уравнений относительно совокупности величин $\{\Delta_l(\tau), l=1, \ldots, n\}$ или, следуя ранее принятым обозначениям (1.4), относительно вектора $\mathbf{\Delta}_\tau$. Следует заметить, что выполненная алгебраизация вполне корректна. Действительно, легко показать, что если $\Delta_l(h)$ устремить к нулю, сумма в (3.24) имеет своим пределом интеграл в (3.13). Таким образом, те предположения, которые мы делали в процессе вывода (3.24), ни в коей мере не меняют аналитической зависимости $I(h)$ от оптических характеристик зондируемой среды.

Использование дискретного представления (3.24) для интенсивности I_j в вычислительных схемах требует предварительной оценки интервала пространственного квантования. По всей видимости, разумно при этом исходить из требования, в соответствии с которым разность $(I_{j+1}-I_j)$ должна быть не меньше некоторой предельной величины $\Delta_{\min}(I)$, характеризующей чувствительность приемного тракта измерительной аппаратуры. С учетом этого условия из (3.24) получаем следующее неравенство:

$$J_j\,\Delta_j(\tau)\,\psi_{jj} \geqslant \Delta_{\min}(I). \tag{3.25}$$

Напомним, что здесь J_j и $\Delta_j(\tau)$ — оптические характеристики j-го слоя атмосферы, ограниченного двумя смежными линиями визирования, j-й и $(j+1)$-й. Величины ψ_{jj} суть известные функции интервала $\Delta_j(h)$. Неравенство (3.25) можно положить в основу численного определения точек h_j $(j=1, \ldots, n)$ в схемах интерпретации теории касательного зондирования. При расчетах с помощью (3.25) необходимо прибегнуть к подходящим оптическим моделям высотного хода $\tau(z)$ (см. [5]). Нетрудно заметить, что по мере уменьшения высоты h оптическая толщина атмосферы возрастает, и как следствие, значения $\Delta_j(h)$ определяемые из (3.25), последовательно уменьшаются.

Изучая уравнение (3.24), следует также обратить внимание на то, что оно нелинейное, и поэтому требуется хотя бы краткое обсуждение проблемы однозначности его решения. Однако указанная нелинейность с аналитической точки зрения достаточно элементарна, и нет особой необходимости в ее анализе. К тому же характер этой нелинейности близок к той, которая присуща уравнению лазерной локации (2.1), записанному в приближении однократного рассеяния. Нелинейность последнего уравнения подробно исследовалась в работе [19]. Следует также иметь в виду, что в пределах настоящей работы уравнение (3.24) связывается главным образом с зондированием рассеивающей компоненты атмосферы в пределах высот 10—50 км. В этом случае величина $[\tau(H_2)-\tau(H_1)]$ достаточно мала, и следовательно, экспоненциальные члены близки к единице. По этой причине уравнение (3.24) (аналогично и (3.15)) является «почти линейным», что существенно упрощает численные обращения соответствующих оптических данных. Соответствующее линейное приближение для дискретного варианта записывается в виде

$$\sum_{l=j}^{n} J_l \psi_{jl} \Delta_l(\tau) = I_j/2, \quad j=1, \ldots, n. \tag{3.26}$$

Если задавать априори высотный ход индикатрисы рассеяния, т. е. положить известными величины J_l ($l=1, \ldots, n$), то за (3.26) стоит известное интегральное уравнение Абеля, широко используемое во многих прикладных задачах. В атмосферной оптике к ним следует отнести обратные задачи теории рефракции [27] и простейшие варианты теории касательного зондирования [25]. Все эти частные варианты общего уравнения переноса излучения вдоль ограниченного отрезка прямой (секущей) содержатся в приведенных вычислительных схемах, и мы их здесь специально рассматривать не будем.

В заключение кратко остановимся на еще одном возможном варианте обращения оптических измерений $\{I_j\}$. В частности, если имеется возможность априорного задания высотного профиля $\tau(h)$, то система (3.26) вполне определена относительно вектора $\mathbf{J}=\{J_l\}$ (или профиля $J(h)$). Напомним, что за профилем $J(h)$ стоит высотный профиль коэффициента направленного светорассеяния $D_{11}(h, \vartheta)$. Эта оптическая характеристика несет в себе существенно больше информации о светорассеянии локальными объемами атмосферы, нежели $\tau(h)$. Поэтому, строго говоря, при интерпретации данных касательного зондирования следовало бы задавать априори не индикатрису рассеяния, а модельный профиль $\tau(z)$ вопреки сложившимся представлениям. К тому же следует иметь в виду, что высотный ход $\tau(z)$ при необходимости может быть измерен вполне доступными средствами. Например, можно прибегнуть к методам лазерного зондирования, используя затем соответствующие методики интерпретации, которые подробно излагались выше, во второй главе. В этом отношении дистанционное определение характеристики $D_{11}(h, \vartheta)$ является бесспорно более сложной оптической задачей.

Возвращаясь к (3.26), следует заметить, что обратная задача по определению вектора $\boldsymbol{\tau}$ при прочих равных условиях все же обусловлена лучше, чем для вектора $\mathbf{J}$. Действительно, $\tau \in \Psi_n \uparrow$, в то время как $\mathbf{J} \in \Psi_n^+$. Последнее векторное пространство существенно шире первого, а поэтому первая обратная задача более устойчива и к ошибкам задания ядра уравнения, и к погрешности исходных данных. В силу этого обстоятельства определение $\tau(z)$ рассматривается как основная задача теории касательного зондирования.

3.1.3. Вычислительные схемы обращения данных касательного зондирования

Поскольку исходное уравнение (3.15) представлено в форме интеграла Стилтьеса и его решение $\tau(z)$ принадлежит множеству ограниченных, нигде не убывающих функций $\Phi\uparrow$, то естественно вычислительный алгоритм строить так же, как это делалось ранее для уравнений (1.105). Роль исходного минимизируемого функционала на векторном пространстве $\Psi_n\uparrow$ играет, как и ранее, норма $\|A\boldsymbol{\tau} - \mathbf{I}_\sigma\|_{l_2}$, которую в дальнейшем будем обозначать через $\rho(\boldsymbol{\tau})$. Вольтерровость исходного интегрального оператора A не вызывает каких-либо особых затруднений при использовании аппроксимационного подхода и неявном построении обратного оператора. Действительно, интегральное представление (3.13) можно рассматривать как некоторую аналитическую модель $I(h, \boldsymbol{\tau})$ для измеряемой в эксперименте функции $I_\sigma(h)$. Напомним, что если модель соответствует данному эксперименту, $I_\sigma(h)$ есть σ-приближение для «точной» функции $I_0(h) = I(h, \boldsymbol{\tau}_0)$, и тогда

$$\|I_0 - I_\sigma\|_{L_2} \leqslant \sigma \|I_0\|_{L_2}. \tag{3.27}$$

При построении вычислительного алгоритма определенные трудности возникают из-за нелинейности (3.15). Однако они вполне преодолимы, если учесть те замечания, которые делались выше относительно характера нелинейности системы (3.24). Введем следующие обозначения:

$$\exp\left\{-\sum_{k=l+1}^{n} \psi_{jk}\,\Delta_k(\tau)\right\} = \xi_j(\tau_{l+1}, \ldots, \tau_{n+1}) = \xi_{jl}. \tag{3.28}$$

Тогда система (3.24) примет вид

$$\sum_{l=j}^{n} \xi_{jl}\psi_{jl}J_l\,\Delta_l(\tau) = I_j/2, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.29}$$

Как и ранее (см. п 1.4), введем вектор $\tau^{(\nu p)}=\{\tau_1^{(p-1)}, \ldots, \tau_{\nu-1}^{(p-1)}, \tau_\nu^{(p)}, \tau_{\nu+1}^{(p)}, \ldots, \tau_{n+1}^{(p)}\}(\nu\geqslant l+1)$, который порождает следующую последовательность величин:

$$\xi_{jl}^{(\nu p)}=\xi_j\left(\tau_{l+1}^{(p-1)}, \ldots, \tau_{\nu-1}^{(p-1)}, \tau_\nu^{(p)}, \ldots, \tau_{n+1}^{(p)}\right) \tag{3.30}$$

при $\nu=l+1, \ldots, n+1$ и $p=1, \ldots$. Теперь возвращаемся к (3.29) и строим форму

$$I_j^{(\nu p)}/2=\sum_{l=j}^{\nu-2}\psi_{jl}J_l\xi_{jl}^{(\nu p)}\Delta_l^{(p-1,\,p-1)}+\psi_{j,\,\nu-1}J_{\nu-1}\xi_{j,\,\nu-1}^{(\nu p)}\Delta_{\nu-1}^{(p,\,p-1)}+$$
$$+\psi_{j\nu}J_\nu\xi_{j\nu}^{(\nu p)}\Delta_\nu^{(pp)}+\sum_{l=\nu+1}^{n}\psi_{jl}J_l\xi_{jl}^{(\nu p)}\Delta_l^{(pp)}, \tag{3.31}$$

заданную на последовательности векторов $\{\tau^{(\nu p)}\}$. В целях упрощения записи мы применили сокращение вида $\Delta_l^{(pp)}=\tau_{l+1}^{(p)}-\tau_l^{(p)}$. Форма (3.31) нелинейна, и для того чтобы воспользоваться вычислительной процедурой, описанной ранее в п. 1.4, необходимо ее линеаризировать относительно компоненты $\tau_\nu^{(p)}$. Этого можно достигнуть путем следующей замены:

$$\xi_j\left(\ldots\ \tau_{\nu-1}^{(p-1)}, \tau_\nu^{(p)}, \tau_{\nu+1}^{(p)}, \ldots\right)\simeq\xi_j\left(\ldots, \tau_{\nu-1}^{(p-1)}, \tau_\nu^{(p-1)}, \tau_{\nu+1}^{(p)}\ldots\right),$$

или то же самое

$$\xi_{jl}^{(\nu p)}\approx\xi_{jl}^{(\nu+1,\,p)}. \tag{3.32}$$

Если теперь в (3.31) подставить (3.32), то рассматриваемая форма становится линейной относительно искомой величины $\tau_\nu^{(p)}$. Ясно, что подобная замена не слишком «возмущает» исходную модель (3.31), поскольку замена касается лишь одной из компонент вектора решения τ. Подобный прием можно назвать способом локальной линеаризации нелинейного векторного (интегрального) уравнения. Он, естественно, более корректен, нежели те приемы линеаризации, когда вся нелинейная система заменяется на линейную. Подобных вычислительных методов касаться в нашей работе не будем.

С учетом (3.32) из (3.31) получаем следующую линейную форму:

$$\widetilde{I}_j^{(\nu p)}/2=A_j^{(\nu p)}+C_j^{(\nu p)}\tau_\nu^{(p)}; \tag{3.33а}$$

$$A_j^{(\nu p)}=\sum_{l=j}^{\nu-2}\psi_{jl}J_l\xi_{jl}^{(\nu+1,\,p)}\Delta_l^{(p-1,\,p-1)}-\psi_{j,\,\nu-1}J_{\nu-1}\xi_{j,\,\nu-1}^{(\nu+1,\,p)}\tau_{\nu-1}^{(p-1)}+$$
$$+\psi_{j\nu}J_\nu\xi_{j\nu}^{(\nu+1,\,p}\tau_{\nu+1}^{(p)}+\sum_{l=\nu+1}^{n}\psi_{jl}J_l\xi_{jl}^{(\nu p)}\Delta_l^{(pp)}; \tag{3.33б}$$

$$C_j^{(\nu p)}=\left(J_{\nu-1}\psi_{j,\,\nu-1}\xi_{j,\,\nu-1}^{(\nu+1,\,p)}-J_\nu\psi_{j\nu}\xi_{j\nu}^{(\nu+1,\,p)}\right). \tag{3.33в}$$

В итоге задача сводится к определению минимума квадратичной функции

$$\rho\left(\tau_\nu^{(p)} \mid \ldots\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(I_{j\sigma}-A_j^{(\nu p)}-C_j^{(\nu p)}\tau_\nu^{(p)}\right)^2/2, \qquad (3.34)$$

где коэффициенты формы определены для каждых $\nu=1, \ldots, n+1$ и $p=1, \ldots$. В остальном порядок построения минимизирующей последовательности не отличается от описанного в п. 1.4. Предполагается известным одно из граничных значений: либо $\tau_1=\tau(H_1)$, либо $\tau_{n+1}=\tau(H_2)$. Может быть построен и второй вариант вычислительной схемы, если ввести вектор $\boldsymbol{\tau}^{(p\nu)}=\{\ldots \tau_{\nu-1}^{(p)}, \tau_\nu^{(p)}, \tau_{\nu+1}^{(p-1)} \ldots\}$. Формально получим схему, которая эквивалентна рассмотренной выше. Однако в практике обработки экспериментального материала они могут несколько разниться по эффективности в зависимости от ошибок измерений, а главное, их распределения по высоте h. В вычислительную схему можно также ввести нормирующий множитель $\tau_{\max}$, особенно в тех случаях, когда известна приближенная оценка $\tau(H_2)$. Тогда минимизация квадратичных форм будет вестись на множестве векторов $\mathbf{q}\in\Psi_n\uparrow$ с последующим уточнением значения τ_{n+1}.

Несколько замечаний следует сделать в заключение относительно сходимости минимизирующей последовательности $\{\boldsymbol{\tau}^{(p)}\}$ к точному решению $\boldsymbol{\tau}_0$. Для линейного варианта задачи проблема однозначности решений и сходимости указанных последовательностей особых затруднений не вызывает. Для нелинейных задач на эти вопросы приходится отвечать, как правило, на основе численных исследований, максимально учитывающих конкретные условия реальных экспериментов. Если ограничиться рамками качественного подхода к рассмотрению указанных вопросов, то можно исходить из следующего предположения: если приращения частных функций $\xi_j(\tau_\nu^{(p)}|\ldots)$ по переменным $\tau_\nu^{(p)}$ $(\nu=1, \ldots, n+1)$ меньше по модулю соответствующих приращений аргумента $\Delta_\nu^{(pp)}$, то минимизирующая последовательность $\{\boldsymbol{\tau}^{(p)}\}$ сходится к $\boldsymbol{\tau}_0$.

Используя (3.28), нетрудно показать справедливость неравенства

$$\left|\Delta\left(\xi_{j\nu}^{(\nu p)}\right)\right|<\left(\Delta_\nu^{(pp)}\right)^2, \qquad (3.35)$$

которое показывает, что вблизи решения $\boldsymbol{\tau}_0$ нелинейность проявляется слабо и $\boldsymbol{\tau}^{(p)}\to\boldsymbol{\tau}_0$ при $p\to\infty$. Конечно, при этом важно выбрать надлежащим образом нулевое приближение $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$. В этом отношении, очевидно, особых проблем в практике касательного зондирования не существует, если речь вести о рассеивающей компоненте атмосферы. Высотный ход $\tau(z)$ и его возможные вариации в среднем достаточно хорошо известны. Уместно сослаться здесь на обстоятельные работы [5, 7, 18]. Конечно, не следует излишне упрощать проблему выбора нулевого приближения. Аэрозольная компонента атмосферы характеризуется весьма нерегулярным высотным ходом своих микрофизических и оптических характеристик. Соответствующий пример представлен на рис. 3.2. Хотя он и относится к аэрозолям тропосферы, все это в какой-то мере справедливо и для стратосферы (см. рис. 2.3).

Как показывает численный анализ устойчивости решений системы (3.24), ее обусловленность вполне достаточна и особых проблем с зависимостью получаемых решений от выбора нулевых приближений не возникает. На этом можно закончить построение алгоритма для обращения данных $\mathbf{I}_\sigma(h)$, осуществляемого на основе численного решения интегрального уравнения (3.6), в методе касательного зондирования атмосферы.

3.2. Теория многочастотного касательного зондирования рассеивающей компоненты атмосферы

3.2.1. Основные функциональные уравнения и операторы метода

Из теории многочастотного лазерного зондирования аэрозолей видно, что оптические методы исследования рассеивающих сред эффективны лишь при определенных объемах измерительной информации. Построить содержательную теорию метода зондирования и гарантировать его эффективное применение можно лишь на основе содержательных обратных задач светорассеяния. Ниже дадим краткое изложение теории многочастотного касательного зондирования рассеивающей компоненты атмосферы. Исходным аналитическим аппаратом наших построений, как и ранее, будут служить оптические операторы светорассеяния полидисперсными системами частиц. Одновременно с этим мы распространим операторный подход и на молекулярное рассеяние в атмосфере.

Допустим, что касательное зондирование атмосферы осуществляется в окнах прозрачности на длинах волн λ_i $(i=1, \ldots, m)$. Тогда в (3.29) необходимо ввести дополнительный индекс i и переписать эту систему следующим образом:

$$\sum_{l=j}^{n} \xi_{ijl}\psi_{jl}J_{il}\,\Delta_{il}(\tau) = I_{ij}/2, \qquad (3.36)$$

$$j=1, \ldots, n; \quad i=1, \ldots, m.$$

Наличие двухмерного массива оптической информации $\{I_{ij}\}$ позволяет ввести теперь оптические операторы типа $W^{(\alpha)}$, связав тем самым спектральные характеристики светорассеяния в систему взаимопреобразуемых функций. Это, естественно, доопределяет систему (3.36) новыми уравнениями и делает ее вполне определенной относительно характеристик светорассеяния, каковыми в нашем случае являются $\tau(\lambda, h)$ и $J(\lambda, h)$. Напомним, что функция источника $J(\lambda, h)$ определяется согласно (3.5) значениями $D_{11}(\lambda, \vartheta, h)$ и $\beta_{ex}(\lambda, h)$. Значения коэффициента ослабления для j-го слоя, заключенного между h_j и h_{j+1}, оцениваются согласно выражению $\beta_{ex,\,ij} = (\tau_{i,\,j+1} - \tau_{ij}) / (h_{j+1} - h_j)$. Если зафиксировать индекс j, то совокупность значений $\{\tau_{ij}\}$ $(i=1, \ldots, m)$ можно рассматривать как вектор $\boldsymbol{\tau}_j$. Векторные обозначения позволяют придавать более компактный вид аналитическим выражениям, что и обусловливает систематическое использование векторного формализма в настоящей работе.

Прежде чем перейти к анализу системы (3.36), сделаем несколько дополнительных замечаний. Во-первых, если отсутствует аэрозольное поглощение на рабочих длинах волн λ_j, что и предполагалось выше, то $\beta^{(a)}_{ex,\,i} = \beta^{(a)}_{sc,\,i}$ в пределах любого локального объема атмосферы. При зондировании в окнах прозрачности отсутствует поглощение молекулярной компонентой. Во-вторых, коэффициент направленного светорассеяния в прикладной оптике принято представлять в виде

$$D_{11}(\lambda,\ \vartheta) = \beta_{sc}(\lambda)\,\mu(\lambda,\ \vartheta)/4\pi,$$

где $\mu(\lambda, \vartheta)$ — нормированная индикатриса рассеяния. Поскольку $J(\lambda, h)$ выше задавалось выражением (3.5), то нормированную функцию источника можно писать также в виде

$$J(\lambda,\ h) = \omega(\lambda,\ h)\,\mu(\lambda,\ \vartheta)/4\pi,$$

где $\omega(\lambda, h) = \beta_{sc}(\lambda, h)/\beta_{ex}(\lambda, h)$ — альбедо единичного объема атмосферы. С учетом этого обстоятельства, а также принимая во внимание важность дистанционного определения не только профиля $\beta^{(a)}_{ex}(\lambda, h)$, но и $\beta^{(a)}_{sc}(\lambda, h)$, ниже будем рассматривать одновременно два оптических оператора, осуществляющих преобразования $\boldsymbol{\beta}^{(a)}_{sc} \to \boldsymbol{D}^{(a)}_{11}$ и $\boldsymbol{\beta}^{(a)}_{ex} \to \boldsymbol{\beta}^{(a)}_{sc}$. Напомним, что компоненты указанных векторов соответствуют значениям характеристик для длин волн λ_i, и все они имеют размерность, равную m. Введение указанных преобразований доопределяет систему (3.36) двумя операторными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} W^{(\alpha)}_{D,\,sc}\boldsymbol{\beta}_{sc} &= \mathbf{D}_{11}; \\ W^{(\alpha)}_{sc,\,ex}\boldsymbol{\beta}_{ex} &= \boldsymbol{\beta}_{sc}. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Получающаяся в результате схема обращения данных многочастотного касательного зондирования атмосферы дает возможность определить по совокупности измерений $\{I_{ij\sigma},\ i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ n\}$ высотный ход $\beta^{(a)}_{sc}(\lambda, h)$ и $\beta^{(a)}_{ex}(\lambda, h)$. Помимо этих характеристик нетрудно оценить спектральный ход альбедо $\omega^{(a)}(\lambda,\ h)$ аэрозольной компоненты. Последняя характеристика необходима в анализе процессов переноса солнечной радиации в замутненной атмосфере.

Поскольку указанные операторы действуют только на аэрозольные спектральные характеристики, то мы опустили для сокращения записи верхний индекс «а», полагая, что это не вызовет путаницы в понимании смысла (3.37). Компоненты вектора $\mathbf{D}_{11}$

в (3.37) суть значения $\{D_{11}(\lambda_i, \vartheta)\}$, которые помимо λ_i определяются величиной угла рассеяния ϑ в геометрической схеме рассматриваемого оптического метода. Напомним, что все характеристики относятся к j-му слою, и их необходимо снабдить подстрочными индексами «j». Введение уравнений (3.37) в схему интерпретации оптических данных $\{I_{ij\sigma}\}$ не только физически доопределяет обратную задачу, но делает ее решения более устойчивыми к различным возмущениям. Действительно, совместная система (3.36) и (3.37) лучше обусловлена, нежели исходная (3.29), особенно когда в ней полагается J_l=const для всех $l=1, \ldots, n$.

Общий алгоритм обращения данных $\{I_{ij\sigma}\}$ строится таким образом, что система (3.37) используется внутри итерационной схемы, описанной в конце предыдущего параграфа, т. е. для каждого j отдельно. С помощью этой системы $(q-1)$-е приближение для функции источника J_{ij}^{q-1} пересчитывается в q-е приближение $J_{ij}^{(q)}$ по вектору $\boldsymbol{\tau}_j^{(q)}$. Иными словами, две системы уравнений (3.36) и (3.37) решаются методом последовательного приближения, т. е. по схеме

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l=j}^{n} \xi_{ijl}^{(q)} \psi_{jl} J_{il}^{(q-1)} \Delta_{il}^{(q)}(\tau) = I_{ij}/2; \\ &\boldsymbol{\tau}_l^{(q)} \to \mathbf{J}_l^{(q)}, \quad l \leqslant j, \quad i=1, \ldots, m; \quad j=1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

Преобразование $\{\tau_{il}^{(q)}\} \to \{J_{il}^{(q)}\}$ осуществляется с помощью линейных операторов (3.37).

Интересно заметить, что наличие второго уравнения в (3.38) позволяет более естественно линеаризовать первое уравнение, просто заменив $\xi_{ijl}^{(q)} = \xi_{jl}(\tau_i^{(q)})$ на $\xi_{jl}^{(q-1)} = \xi_{ijl}(\tau_i^{(q-1)})$. Для того чтобы схема (3.38) могла составить основу алгоритма интерпретации данных многочастотного касательного зондирования, необходимы гарантии ее сходимости при $q \to \infty$. Помимо аналитической структуры уравнений переноса вдоль секущей линии, условия сходимости должны определяться свойствами операторов типа W. Соответствующие исследования мы отложим до следующего раздела, а пока обратимся к одной очень важной оптической задаче, которая всегда возникает при оптическом зондировании слабозамутненной атмосферы.

Если бы светорассеяние в рассматриваемом случае осуществлялось только аэрозолями, то для расчета значений J_{il} по $\{\tau_{il}\}$ было бы вполне достаточно соотношений (3.37). Наличие молекулярного рассеяния несколько усложняет задачу численного преобразования $\boldsymbol{\tau} \to \mathbf{J}$. Ограничившись только рассеянием, т. е. считая $\beta_{ex}=\beta_{sc}$, для обеих компонент рассеяния можно записать следующую систему соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{sc,\,i} = \beta_{sc,\,i}^{(\text{а})} + \beta_{sc,\,i}^{(\text{м})}; \quad D_{11,\,i} = D_{11,\,i}^{(\text{а})} + D_{11,\,i}^{(\text{м})}; \\ &\mathbf{D}_{11}^{(\text{а})} = W_{D,\,sc}^{(\alpha)} \beta_{sc}^{(\text{а})}; \quad \mathbf{D}_{11}^{(\text{м})} = U_{D,\,sc} \beta_{sc}^{(\text{м})}. \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Выписанные выражения вполне очевидны и нет особой необходимости их комментировать, тем более что они уже по отдельности использовались нами ранее. Важно обратить внимание на то, что (3.39) как система m уравнений не определена, поскольку в ней $m+1$ неизвестных. Действительно, это m значений $D_{11,i}^{(a)}$ ($i=1, \ldots, m$) и ($m+1$)-е значение $D_{11,\nu}^{(м)}$, где ν — любое из чисел между 1 и m. Для молекулярной компоненты матрица U является диагональной, поскольку для всех λ_i и любого угла ϑ $D_{11,i}^{(м)}(\vartheta) = \beta_{sc,i}^{(м)}\mu^{(м)}(\vartheta)/4\pi$. Для преодоления неопределенности можно, как это обычно делается в атмосферной оптике, прибегнуть к так называемой стандартной молекулярной атмосфере, задав значение $\beta_{sc,\nu}^{(м)}$. Развивая теории оптического мониторинга, мы, естественно, не можем прибегать к подобным приемам. Предлагаемые методики интерпретации должны использовать минимум априорной информации, обеспечивая тем самым наиболее адекватное представление об атмосфере в целом. Этому же требованию должны удовлетворять и системы оперативного контроля оптического состояния атмосферы.

Методы численного решения систем типа (3.39) будут подробно нами рассматриваться в п. 4.2, а сейчас лишь напомним, что в основе этой системы лежат предположения о сферичности рассеивающих частиц и априорное задание показателя преломления аэрозольного вещества $\overline{m}=\overline{m}'-\overline{m}''i$ в пределах зондируемого слоя $[H_1, H_2]$. В силу этого изложенная выше теория многочастотного касательного зондирования приводит к вычислительным схемам обращения оптических данных, применимых при тех же исходных допущениях, что и в методе многочастотного лазерного зондирования. Это обусловлено единством методологического подхода к теории оптического зондирования рассеивающей компоненты атмосферы. Вместе с тем необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что требования к выполнению указанных выше допущений существенно различны для указанных двух методов. Действительно, уравнения теории касательного зондирования относительно локальных оптических характеристик светорассеяния являются интегральными, причем первого рода, и поэтому вариации $\delta\beta_{ex}$ (то же самое $\delta\tau$ и δD_{11}), обусловленные ошибками $\Delta\overline{m}$ в задании подходящих значений $\overline{m}$, слабо сказываются на значении интегралов (3.24). В силу этого схемы обращения в методе касательного зондирования более устойчивы к неопределенностям при априорном задании соответствующих оптических операторов в (3.39). В локационных задачах оптические сигналы $P(\lambda_i, z)$ прямо пропорциональны значениям аэрозольных коэффициентов обратного рассеяния $\beta_\pi(\lambda_i, z)$, и поэтому вариации $\delta\beta_\pi$, связанные с $\Delta\overline{m}$, непосредственно сказываются на точности интерпретации оптических данных.

Помимо этого следует также иметь в виду, что интегральные представления (3.13) выведены в предположении тангенциальной однородности сферической атмосферы. Для реальных ситуаций подобное допущение выглядит несколько искусственным, что вносит определенный вклад в ошибки интерпретации данных по касательному зондированию. В принципе нетрудно вывести уравнения, аналогичные (3.29), с учетом неоднородности характеристик светорассеяния в двух измерениях. Не останавливаясь на них, укажем лишь, что в этом случае нам придется вместо J_l и τ_l ввести в (3.29) J_{jl} и τ_{jl} в силу параметризации $\tau(P)=\tau(x_P, y_P)\to\tau(h_j, z_l)$. То, что теперь неизвестной становится функция двух переменных $\tau(h, z)$, делает систему (3.29) неопределенной, и требуется изыскивать источник дополнительной оптической информации. Постановка подобных двухмерных обратных задач с точки зрения практики атмосферно-оптических исследований пока преждевременна, и мы не будем перегружать изложение материала излишними математическими построениями.

3.2.2. К анализу сходимости итерационных схем обращения данных по касательному зондированию атмосферы

Сходимость итерационных схем численного обращения оптических измерений в методе касательного зондирования определяется несколькими факторами, среди которых наиболее существенными являются аналитическая структура исходных уравнений (например, характер их нелинейности) и свойства операторов теории светорассеяния дисперсной компонентой атмосферы. Последнее в большей мере относится к численному преобразованию $\boldsymbol{\tau}\to\mathbf{J}$, т. е. к системе (3.39), связанной с каждым элементарным слоем. Заметим, что особое внимание к анализу сходимости схем обращения данных в методах зондирования обусловлено не только необходимостью обоснования математической корректности предлагаемых алгоритмов, но и тем обстоятельством, что во многих случаях ее нарушение указывает на неприемлемость исходных аналитических моделей (то же самое физических предположений) для соответствующего эксперимента. Иными словами, можно утверждать, что мера соответствия априорной информации, используемой в построении схем обращения, проявляет себя в скорости их сходимости, или тоже в «качестве» последовательности приближенных решений, генерируемых этими схемами. Эта особенность итерационных методов делает их эффективным средством не только в получении решений, но и анализе задач в целом. Изложение этих аспектов можно найти в монографии [19].

В итерационные схемы метода касательного зондирования выше были введены два оптических оператора $W^{(\alpha)}_{sc,\,ex}$ и $W^{(\alpha)}_{D,\,sc}$ теории аэрозольного светорассеяния, которые делают вполне определенным преобразование $\boldsymbol{\tau}\to\mathbf{J}$ в системе (3.39). Рассмотрим преобразование $\beta_{ex}\to\beta_{cs}$, осуществляемое оператором $W^{(\alpha)}_{sc,\,ex}$.

Допустим, что последовательность $\{\tau^{(q)}\}$ в схеме (3.39) сходится к некоторому пределу. Ясно, что это в полной мере будет относиться к последовательности $\{\beta_{ex}^{(q)}\}$. Для корректной оценки функции источника $\mathbf{J}=\{J_i\}$ необходимы гарантии того, что в этих условиях будет также сходиться и последовательность $\{\beta_{sc}^{(q)}\}$, порождаемая указанным оператором и $\{\tau^{(q)}\}$. Гарантией сходимости $\{\beta_{sc}^{(q)}\}$ является условие ограниченности нормы матричного оператора $W_{sc,ex}^{(\alpha)}$. В соответствии с [8] эту норму будем определять следующим образом:

$$\| W_{sc,\,ex}^{(\alpha)} \| = \sup_{\beta_{ex} \in B_{ex}} \| W_{sc,\,ex}^{(\alpha)} \beta_{ex} \|_{l_2} / \| \beta_{ex} \|_{l_2}, \qquad (3.40)$$

где B_{ex} — множество возможных реализаций оптической характеристики β_{ex} (множество исходных оптических данных). То, что верхняя грань в (3.40) существует и ограничена, следует из чисто физических соображений, и каких-либо особых доказательств здесь не требуется. Однако для полной гарантии сходимости итерационной схемы (3.38) все же недостаточно ограниченности норм оптических операторов. Желательно, чтобы выполнялось более сильное условие, а именно

$$\| \mathbf{\Delta}^{(q,\,q-1)} (J) \|_{l_2} < \| \mathbf{\Delta}^{(q,\,q-1)} (\beta_{ex}) \|_{l_2}, \qquad (3.41)$$

где компоненты векторов суть числа $\Delta_i^{(q,\,q-1)}(J)=J_i^{(q)}-J_i^{(q-1)}$ и $\Delta_i^{(q,\,q-1)}(\beta_{ex})=\beta_{ex,\,i}^{(q)}-\beta_{ex,\,i}^{(q-1)}$. Напомним, что в целях упрощения записи выражений мы опускали подстрочный индекс «l», связанный с дискретизацией по пространственной координате h.

Неравенство (3.41) есть достаточное условие сходимости итерационного цикла (3.38) для любого фиксированного индекса l. Опуская строгое доказательство этого очень важного утверждения, заметим лишь, что из (3.41) прямо следует сходимость последовательности $\{\mathbf{J}^{(q)}\}$ из сходимости $\{\tau^{(q)}\}$. Теперь возникает следующий вопрос: каким требованиям должны удовлетворять операторы типа $W^{(\alpha)}$, чтобы гарантировать выполнение (3.41). Чтобы на него ответить, обратимся вначале к преобразованию $\beta_{ex} \to \beta_{sc}$.

Известно, что для любой полидисперсной системы частиц $\beta_{sc}(\lambda) \leqslant \beta_{ex}(\lambda)$. Равенство имеет место лишь тогда, когда отсутствует поглощение радиации частицами среды, т. е. когда мнимая часть показателя преломления аэрозольного вещества $\overline{m}''=0$. Но если для дискретного набора длин волн $\{\lambda_i\}$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$ $\beta_{sc,\,i} \leqslant \beta_{ex,\,i}$, то, следовательно, $\|\beta_{sc}\| \leqslant \|\beta_{ex}\|$, и тогда имеем неравенство $\| W_{sc,\,ex}^{(\alpha)} \beta_{ex} \| \leqslant \| \beta_{ex} \|$. Сопоставляя его с (3.40), приходим к следующей очень важной оценке:

$$\| W_{sc,\,ex}^{(\alpha)} \| \leqslant 1. \qquad (3.42)$$

Неравенство (3.42) означает, что оператор $W_{sc,\,ex}^{(\alpha)}$ есть оператор сжатия. Используя это свойство оператора $W_{sc,\,ex}^{(\alpha)}$, нетрудно показать, что сходимость последовательности векторов $\{\beta_{ex}^{(q)}\}$ влечет сходимость $\{\beta_{sc}^{(q)}\}$ в метрике векторного пространства l_2 размерности m. Роль операторов сжатия в построении эффективных итерационных процедур хорошо известна в вычислительной математике (см., например, монографию [22]). Этим важным свойством обладают и некоторые операторы теории светорассеяния полидисперсными системами частиц, что позволяет их эффективно использовать в программных комплексах обработки оптической информации.

Теперь обратимся к оператору $W_{D,\,sc}^{(\alpha)}$, который также используется в системе (3.39). В силу известного соотношения $D_{11}(\lambda, \vartheta) = \beta_{sc}(\lambda)\mu(\lambda, \vartheta)/4\pi$ для любого фиксированного угла ϑ и дискретного набора длин волн $\{\lambda_i\}$ можно записать

$$\|\mathbf{D}_{11}\|_{l_2} \leqslant (4\pi)^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \mu(\lambda, \vartheta) \|\beta_{sc}\|_{l_2}. \tag{3.43}$$

Для того чтобы оператор $W_{D,\,sc}^{(\alpha)}$, зависящий, кстати, от угла рассеяния ϑ, был оператором сжатия, необходимо, чтобы множитель, стоящий перед нормой вектора β_{sc} справа в (3.43), был меньше единицы. Если обратиться к расчетным и экспериментальным исследованиям углового хода аэрозольных индикатрис рассеяния, то можно полагать, что требуемое условие выполняется в широкой области углов рассеяния ϑ. Возможным исключением является окрестность малых углов. Ее размеры редко превышают 10° (область ореола). В геометрической схеме метода касательного зондирования область $\vartheta \leqslant 10°$ особого интереса, как правило, не представляет, и поэтому можно считать, что оператор $W_{D,\,sc}^{(\alpha)}$ в системе (3.39) также является оператором сжатия. Как будет показано, численное решение системы (3.39) относительно векторов $\beta_{sc}^{(\text{а})}$ и $\beta_{sc}^{(\text{м})}$ может быть выполнено с использованием метода последовательных приближений. Эту часть алгоритма, отвечающего за разделение компонент рассеяния, можно условно считать внутренним итерационным циклом в схеме (3.38).

С учетом вышеизложенного можно утверждать, что преобразование $\boldsymbol{\tau} \to \mathbf{J}$ в итерационной схеме (3.38) обладает неподвижной точкой [9], что и гарантирует сходимость последовательности приближенных решений к точному. Что же касается тех условий сходимости общей итерационной схемы (3.38), которые обусловлены аналитической структурой уравнений переноса вдоль секущих, то они уже рассматривались ранее в п. 3.1.

В заключение отметим, что не все операторы типа $W^{(\alpha)}$, используемые в теории оптического зондирования, удовлетворяют условию (3.42). Подобные примеры уже встречались ранее в теории поляризационного зондирования (см. п. 1.2). Если обратиться к методу многочастотного лазерного зондирования, то можно полагать, что для таких аэрозольных систем, как атмосферные дымки и жидкокапельные облака, выполняется условие $\beta_\pi(\lambda) < \beta_{ex}(\lambda)$, по крайней мере, для видимой и ближней ИК-областей. Поэтому оператор $W^{(\alpha)}_{\pi,\,ex}$ будет оператором сжатия, а ему обратный $W^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}$ уже таковым не будет. В силу этого обстоятельства условие сходимости итерационной схемы (2.12) является более сложным и требует уже определенных ограничений на оптическую толщину зондируемого слоя (см. неравенство (2.13)). С этой точки зрения теорию многочастотного касательного зондирования рассеивающей компоненты атмосферы нам удалось построить с использованием более эффективных операторов взаимного преобразования оптических характеристик.

3.2.3. Численные исследования основных операторов метода

Изучение особенностей преобразования $\beta_{sc} \to \mathbf{D}_{11}$, в котором компоненты вектора $\mathbf{D}_{11}$ суть значения $D_{11}(\lambda_i, \vartheta)$, где $i=1, \ldots, m$ и угол рассеяния ϑ фиксирован, начнем с анализа численных данных, представленных в табл. 3.1. Верхняя строка — это исходные

Таблица 3.1

Отклонения прогнозируемых значений $D^{(sc)}_{11,\,\alpha}(\lambda, \vartheta)$ от точных в преобразовании $\beta_{sc} \to \mathbf{D}_{11,\,\alpha}$

D_{11}, $\Delta\bar{m}$, σ_{sc}	λ мкм			
	0,353	0,446	0,542	0,700
$D_{11,0}$ ($\vartheta=45°$)	$0,19\cdot10^{-2}$	$0,21\cdot10^{-2}$	$0,21\cdot10^{-2}$	$0,22\cdot10^{-2}$
$\Delta\bar{m}'=0,02$	$-0,023\cdot10^{-3}$	$-0,036\cdot10^{-3}$	$-0,086\cdot10^{-3}$	$-0,091\cdot10^{-3}$
$-0,02$	$0,092\cdot10^{-3}$	$0,011\cdot10^{-2}$	$0,013\cdot10^{-2}$	$0,016\cdot10^{-2}$
$\bar{m}''=0,02$	$0,015\cdot10^{-2}$	$0,013\cdot10^{-2}$	$0,081\cdot10^{-3}$	$0,066\cdot10^{-3}$
$\sigma_{sc}=0,1$	$0,056\cdot10^{-2}$	$0,071\cdot10^{-2}$	$0,057\cdot10^{-2}$	$0,052\cdot10^{-2}$
$-0,1$	$0,019\cdot10^{-3}$	$0,021\cdot10^{-3}$	$0,021\cdot10^{-3}$	$0,022\cdot10^{-3}$
$D_{11,0}$ ($\vartheta=90°$)	$0,33\cdot10^{-3}$	$0,33\cdot10^{-3}$	$0,32\cdot10^{-3}$	$0,29\cdot10^{-3}$
$\Delta\bar{m}'=0,02$	$-0,021\cdot10^{-3}$	$-0,026\cdot10^{-3}$	$-0,024\cdot10^{-3}$	$-0,023\cdot10^{-3}$
$-0,02$	$0,03\cdot10^{-3}$	$0,032\cdot10^{-3}$	$0,028\cdot10^{-3}$	$0,027\cdot10^{-3}$
$\bar{m}''=0,02$	$0,032\cdot10^{-3}$	$0,026\cdot10^{-3}$	$0,017\cdot10^{-3}$	$0,012\cdot10^{-3}$
$\sigma_{sc}=0,1$	$0,083\cdot10^{-3}$	$0,066\cdot10^{-3}$	$0,068\cdot10^{-3}$	$0,065\cdot10^{-3}$
$-0,1$	$0,033\cdot10^{-4}$	$0,033\cdot10^{-4}$	$0,032\cdot10^{-4}$	$0,029\cdot10^{-4}$
$D_{11,0}$ ($\vartheta=135°$)	$0,25\cdot10^{-3}$	$0,26\cdot10^{-3}$	$0,26\cdot10^{-3}$	$0,20\cdot10^{-3}$
$\Delta\bar{m}'=0,02$	$-0,097\cdot10^{-4}$	$-0,022\cdot10^{-3}$	$-0,022\cdot10^{-3}$	$-0,02\cdot10^{-3}$
$-0,02$	$0,016\cdot10^{-3}$	$0,026\cdot10^{-3}$	$0,026\cdot10^{-3}$	$0,017\cdot10^{-3}$
$\bar{m}''=0,02$	$0,037\cdot10^{-3}$	$0,031\cdot10^{-3}$	$0,029\cdot10^{-3}$	$0,016\cdot10^{-3}$
$\sigma_{sc}=0,1$	$0,1\cdot10^{-3}$	$0,038\cdot10^{-3}$	$0,059\cdot10^{-3}$	$0,014\cdot10^{-3}$
$-0,1$	$0,025\cdot10^{-4}$	$0,026\cdot10^{-4}$	$0,026\cdot10^{-4}$	$0,02\cdot10^{-4}$

значения коэффициента направленного светорассеяния $D_{11,0}(\lambda_i, \vartheta)$, а ниже следуют отклонения от них прогнозируемых значений $D_{11,\alpha}^{(sc)}$, полученных при наложении на компоненты исходного вектора β_{sc}, и оператор $W_{D,sc}^{(\alpha)}$ возмущений. В последнем случае это достигается за счет вариаций $\pm\Delta\overline{m}$, накладываемых на начальное значение показателя преломления m_0. В качестве исходных данных при расчете $D_{11,0}(\lambda, \vartheta)$ выбраны модельное распределение «Дымка H» [4], используемое при оценке оптических характеристик атмосферных дымок, и показатель преломления $\overline{m}_0 = 1{,}5 - 0{,}002\,i$. Возмущения в компоненты обращаемого вектора β_{sc} вносились в соответствии с правилом $\beta_{sc,\,\sigma}(\lambda_i) = \beta_{sc,\,0}(\lambda_i)\ [1 + (-1)^i\sigma]$. Согласно этой схеме, относительные возмущения $\Delta(\beta_i)/\beta(\lambda_i)$ равны σ, т. е. не зависят от λ_i. В практике это соответствует так называемому случаю равноточных измерений. Отклонения в вещественной части $\overline{m}'$ в расчетах принимались равными $\pm 0{,}02$. Примерно с такой точностью можно гарантировать определение $\overline{m}'$ из обращения двух поляризационных индикатрис рассеяния, измеренных с помощью поляризационного нефелометра с ошибками не ниже 10 % [6]. Следует также заметить, что выбор «подходящего» значения $\overline{m}_0'$ при обращении оптических характеристик атмосферных дымок в пределах тропосферы можно увязывать со значением относительной влажности воздуха. Соответствующие методологические указания на этот счет можно найти в работе [7].

Обращаясь к табл. 3.1, нетрудно заметить, что при указанных возмущениях ошибки прогноза значений $D_{11}(\lambda_i, \vartheta)$ для всех значений угла рассеяния в среднем лежат в пределах 10—20 %. Это означает, что если априорную оценку «подходящего» значения $\overline{m}$ гарантировать в указанных выше пределах, то корректировка преобразования $\beta_{sc} \to \mathbf{D}_{11}$ по показателю может и не потребоваться, если к тому же погрешность оптических измерений не ниже 10 %. Таким образом, рассматриваемое здесь преобразование обладает относительно большей устойчивостью к неопределенностям в исходных данных, нежели это имело место выше, когда мы касались преобразования $\beta_\pi \to \beta_{ex}$, осуществляемого оператором $W_{ex,\,\pi}^{(\alpha)}$. Следует заметить, что эффективность преобразования $\beta_{sc} \to \mathbf{D}_{11}$ в значительной степени объясняется аналитической близостью функций $\beta_{sc}(\lambda)$ и $D_{11}(\lambda|\vartheta)$. Если обратиться к рядам Ми для соответствующих монодисперсных факторов, то нетрудно заметить аналогию в структуре соответствующих аналитических выражений. Помимо этого добавляется то немаловажное обстоятельство, что в обоих случаях основная информация о спектральном ходе рассматриваемых факторов заключена в амплитудных функциях $a_n(x)$ и $b_n(x)$. Указанные аналитические свойства переходят в полидисперсные интегралы, делая функции $\beta_{sc}(\lambda)$ и $D_{11}(\lambda|\vartheta)$ близкими друг к другу с точки зрения аналитического поведения по λ в пределах некоторого ограниченного интервала Λ.

Обращает на себя внимание и то обстоятельство, что для малых λ ошибки прогноза несколько выше средних значений для всего спектрального интервала. Здесь же наблюдается заметная зависимость от порядка следования знаков в компонентах преобразуемого вектора $\beta_{sc,\,\sigma}$. Эти особенности объясняются тем, что по мере уменьшения λ спектральный ход оптических характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц становится все более сложным в аналитическом отношении и более чувствительным к вариациям спектра размеров частиц и показателя преломления. К изучению этой особенности мы вернемся в четвертой главе, когда построим соответствующий аппарат для изучения аналитических свойств спектральных характеристик светорассеяния.

Аналогичные численные исследования можно провести и для оператора $W^{(\alpha)}_{sc,\,ex}$, который, так же как и $W^{(\alpha)}_{D,\,sc}$, входит в схему интерпретации данных многочастотного касательного зондирования атмосферы. Поскольку соответствующие результаты не слишком отличаются от тех, которые обсуждались выше, мы их приводить не будем. Отметим лишь, что характеристики β_{sc} и β_{ex} как функции λ в пределах видимой области Λ также можно считать родственными друг другу в аналитическом отношении, если, конечно, отсутствует зависимость показателя преломления от λ, а мнимая часть $\bar{m}''$ не превышает 0,02—0,03. Для сильно поглощающих дисперсных сред указанная выше аналогия, естественно, не имеет места [3].

На примере оператора $W^{(\alpha)}_{D,\,sc}$ была рассмотрена оптическая задача, в которой спектральный ход одной оптической характеристики преобразуется в спектральный ход другой характеристики светорассеяния дисперсной средой. Вместе с тем в теории оптического зондирования аэрозольных систем могут возникать задачи, когда требуется осуществить прогноз углового хода (то же самое диаграммы рассеяния) $D_{11}(\vartheta|\lambda)$ по спектральному ходу этой же характеристики светорассеяния. С учетом того, что говорилось выше об аналитической близости преобразуемых функций, в этом случае мы уже будем иметь дело с более сложным функциональным преобразованием. Тем не менее развиваемый в работе операторный подход к обратным задачам оптики и в этом случае позволяет строить соответствующие вычислительные схемы.

Действительно, допустим, что имеется двухмерный массив информации $\{D_{11}(\lambda_i, \vartheta_j),\ i, j=1, \ldots\}$. Соответствующий полидисперсный интеграл будем писать в виде

$$D(\lambda,\ \vartheta)=\int\limits_R Q(\lambda,\ \vartheta,\ r)\,s(r)\,dr, \tag{3.44}$$

опустив в целях упрощения записи подстрочный индекс «11». Если зафиксировать угол рассеяния ϑ, то в пределах спектрального интервала Λ получим частную оптическую характеристику $D(\lambda|\vartheta)$. Аналогично можно рассматривать функцию $D(\vartheta|\lambda)$, где ϑ меняется в пределах $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$. Для этой пары оптических характеристик при условии, что они связаны с одним и тем же локальным объемом рассеивающей среды, можно построить пару взаимных преобразований $D(\lambda|\vartheta) \rightleftarrows D(\vartheta|\lambda)$. Если первую характеристику обозначить через D_ϑ, а вторую — D_λ, связывая подстрочные индексы с фиксированным параметром, то получим следующие операторные соотношения:

$$D_\vartheta = Q_\vartheta Q_{\lambda\alpha}^{-1} D_\lambda = W_{\vartheta\lambda}^{(\alpha)} D_\lambda; \tag{3.45}$$

$$D_\lambda = Q_\lambda Q_{\vartheta\alpha}^{-1} D_\vartheta = W_{\lambda\vartheta}^{(\alpha)} D_\vartheta. \tag{3.46}$$

Интегральные операторы Q_ϑ и Q_λ определяются выражением (3.44) с частными ядрами $Q(r, \lambda|\vartheta)$ и $Q(r, \vartheta|\lambda)$ соответственно. Вместо $D_{11}(\lambda, \vartheta)$ можно рассматривать любой элемент матрицы светорассеяния полидисперсными системами. Операторы $W_{\vartheta\lambda}^{(\alpha)}$ и $W_{\lambda\vartheta}^{(\alpha)}$ существенно расширяют информационные возможности теории поляризованного зондирования, основы которой излагались в первой главе. В пределах настоящего раздела, решая задачи прогноза спектрального хода аэрозольного коэффициента направленного светорассеяния для различных углов, мы в какой-то мере касаемся этой новой пары оптических операторов теории зондирования дисперсных сред. Детальное исследование свойств операторов, преобразующих угловые характеристики светорассеяния в спектральные, выходит за рамки настоящей работы, поскольку они непосредственно не связаны с теми оптическими методами зондирования, теория которых в ней излагается. Тем не менее указать на возможность численного построения подобных преобразований следует. Их практическое применение в интерпретации данных возможно при нефелометрических исследованиях аэрозольных оптических характеристик.

3.3. К теории оптического мониторинга рассеивающей компоненты атмосферы

3.3.1. Некоторые обобщения в методе корректирующих функций

При изложении теории и численных схем обращения в методе многочастотного лазерного зондирования в той или иной мере уже затрагивались вопросы оптического мониторинга рассеивающей компоненты атмосферы. В пределах настоящего параграфа вновь вернемся к оптическому мониторингу атмосферы, но уже с учетом тех новых информационных возможностей, которые открываются в связи с разработкой метода многочастотного касательного зондирования. Прежде чем приступать к построению теории оптического мониторинга рассеивающей компоненты атмосферы, необходимо сделать несколько замечаний относительно того содержания, которое вкладывается в понятие «оптический мониторинг». Поскольку речь идет о рассеивающей компоненте атмосферы, то основная задача мониторинга должна состоять в определении всего комплекса оптических характеристик светорассеяния. Для большей ясности обратимся вначале к лазерному зондированию атмосферы, осуществляемому в пределах некоторого спектрального интервала Λ.

Полагая, что оптическая толщина зондируемого слоя $\tau(\lambda)$ не велика для всех λ из интервала Λ, и следовательно $\exp\{-2\tau(\lambda, Z_2)\} \approx 1$, в качестве первой задачи зондирования можно рассматривать разделение аэрозольного и молекулярного рассеивания по трассе в соответствующем направлении. В этом случае исходная информация, заключенная в многочастотном локационном сигнале $P_\sigma(\lambda, z)$, используется для построения профилей $\beta_\pi^{(а)}(\lambda, z)$ и $\beta_\pi^{(м)}(\lambda, z)$. Для высот $z \geqslant 5$ км объемные коэффициенты аэрозольного светорассеяния сопоставимы либо меньше по значению соответствующих коэффициентов молекулярного рассеяния, поэтому разделение компонент рассеяния следует отнести к одной из основных задач оптического зондирования атмосферы.

Следует заметить, что обычно в практике атмосферно-оптических исследований рассмотренную выше задачу разделения зачастую решают весьма просто, а именно полагают профиль $\beta_\pi^{(м)}(\lambda, z)$ (то же самое $\beta_{sc}^{(м)}(\lambda, z)$) известным (точнее, рассчитанным по бараметрическим формулам). Такой подход вполне применим при интерпретации достаточно грубых оптических измерений, когда ошибка измерений не меньше 15—20 %. Дело в том, что в расчетах $\beta_\pi^{(м)}$ используются некоторые усреднения профиля температуры $\bar{t}(z)$. При наличии в атмосфере аэрозольных частиц, которые заметно поглощают солнечную радиацию, реальные температурные профили содержат достаточно заметную нерегулярную компоненту, обусловленную локальными повышениями температуры в пределах тех высот, где наблюдается повышенная концентрация аэрозолей.

В силу нерегулярного высотного хода оптической плотности аэрозолей (см. пример рис. 3.2) указанная выше температурная компонента $\Delta_t^{(а)}(z)$ имеет нерегулярный высотный ход, и следовательно, непредсказуема на основе усредненной по времени и высотам априорной информации. Если точность оптических измерений достаточно высока (скажем, $\sigma \leqslant 0{,}1$), можно ставить задачу по разделению профилей $\beta_\pi^{(а)}(\lambda, z)$ и $\beta_\pi^{(м)}(\lambda, z)$ с последующей оценкой профиля температуры $t(z)$. Можно надеяться, что полученный профиль будет более содержательным с точки зрения оценки локальных градиентов температуры в атмосфере. Это одно из возможных перспективных применений метода многочастотного лазерного зондирования атмосферы. К сожалению, в настоящее время трудно указать те функциональные соотношения, которые бы связали концентрацию аэрозолей в локальных объемах воздуха с градиентами температуры $\Delta_t^{(а)}(z)$, которые обусловливаются аэрозольным поглощением. Поэтому не представляется возможным содержательный анализ соответствующих обратных задач и схем обработки оптических данных. Можно лишь констатировать, что указанные соотношения существуют, и, следовательно, величины $\beta_{\text{л}}^{(\text{a})}$, $\beta_{\text{л}}^{(\text{м})}$, $\Delta_t^{(\text{a})}$ образуют систему взаимозависимых параметров атмосферы в любом локальном ее объеме. Физические предпосылки для подобного утверждения можно найти в работах [24, 33]. Не останавливаясь более на этой задаче, обратимся к методу многочастотного касательного зондирования атмосферы. В рамках этого метода также можно поставить задачу разделения компонент рассеяния, если система уравнений (3.38) решена относительно $\beta_{sc}(\lambda, h) = \beta_{sc}^{(\text{a})}(\lambda, h) + \beta_{sc}^{(\text{м})}(\lambda, h)$.

В многочастотных вариантах зондирования указанное разделение осуществляется путем решения линейных систем уравнений типа (3.39). В случае метода лазерного зондирования для этого привлекается один оператор перехода, а именно $W_{sc,\,\pi}^{(\alpha)}$, преобразующий $\beta_{\pi}^{(\text{a})}(\lambda)$ в $\beta_{sc}^{(\text{a})}(\lambda)$. В методе касательного зондирования при разделении определяющими являются операторы $W_{sc,\,cx}^{(\alpha)}$ и $W_{D,\,sc}^{(\alpha)}$ (см. (3.37)), которые позволяют из $I_\sigma(\lambda, h)$ выделить путем численного решения системы (3.38) две оптические характеристики, а именно: $\beta_{sc}(\lambda, h)$ и $D_{11}(\lambda, h)$. Ясно, что оптические операторы более существенно доопределяют функционалы $I[\beta_{sc}, D_{11}, \lambda, h]$ в методе касательного зондирования, нежели это имеет место в первом методе. Поэтому можно вполне обоснованно утверждать, что только метод оптических операторов позволяет построить строгую и адекватную теорию интерпретации данных касательного зондирования атмосферы, осуществляемого на основе явления светорассеяния.

Выше мы рассмотрели те задачи, которые следует связывать, прежде всего, с оптическим мониторингом рассеивающей компоненты атмосферы. Вместе с тем их практическое решение существенно усложняется необходимостью априорного знания высотного хода показателя преломления аэрозольного вещества. Только оно делает возможным привлечение к интерпретации вычислительных схем с оптическими операторами типа $W^{(\alpha)}$. Единственным выходом в этой ситуации является соответствующее расширение задач, решаемых в рамках оптического мониторинга, и включение в их число дистанционного определения оптических констант атмосферных аэрозолей. Последнее диктуется также и тем обстоятельством, что реальные аэрозоли поглощают оптическое излучение, и поэтому, помимо всего прочего, необходимо разделение оптической характеристики $\beta_{ex}^{(\text{a})}(z)$ на $\beta_{sc}^{(\text{a})}(z)$ и объемный коэффициент поглощения $\beta_{ab}^{(\text{a})}(z)$. Следует заметить, что это в равной мере может относиться и к молекулярной компоненте, поскольку «идеальных» окон прозрачности в видимом диапазоне не существует, и следовательно, с повышением точности измерительных систем необходима оценка величин $\beta_{ab}^{(\text{м})}(\lambda, z)$. Ниже дадим краткую характеристику вычислительных методов, с помощью которых могут решиться подобные обратные задачи атмосферной оптики.

Обратимся вновь к методу лазерного зондирования. В соответствующих схемах интерпретации исходная оптическая информация, представленная совокупностью $\{S_{ik\sigma},\ i=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots\}$, трансформируется в спектральный ход аэрозольного коэффициента рассеяния $\beta_{sc}^{(a)}(\beta, z)$ и ослабления $\beta_{ex}^{(a)}(\beta, z)$ с помощью операторов $W_{sc,\pi}^{(\alpha)}$ и $W_{ex,\pi}^{(\alpha)}$ непрерывно зависящих от $\bar{m}'$ и $\bar{m}''$. Разность между полученными значениями $\beta_{ex}^{(a)}$ и $\beta_{sc}^{(a)}$ характеризует величину $\beta_{ab}^{(a)}$. В ряде случаев может оказаться предпочтительным оценку $\beta_{ab}^{(a)}$ осуществить с помощью оператора $W_{ab,\pi}^{(\alpha)}$, построение которого выполняется так же, как и остальных операторов.

Если априори задать значения $\bar{m}'=\bar{m}_0'$ и $\bar{m}''=\bar{m}_0''$, то соответствующую схему интерпретации можно условно назвать «открытой». Ошибки $\Delta\bar{m}'$ и $\Delta\bar{m}''$ априорного задания указанных констант определяют точность задания исходных операторов и, следовательно, надежность результатов обращения в целом. Навряд ли представляется возможным, учитывая нерегулярный высотный ход распределения аэрозолей в атмосфере, надежно задать функции $\bar{m}'(\lambda, z)$ и $\bar{m}''(\lambda, z)$. Выше, при изложении теории оптического зондирования аэрозолей мы всегда исходили из того, что можно выделить некий слой от Z_1 до Z_2, в пределах которого $\bar{m}'(\lambda, z)=$ $=\mathrm{const}$. Ясно, что это предположение справедливо в определенных временных границах в связи с переносом аэрозолей и трансформацией их химического состава в условиях реальной атмосферы.

Следует, однако, заметить, что априорные оценки показателя преломления аэрозольного вещества, сколько бы ни казались убедительными, не гарантируют сами по себе достоверности результатов интерпретации. Поэтому вполне естественны попытки введения в схемы обращения приемов корректировки, которые не всегда достигают поставленной цели. В частности, иногда прибегают к дополнительной минимизации невязки $\rho(Ks, \beta_\sigma)$ обращаемого уравнения $Ks=\beta$ по параметру $\bar{m}$. Напомним, что зависимость невязки ρ от $\bar{m}$ обусловливается зависимостью ядра $K(\bar{m}, \lambda, r)$ интегрального оператора K. Полидисперсный интеграл $\beta(\lambda)$ для любого фиксированного λ можно представить в виде скалярного произведения $(K(m|\lambda),\ s)$. Откуда становится ясным, что существует множество пар $(\bar{m}, s(r))$, которые могут удовлетворять условию $\rho(Ks,\ \beta_\sigma)\leqslant\sigma$, т. е. являться формально решениями обратной задачи. Подобная ситуация хорошо известна в практике обращения аэрозольных характеристик (см. рис. 2.9).

Возникающая неопределенность никоим образом не повышает уверенности в надежности результатов обращения. Единственной альтернативой в этом направлении является доопределение обращаемого вектора β_σ соответствующими оптическими измерениями и включение в схему обращения дополнительных уравнений. В теории лазерной локации, которая излагалась во второй главе, подобная коррекция значений $\bar{m}$ ($\bar{m}'$ либо $\bar{m}''$ в зависимости от конкретных особенностей исследуемых аэрозолей) осуществлялась на основе сопутствующих измерений спектральной прозрачности. Если считать известными значения $\Delta(\tau)=\tau(Z_2)-\tau(Z_1)$ для каждой рабочей длины волны λ, то, полагая $\beta_{ex,i}=\Delta_i(\tau)/L(z)$ $(i=1, \ldots, n)$, можно воспользоваться системой уравнений (2.59) для оценки значений $\bar{m}_i=\bar{m}(\lambda_i)$.

При исследовании системы (2.59) мы касались лишь тех свойств функции корректировки $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}[\bar{m}, \lambda]$ $(\lambda \in \Lambda)$, которые были необходимы для обоснования единственности ее решений. Применительно к теории многочастотного касательного зондирования нам потребуется дальнейшая конструктивная доработка рассмотренной ранее методики коррекции результатов обращения. Вначале покажем, что $B_{ex,\pi}[\bar{m}, \lambda]$ не зависит от спектра размеров частиц зондируемого слоя. Действительно, в данном случае речь идет об обращении вектора $\beta_{\pi\sigma}=\{\beta_{\pi i\sigma}\ (i=1, \ldots, n)\}$, поэтому для элементарного слоя $\Delta(z)$ результат этого обращения можно представить в виде вектора $s_\alpha=K_{\pi\alpha}^{-1}\beta_{\pi\sigma}$. Поскольку оператор $K_{\pi\alpha}^{-1}$ зависит только от $\bar{m}$, то компоненты вектора s_α также суть функции этого параметра.

Напомним, что корректирующая функция $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}[\bar{m}, \lambda]$ — полидисперсный интеграл $B_{ex}[\bar{m}, \tilde{s}, \lambda]$ с ядром $K_{ex}[\bar{m}, \lambda, r]$ и распределениями вида $\tilde{s}(r, s_\alpha)$, где s_α — найденный выше вектор. Подставляя вместо s_α его представление $K_{\pi\alpha}^{-1}\beta_{\pi\sigma}$ в интеграл, убеждаемся, что $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}[\bar{m}, \lambda]$ есть действительно функционал от $\bar{m}(\lambda)$. Если для рассматриваемого слоя можно пренебречь зависимостью $\bar{m}$ от длины волны в пределах интервала оптического зондирования Λ, то функция корректировки становится просто функцией параметра $\bar{m}$ и записывается в виде $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}(\bar{m}, \lambda)$. Очевидно, нет особой необходимости доказывать непрерывность этой функции по переменным $\bar{m}$ и λ. Остается лишь напомнить, что каждая функция корректировки $B_{ex,\pi}^{(\alpha)}$ связана с конкретным вектором $\beta_{\pi\sigma}$ Это обстоятельство мы подчеркиваем индексами: верхним «α» и нижним «π».

Независимость функций корректировки от вида спектра размеров частиц означает, что для их численного построения в схемах интерпретации оптических данных требуется, по существу, тот же объем априорной информации, что и для расчета оптических операторов. Нетрудно заметить, что в обоих случаях речь идет об одном и том же аналитическом аппарате теории обратных задач светорассеяния полидисперсными системами частиц. В принципе можно было сразу вводить в методики корректировки данных обращения операторы перехода типа $W^{(\alpha)}$, как это, например, делалось в теории поляризационного зондирования в п. 1.2. Однако выбранный нами способ изложения учитывал известные в атмосферной оптике методики и подходы к оценке показателя преломления аэрозольного вещества. В частности, подобные функции подробно изучались и табулировались в обстоятельной работе [31], посвященной методам оценки оптических констант аэрозольных веществ. Отличие от предлагаемой нами методики состоит в том, что для расчета соответствующих полидисперсных интегралов (спектральных и угловых характеристик светорассеяния) в указанной работе используются априорные данные прямого микроструктурного анализа. Построение корректирующих функций основано на оптической информации, и поэтому естественно дополняет схемы интерпретации данных оптического зондирования.

Использование корректирующих функций в той форме, в какой они строились выше, оправдано, когда $\bar{m}$ не зависит от λ. В этом случае оценка показателя преломления сводится к нахождению корня нелинейного уравнения $B^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}(\bar{m}, \lambda) = \beta_{ex}(\lambda)$ для некоторого $\lambda = \lambda^*$, взятого из интервала оптического зондирования Λ. Это дополнительное измерение $\beta_{ex}(\lambda^*)$ можно считать опорным (то же самое «контрольным») для преобразования $\beta_\pi \to \beta_{ex}$ в пределах Λ. Если в эксперименте представляется возможным одновременное измерение нескольких значений $\beta_{ex}(\lambda)$, то удается оценить достоверность предположения о независимости $\bar{m}$ от λ в пределах λ при прочих равных условиях. Для случая, когда корректировка осуществляется по спектральному ходу $\bar{m}(\lambda)$, необходимо несколько видоизменить схему вычислений.

Допустим, что, как и ранее, осуществляется обращение данных многочастотного лазерного зондирования, т. е. вектора $\boldsymbol{\beta}_{\pi\sigma} = \{\beta_{\pi i\sigma}, i = 1, \ldots, n\}$, и известен опорный вектор $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{ex\sigma} = \{\bar{\beta}_{ex,\,i\sigma}, i = 1, \ldots, n\}$. Черта сверху в последнем случае означает, что коэффициент ослабления определен как среднее значение для всего зондируемого слоя от Z_1 до Z_2 и не связан с каким-либо локальным объемом внутри указанного слоя. Подобное обстоятельство всегда следует подчеркивать при обращении локационных данных, поскольку не представляется возможным сопровождать их локальными измерениями коэффициента ослабления. Исключением являются нефелометрические измерения, выполняемые на борту самолетов-лабораторий.

Прибегая к помощи оптического оператора $W^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}$, можно построить преобразование $\boldsymbol{\beta}_\pi \to \boldsymbol{\beta}_{ex}$ где компонентами указанных векторов служат усредненные по z спектральные измерения $\bar{\beta}_{\pi i}\}$ и $\{\bar{\beta}_{ex,\,i}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Это приводит нас к системе уравнений относительно неизвестных $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\bar{\beta}_{\pi j} = \bar{\beta}_{ex,\,i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.47}$$

Элементы матрицы $\{\omega_{ij}\}$ — функции компонент вектора $\mathbf{m} = \{\bar{m}_i\}$. Численный метод нахождения вектора $\mathbf{m}$ может быть основан на вариационном подходе, т. е. на минимизации соответствующей оптической невязки (квадратичной формы на векторах из Ψ_n^+) вида

$$\rho_{ex,\,\pi}(\mathbf{m}) = \| W^{(\alpha)}_{ex,\,\pi}\boldsymbol{\beta}_{\pi\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{ex,\,\sigma}\|_{l_2}. \tag{3.48}$$

Подстрочный индекс «σ» означает, что соответствующие векторы составлены из оптических измерений, которые являются приближенными величинами. В принципе не обязательно использовать векторный формализм. Можно рассматривать и функционал $\rho[\bar{m}(\lambda)]$, вводя справа в (3.48) норму в L_2. Следует иметь в виду, что лидарные измерения осуществляются с ошибкой, характеризуемой величиной σ_π, а фотометрические — σ_τ. Это обстоятельство не подчеркивалось в записи (3.48), чтобы избежать усложнений. В дальнейшем вместо обозначения $\rho_{ex,\,\pi}$, подстрочная часть которого унаследована от соответствующего оператора, будем использовать запись $\rho_{ex}^{(\pi)}$.

Теперь роль функции корректировки играет форма (3.48), построенная на двух измеренных векторах $\beta_{\pi\sigma}$ и $\beta_{ex,\,\sigma}$. Невязку $\rho_{ex}^{(\pi)}$ можно использовать и для оценки одного значения $\bar{m}$ как некоторого среднего для всего интервала Λ. Если при этом окажется, что $\rho_{ex}^{(\pi)} \leqslant \sigma \|\beta_{ex,\,\sigma}\|$, где σ сопоставимо с σ_{ex}, то найденное значение $\bar{m}^*$ вполне приемлемо в пределах точности оптических измерений как оценка среднего значения функции $\bar{m}(\lambda)$.

То, что в процессе обращения вектора $\beta_{\pi\sigma}$ осуществляется корректировка по показателю преломления с использованием опорного вектора $\beta_{ex,\,\sigma}$, делает в целом методику интерпретации замкнутой в рамках используемой морфологической модели дисперсной среды. Конечно, одного опорного вектора $\beta_{xe,\,\sigma}$ для того, чтобы устранить неопределенность в $\bar{m}'(\lambda)$ и $\bar{m}''(\lambda)$ при обращении лидарных измерений $\{S_\sigma(z, \lambda_i),\ i=1, \ldots, n\}$, недостаточно. Однако во многих задачах, связанных с лазерным зондированием атмосферных аэрозолей, состоятельной оценки $\bar{m}'(\lambda)$ либо $\bar{m}''(\lambda)$ оказывается вполне достаточно для эффективного обращения оптических данных. Вместе с тем это не исключает необходимости дальнейшего развития теории оптического мониторинга атмосферы, в котором геометрические схемы зондирования обеспечивали бы больший объем измерительной информации о характеристиках светорассеяния и тем исключали необходимость априорного задания оптических констант дисперсной компонентны рассеяния.

3.3.2. Метод спектральной прозрачности в задачах корректировки обращения оптических данных

При разработке методик корректировки результатов обращения оптических данных, получаемых с использованием систем дистанционного зондирования атмосферы, мы опирались на спектральные фотометрические измерения. Подобные измерения можно связывать с соответствующим методом оптического зондирования атмосферы, назвав его условно методом спектральной прозрачности. При использовании этого понятия ниже подразумевается, что речь идет об определении спектрального хода $\tau(\lambda)$ в пределах некоторой трассы длиной L. Подчеркивая последнее обстоятельство, будем писать $\tau(\lambda, L)$. В этом методе определяемая оптическая характеристика рассеивающей среды с измеряемой интенсивностью $I(\lambda, L)$ связана соотношением

$$\tau(\lambda, L) = -\ln I(\lambda, L)/I/(\lambda), \qquad (3.49)$$

где $I_0(\lambda)$ — интенсивность источника, расположенного на расстоянии L от приемника.

В задачах оптического зондирования аэрозолей мы, естественно, заинтересованы в уменьшении трассы L, с тем чтобы результаты последующего обращения характеристики $\bar{\beta}_{ex}(\lambda) = \tau(\lambda, L)/L$ были увязаны с возможно меньшим освещенным объемом исследуемой среды. Однако в условиях высокой прозрачности атмосферы величина $I(\lambda, L)$ близка к $I_0(\lambda)$, и операция логарифмирования эмпирических данных становится неустойчивой. В силу этого предпочтительно использовать при малых L (соответственно близких $I(\lambda)$ и $I_0(\lambda)$) регуляризирующие методики оценки $\tau(\lambda)$. Их нетрудно построить на основе метода обратной задачи светорассеяния. Действительно, аэрозольная оптическая толща $\tau^{(a)}(\lambda)$ может быть представлена полидисперсным интегралом с ядром K_{ex} (r, λ), т. е. виде $L \cdot (K_{ex}s)$ (λ). Используя обратный регуляризирующий оператор $K_{ex, \alpha}^{-1}$, нетрудно построить преобразование $\tau_\sigma \rightarrow \tau_\alpha$. Соответствующие примеры обработки экспериментального материала приведены в работе [15]. Однако так или иначе в атмосферно-оптических исследованиях метод спектральной прозрачности остается все же методом оценки пространственно усредненных (интегральных) характеристик рассеивающей компоненты атмосферы. В этом отношении уместно заметить, что в методе лазерного зондирования предельное пространственное разрешение $\Delta_{\min}(z)$ сопоставимо с величиной $c\,\Delta t/2$, где Δt — длительность генерируемого лазером светового импульса и c — скорость света. Поскольку Δt может достигать малых значений (порядка 10^{-6} с), то лазерная импульсная локация выступает, прежде всего, как метод локального исследования атмосферы и прежде всего ее рассеивающей компоненты. Это делает ясным, почему измерения $\tau(\lambda)$ использовались нами для корректировки результатов обращения лидарных измерений, а не наоборот. Оптическая информация, получаемая различными методами при исследовании пространственно протяженных рассеивающих сред, существенно различна в указанном выше смысле, и требуется определенная осторожность при совместном обращении соответствующих измерений.

Обращение спектральной оптической толщи $\tau(\lambda)$, измеренной, скажем, с помощью солнечного радиометра и относящейся ко всей толще атмосферы, является одной из распространенных обратных задач оптики аэрозоля, если судить по количеству работ, публикуемых на эту тему. Интерес к этой задаче, по всей видимости, обусловлен не той информацией, которую можно здесь получить, а простотой вычислительных схем обращения и доступностью оптических измерений.

В связи с использованием спектрального хода $\tau(\lambda)$ для корректировки результатов обращения информации, получаемой с помощью более сложных оптических систем, представляет интерес дать краткий анализ информационных возможностей метода спектральной прозрачности в исследовании аэрозолей. Разделение $\tau(\lambda)$ на аэрозольную компоненту $\tau^{(a)}(\lambda)$ и молекулярную $\tau^{(м)}(\lambda)$

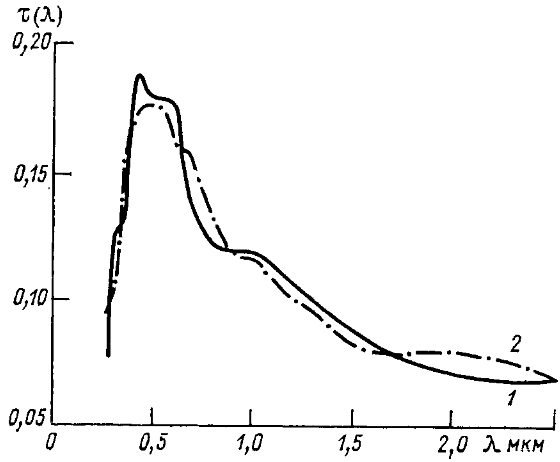

Рис. 3.3. Примеры двух реализаций спектрального хода аэрозольной оптической толщи по данным [2].

осуществляется, как правило, на основе радиозондовых измерений и последующем расчете профилей $\beta_{sc}^{(м)}(\lambda, z)$. В качестве примера на рис. 3.3 приведены две реализации $\tau^{(a)}(\lambda)$, относящиеся ко всей толще атмосферы по данным работы [2]. Их обращение на основе тех методов, о которых шла речь в п. 1.4 (подробно методика анализа и обращения $\tau^{(a)}(\lambda)$ изложена в работе [15]), приводит к распределениям, представленным на рис. 3.4.

Полученные спектры несущественно отличаются от модельного распределения степенного вида с показателем $\nu=-3$ (распределение Юнге). При этом оптическая характеристика $\beta_{ex}[s_M, \lambda]$ с указанным модельным распределением хорошо аппроксимирует измеренные для всех $\lambda \geqslant 0{,}5$ мкм. Следует заметить, что подобный результат является вполне типичным при обращении спектральной аэрозольной толщи $\tau^{(a)}(\lambda)$. Значительное пространственное усреднение приводит к распределениям, близким к хорошо известным типовым спектрам размеров аэрозольных частиц, лежащих в основе так называемых микроструктурных аэрозольных моделей. Этот вывод в полной мере подтверждается обстоятельными исследованиями в работе [30]. В силу этого спектральные измерения $\tau^{(a)}(\lambda)$ предпочтительно рассматривать как источник информации о среднем значении показателя преломления аэрозольного вещества в атмосфере. Извлечение этой информации может быть осуществлено в рамках метода корректирующих функций, о чем подробно говорилось выше.

Интересно отметить, что при измерении $\tau^{(a)}(\lambda)$ с помощью солнечного радиометра можно заметно увеличить получаемый объем измерительной информации за счет измерения рассеянной

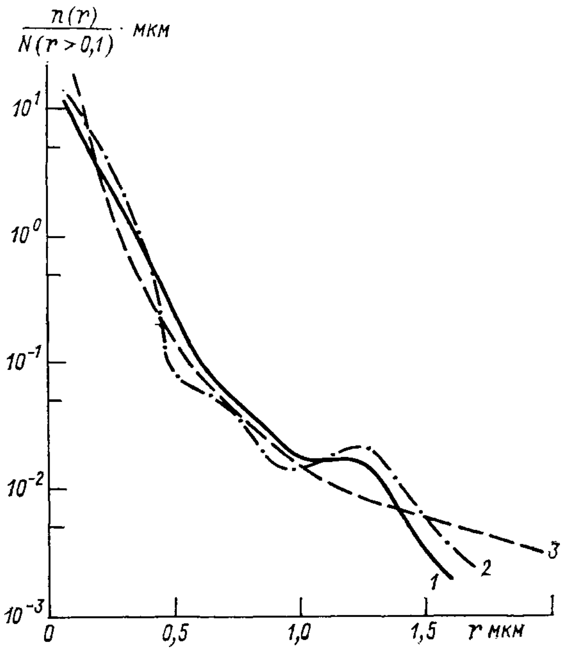

Рис. 3.4. Спектры размеров по результатам обращения спектральных данных (кривые *1*, *2* на рис. 3.3).

Кривая *3* — степенное распределение с показателем $\nu=3$.

солнечной радиации в области ореола. Практическая реализация этой возможности описана в работе [29], в которой спектральные измерения осуществлялись на длинах волн 0,399; 0,55; 0,63; 1,03 мкм. Ореольные измерения охватывали область углов $\vartheta \leqslant 5°$. Измерительная информация теперь представляется массивами $\{\tau_i^{(a)}\}$ и $\{D_{11,\,ij},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ j=1,\ \ldots,\ m\}$. В предположении однократного рассеяния в области ореола эти данные объединяются в одну систему уравнений относительно функции распределения $s(r)$, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_R K_{ex}(\overline{m},\ \lambda_i)\, s(r)\, dr = \tau_i^{(a)}/\overline{L}; \\ &\int\limits_R (2x^2)^{-1}\{i_1(\lambda_i,\ \vartheta_j,\ r) + i_2(\lambda_i,\ \vartheta_j,\ r)\}\, s(r)\, dr = D_{11,\,ij}/\overline{L}, \end{aligned}\right\}, \quad (3.50)$$

где $\bar{L}$ — эффективная геометрическая толща атмосферы [29]. Весь объем измерительной информации здесь используется для оценки спектра размеров частиц при априорном задании показателя преломления, как это делалось в работе [29].

Включение ореольных измерений в единую схему обращения позволяет получить более достоверную информацию о спектре частиц в зондируемом столбе атмосферы. Это связано с тем, что ореольные измерения в значительно большей степени чувствительны к концентрации крупных частиц, нежели спектральный ход $\bar{\beta}_{ex}^{(a)}(\lambda)$ для выбранного интервала оптического зондирования $\Lambda = [0{,}399;\ 1{,}03$ мкм$]$. Для иллюстрации этого в табл. 3.2 приведены значения величин

$$\eta_{il} = \int_{r_l}^{r_{l+1}} K_{ex,\,i}(r)\,s(r)\,dr \Bigg/ \int_{R_1=0{,}05}^{R_2=15} K_{ex,\,i}(r)\,s(r)\,dr,$$

рассчитанные по результатам обращения. Как следует из таблицы, спектральный ход $\tau^{(a)}(\lambda)$ в большей степени чувствителен к вариациям фракции частиц в пределах размеров $0{,}1 \leqslant r \leqslant 1$ мкм, поскольку их оптический вклад в $\tau_i^{(a)}$ является определяющим. Измерения $D_{11}(\lambda, \vartheta)$ позволяют более достоверно оценить концентрацию частиц, размеры которых $r > 2$ мкм.

Если вернуться к проблеме корректировки лидарных измерений на основе оптических данных $\{\tau_i^{(a)},\ D_{11,\,ij}\}$, то следует заметить, что невязка $\rho^{(\pi)}$, которая теперь должна рассчитываться с использованием двух оптических операторов перехода $W_{ex,\,\pi}^{(\alpha)}$ и $W_{D,\,\pi}^{(\alpha)}$ (см. (3.48)), будет более информативна относительно значений $\bar{m}$. Во всяком случае соответствующие оценки $\bar{m}^*$ должны быть более достоверными, поскольку теперь $\rho^{(\pi)}$ «охватывает» больший интервал размеров зондируемых частиц, что очень важно при больших

Таблица 3.2

Значения относительного оптического вклада отдельных фракций частиц в характеристики светорассеяния единичными освещенными объемами (%) для $m = 1{,}5-0{,}01i$ [29].

Измерение	$r_l + r_{l+1}$							
	0,05—0,1	0,1—1	1—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—15
$\tau(\lambda)$ $\lambda = 0{,}55$ мкм	2,37	77,9	6,19	3,9	4,0	3,8	1,5	0,8
$\lambda = 0{,}399$ мкм	6,0	75,6	5,7	3,3	3,9	3,9	1,2	0,7
$D_{11}(\lambda, \vartheta)$ $\lambda = 0{,}55$ мкм $\vartheta = 1{,}88°$	0,2	15,3	7,1	20,1	36,2	11,8	4,6	4,8

пространственных усреднениях оптических данных. По всей видимости, это все, что могут добавить ореольные измерения при исследовании атмосферных аэрозолей. Сами по себе ореольные измерения мало чувствительны к вариациям показателя преломления и в этом плане несущественно «обогащают» зависимость невязки $\rho^{(\text{л})}$ от искомой константы $\bar{m}$.

Корректировка обращения лидарных измерений с использованием $\tau^{(\text{а})}(\lambda)$ является простейшей, но далеко не самой эффективной. Бесспорно, лучшим вариантом является использование самолетной оптической лаборатории, осуществляющей по трассе полета периодические измерения оптических характеристик атмосферы с помощью поляризационного нефелометра. Особая ценность этих измерений состоит в возможности прямого разделения $\beta_{ex}^{(\text{а})}$ на компоненты $\beta_{sc}^{(\text{а})}$ и $\beta_{ab}^{(\text{а})}$. В методах корректировки это соответствует оценке вещественной $\bar{m}'$ и мнимой $\bar{m}''$ частей комплексного показателя преломления аэрозольного вещества. В этих же целях можно использовать и данные так называемого ракетного зондирования атмосферы [18].

Изложение метода спектральной прозрачности в главе, посвященной теории касательного зондирования, далеко не случайно. Дело в том, что если в геометрической схеме этого метода положить $\psi_0=\pi/2$ (отсчет угла ведется от вертикали Y в точке O рис. 3.11), то измеряемые в точке D интенсивности пропорциональны $\exp\{-\tau(\overline{D'D})\}$. Роль функции источника играет величина $c(\lambda)$. Таким образом, фотометрические измерения вдоль секущих (то же самое трасс переменной длины) при необходимости могут быть выполнены оптическими системами космического зондирования.

Разработка соответствующей теории интерпретации в настоящее время ведется в связи с зондированием профилей концентрации газовых составляющих. При этом длины волн зондирования выбираются в линиях поглощения соответствующих газов. Измеряемая оптическая толщина теперь содержит три составляющих, а именно: $\tau^{(\text{а})}$, $\tau^{(\text{м})}$ и $\tau_{ab}^{(\text{м})}$. Первые два слагаемых отвечают за рассеяние аэрозольной и молекулярной компонент. Величина $\tau_{ab}^{(\text{м})}$ обусловлена указанным выше поглощением. Необходимость оценки $\tau_{ab}^{(\text{м})}$ вновь нас приводит к задаче разделения, математическая формулировка которой аналогична выражениям (3.39). Методы решения подобных систем мы рассмотрим в четвертой главе.

3.3.3. Корректировка обращения оптических данных в методе касательного зондирования

Теория многочастотного касательного зондирования рассеивающей компоненты атмосферы, изложенная выше, основывалась на операторах $W_{sc,ex}$ и $W_{D,sc}$, которые непрерывно зависят от оптических констант $\bar{m}'$ и $\bar{m}''$ вещества исследуемой дисперсной среды. Строго говоря, они являются операторозначными функциями указанных параметров [8]. Практические приложения теории требуют соответствующего доопределения системы уравнений (3.37) и построения замкнутых схем интерпретации оптических данных, получаемых в рассматриваемом методе дистанционного зондирования атмосферы.

Первая возможность построения подобных схем основывается на использовании оптических данных по спектральной прозрачности, т. е. измерений $\tau(\lambda, Z_1)$ и $\tau(\lambda, Z_2)$ для некоторого набора длин волн $\{\lambda_i\}$ из интервала Λ. Величины Z_1 и Z_2 указывают, как и ранее, на интервал высот $[Z_1, Z_2]$, в пределах которого справедливы исходные соотношения метода касательного зондирования. В соответствии с алгоритмами обращения, изложенными в п. 3.1, данные $\{\tau(\lambda_1, Z_1)\}$ используются в качестве граничных условий для системы уравнений переноса. Для корректировки результатов обращения по показателю $\bar{m}$ у нас остается тогда информация в виде массива данных $\{\tau(\lambda_i,\ Z_2),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$. В простейшей форме система уравнений корректировки примет вид

$$B_\tau(\bar{m}_i,\ Z_2) = \tau_\sigma(\lambda_i,\ Z_2), \quad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{3.51}$$

В более общем случае строится форма $\rho_\tau(\mathbf{m})$ типа (3.48), в которую войдут соответствующие оптические операторы. Следует, однако, иметь в виду, что подобный способ корректировки встречает определенные затруднения. Дело в том, что если рассматривать слой атмосферы от $Z_1 = 10$ км до $Z_2 = 50$ км, поскольку к нему прежде всего относятся уравнения переноса вида (3.13), то соответствующие величины $\Delta_i(\tau) = \tau(\lambda_i, Z_2) - \tau(\lambda_i,\ Z_1)$ будут чрезвычайно малыми, и замерить их наземными средствами с надлежащей точностью навряд ли удастся. Несколько лучше обстоит дело в случае зондирования нижней стратосферы в условиях повышенной аэрозольной замутненности, что наблюдается, например, при извержении вулканов [32]. Поэтому в целом трудно говорить об эффективности корректировки обращения данных касательного зондирования по спектральным фотометрическим измерениям $\tau(\lambda)$. Большей эффективности можно добиться на основе периодических прямых заборов частиц из воздуха и оценки их оптических констант, как это, например, делалось в работе [28] при высотном лазерном зондировании атмосферы.

Вместе с тем если последовательно развивать методологию оптического мониторинга, то нетрудно прийти к идее объединения рассмотренных выше методов касательного и лазерного зондирования в единый метод оптического исследования атмосферы, преодолевая тем самым неопределенности в интерпретации данных, которые присущи каждому из них в отдельности. Будем полагать, что лидар, так же как и спектральный фотометр, с помощью которого осуществляется касательное зондирование, установлен на борту станции космического наблюдения. Лидарные измерения по времени и пространству необходимо согласовать с фотометрическими, с тем чтобы получаемая оптическая информация о светорассеянии в атмосфере составляла единый взаимосвязанный массив исходных данных. В частности, если справедливо предположение о сферической однородности полей оптических характеристик атмосферы, то пространственное согласование геометрических схем зондирования осуществляется достаточно просто и специальных пояснений он требует. В простейшем варианте синхронного зондирования достаточно в каждой точке на орбите полета станции (например, в точке D рис. 3.1) едновременно с фотометрическими измерениями лидаром измерять профили $\beta_\pi(z)$ по вертикали. Задавая для зондируемого аэрозольного слоя, расположенного в пределах $[Z_1, Z_{2s}]$, значение показателя преломления $\overline{m}$, по данным лазерного зондирования можно осуществить прогноз профилей $\beta_{ex}^{(a)}(z)$ с помощью оператора перехода $W_{ex,\pi}^{(\alpha)}$ для всех длин волн, на которых ведутся фотометрические измерения.

Но с другой стороны, как уже было показано выше, при известном значении $\overline{m}$ (либо $\overline{m}\lambda_i$) $(i=1, \ldots, n)$, если показатель зависит от длины волны λ) профиль компонент вектора $\beta_{ex}^{(a)}$ также может быть восстановлен и по данным многочастотного касательного зондирования. Это обстоятельство открывает возможность взаимной корректировки результатов обращения оптических данных, получаемых методами лазерного и касательного зондирования. При этом главным является то, что корректировка по показателю возможна в пределах каждого локального объема зондируемой среды, ограниченного допустимым пространственным разрешением в эксперименте. Поэтому обращение совместной оптической информации позволяет построить профили $\beta_{ex}(\lambda, z)$, $D_{11}(\lambda, \vartheta, z)$, а также и $\overline{m}(\lambda, z)$. Подобное сочетание двух методов в одной схеме зондирования существенно выигрывает по сравнению с той корректировкой, которая возможна при использовании спектрального хода оптической толщи $\Delta_\tau(\lambda)$, измеряемой методом спектральной прозрачности.

Предлагаемый подход к зондированию атмосферы можно было бы условно назвать комплексным оптическим методом. Однако подобное название навряд ли будет оправданным в полной мере. Действительно, в основе зондирования здесь лежит одно физическое явление, а именно явление рассеяния оптического излучения на частицах и молекулах воздуха. Поэтому разумно говорить просто об одном методе с более сложной геометрической схемой зондирования, в которой осуществляются синхронные измерения по двум различным направлениям в атмосфере. Одно из них направлено по радиусу в каждой точке наблюдения D, движущейся по круговой орбите, второе — параллельно некоторому заданному вектору (на рис. 3.1 это вектор $\mathbf{n}_0$). В связи с этим замечанием ниже будем просто говорить о методе оптического зондирования рассеивающей компоненты атмосферы с орбитальной станции. Соответствующая оптическая информация, получаемая в этом методе, теперь представлена массивом измерений $\{\beta_{\pi, ij}, I_{ij}, i=1, \ldots, n; j=1, \ldots, m\}$, где индекс i связан с дискретным набором длин волн зондирования $\{\lambda_i\}$, а j обусловлен пространственной дискретизацией по переменной h (то же самое z).

В предлагаемом методе варианты построения корректирующих функционалов могут быть самыми разнообразными, и выбор конкретного из них должен осуществляться с учетом возможностей измерительного комплекса и условий проведения оптических экспериментов. Не вдаваясь в подробные обсуждения, которые были бы пока совершенно излишними, кратко обсудим лишь два простых варианта. В первом из них оценку показателя преломления свяжем с оптической невязкой вида

$$\rho_I^{(\pi)}(\mathbf{m}) = \{p_1 \| \boldsymbol{\beta}_{\pi\sigma} - W_{\pi D}^{(\alpha)} \mathbf{D}_{11} \|_{l_2}^2 + p_2 \| \boldsymbol{\beta}_{\pi\sigma} - W_{\pi, ex}^{(\alpha)} \boldsymbol{\beta}_{ex} \|_{l_2}^2 \}^{1/2}, \quad (3.52)$$

где p_1 и p_2 — некоторые весовые множители, а $\vec{\mathbf{D}}_{11} = \{D_{11}(\lambda_i)\}$ и $\beta_{ex} = \{\beta_{ex}(\lambda_i)\}$ определяются из решения систем (3.38) и (3.39) для любых фиксированных значений $\bar{m}_i = \bar{m}(\lambda_i)$. Компоненты указанных векторов суть непрерывные функции по переменным m_i. В схеме обращения они определяются той оптической информацией, которая получена по схеме касательного зондирования, т. е. вектором измерений $\mathbf{I}_\sigma$. Этот факт подчеркивается подстрочным индексом «I» в выражении (3.52). Невязка (3.52) записывается для каждого элементарного слоя, заключенного между точками z_j и z_{j+1} по высоте. Минимизация этой квадратичной формы дает оценку величин $\bar{m}(\lambda_i, z_j)$ для всех i и j. Порядок соответствующих вычислений определяется структурой итерационной схемы (3.38).

Практическая реализация подобной схемы интерпретации требует разработки специального программного обеспечения. При этом ее необходимо дополнить функциональными соотношениями, учитывающими вклад в функцию источника, обусловленный отражением от подстилающей поверхности, а также эффекты многократного рассеяния. Изложение этих вопросов выходит за рамки настоящего раздела.

Применение невязки (3.52) в схемах интерпретации оправдано в тех случаях, когда в нашем распоряжении находится достаточно «качественная» исходная информация (скажем, $\sigma \leqslant 0{,}1$). В противном случае разумно прибегнуть к некоторым упрощениям, сообразуясь с возможностями используемой оптической аппаратуры. В частности, определенные затруднения вызывает измерение с орбиты профилей $\beta_{\pi\sigma}$ для слоя 10 км$\leqslant z \leqslant$50 км в силу малых объемных коэффициентов обратного рассеяния на этих высотах. В этой ситуации разумно отказаться от попыток их корректного измерения и прибегнуть к оценке интегральной величины

$$\bar{\beta}_\pi = \int_{Z_1}^{Z_2} S_\sigma(z)\, dz / (Z_2 - Z_1) \quad (3.53)$$

для каждой рабочей длины λ_i. Наличие одного усредненного по слою измерения делает возможной оценку среднего для слоя показателя $\bar{m}$. Корректировка векторов β_{ex} и D_{11}, получаемых по схеме (3.38) — (3.39) на основе обращения вектора $\mathbf{I}_\sigma$, осуществляется также в среднем для зондируемого слоя в целом. Применение одночастотного лидара заставляет нас отказаться от учета зависимости $\bar{m}(\lambda)$, что существенно упрощает вычислительные схемы обращения, разумеется с соответствующей потерей количества информации, получаемой об атмосфере.

Второй вариант схемы интерпретации в предлагаемом методе оптического зондирования с космической орбиты основывается на квадратичной форме вида

$$\rho_{\text{л}}^{(I)}(\mathbf{m}) = \left\| \mathbf{I}_\sigma - I\left(\beta_{\text{л}\sigma}\right) \right\|_{l_2}. \qquad (3.54)$$

Компоненты вектора $\mathbf{I}(\beta_{\text{л}\sigma})$ суть величины $I(\lambda_i, h)$ $(i=1,\ldots,n)$, рассчитанные через $D_{11}(\lambda_i, z)$ и $\beta_{ex}(\lambda_i, z)$ которые, в свою очередь, восстанавливаются по экспериментальному вектору $\beta_{\text{л}\sigma}$ для фиксированных значений $\bar{m}(\lambda_i)$ с помощью операторов $W_{D\text{л}}^{(\alpha)}$ и $W_{ex,\,\text{л}}^{(\alpha)}$ соответственно. Иными словами, $\mathbf{I}(\beta_{\text{л}\sigma})$ — это значения интенсивностей спектрального оптического сигнала при касательном зондировании атмосферы, прогнозируемых по данным многочастотного лазерного зондирования с использованием метода обратной задачи (то же самое метода оптических операторов).

Формально выражения (3.52) и (3.54) эквивалентны друг другу, однако при обработке экспериментальной информации их эффективность может быть существенно различной. Выбор способа оценки показателя требует проведения предварительных численных экспериментов с учетом характеристик реальной атмосферы и информационных возможностей соответствующих технических систем зондирования из космоса. Изложение постановки задач моделирования и обсуждение его результатов выходит за рамки настоящего исследования, целью которого является разработка методов обращения данных по светорассеянию в атмосфере.

В ряде случаев невязку (3.52) можно упростить, ограничившись одним слагаемым, т. е. записав ее в виде

$$\rho_I^{(\text{л})}(\mathbf{m}) = \left\| \bar{\beta}_{\text{л}\sigma} - W_{\text{л},\,ex}^{(\alpha)} \beta_{ex} \right\|_{l_2}. \qquad (3.55)$$

Для того чтобы понять, как соотносятся оценки $\bar{m}$ в этих двух вариантах, необходимо обратиться к предыдущему разделу, где говорилось о возможном использовании значений коэффициента направленного светорассеяния D_{11} в схемах обращения. Как показывает численный анализ оптических измерений, если погрешность не ниже 10 %, то упрощенный вариант невязки (3.55) вполне оправдан при обработке экспериментальных данных. Аналогичное упрощение можно записать и для (3.54), используя в невязке один оператор $W_{ex,\,\text{л}}$. Имеем

$$\rho_{\text{л}}^{(I)}(\mathbf{m}) = \left\| \beta_{ex} - W_{ex,\,\text{л}}^{(\alpha)} \beta_{\text{л}\sigma} \right\|_{l_2}. \qquad (3.56)$$

Вектор β_{ex} находится по вектору $\mathbf{I}_\sigma$ и непрерывно зависит от параметра $\bar{m}$, так же как и оператор в (3.56).

При обработке данных многочастотного зондирования с первого взгляда достаточно трудно отдать предпочтение какому-либо из рассмотренных вариантов корректировки. Однако в простых случаях выбор напрашивается сам собой. Так, например, выражение (3.55) разумно использовать, когда лазерное зондирование осуществляется на одной длине волны, скажем λ^*, а фотометрические измерения в спектральном интервале Λ_j. В этом случае оценку показателя $\bar{m}(\lambda^*)$ удобно выполнить путем численного решения нелинейного уравнения вида

$$B_{\text{л}}^{(ex)}(\bar{m},\ \lambda^*) = \beta_{\text{л}\sigma}(\lambda^*), \tag{3.57}$$

т. е. с использованием корректирующих функций. Численное решение (3.57) эквивалентно минимизации невязки (3.55) для одного лидарного измерения. Если при этом число спектральных фотометрических измерений невелико (скажем, $n \leqslant 3$), то построение функции корректировки для уравнения (3.57) можно выполнить в параметрической форме, т. е. прибегнуть к построению параметрического полидисперсного интеграла $B_{\text{л},M}^{(ex)}(\bar{m}, \lambda^*)$. При изменении ситуации на обратную, т. е. когда в геометрической схеме зондирования с орбиты используются многочастотный лидар и одночастотный солнечный фотометр, мы вынуждены использовать квадратичную форму (3.56) и соответствующий ей аналог типа (3.57) с корректирующей функцией $B_{ex}^{(\pi)}(\bar{m},\ \lambda^*)$.

В связи с тем что одночастотные варианты зондирования наиболее просты в техническом отношении, необходимо кратко коснуться соответствующих методик интерпретации. В рассматриваемом случае оба измерительных канала в схеме зондирования имеют одну рабочую частоту. Возможные схемы интерпретации могут быть самыми различными в зависимости от вида и достоверности привлекаемой при этом априорной информации. Простейший вариант может быть связан с введением в схему интерпретации лидарного отношения $\bar{b}$ как некой средней величины для всего зондируемого слоя. Используя лидарные измерения профиля $\beta_{\text{л}}(z)$, можно рассчитать профиль $\beta_{ex}(z) = \bar{b}\beta_{\text{л}}(z)$ и, следовательно, оценить величины $\Delta_l(\tau)$ $(l = 1, \ldots, m)$ в системе (3.23), которая становится в результате вполне определенной относительно вектора $\mathbf{I}$. Таким образом, ценой априорного задания лидарного отношения в рамках рассматриваемого метода зондирования удается построить высотный ход коэффициента направленного светорассеяния для фиксированного угла ϑ (см. рис. 3.1). Эта оптическая характеристика играет роль функции источника в уравнениях переноса, поэтому ее знание необходимо для численных расчетов по переносу солнечной радиации в атмосфере.

В заключение остается заметить, что геометрическая схема зондирования, сочетающая в себе лидарные и фотометрические измерения по параллельным секущим, позволяет учесть в схемах интерпретации неоднородность в пространственном распределении аэрозольной компоненты. Соответствующие аналитические построения достаточно просты и могут быть опущены.

3.3.4. Примеры численного анализа основных операторов теории многочастотного оптического зондирования

Точность оценки показателя преломления, получаемой на основе минимизации невязок типа (3.55) и (3.56), в значительной степени определяется характером зависимости операторов $W^{(\alpha)}$ от искомого параметра $\bar{m}$. В первом приближении эту зависимость можно характеризовать вариацией нормы операторов, т. е. величиной $\delta_{\bar{m}}(\|W\|)$, обусловленной отклонением $\bar{m}$ от исходного значения $\bar{m}_0$. Чем больше эта величина, тем более четко локализуется экстремум невязки ρ и тем точнее можно оценить $\bar{m}^*$ при прочих равных условиях. К сожалению, анализ точностных характеристик в указанных терминах не очень нагляден, поэтому ниже ограничимся менее строгим, но более простым способом исследования эффективности схем интерпретации.

Будем изучать преобразования $\beta_\pi \to \beta_{ex}$ и $\beta_{ex} \to \beta_\pi$, которые осуществляются операторами $W^{(\alpha)}_{ex,\pi}$ и $W^{(\alpha)}_{\pi,ex}$ соответственно. Зависимость указанных операторов от показателя преломления непосредственно влияет на эффективность этих преобразований, что позволяет исследовать одновременно и свойства самих преобразований, и зависимость операторов от параметра $\bar{m}$.

В качестве исходного экспериментального материала были выбраны значения коэффициентов направленного светорассеяния, измеренные для атмосферной дымки приземного слоя $D_{11}(\lambda_i, \vartheta = 50°)$ и $D_{11}(\beta_i, \vartheta = 178°)$. Измерения осуществлялись с помощью двух поворотных нефелометров [21]. Значения $D_{11}(\lambda_i, \vartheta = 50°)$ отождествлялось в наших расчетах с коэффициентом аэрозольного рассеяния $\beta_{sc,i} = \beta_{sc}(\lambda_i)$ в соответствии с так называемым нефелометрическим методом измерения β_{sc} [21], а $D_{11}(\beta_i, \vartheta = 178°)$ — с $\beta_{\pi i} = \beta_\pi(\lambda_i)$. В численных исследованиях, которые последуют ниже, подобные допущения не столь существенны, поскольку эффективность оптических операторов можно изучать для любых массивов оптической информации. Представление о преобразовании $\beta_{cs} \to \beta_\pi$ может дать и оператор, преобразующий совокупность $\{D_{11,\sigma}(\lambda_i, \vartheta = 50°),\ i = 1, \ldots, n\}$ в $\{D_{11,\alpha}(\lambda_i, \theta = 178°)\}$. С точки зрения атмосферной оптики и разработки эффективных методик интерпретации нефелометрической информации это не менее интересная задача.

С учетом методологических и измерительных погрешностей можно полагать, что общая ошибка определения указанных характеристик β_{sc} и β_π не превышала 20 %. Помимо этого следует заметить, что используемый нами экспериментальный материал, представленный реализациями векторов $\beta_{\pi\sigma}(\lambda_i),\ i = 1, \ldots, n\}$ и $\beta_{sc,\sigma} = \{\beta_{sc,\sigma}(\lambda_i)\}$, содержит значительные случайные компоненты (нерегулярные составляющие). Последние обусловлены флуктуациями концентрации частиц в малых освещенных объемах. В частности, в данном случае освещенный объем в среднем не превышал 5 л для используемой аппаратуры. Основной причиной подобных флуктуаций для нефелометров с открытым объемом следует считать влияние атмосферной турбулентности на спектр размеров частиц. Учет подобных нерегулярных компонент очень важен при оценке эффективности методик интерпретации экспериментальных данных. Дело в том, что все оптические характеристики, восстанавливаемые с помощью операторов $W^{(\alpha)}$, сами по себе являются вполне регулярными (гладкими) функциями. Подчеркивая это обстоятельство, преобразование $\beta_\pi \to \beta_{sc}$ следует писать в виде

$$\beta_{\pi\sigma} \to \beta_{sc,\,\alpha}, \tag{3.58а}$$

что выше всегда и делалось.

Вторая особенность преобразования (3.58а) состоит в том, что размерность получаемого вектора $\beta_{sc,\,\alpha}$ в принципе может быть любой (для этого достаточно знать лишь спектральный ход $m(\lambda)$ в любой, наперед заданной системе узлов $\{\lambda_j\}$ в интервале Λ), поэтому ниже не будем делать различий между векторами, снабженными индексами «α» и соответствующими непрерывными аналогами. В частности, результатом преобразования (3.58а) вполне можно считать и непрерывный спектральный ход $\beta_{sc,\,\alpha}(\lambda)$.

Очевидно также, что сравнивать между собой векторы $\beta_{sc,\,\alpha}$ и $\beta_{sc,\,\sigma}$ навряд ли разумно при оценке эффективности преобразования, осуществляемого операторами $W^{(\alpha)}_{sc,\,\pi}$. Соответствующие им непрерывные аналоги $\beta_{sc,\,\alpha}(\lambda)$ и $\beta_{sc,\,\sigma}(\lambda)$ принадлежат различным классам функций (см. п. 1.3). В связи с этим обратимся к операторам восстановления $V^{(\alpha)}$, которые были введены выше в теорию обратных задач оптики дисперсных сред в первой главе и до сих пор не использовались в схемах интерпретации оптических измерений. Операторы $V^{(\alpha)}$ определены в той же мере, что и операторы перехода $W^{(\alpha)}$, т. е. требуют для своей численной реализации того же объема априорной информации. В частности, оператор $V^{(\alpha)}_{sc}$ для рассматриваемого здесь случая позволяет осуществить преобразование

$$\beta_{sc,\,\sigma} \to \beta_{sc,\,\alpha}. \tag{3.58б}$$

Чтобы в дальнейшем не путать векторы, получаемые с помощью (3.58а) и (3.58б), первый вектор будем обозначать через $\beta^{(\pi)}_{sc,\,\alpha}$, подчеркивая то обстоятельство, что его компоненты прогнозируются по спектральному ходу оптической характеристики $\beta_{\pi\sigma}(\lambda)$.

Преобразование (3.58б), осуществляемое оператором $V^{(\alpha)}_{sc}$, следуя изложенной ранее концепции, рассматривается как восстановление непрерывного хода характеристики $\beta_{sc}(\lambda)$ по дискретным приближенным измерениям в пределах интервала оптического зондирования Λ. Однако в контексте данного раздела нас интересуют не аппроксимационные задачи (о них подробнее речь пойдет ниже), а то, что оператор $V_{sc}^{(\alpha)}$, действуя на вектор $\beta_{sc,\sigma}$, подавляет в нем случайную (нерегулярную) компоненту и порождает вполне регулярную функцию $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$. Функции $\beta_{sc,\alpha}^{(\pi)}(\lambda)$ и $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$, порождаемые преобразованиями (3.58а) и (3.58б), сопоставимы по своим аналитическим свойствам (скажем, по гладкости). Поэтому их сопоставительный анализ дает возможность оценить и исследовать эффективность указанных преобразований при условии, конечно, что исходные экспериментальные векторы $\beta_{sc,\sigma}$ и $\beta_{\pi\sigma}$ связаны с одним и тем же рассеивающим объемом. Оператор $V_{sc}^{(\alpha)}$ есть интегральный оператор и обладает свойством подавлять нерегулярные (осциллирующие) компоненты в экспериментальных векторах. Поскольку функции $\beta_{sc,\alpha}^{(\pi)}(\lambda)$ и $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$ характеризуются близкими мерами гладкости, эффективность преобразования (3.58) будем оценивать нормой их отклонения друг от друга.

Следует подчеркнуть, что при решении аппроксимационных задач, когда, например, по вектору $\beta_{\pi\sigma}$ прогнозируется спектральный ход $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$, предварительная оценка вектора $\beta_{\pi\alpha}$ чрезвычайно важна с точки зрения повышения достоверности получаемых результатов. Действительно, правомерность метода оптических операторов зависит от того, в какой мере в условиях рассматриваемого эксперимента выполняются исходные физические допущения. В основном они касаются оптической эквивалентности реальной дисперсной среды и модельной полидисперсной системы сферических частиц. В первом приближении эту эквивалентность естественно связывать с возможностью аппроксимации оптических характеристик реальных рассеивающих сред полидисперсными (одномерными) интегралами с ядрами теории Ми. Соответственно с этим принципом схемы интерпретации дополняются условиями вида

$$\|(V^{(\alpha)} - I)\beta_\sigma\|_{l_2} \leqslant \sigma \|\beta_\sigma\|_{l_2}. \tag{3.59}$$

Конечно, подобное условие не гарантирует в полной мере того, что найденная функция $\beta_\alpha(\lambda)$ будет близка к точному значению $\beta_0(\lambda)$ в пределах величины σ, однако оно является необходимым для гарантии эффективности более сложного оптического преобразования, каким является, в частности, (3.5а).

Рассмотренная выше процедура касается прежде всего численного анализа экспериментального материала. В модельных численных экспериментах, когда непосредственно задается исходная функция $\beta_0(\lambda)$ и строятся некоторые «возмущенные» аналоги $\beta_\sigma(\lambda)$ с их последующим обращением, условие (3.59) всегда имеет место. При этом норма слева стремится к нулю при $\sigma \to 0$ (то же самое $\alpha \to 0$). Соответствующие примеры будут приведены ниже, в последней главе.

Поскольку в нашем рассмотрении имелось множество реализаций векторов $\beta_{sc,\sigma}$ и $\beta_{\pi\sigma}$, то одновременно с преобразованиями (3.58) исследовалась и пара обратных к ним, а именно:

$$\beta_{sc,\sigma} \to \beta_{\pi\alpha}^{(sc)}; \tag{3.60а}$$

$$\beta_{\pi\sigma} \to \beta_{\pi\alpha}. \tag{3.60б}$$

В табл. 3.3 приведены оценки ошибок всех перечисленных выше преобразований, заданных на имеющейся в нашем распоряжении совокупности экспериментальных векторов $\beta_{\pi\sigma}$ и $\beta_{sc,\sigma}$. Ошибки определялись как среднеквадратические отклонения компонент прогнозируемых векторов от их экспериментальных реализаций. Исходная выборка $\{\beta_{\pi\sigma}, \beta_{sc,\sigma}\}$ соответствовала оптической ситуации, классифицируемой как атмосферная дымка. Во время измерений температура воздуха и влажность практически оставались неизменными.

Таблица 3.3

Распределение средних значений ошибок векторных преобразований (3.58а), (3.58б) и (3.60а), (3.60б) по длинам волн (ошибки измерений компонент исходных векторов $\beta_{\pi\sigma}$ и $\beta_{sc,\sigma}$ в среднем не превышают 0,01 и 0,048 км$^{-1}$ соответственно)

Преобразование	λ мкм					
	0,353	0,380	0,405	0,446	0,542	0,700
$\langle \beta_{sc,\sigma} - \beta_{sc,\alpha}^{(\pi)} \rangle$	0,1539	0,1959	0,1602	0,1101	0,0596	0,0316
$\langle \beta_{sc,\sigma} - \beta_{sc,\alpha} \rangle$	0,0116	0,0267	0,0326	0,0097	0,0257	0,0266
$\langle \beta_{\pi\sigma} - \beta_{\pi,\sigma}^{(sc)} \rangle$	0,0435	0,0488	0,0367	0,0216	0,0125	0,0069
$\langle \beta_{\pi\sigma} - \beta_{\pi,\alpha} \rangle$	0,0070	0,0056	0,0057	0,0052	0,0043	0,0039

Как следует из табл. 3.3, аппроксимационная оптическая задача, связанная с операторами $V_{\pi}^{(\alpha)}$ и $V_{sc}^{(\alpha)}$, решается вполне приемлемо. Соответствующие ошибки не превышают в обоих случаях погрешностей измерения. Сложнее обстоит с взаимным преобразованием векторов $\beta_{\pi\sigma}$ и $\beta_{sc,\sigma}$. Прогнозируемые аналоги $\beta_{\pi\alpha}^{(sc)}$ и $\beta_{sc,\alpha}^{(\pi)}$ отклоняются от них весьма существенно. По компонентно значения этих отклонений в среднем в 2—3 раза превышают ошибки измерений. Выполняемая в процессе численных расчетов соответствующая коррекция операторов перехода $W_{sc,\pi}^{(\alpha)}$ и $W_{\pi,sc}^{(\alpha)}$ по показателю не спасает положения. Детальный численный анализ на оптических моделях показал, что в принципе погрешность подобного прогноза может быть заметно уменьшена, если длины волн λ_i, на которых измеряются, скажем, значения $\beta_{\pi i}$, в целом будут несколько смещены относительно тех длин волн, на которых измеряются значения коэффициентов рассеяния $\beta_{sc,i}$. Иными словами, для оптимизации процедуры взаимного прогноза двух спектральных оптических характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц их следует измерять в различных спектральных интервалах.

В рассматриваемом здесь примере эти интервалы могут быть обозначены через $\Lambda_\pi=\{\lambda_i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ и $\Lambda_{sc}=\{\lambda_j,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$. В частности, если в качестве Λ_π выбрать интервал [0,35; 0,55 мкм], то вполне удовлетворительно можно прогнозировать значения $\beta_{sc}(\lambda)$ с помощью функции $\beta^{(\pi)}_{sc,\alpha}(\lambda)$ в интервале [0,55; 1 мкм]. В полной мере это справедливо и для аппроксимационного аналога $\beta^{(sc)}_{\pi\alpha}(\lambda)$, позволяющего прогнозировать значения $\beta_\pi(\lambda)$ в Λ_π. Необходимость подобного «согласования» спектральных интервалов оптического зондирования обусловливается существенно различным поведением факторов эффективности рассеяния $K_\pi(r,\ \lambda)$ и $K_{sc}(r,\ \lambda)$ в области своего определения $[R\times\Lambda]$, что и влечет различную информативность векторов β_π и β_{sc}, связанных с одним и тем же интервалом Λ.

Не вдаваясь в подробные исследования (см. [16, 17)], в качестве примера укажем лишь на следующие обстоятельства. В силу малости значений фактора $K_{\pi i}(r)$ для $r\leqslant 0{,}3$ мкм и тех λ_i, которые указаны в табл. 2.4, обращение вектора $\beta_{\pi\sigma}$, осуществляемого оператором $K^{-1}_{\pi\alpha}$, как правило, дает заниженные значения концентрации частиц указанных размеров. Но с другой стороны, именно эта фракция частиц определяет значения коэффициента рассеяния $\beta_{sc,i}$ для малых λ_i, поскольку главный дифракционный максимум факторов $K_{sc,i}(r)$ приходится на указанную область размеров. В конечном итоге это приводит к тому систематическому росту ошибок прогноза, который наблюдается в табл. 3.3, в области малых длин волн.

Необходимость взаимного согласования интервалов Λ_π и Λ_{sc} должна учитываться при планировании комплексных оптических экспериментов, так же как и в рассмотренном выше методе оптического зондирования атмосферы с орбиты. Средние ошибки прогноза относительно регулярных компонент $\beta_{\pi\alpha}$ и $\beta_{sc,\alpha}$, естественно, меньше тех, которые указаны в табл. 3.2, и мы их здесь не обсуждали.

Теперь обратимся к вопросам корректировки результатов интерпретации по показателю преломления. Зависимость значений $\beta^{(\pi)}_{sc,\alpha}$ и $\beta^{(sc)}_{\pi\alpha}$ от показателя $\bar{m}$ иллюстрируется на рис. 3.5 и рис. 3.6. Представленные результаты показывают, что априорный выбор «подходящего» значения $\bar{m}$ более чем затруднителен и, следовательно, действительно необходима надлежащая корректировка. В тех численных исследованиях, которые здесь представлены в табл. 3.3, корректировка осуществлялась по оптическим измерениям на $\lambda=0{,}353$ мкм. Все, что говорилось выше, касалось преобразований (3.58а) и (3.60а). Несколько замечаний следует сделать относительно преобразований (3.58б) и (3.60б).

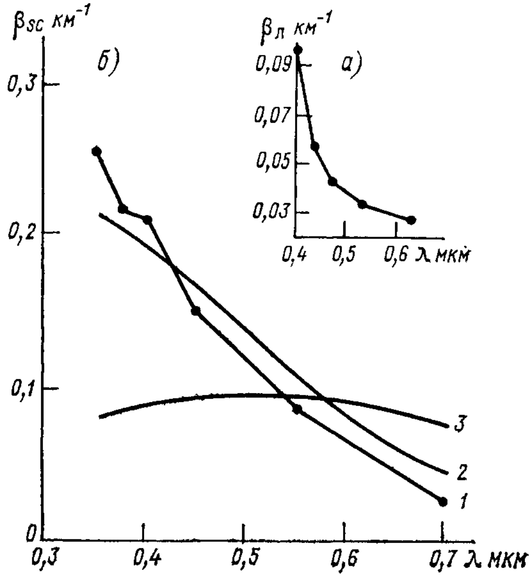

Рис. 3.5. Пример численного преобразования вектора $\beta_{\pi\sigma}$ (*а*) в вектор $\beta^{(\pi)}_{sc,\ \alpha}$ (*б*) для различных значений $\overline{m}$.

1) измеренный вектор $\beta_{sc,\ \sigma}$ для того же рассеивающего объема; *2*) $\overline{m}=1{,}51-2\cdot10^{-3}i$; *3*) $\overline{m}=1{,}54-2\cdot10^{-3}i$.

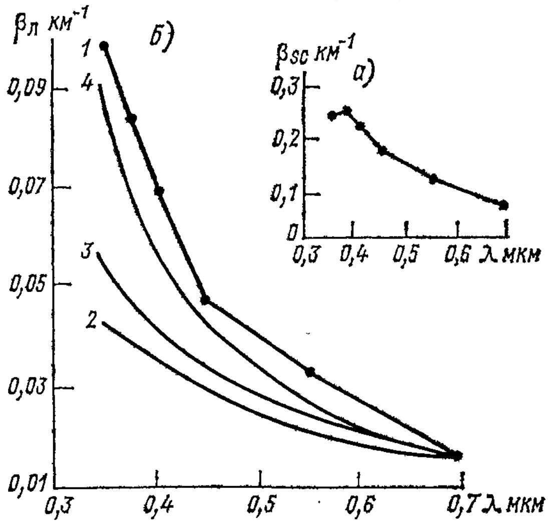

Рис. 3.6. Пример численного преобразования вектора $\beta_{sc,\ \sigma}$ (*а*) в вектор $\beta^{(sc)}_{\pi\alpha}$ (*б*) для различных значений $\overline{m}$.

1) измеренный вектор $\beta_{\pi\sigma}$ для того же рассеивающего объема; *2*) $\overline{m}=1{,}43-2\cdot10^{-3}i$; *3*) $\overline{m}=1{,}47-2\cdot10^{-3}i$; *4*) $\overline{m}=1{,}54-2\cdot10^{-3}i$.

Неопределенность обратных задач, обусловленная незнанием показателя преломления вещества рассеивающих частиц, существенно меньше влияет на результаты восстановления непрерывного хода спектральной характеристики $\beta(\lambda)$ по дискретному набору измерений $\{\beta_{i\sigma}\}$, или, как говорилось выше, на фильтрацию регулярной компоненты $\beta_\alpha(\lambda)$ из экспериментальной функции $\beta_\sigma(\lambda)$. Нет особой необходимости подробно останавливаться на этом важном свойстве операторов $V^{(\alpha)}$. Достаточно лишь напомнить, что за ними стоит произведение операторов K и K_α^{-1}, которое вполне устойчиво к вариациям $\Delta\bar{m}$, если последние не слишком велики. Укажем лишь на то, что при $\sigma \to 0$ и, следовательно, $\alpha \to 0$ оператор $V^{(\alpha)}$ стремится к единичному оператору I, который, естественно, никаким образом не зависит от физического параметра $\bar{m}$.

Помимо этого свойства, операторы $V^{(\alpha)}$ обладают очень важной в практическом отношении особенностью, которая состоит в их зависимости от пределов интегрирования R_1 и R_2. Конечно, и операторы $W^{(\alpha)}$ зависят от этих параметров, которые, как правило, неизвестны в обратных задачах аэрозольного светорассеяния, но для них зависимость от $\bar{m}$ является определяющей. Для операторов $V^{(\alpha)}$, наоборот, определяющей является зависимость от возможных значений наименьшего и наибольшего размеров частиц зондируемой среды. Таким образом, операторы $V^{(\alpha)}$ открывают возможность корректировки результатов обращения по параметрам R_1 и R_2. Включение подобной корректировки в схемы обращения существенно повышает их эффективность в интерпретации оптических данных по светорассеянию в атмосфере. Применительно к рассматриваемому примеру полагалось, что $R_1 \leqslant 0{,}1$ мкм, а значение R_2 для каждой реализации $\{\beta_{\pi\sigma}, \beta_{sc,\sigma}\}$ оценивалось согласно условию:

$$\min_{0{,}6 \leqslant R_2 \leqslant 1{,}5} \left\| \left(V^{(\alpha)} - I\right) \beta_\sigma \right\|_{l_2} \leqslant \Delta_{\min}(\sigma), \tag{3.61}$$

где $\Delta_{\min}(\sigma)$ — некоторая, достаточно малая величина порядка σ. Норма слева в (3.61) зависит от R_2 через оператор $V^{(\alpha)}$. В качестве вектора β_σ в (3.61) используется $\beta_{\pi\sigma}$ либо $\beta_{sc,\sigma}$.

Теперь обратимся к исследованию оптических невязок $\rho_{sc}^{(\pi)}$ и $\rho_\pi^{(sc)}$, связанных с операторами $W_{sc,\pi}^{(\alpha)}$ и $W_{\pi,sc}^{(\alpha)}$ соответственно (то же самое с преобразованиями (3.58а) и (3.60а)) и играющих важную роль в схемах обработки данных оптического зондирования рассеивающей компоненты атмосферы. Поскольку погрешность измерений имеющегося в нашем распоряжении экспериментального материала не ниже 20 %, то естественно упростить корректировку операторов по показателю $\bar{m}$, полагая, что $\bar{m}(\lambda) = \bar{m} = \mathrm{const}$. В этом случае значение $\bar{m}^*$, доставляющее минимум невязкам $\rho_\pi^{(sc)}$ и $\rho_{sc}^{(\pi)}$, будет соответствовать среднему значению этого параметра в спектральном интервале.

Основным расчетным соотношением для оценки значения $\bar{m}^*$ в пределах некоторой априори выбранной области возможных значений $\bar{m}$, являются неравенства вида

$$\min_{1,4 \leqslant \bar{m} \leqslant 1,64} \left\| W^{(\alpha)}_{\pi, sc} \beta_{sc, \sigma} - \beta_{\pi\sigma} \right\|_{l_2} \leqslant \Delta_{\min}(\sigma). \tag{3.62}$$

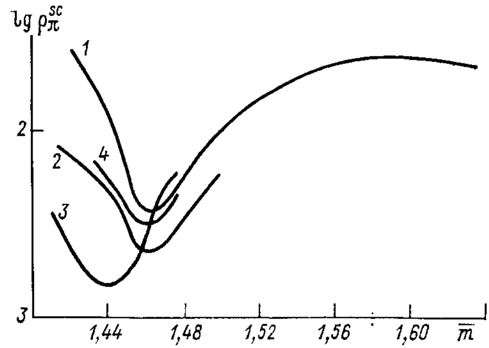

Рис. 3.7. Поведение невязки $\rho^{(sc)}_{\pi}(\bar{m})$ в окрестности экстремума для четырех реализаций $\{\beta_{\pi\sigma}, \beta_{sc, \sigma}\}$.

Решение этого неравенства соответствует минимизации невязки $\rho^{(sc)}_{\pi}(\bar{m})$. Аналогичное неравенство может быть записано и для обратного варианта, когда корректируется оператор перехода

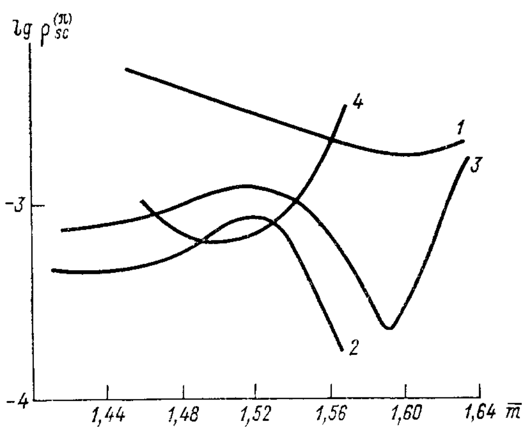

Рис. 3.8. Поведение невязки $\rho^{(\pi)}_{sc}(\bar{m})$ при изменении $\bar{m}'$ в области (1.4, 1.64) для четырех реализаций $\{\beta_{s\sigma}, \beta_{sc, \sigma}\}$.

$W^{(\alpha)}_{sc, \pi}$. Ниже первое значение показателя будем обозначать через $\bar{m}_{\pi}$, второе — через $\bar{m}_{sc}$. В качестве примера на рис. 3.7 и рис. 3.8 для некоторых выбранных реализаций $\{\beta_{\pi\sigma}, \beta_{sc, \sigma}\}$ относящихся, как уже упоминалось выше, к одному и тому же рассеивающему объему атмосферы, но к разным моментам времени, приведены соответствующие невязки $\rho^{(sc)}_{\pi}$ и $\rho^{(\pi)}_{sc}$ как функции параметра $\bar{m}$ (точнее, его действительной части $\bar{m}'$).

Если рассматривать модельные задачи, когда чисто расчетным путем исследуются обратные задачи светорассеяния полидисперсными системами сферических частиц, то значения $\bar{m}^*_{\pi}$ и $\bar{m}^*_{sc}$

должны быть близки друг к другу при условии, что погрешность $\sigma \to 0$. Для реального экспериментального материала это уже далеко не так. Близость оценок $\bar{m}^*_\pi$ и $\bar{m}^*_{sc}$ будет также определяться и тем, в какой мере выполняются физические допущения, которые лежат в основе исходных функциональных уравнений соответствующих методов оптического зондирования. Без этих допущений нам бы не удалось сформулировать обратные задачи и придать им приемлемую математическую форму. Обращаясь к кривым $\rho_\pi^{(sc)}$ и $\rho_{sc}^{(\pi)}$ на рис. 3.7 и рис. 3.8, нетрудно видеть, что их поведение существенно различно и, как следствие, оценки $\bar{m}^*_\pi$ и $\bar{m}^*_{sc}$ отличны друг от друга для одних и тех же реализаций пары $(\beta_{\pi\sigma}, \beta_{sc,\sigma})$. В первом случае наблюдается, как правило, более четкая локализация экстремума функции $\rho_\pi^{(sc)}(\bar{m})$, что и обеспечивает большую точность в оценке $\bar{m}^*_\sigma$ для данного σ. Что же касается поведения $\rho_{sc}^{(\pi)}(\bar{m})$, то в ряде реализаций вообще затруднительно оценить значение $\bar{m}^*_{sc}$ в пределах указанного интервала значений показателя.

Причины различного поведения невязок вполне понятны и обусловливаются в первую очередь различной зависимостью операторов перехода от параметра $\bar{m}$. Обратимся к $\rho_\pi^{(sc)}$, предварительно напомнив, что $W^{(\alpha)}_{\pi,sc} = K_\pi K^{-1}_{sc,\alpha}$. С одной стороны, K_π есть интегральный оператор, действующий на функцию $(K^{-1}_{sc,\alpha}\beta_{sc,\alpha})(r)$ по переменной r. С другой стороны, он сам есть функция (операторозначная) параметра $\bar{m}$. Как интегральный оператор он сглаживает вариации в подынтегральной функции независимо от того, чем они обусловлены, либо ошибками σ, либо ошибками $\Delta\bar{m}$. Следовательно, характер поведения $\rho_\pi^{(sc)}$ по $\bar{m}$ почти полностью обусловливается функциональной зависимостью самого оператора K_π от $\bar{m}$. Но как мы знаем [6, 19], для видимого диапазона $\delta_{\bar{m}}(\|K_{sc}\|) \ll \delta_{\bar{m}}(\|K_\pi\|)$ и, следовательно, $|\partial\rho_\pi^{(sc)}/\partial\bar{m}|$ будет существенно превышать $|\partial\rho_{sc}^{(\pi)}/\partial\bar{m}|$. Последнее обстоятельство иллюстрируется кривыми на рис. 3.7 и рис. 3.8. Следует заметить, что эффективность корректировки операторов перехода в целом заметно выше, если она осуществляется не по одной опорной точке, как это делалось выше (см. табл. 3.3), а по опорному вектору, т. е. с использованием невязок $\rho_\pi^{(sc)}$ и $\rho_{sc}^{(\pi)}$. Соответствующий пример представлен в табл. 3.4, где даны результаты взаимных преобразований двух векторов $\beta_{\pi\sigma}$ и $\beta_{sc,\sigma}$ из одной реализации. Для большей наглядности преобразования иллюстрируются кривыми на рис. 3.9.

Оценки $\bar{m}^*_\pi$ и $\bar{m}^*_{sc}$ заметно отличаются друг от друга, и трудно сказать, какое из них ближе к действительному значению показателя преломления. В силу большей зависимости коэффициента обратного рассеяния от $\bar{m}$ можно полагать, что действительное значение $\bar{m}_0$ все же ближе к интервалу 1,46±0,02, содержащему точку $\overset{*}{\bar{m}}_\pi$. С учетом подобной неопределенности выше и был введен нами термин «корректировка» результатов обращения оптиче-

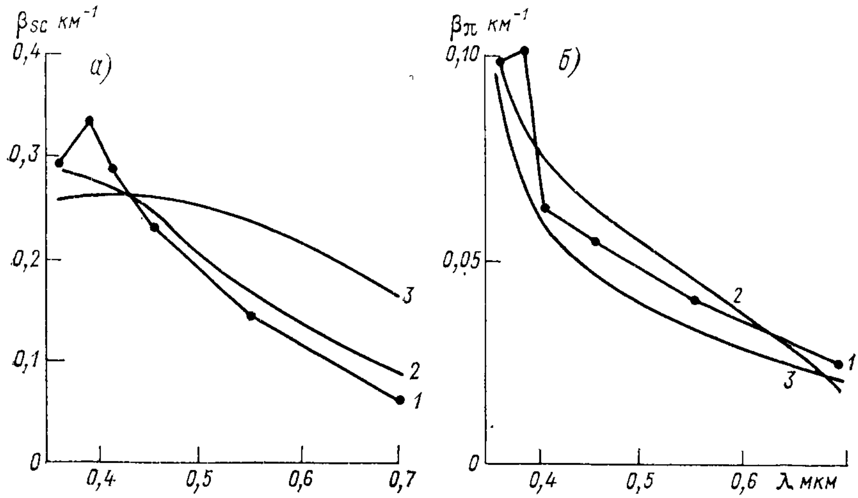

Рис. 3.9. Пример численного преобразования $\beta_\pi \rightleftarrows \beta_{sc}$ по данным табл. 3.3. *а*) кривая *1* — $\beta_{sc,\sigma}$, *2* — $\beta_{sc,\alpha}$, *3* — $\beta_{sc}^{(\pi)}$; *б*) кривая *1* — $\beta_{\pi\sigma}$, *2* — $\beta_{\pi\alpha}$, *3* — $\beta_\pi^{(sc)}$.

Таблица 3.4

Пример взаимного преобразования векторов $\beta_{\pi\sigma}$ и $\beta_{sc,\sigma}$ из одной экспериментальной реализации с использованием корректирующих функций $\rho_\pi^{(sc)}(\bar{m})$ и $\rho_{sc}^{(\pi)}(m)$

Вектор	λ мкм					
	0,353	0,380	0,405	0,446	0,542	0,700
$\beta_{sc,\sigma}$	0,29	0,34	0,30	0,24	0,16	0,07
$\beta_{sc,\alpha}$	0,283	0,281	0,272	0,251	0,188	0,102
$\beta_{sc,\alpha}^{(\pi)}$	0,262	0,269	0,271	0,270	0,249	0,186
$\beta_{\pi\sigma}$	0,094	0,101	0,063	0,056	0,041	0,026
$\beta_{\pi\alpha}$	0,093	0,086	0,074	0,065	0,047	0,028
$\beta_{\pi\alpha}^{(sc)}$	0,095	0,075	0,058	0,047	0,035	0,024

$\overset{*}{\bar{m}}_\pi = 1,64$; $\overset{*}{\bar{m}}_{sc} = 1,46$; $f = 62\ \%$; $\bar{m}'' = 0,002$

ских данных, а не «определение» показателя преломления. Тем самым подчеркивалось то обстоятельство, что параметр $\overline{m}$ в схемах интерпретации может играть роль формальной переменной при численном решении оптических задач, каковыми в данном примере являются преобразования одних спектральных характеристик светорассеяния в другие. В этом отношении большей определенностью отличается метод поляризационного зондирования

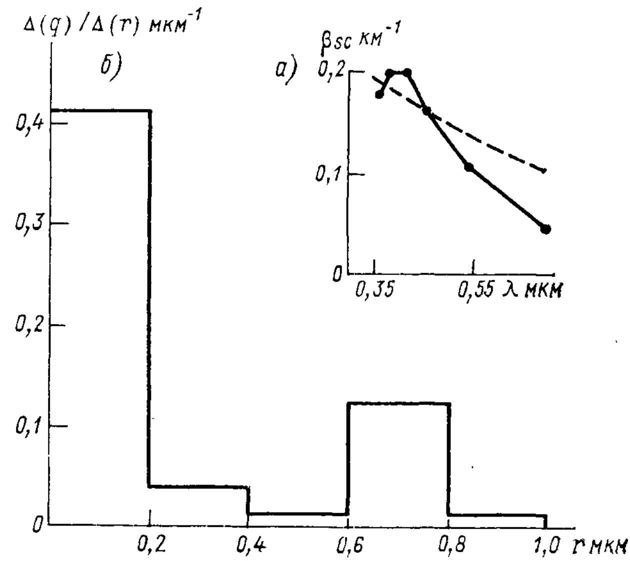

Рис. 3.10. Пример обращения спектрального хода $\beta_{sc,\,\sigma}(\lambda)$ (*а*) и определения спектра размеров частиц (*б*) (пунктиром дана характеристика $\beta_{sc}(\lambda)$, соответствующая полученному распределению).

локальных рассеивающих объемов, поскольку здесь непосредственному измерению доступно заметно большее число различных оптических характеристик. Чем больше объем измерительной информации о светорассеянии, тем с большей эффективностью может быть применен метод операторов перехода.

В связи с обработкой экспериментального материала уместно привести пример обращения какой-либо одной реализации экспериментального вектора, скажем $\beta_{sc,\,\sigma}$, с целью оценки спектра размеров частиц зондируемой дымки. На рис. 3.10 приводится соответствующая гистограмма $\{\Delta_l(q)/\Delta_l(r)\}$ как результат обращения данных $\{\beta_{sc,\,i},\ i=1,\ \ldots,\ 6\}$. Подобный спектр является типичным для большинства реализаций $\{\beta_{\pi\sigma},\ \beta_{sc,\,\sigma}\}$ в рассматриваемом эксперименте. Обращение осуществлялось с использованием вычислительной схемы, описанной в п. 1.4. Методика обращения уверенно выявляет бимодальный характер функций распределения для атмосферных дымок по спектральному ходу $\beta_{sc}(\lambda)$. На этом закончим анализ экспериментального материала на основе метода оптических операторов теории светорассеяния применительно к задачам оптического мониторинга рассеивающей компоненты атмосферы и вновь обратимся к исследованию информационных возможностей касательного зондирования.

3.4. К теории оптического зондирования системы атмосфера—подстилающая поверхность

3.4.1. Учет альбедо подстилающей поверхности в методе касательного зондирования

Напомним, что те интегральные уравнения в методе касательного зондирования, которые рассматривались выше, выведены в предположении, что интенсивностью света, попадающего снизу на линию визирования $D'D$ (см. рис. 3.1), можно пренебречь. Конечно, это может быть справедливым лишь для определенного интервала высот. Согласно оценкам авторов работы [12], нижней границей подобного интервала можно считать $h_{\min} \geqslant 10$ км. Теперь обратимся к высотам, в пределах которых требуется учет компоненты функции источника $R(P)$, обусловленной отражением солнечного света от подстилающей поверхности. Эту компоненту будем обозначать через $\hat{R}(P)$, отличая ее в случае необходимости от компоненты $\check{R}(P)$, с которой имели дело выше. Таким образом, функция источника в интегральном представлении (3.1) теперь имеет вид

$$R(P) = \check{R}(P) + \hat{R}(P). \tag{3.63}$$

Как и прежде, будем пренебрегать компонентой, обусловленной фоном многократного рассеяния в атмосфере. Для этого из рассмотрения следует исключить более плотные слои атмосферы, лежащие, скажем, ниже $h \leqslant 5$ км [12]. В пределах настоящей работы не будем касаться вопросов учета эффектов многократного рассеяния в интерпретации оптических данных. Следует лишь заметить, что влияние фона многократного рассеяния на функцию источника носит более чем регулярный характер и в первом приближении может быть учтено введением либо аддитивных членов, либо с помощью множителей [12]. Подобные методики носят, конечно, сугубо качественный характер, и при строгом подходе к обратным оптическим задачам требуется более адекватный учет всех особенностей, сопутствующих переносу солнечного излучения в реальной атмосфере. В качестве примера уместно сослаться на обстоятельное исследование [14].

Обозначим альбедо подстилающей поверхности через $\omega(Q)$, где точка Q лежит на поверхности (рис. 3.11). Поскольку $\omega(Q) \geqslant \geqslant 0$ всюду на поверхности, то эта функция является новым распределением в теории обратных задач атмосферной оптики. Без учета этого распределения дать адекватную постановку прямых и обратных задач в атмосферно-оптических исследованиях навряд ли представляется возможным, особенно когда речь идет о таком оптическом методе, каким является рассматриваемый здесь метод касательного зондирования. Интенсивность света, попадающего снизу в точку P, находящуюся на линии визирования $D'D$, опре-

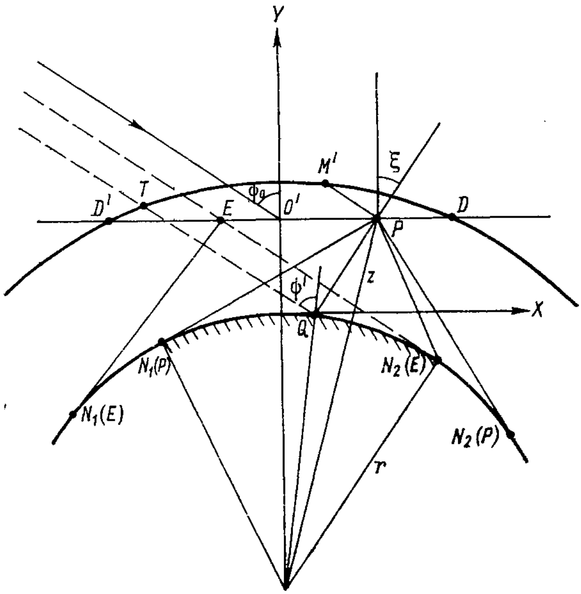

Рис. 3.11. Геометрическая схема, поясняющая вывод интегрального представления (3.70).

деляется поведением функции $\omega(Q)$ между точками $N_1(P)$ и $N_2(P)$ (рис. 3.11). В силу этого $\hat{R}(P)$ в каждой точке P есть некий функционал от распределения $\omega(Q)$. Подчеркивая это обстоятельство, иногда вместо указанного обозначения будем использовать запись $\hat{R}[\omega, P]$. Построим аналитическое выражение для этого функционала.

Интенсивность солнечного света, падающего на элементарную площадку единичной ширины и длины $dl(Q)$ в окрестности точки Q на поверхности, может быть представлена следующим выражением:

$$dI(Q) = c(\lambda) \sin \psi(Q) \exp\left\{-\tau\left(\overline{TQ}\right)\right\} dl(Q), \tag{3.64}$$

где $\psi = \pi/2 - \psi'$. При равномерном распределении по телесному углу интенсивности отраженного света в точке Q указанной элементарной площадки в точку P попадает поток

$$d\hat{I}(P, Q) = (2\pi)^{-1} \omega(Q) \exp\left\{-\tau\left(\overline{QP}\right)\right\} dI(Q). \tag{3.65}$$

Напомним, что запись вида $\overline{QP}$ означает направленный отрезок, заключенный между точками Q и P. Теперь уже нетрудно записать выражение для функции источника, а именно

$$\hat{R}(P) = \int\limits_{N_1(P)}^{N_2(P)} D_{11}\left(P, \frac{\pi}{2} - \xi\right) d\hat{l}\,(Q\,|\,P). \tag{3.66}$$

В этом выражении запись $d\hat{l}(Q|P)$ подчеркивает то обстоятельство, что дифференциал берется по переменной Q в соответствии с (3.64), а точка P фиксирована. Угол ξ в соответствии с рис. 3.11 — угол между направленными отрезками $\overline{QP}$ и $\overline{PD}$. Его величину можно рассматривать как функцию точек Q, P и D и писать $\xi(Q, P, D)$. С учетом этих замечаний функцию источника будем представлять следующим интегралом:

$$\hat{R}(P,\ D) = \int\limits_{L(P)} D_{11}(P,\ D,\ Q)\, d\hat{l}\,(Q\,|\,P). \tag{3.67}$$

Область интегрирования по переменной Q в общем случае зависит от положения точки P в геометрической схеме зондирования, в связи с чем использовано обозначение $L(P)$.

Используя (3.64) и (3.65), интеграл (3.67) перепишем в виде

$$\hat{R}(P,\ D) = c(\lambda)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L(P)} \omega(Q)\sin\psi(Q)\, D_{11}(P,\ D,\ Q)\times$$
$$\times \exp\left\{-\tau\left(\overline{TQP}\right)\right\} dl\,(Q), \tag{3.68}$$

где через $\tau(\overline{TQP})$ обозначено $\{\tau(\overline{TQ})+\tau(\overline{QP})\}$. Интегральное представление функции $\hat{R}(P, D)$ через коэффициент направленного светорассеяния локальным объемом атмосферы и альбедо подстилающей поверхности играет определяющую роль в теории рассматриваемого здесь метода оптического зондирования. Множитель $c(\lambda)$ можно опустить, полагая, что измеряемая интенсивность нормируется на интенсивность падающего на верхнюю границу атмосферы солнечного света. Дальнейшее применение (3.68) в вычислительных схемах метода касательного зондирования требует определенной корректировки пределов интегрирования. Дело в том, что точка $N_2(P)$, лежащая на поверхности и соответствующая правому касательному лучу из P, может оказаться в области тени, т. е. лежать левее точки $N_2(E)$ (см. рис. 3.11). Поэтому если точка P лежит правее точки E, то $N_2(P) > N_2(E)$, и верхний предел в интеграле (3.66) следует брать равным $N_2(E)$. Последнее неравенство следует понимать в том смысле, что расстояние по дуге от некоторой начальной точки, лежащей левее рассматриваемой пары, до $N_2(P)$ больше соответствующего расстояния до $N_2(E)$. В результате область интегрирования $L(P)$ в (3.68) разбивается на две подобласти, а именно:

$$\left.\begin{array}{lll} N_1(P) \leqslant Q \leqslant N_2(P) & \text{при} & D' \leqslant P \leqslant E; \\ N_1(P) < Q \leqslant N_2(E) & \text{при} & E < P \leqslant D. \end{array}\right\} \tag{3.69}$$

Поскольку точки D', P, E и D лежат на одной секущей, положение которой в геометрической схеме зондирования однозначно определяется параметром h, то неравенства в (3.69) можно понимать как $x_{D'} \leqslant x_P \leqslant x_E$ и т. п. Правомерность этого утверждения нетрудно доказать простыми аналитическими построениями (см. п. 3.1).

Построив функцию источника, можно перейти к соответствующим интенсивностям, которые уже непосредственно измеряются в экспериментах. В соответствии с полученными выражениями приходим к следующему интегральному представлению для интенсивности света, падающего на линию визирования $D'D$ снизу:

$$\hat{I}(D) = \int_{D'}^{E} \hat{R}_1(P,\ D)\exp\{-\tau(\overline{PD})\}\,dl(P) +$$

$$+ \int_{E}^{D} \hat{R}_2(P,\ D)\exp\{-\tau(\overline{PD})\}\,dl(P). \tag{3.70}$$

Выделение компонент $R_1(P,D)$ и $R_2(P,D)$ обусловлено разбиением области интегрирования в (3.68) на два интервала, $L_1(P)$ и $L_2(P)$, в соответствии с (3.69). Это выражение можно использовать для расчета $\hat{I}(h) = \hat{I}[\omega,\ h]$, если известны оптические характеристики атмосферы и альбедо подстилающей поверхности $\omega(Q)$. В соответствии со структурой (3.70) удобно выделять также две компоненты в $\hat{I}(D)$, а именно:

$$\hat{I}_1(D) = \int_{D'}^{E} \beta_{ex}(P)\frac{1}{2\pi}\int_{N_1(P)}^{N_2(P)} \omega(Q)\sin\psi(Q)\times$$

$$\times J(P,\ D,\ Q)\exp\{-\tau(\overline{TQPD})\}\,dl(Q)\,dl(P); \tag{3.70a}$$

$$\hat{I}_2(D) = \int_{E}^{D} \text{———}\ \frac{1}{2\pi}\int_{N_1(P)}^{N_2(E)} \text{———}\ dl(Q)\,dl(P). \tag{3.70б}$$

Эти выражения завершают построение расчетных соотношений в методе касательного зондирования, когда необходимо учесть влияние подстилающей поверхности в схемах интерпретации оптических измерений. Следуя (3.63), можно записать

$$I(h) = \check{I}(h) + \hat{I}(h). \tag{3.71}$$

Если считать априори известным распределением $\omega(Q)$, то второй член в (3.71) определен в той же мере, как и первый, т. е. его значения при данном h определяются профилем $\tau(z)$ и $D_{11}(z,\vartheta)$. Если осуществляется многочастотное касательное зондирование и в нашем распоряжении находится массив оптической информации $\{I_{i\sigma}(h),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$, то (3.71) порождает вполне определенную систему уравнений относительно совокупности $\{\tau_{ik}=\tau(\lambda_i,h_k),\ i=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots\}$. Для обращения оптических данных можно использовать итерационную схему (3.38) без особой перестройки. Это связано с тем, что вариация первого функционала в (3.71) по профилю $\tau(z)$, как правило, выше вариаций $\delta_\tau(\hat{I})$. Нет необходимости доказывать это утверждение. Достаточно лишь обратить внимание на то обстоятельство, что второй функционал есть двухкратный интеграл и, следовательно, является существенно более гладким по сравнению с первым при прочих равных условиях.

В заключение несколько замечаний относительно тех абсолютных значений, которые может принимать альбедо подстилающей поверхности в реальных ситуациях. Для водной поверхности величина $\omega(Q)$ находится в среднем на уровне 0,06. Для суши соответствующие значения несколько выше (0,1—0,3). Для снежных покровов $\omega(Q)$ достигает значения порядка 0,8. В двух последних случаях наблюдается существенная спектральная зависимость отражения солнечной радиации от земной поверхности. Очевидно, что малые значения функции $\omega(Q)$ еще в большей степени способствуют сходимости вычислительных схем обработки экспериментальных данных, построенных по принципу последовательных приближений.

3.4.2. Вывод интегрального уравнения для определения альбедо подстилающей поверхности

В пределах данного раздела постараемся дать строгую математическую формулировку обратной оптической задачи, решением которой являлось бы распределение $\omega(Q)$. Речь идет о возможности определения альбедо подстилающей поверхности в рамках теории касательного зондирования атмосферы, а следовательно, о новых информационных возможностях этого оптического метода. Смысл нижеследующих аналитических построений состоит в выводе интегрального уравнения вида

$$\int\limits_{L\,(Q)} K(D,\ Q)\,\omega(Q)\,dl\,(Q) = 2\pi\hat{I}\,[\omega,\ D]. \tag{3.72}$$

Возможность построения линейного интегрального уравнения относительно $\omega(Q)$ с использованием интегральных представлений (3.70) вполне очевидна. Главная техническая трудность состоит в перемене порядка интегрирования в соответствующих двукратных интегралах. Зависимость пределов интегрирования от положения точки P на секущей исключает непосредственное применение теоремы Фубини. Для большей ясности дальнейших построений удобно ввести координатную форму записи некоторых членов в подынтегральных выражениях (3.70).

Напомним, что точка Q имеет своими координатами величины x_Q и y_Q в системе $(X,\ Y)$, и в этом смысле символ Q при записи функциональных выражений тождествен паре (x_Q, y_Q). Поскольку точка Q в наших построениях лежит на дуге большого круга (см. рис. 3.11) и $y_Q = -r + \sqrt{r^2 - x_Q^2}$, то ее положение в системе

(X, Y) однозначно определяется одной переменной x_Q. В связи с этим имеет место следующая система эквивалентных выражений:

$$\omega(Q) \equiv \omega(x_Q,\ y_Q) = \omega\bigl(x_Q,\ y_Q(x_Q)\bigr) = \omega(x_Q). \tag{3.73}$$

Учитывая, что

$$dl(Q) = r\,dx_Q \Big/ \sqrt{r^2 - x_Q^2}, \tag{3.74}$$

подынтегральное выражение в (3.70) можно переписать следующим образом:

$$\omega(x_Q)\sin\psi(x_Q)\,A(P,\ D,\ Q)\,r \Big/ \sqrt{r^2 - x_Q^2}, \tag{3.75а}$$

где

$$A(P,\ D,\ Q) = J(P,\ D,\ Q)\exp\{-\tau(\overline{TQPD})\}\,\beta_{ex}(P). \tag{3.75б}$$

Дальнейшие построения носят технический характер, и мы их опустим. Интегралы (3.70) тождественно преобразуются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{I}_1(h) = &\int\limits_{N_1(D')}^{N_1(E)} \omega(x_Q)\sin\psi(x_Q)\Bigl(r \Big/ \sqrt{r^2 - x_Q^2}\Bigr)dx_Q \int\limits_{D'}^{M_1(Q)} A(P,\ D,\ Q)\times \\ &\times dx_P + \int\limits_{N_1(E)}^{N_2(D')} \frown\, dx_Q \int\limits_{D'}^{E} \frown\, dx_P + \\ &+ \int\limits_{N_2(D')}^{N_2(E)} \frown\, dx_Q \int\limits_{M_2(Q)}^{E} \frown\, dx_P; \end{aligned} \tag{3.76а}$$

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{I}_2(h) = &\int\limits_{N_1(E)}^{N_1(D)} \frown\, dx_Q \int\limits_{E}^{N_1(Q)} \frown\, dx_P + \\ &+ \int\limits_{N_1(D)}^{N_2(E)} \frown\, dx_Q \int\limits_{E}^{D} \frown\, dx_P. \end{aligned} \tag{3.76б}$$

Геометрия взаимного расположения всей совокупности точек, обозначенных в (37.6), представлена на рис. 3.12, и нам остается сделать лишь несколько дополнительных замечаний. Запись $M(Q)$ означает функцию, ставящую в соответствие каждой точке Q на поверхности точку M на секущей $D'D$. Это преобразование $Q \to M$ осуществляется по лучу, касательному к поверхности в Q. Нет необходимости доказывать его однозначность. Функцию $M_1(Q)$ можно рассматривать как обратную к $N_1(P)$, а $M_2(Q)$ — к $N_2(P)$. Построенные интегралы (3.76) доказывают (3.72) и одновременно определяют в этом уравнении порядок расчета ядра $K(D, Q)$. Кроме того, из (3.76) следует, что (3.72) есть интегральное уравнение Вольтерра, поскольку его пределы суть функции параметра h. Действительно, запись $N_1(D')$ в координатой форме эквивалентна выражениям $x_{N_1}(x_{D'}, y_{D'})$ и $y_{N_1}(x_{D'}, y_{D'})$. Но $y_{D'}=h$ в рассматриваемой геометрической схеме, а $x_{D'}$ — однозначная функция h, поскольку с одной стороны D' принадлежит кругу с радиусом $(r+H)$, где H — эффективная высота атмосферы, а с другой — секущей $D'D$. Таким образом, x_{N_1} и y_{N_1} — функции

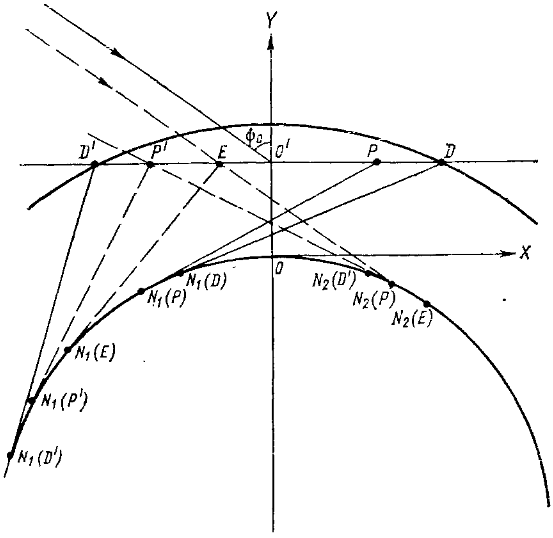

Рис. 3.12. Взаимное расположение точек в схеме зондирования, определяющих пределы интегрирования в (3.76).

только переменной h. Аналогичное утверждение справедливо и для верхнего предела интегрирования $N_1(E)$ в первом интеграле (3.76а). Поэтому можно утверждать, что в целом интеграл берется по некоторому сегменту $[X_1(h), X_2(h)]$ оси абсцисс X. Поскольку это имеет место для всех интегралов в (3.76), то утверждение о вольтерровости интегрального оператора в (3.72) можно считать доказанным.

Для того чтобы завершить построение интегрального уравнения относительно распределения $\omega(Q)$, нам необходимо избавиться от множителя $\left(1/\sqrt{r^2 - x_Q^2}\right)$ в подынтегральных выражениях. Правда, в нашей обратной задаче всегда выполняется условие $|x_Q| < r$, и особых неприятностей для вычислительной схемы этот множитель не представляет. Тем не менее желательно все же оперировать корректными формами интегральных представлений. Исключить из схемы обращения указанный множитель можно путем надлежащего выбора переменной, по которой задается искомое распределение физического параметра ω. Роль такой переменной может играть длина дуги l, отсчитываемая от некоторой начальной точки N_1 до рассматриваемой Q. Искомое распределение в этом случае будем записывать как $\omega(l_Q)$. Это наиболее естественная форма задания искомого распределения в рассматриваемой обратной задаче, и именно в этой форме оно впервые появилось в исходных функциональных уравнениях метода касательного зондирования. Нетрудно показать, что переменные x_Q и l_Q связаны друг с другом следующим соотношением:

$$x_Q = r\left(f \exp(2l_Q) - 1\right)/\left(1 + f \exp(2l_Q)\right), \tag{3.77}$$

где $f = (r + x_{N_1})/(r - x_{N_1})$. Из (3.77) видно, что переменная x_Q, связанная с системой координат (X, Y), есть функция двух переменных, а именно: параметра l и абсциссы x_{N_1}. При $l=0$ из (3.77) получали очевидное условие: $x_Q = x_{N_1}$. Если переменная точка Q движется по дуге от N_1 до N_2, то длина этой дуги

$$l = \frac{1}{2} \ln\left[(r + x_{N_2})(r - x_{N_1})/(r - x_{N_2})(r + x_{N_1})\right]. \tag{3.78}$$

Область задания переменной l_Q будем определять интервалом $L = [L_1, L_2]$. С учетом пределов интегрирования в (3.76) начальной точкой на рассматриваемой дуге является точка $N_1(D')$, а конечной — $N_2(E)$. Как уже говорилось выше, положение каждой из них однозначно определяется значением переменной h, поэтому для любого фиксированного h параметр l_Q пробегает значения из интервала $L(h) = [L_1(h), L_2(h)]$. Если, в свою очередь, в оптическом эксперименте h пробегает значения от H_1 до H_2, то исходное распределение $\omega(l_Q)$ в обратной задаче будет определено в пределах $L = [L_{\min}, L_{\max}]$. Очевидно, что самая крайняя слева точка по дуге соответствует $N_1(D')$ для $D' = (x_{D'}, y_{D'} = H_1)$, а наиболее удаленной вправо следует считать $N_2(E)$ для $E = (x_E, y_E = H_2)$. Поскольку $x_{D'}$ выражается через $y_{D'}$, а x_E — через y_E, то можно просто писать $N_1(H_1)$ и $N_2(H_2)$, подразумевая под этим некоторые функции, определяемые геометрической схемой зондирования. Точка $N_1(H_1)$ может быть выбрана в качестве начальной, и тогда областью определения $\omega(l_Q)$ можно считать интервал $[0, L_{\max}]$. Этим и заканчивается построение корректной формы интегрального уравнения для определения функции $\omega(l_Q)$, являющейся оптической характеристикой подстилающей поверхности.

Выражение (3.72) соответствует единому интегральному уравнению вида

$$K\omega = 2\pi \hat{I}, \tag{3.79а}$$

в котором $K = K_1 + K_2$ в соответствии с (3.76). Вычислительный алгоритм построения уравнения (3.79а) имеет следующую схему:

$$(K_1\omega)(h) = \int\limits_{N_1(D')}^{N_2(E)} \sin\psi(Q) A_1(Q, h)\, \omega(l_Q)\, dl_Q; \tag{3.79б}$$

$$(K_2\omega)(h) = \int\limits_{N_1(E)}^{N_2(D)} \sin\psi(Q) A_2(Q, h)\, \omega(l_Q)\, dl_Q, \tag{3.79в}$$

где

$$
A_1(Q,\ h)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{D'}^{M_1(Q)} A(P,\ Q)\,dx_P & \text{при } N_1(D')\leqslant Q\leqslant N_1(E),\\ \displaystyle\int\limits_{D'}^{E} \text{———}\ dx_P & \text{при } N_1(E)<Q\leqslant N_2(D'),\\ \displaystyle\int\limits_{M_2(Q)}^{E} \text{———}\ dx_P & \text{при } N_2(D')<Q\leqslant N_2(E);\end{cases}
$$

$$
A_2(Q,\ h)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{E}^{M_1(Q)} \text{———}\ dx_P & \text{при } N_1(E)\leqslant Q\leqslant N_1(D),\\ \displaystyle\int\limits_{E}^{D} \text{———}\ dx_P & \text{при } N_1(D)<Q\leqslant N_2(E).\end{cases}
$$

Напомним, что $P=\{x_P(h),\ y_P=h\}$; $Q=(x(l_Q),\ y(l_Q))$; $l_Q\in L(h)$.

Возможно в некоторых случаях в качестве искомой функции предпочтительно считать не $\omega(l_Q)$, а $g(l_Q)=\sin\psi(l_Q)\omega(l_Q)$. Физически это может оправдываться тем обстоятельством, что «оптическое влияние» распределения $\omega(l_Q)$ на функцию источника зависит еще от ориентации касательной в точке Q относительно секущей $D'D$. В какой мере разумно вводить в качестве искомой функции $g(l_Q)$ в интегральное уравнение (3.79), должно обосновываться предварительными численными экспериментами, по возможности более полно учитывающими конкретные особенности реального эксперимента. Заметим, что численные исследования интегральных уравнений должны предшествовать обработке экспериментального оптического материала.

Для построения вычислительного алгоритма необходимо вывести ряд расчетных соотношений между величинами, входящими в интегралы (3.76). Поскольку их вывод достаточно прост и связан главным образом с решением задач аналитической геометрии, мы их приведем в окончательной форме. Первая задача состоит в построении преобразования $P\to N$, в котором точка P лежит на секущей $D'D$, определяемой заданным значением параметра h, а N — на поверхности (см. рис. 3.11). Функциональная связь между координатами указанных точек обусловливается тем, что они обе принадлежат касательному лучу, проходящему через точку P. Система уравнений для определения x_N и y_N для заданных x_P и $y_P=h$ имеет следующий вид:

$$
\left.\begin{aligned} x_Nx_P+y_Nh+r\,(y_N+h)=0;\\ x_N^2+2y_Nr+y_N^2=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3.80)
$$

Два корня этой системы определяют два луча, исходящих из P и определяющих тем самым два преобразования $P\to N_1$ и

$P \to N_2$. В координатной форме это соответствует преобразованиям $(x_P, y_P) \to (x_{N_1}, y_{N_1})$ и $(x_P, y_P) \to (x_{N_2}, y_{N_2})$. Обратное преобразование $Q \to M$, ставящее в соответствии каждой точки дуги Q точку M на секущей $D'D$ по касательному лучу, рассчитывается с помощью этой же системы. Правда, выполняется оно технически заметно просто. Фиксируя значение параметра l_Q, определяем координаты $x_Q(l_Q)$ и $y_Q(l_Q)$ согласно (3.77). Подставляя эти значения в первое уравнение системы (3.80) (вместо x_N и y_N соответственно), найдем x_M. Ясно, что $y_M = h$. Значение угла $\psi(Q)$ определяется выражением

$$\cos\psi(Q) = \cos\psi_0[1 + (x_Q \operatorname{tg}\psi_0 + y_0)/r]. \tag{3.81}$$

Уравнение касательного луча $\overline{EN}$, проходящего через точку E в направлении вектора $\mathbf{n}_0$ (то же самое под углом ψ_0 к вертикали Y), имеет вид

$$xr\cos\psi_0 + yr\sin\psi_0 + r^2(\sin\psi_0 - 1) = 0.$$

Откуда находим координаты точки E, лежащей на секущей $D'D$:

$$\left.\begin{aligned} x_E &= -[h\sin\psi_0 + r(\sin\psi_0 - 1)]\sec\psi_0;\\ y_E &= h. \end{aligned}\right\} \tag{3.82}$$

Теперь необходимо определить координаты точек T и M', расположенных на окружности радиуса $(r+\overline{H})$, соответствующей границе атмосферы (см. рис. 3.11). Для координат точки M', связанной с точкой P, имеем

$$\left.\begin{aligned} & x_{M'} + \operatorname{tg}\psi_0 y_{M'} + (y_P\operatorname{tg}\psi_0 - x_P) = 0;\\ & y_{M'} = \sqrt{(r+\overline{H})^2 - x_{M'}^2} - r. \end{aligned}\right\} \tag{3.83}$$

Аналогичное уравнение записывается и для координат точки T с той лишь разницей, что вместо x_P, y_P в первом уравнении будут стоять x_Q, y_Q. Последнее расчетное соотношение касается угла $\xi(P, Q)$, заключенного между направленными отрезками $\overline{QP}$ и $\overline{PD}$. Считая известными координаты точек P и Q, нетрудно найти выражение

$$\cos\xi = (y_P - y_Q)/\sqrt{(y_P - y_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2}. \tag{3.84}$$

Этим уравнением завершается построение основных соотношений, связанных с расчетом ядра интегрального уравнения (3.79).

В заключение остается сделать несколько замечаний относительно алгебраизации этого уравнения. Не останавливаясь подробно на анализе свойств интегральных уравнений указанного типа, заметим, что вполне адекватным методом их алгебраизации может быть построение суммационного аналога на основе многочленов Бернштейна для распределений $\omega(l_Q)$. В рассcматриваемой задаче ничто не препятствует равномерной дискретизации интервала $[0, L_{\max}]$, на котором задана эта функция. В соответствии с выбранной аналитической моделью для искомого распределения $\omega(l)$ имеем следующий аппроксимационный аналог:

$$b_m(\boldsymbol{\omega},\ l)=\sum_{k=0}^{m}\omega_k p_{mk}(l),$$

где $p_{mk}(l)=C_m^k l^k (L_{\max}-l)^{m-k}/L_{\max}^m$. Откуда следуют, в соответствии с (3.72), расчетные соотношения для элементов матрицы алгебраизованного варианта:

$$K_{kj}=\int\limits_{L_j} K(l,\ h_j)\,p_{mk}(l)\,dl,\quad j=1,\ \ldots,\ n;\quad k=1,\ \ldots,\ m. \quad (3.85)$$

В результате приходим к алгебраической системе

$$K\boldsymbol{\omega}=2\pi\mathbf{I}. \quad (3.86)$$

Решение этого уравнения с приближенной правой частью $\mathbf{I}_\sigma=\{I_\sigma(h_j)\}$ определяет вектор $\boldsymbol{\omega}=\{\omega_k\}$, характеризующий искомое распределение $\omega(l_Q)$. Компоненты этого вектора суть положительные числа, поэтому для численного обращения (3.86) могут быть использованы описанные выше вычислительные схемы. В последних двух выражениях мы опускали подстрочный индекс Q в обозначении переменной l_Q. При записи определенных интегралов подобные сокращения вполне уместны. В последующих построениях мы будем использовать запись $\omega_Q(l)$, эквивалентную $\omega(l_Q)$. Индекс Q указывает на связь функции либо ее аргумента с подстилающей поверхностью. На этом можно закончить изложение формальных вопросов теории касательного зондирования в той мере, в какой эта теория касается исследования системы атмосфера — подстилающая поверхность, и перейти к рассмотрению физических аспектов, связанных с ее приложениями к атмосферно-оптическим исследованиям.

3.4.3. К оптическому мониторингу системы атмосфера—подстилающая поверхность

Вывод интегрального уравнения (3.79а) и его дискретного аналога (3.86) можно рассматривать в качестве основы для создания методики дистанционного определения спектрального альбедо $\omega_Q(\lambda, l)$ подстилающей поверхности по данным спектральных фотометрических измерений с орбитальных станций. Нет необходимости говорить о практической важности знания поля $\omega_Q(\lambda, l)$ для решения атмосферно-оптических задач. Можно указать в качестве примера на проблему изучения взаимосвязи полей оптических и метеорологических параметров, на которой подробнее остановимся ниже. Очевидно, что вывод исходных функциональных уравнений в теории оптического зондирования сам по себе не решает всех вопросов создания эффективных в практическом отношении методик дистанционного определения физических параметров. Необходимо провести обширный цикл расчетно-теоретических исследований по оценке эффективности этих уравнений в схемах обработки экспериментальных данных, влияния ожидаемых погрешностей на точность обращения и предельно достижимых пространственных разрешений. Вместе с тем ясно, что к изучению перечисленных выше вопросов можно приступить лишь в том случае, когда сформулированные обратные задачи сами по себе вполне определены и корректно поставлены.

Если речь идет об интегральном уравнении (3.79), то необходимо прежде всего указать способ достоверного задания его ядра $K(l, h)$, определенного в области $[L \times H]$, где $L = [0, L_{\max}]$ и $H = [H_1, H_2]$. Как следует из выражения (3.75), для этого требуется априорное задание профилей $\tau(z)$ и $D_{11}(z, \vartheta)$, т. е. знание основных оптических характеристик рассеивающей компоненты атмосферы. Навряд ли это можно осуществить на основе так называемых оптических моделей атмосферы, поэтому единственная приемлемая альтернатива состоит в осуществлении комплекса оптических измерений, который бы обеспечил требуемый для решения поставленной задачи объем исходной оптической информации. Подобный подход вновь приходит к идее оптического мониторинга в том смысле, как он понимался выше. Правда, теперь нас в большей степени должно интересовать сочетание наземного многочастотного лидара и спектрального радиометра на орбитальной станции, поскольку обратная задача (3.79) в большей мере связана с рассеянием солнечной радиации в тропосфере. Разумеется, это не исключает, как и ранее, использования только бортовой аппаратуры, состоящей из лидара и спектрального радиометра. Просто оперативную оценку оптических характеристик тропосферы более надежно можно осуществить системами наземного лазерного зондирования.

Экспериментальная оптическая информация, получаемая с помощью лидара, должна обеспечить прогноз профилей $\tau(\lambda, z)$ и $D_{11}(\lambda, \vartheta, z)$, с тем чтобы обеспечить данными расчет ядра $K(h, l)$ уравнения (3.79) с приемлемой точностью. С математической точки зрения подобную задачу можно считать вполне корректной. Действительно, искомое ядро уравнения (3.79) является интегралом от распределений $\tau(z)$ и $D_{11}(z, \vartheta)$. Поскольку в функциональных уравнениях интегралы выступают в роли операторов сжатия, то случайные компоненты в функциях $\tau(z)$ и $D_{11}(z)$, обусловленные измерительными шумами, не должны существенно влиять на ядро $K(h, l)$. К тому же следует иметь в виду, что если $\tau(z)$ и $D_{11}(z)$ оцениваются по данным многочастотного лазерного зондирования, то регуляризирующие методики построения преобразований $\beta_\pi \to \tau$ и $\beta_\pi \to D_{11}$ заведомо подавляют ошибки лидарных измерений. Таким образом, в любой ситуации можно полагать, что вариации $\delta_\tau(K)$ и $\delta_D(K)$ функционала $K[\tau, D]$ будут меньше вариаций $\delta\tau$ и δD, обусловленных ошибками в определении $\tau(z)$ и $D_{11}(z)$. В этом смысле мы и называли задачу определения ядра $K(l, h)$ методом обращения многочастотных лидарных измерений вполне корректной по своей постановке, поскольку речь идет о расчете значений параметрических интегралов. В связи с этим уместно заметить, что если бы приходилось решать обратную задачу, т. е. обращать интегралы с использованием экспериментальных данных, то ее следовало бы назвать некорректной в математическом отношении.

Вопросы, связанные с восстановлением спектрального хода аэрозольного коэффициента рассеяния (то же самое ослабления) по данным многочастотного лазерного зондирования, подробно рассматривались выше, и нет особой необходимости возвращаться к ним вновь в связи с оценкой ядра $K(l, h)$. Больший интерес, очевидно, представляет исследование нового преобразования, а именно $\beta_\pi \to \mathbf{D}_{11}$, где $\mathbf{D}_{11} = \{D_{11}(\lambda_i, \vartheta),\ i=1, \ldots, n\}$. В вычислительных системах интерпретации оптической информации это преобразование будет осуществляться оператором $W^{(\alpha)}_{D\pi}$. Как показывают численные исследования преобразования $\beta_\pi \to \mathbf{D}_{11}$ для углов рассеяния $\vartheta = 45$, 90 и 135°, представляющих наибольший интерес для схем касательного зондирования, оно мало чем отличается от преобразования $\beta_\pi \to \beta_{sc}$, о котором уже подробно речь шла выше, в разделе 3.2.3. В этом нет ничего неожиданного, поскольку характеристики $\beta_{sc}(\lambda)$ и $D_{11}(\lambda|\vartheta)$ можно считать в аналитическом отношении достаточно близкими. Равноточные измерения компонент вектора β_π на уровне ошибок в 10 % гарантируют оценку компонент вектора $\mathbf{D}_{11}$ в среднем на уровне 10—20 % для указанных выше углов рассеяния, что подтверждается расчетами, представленными в табл. 3.5. Так же как и в случае оператора $W^{(\alpha)}_{D, sc}$, оператор $W^{(\alpha)}_{D\pi}$ обладает вполне приемлемой устойчивостью к вариациям $\delta\overline{m}'$ и $\delta\overline{m}''$. Причины подобной устойчивости объясняются тем сглаживающим действием, которое оказывает интегральный оператор K_D на функцию $(K^{-1}_{\pi\alpha}\beta_{\pi\sigma})(r)$. Более высокий уровень ошибок прогноза значений $D_{11}(\lambda_i, \vartheta)$ для малых λ обусловлен малыми значениями факторов $K_\pi(r, \lambda)$ для малых r и, следовательно, бóльшими «потерями» мелких частиц при обращении оптических данных (см. подробнее раздел 2.3.1).

В целом можно констатировать, что оператор перехода $W^{(\alpha)}_{D\pi}$ обеспечивает прогноз вектора $\mathbf{D}$ по вектору β_π в пределах ошибок 10—20 % при тех возмущениях, которые указаны в табл. 3.5. В связи с этим можно полагать, что в первом приближении при обработке исходной оптической информации $\{\beta_{\pi ij},\ I_{ij},\ i, j=1, \ldots\}$, осуществляемой с целью оценки $\{\omega_{i\nu},\ i, \nu=1, \ldots\}$, к коррекции результатов обращения по показателю преломления можно не прибегать. Этот вывод, конечно, не является безусловным и в каждом конкретном случае должен подтверждаться предварительными численными экспериментами, которые обычно предшествуют обработке экспериментальных данных. Если технически представляется возможным увеличить объем измерений в эксперименте, то это, безусловно, нужно делать для повышения надежности результатов обращения.

Таблица 3.5

Отклонения прогнозируемых значений $D^{(\pi)}_{11,\alpha}(\lambda, \vartheta)$ от точных в преобразовании $\beta_{\pi} \to D_{11,\alpha}$

D_{11}, $\Delta\bar{m}$, σ_{π}	λ мкм			
	0,353	0,446	0,542	0,700
$D_{11,0}$ ($\vartheta = 45°$)	$0,32 \cdot 10^{-2}$	$0,31 \cdot 10^{-2}$	$0,31 \cdot 10^{-2}$	$0,29 \cdot 10^{-2}$
$\Delta\bar{m}' = 0,02$	$-0,034 \cdot 10^{-2}$	$-0,042 \cdot 10^{-2}$	$-0,039 \cdot 10^{-2}$	$-0,051 \cdot 10^{-2}$
$-0,02$	$0,016 \cdot 10^{-2}$	$0,058 \cdot 10^{-3}$	$0,019 \cdot 10^{-2}$	$0,031 \cdot 10^{-2}$
$\bar{m}'' = 0,02$	$0,044 \cdot 10^{-2}$	$0,035 \cdot 10^{-2}$	$0,043 \cdot 10^{-2}$	$0,053 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_{\pi} = 0,1$	$0,034 \cdot 10^{-2}$	$0,016 \cdot 10^{-3}$	$0,069 \cdot 10^{-3}$	$0,022 \cdot 10^{-2}$
$-0,1$	$-0,032 \cdot 10^{-3}$	$0,031 \cdot 10^{-3}$	$0,031 \cdot 10^{-3}$	$-0,029 \cdot 10^{-3}$
$D_{11,0}$ ($\vartheta = 90°$)	$0,49 \cdot 10^{-3}$	$0,46 \cdot 10^{-3}$	$0,43 \cdot 10^{-3}$	$0,36 \cdot 10^{-3}$
$\Delta\bar{m}' = 0,02$	$-0,092 \cdot 10^{-3}$	$-0,11 \cdot 10^{-3}$	$-0,091 \cdot 10^{-3}$	$-0,086 \cdot 10^{-3}$
$-0,02$	$0,039 \cdot 10^{-3}$	$0,036 \cdot 10^{-3}$	$0,044 \cdot 10^{-3}$	$0,028 \cdot 10^{-3}$
$\bar{m}'' = 0,02$	$0,084 \cdot 10^{-3}$	$0,082 \cdot 10^{-3}$	$0,071 \cdot 10^{-3}$	$0,053 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\pi} = 0,1$	$0,019 \cdot 10^{-3}$	$0,019 \cdot 10^{-3}$	$0,015 \cdot 10^{-3}$	$-0,086 \cdot 10^{-4}$
$-0,1$	$0,049 \cdot 10^{-4}$	$0,046 \cdot 10^{-4}$	$0,043 \cdot 10^{-4}$	$0,036 \cdot 10^{-4}$
$D_{11,0}$ ($\vartheta = 135°$)	$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$
$\Delta\bar{m}' = 0,02$	$-0,06 \cdot 10^{-3}$	$-0,08 \cdot 10^{-3}$	$-0,086 \cdot 10^{-3}$	$-0,074 \cdot 10^{-3}$
$-0,02$	$0,024 \cdot 10^{-3}$	$0,05 \cdot 10^{-3}$	$0,036 \cdot 10^{-3}$	$0,013 \cdot 10^{-3}$
$\bar{m}'' = 0,02$	$0,075 \cdot 10^{-3}$	$0,09 \cdot 10^{-3}$	$0,073 \cdot 10^{-3}$	$0,047 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\pi} = 0,1$	$0,012 \cdot 10^{-3}$	$-0,021 \cdot 10^{-3}$	$-0,011 \cdot 10^{-4}$	$0,013 \cdot 10^{-4}$
$-0,1$	$0,036 \cdot 10^{-4}$	$0,036 \cdot 10^{-4}$	$0,03 \cdot 10^{-4}$	$0,021 \cdot 10^{-4}$

В пределах настоящего раздела мы ограничились выводом интегрального уравнения для определения альбедо подстилающей поверхности по данным светорассеяния в атмосфере и построили алгоритмическую схему соответствующих вычислений, требуемых для его численного обращения. Расчетный анализ эффективности решений этой обратной атмосферно-оптической задачи и определение оптимальных рабочих характеристик соответствующего измерительного комплекса, состоящего из лидаров и орбитальных фотометров, требуют разработки программного обеспечения и проведения численного моделирования. Решение перечисленных прикладных задач выходит за рамки настоящей работы.

Введение в теорию обратных задач оптики атмосферы спектрального альбедо подстилающей поверхности $\omega_Q(\lambda, l)$ заметно их усложняет и требует большего информационного обеспечения и более сложных вычислительных схем обработки данных. Вместе с тем это полностью себя оправдывает с практической точки зрения. Действительно, оптику атмосферы навряд ли можно описать адекватно, без учета той компоненты солнечного света, которая обусловлена отражением от поверхности. Этого же требует разработка методов количественной интерпретации данных по светорассеянию, получаемых оптическим зондированием по протяженным трассам, как это имеет место, например, в схеме касательного зондирования.

Вместе с тем расширение объема физической информации, получаемой при обращении оптических данных зондирования атмосферы, способствует дальнейшей, более углубленной разработке самих обратных задач за счет привлечения дополнительной информации о физических процессах в атмосфере и соответствующего увеличения числа совместно обращаемых уравнений. Ниже постараемся проиллюстрировать эту мысль конкретными примерами, имеющими отношение к альбедо подстилающей поверхности. Аналогичные примеры уже встречались выше, когда рассматривались совместные обратные задачи турбулентной диффузии и светорассеяния в пограничном слое атмосферы (см. п. 2.2).

Прежде всего обратим внимание на то обстоятельство, что при рассмотрении методик интерпретации оптических данных $\{\beta_{\pi\sigma}, I_\sigma\}$, получаемых с помощью единого измерительного комплекса, установленного на орбитальной станции, вопрос о корректировке результатов обращения по мнимой части показателя преломления $\bar{m}''$, по существу, остался открытым. Это делалось сознательно, поскольку исходного объема оптической информации явно недостаточно для коррекции получаемых оптических характеристик по двум параметрам, $\bar{m}'$ и $\bar{m}''$. Во-вторых, навряд ли разумно во всех случаях стремиться к замыканию схем интерпретации на основе только одних оптических измерений. Известно, что наличие повышенной концентрации аэрозолей в пределах некоторого интервала высот, скажем $[Z_1, Z_2]$, необходимо влечет появление дополнительных градиентов поля температуры $T(z)$. Они обусловливаются поглощением солнечной радиации аэрозольными частицами, которое и приводит к локальным разогревам атмосферы [1]. Поэтому между профилем мнимой части показателя преломления $\bar{m}''(z)$, определяющего вместе с концентрацией аэрозольного вещества поглощенный поток радиации, и градиентом температурного поля существует вполне определенная функциональная связь.

Таким образом, имеется принципиальная возможность доопределить исходную систему уравнений любого из методов оптического зондирования новыми функциональными уравнениями, которые связывают температурное поле с полем аэрозольных оптических характеристик. Интересно отметить, что поскольку распределение аэрозолей в атмосфере носит нерегулярный характер, то указанные функциональные уравнения позволяют изучать нерегулярную компоненту температурного поля, которая, как правило, ускользает при термическом зондировании, основанном на явлении переноса радиации в линиях поглощения газовыми компонентами атмосферы.

Рассмотрим для примера аэрозольный слой в пределах локального интервала $(z, z+\Delta z)$, которому соответствует перепад давлений ΔP. Приращение температуры воздуха в этом слое за время

Δt, обусловленное нагревом частиц за счет поглощения радиации, запишется следующим образом [26]:

$$\Delta T/\Delta t = c\,\Delta I^{(a)}/\Delta P, \tag{3.87}$$

где c — некоторая постоянная, а $\Delta I^{(a)}$ — величина потока, поглощенного частицами. Значение $\Delta I^{(\alpha)}$ зависит от альбедо атмосферы, включая прежде всего альбедо аэрозольной компоненты $\omega^{(a)}$, альбедо подстилающей поверхности ω_Q и зенитного угла ψ_0 (см. рис. 3.11). Нетрудно видеть, что все три оптические характеристики входят в вычислительную схему интерпретации оптических данных, связанную с интегральным уравнением (3.79). Если допустить, что в нашем распоряжении есть технические средства для измерения высотных вариаций температурного поля $\delta T(z, t)$, то в соответствии с (3.87) можно построить функциональное уравнение вида

$$F\left[\omega^{(a)},\ \tau^{(a)},\ \omega_Q,\ \psi_0,\ z,\ t\right] = \delta T(z,\ t). \tag{3.88}$$

Высоты, для которых подобное уравнение представляет наибольший интерес, могут быть определены по данным лазерного зондирования, позволяющего с высоким пространственным разрешением устанавливать стратификацию атмосферных аэрозолей. Поскольку $\omega^{(a)}(z)$ определяется $\bar{m}''(z)$, то (3.88) связывает профили $\bar{m}''(z)$ и $\delta T(z)$. Без соответствующего расчетного анализа трудно сказать, в какой мере уравнение (3.88) может быть эффективным для определения профиля $\bar{m}''(z)$ по данным совместного термического (радиозонды) и оптического зондирования. Существующие вычислительные схемы для расчета потоков $\Delta I^{(a)}$ строятся на основе численного решения уравнений переноса в сферической атмосфере и достаточно сложны, чтобы их можно было непосредственно использовать в схемах обращения оптических данных. В этом направлении необходимы соответствующие целенаправленные исследования по созданию эффективных алгоритмов оперативной оценки потоков рассеянной солнечной радиации в атмосфере, когда оптические характеристики последней определяют методами оптического зондирования.

На основе имеющихся расчетных и экспериментальных исследований можно полагать, что уравнение (3.88), которое мы вынужденно пишем в неявной форме, может быть использовано для коррекции оптических характеристик по параметру $\bar{m}''$. В частности, это подтверждается результатами расчетов, выполненными в обстоятельной работе [26], в связи с экспериментальными и расчетными исследованиями эффектов влияния аэрозолей на радиационный режим атмосферы. На рис. 3.13, по данным указанной работы, представлены в относительных единицах потоки поглощенной аэрозолем солнечной радиации в зависимости от мнимой части показателя преломления аэрозольного вещества. Максимальное значение достигает 30 %, что весьма существенно с точки зрения учета подобных эффектов. Поэтому уравнение

(3.88) представляет несомненный практический интерес во всех тех случаях, когда интерпретацию данных оптического зондирования атмосферы можно связать с полем температуры. Следует заметить, что расчеты выполнялись в среднем для всей атмосферы, т. е. предполагалось, что аэрозоли распределены равномерно. Средний температурный градиент, обусловленный поглощением аэрозолей, составил 0,039 К/z для спектрального интервала 0,3—3 мкм. В расчетах использовались следующие

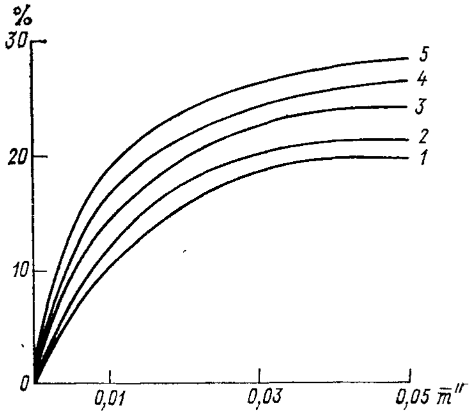

Рис. 3.13. Поглощение (%) атмосферным аэрозолем солнечной радиации в диапазоне [0,3, 3 мкм] в зависимости от мнимой части $\overline{m}''$ и различных значений альбедо подстилающей поверхности [26]. *1*) $\omega_s=0{,}1$; *2*) $\omega_s=0{,}25$; *3*) $\omega_s=0{,}4$; *4*) $\omega_s=0{,}6$; *5*) $\omega_s=0{,}8$.

усредненные характеристики аэрозольной компоненты: $\tau^{(a)}=0{,}25$; $\overline{m}'=1{,}5$; показатель Юнге $\nu=-2$; угол $\psi_0=65°$ и среднее давление в атмосфере $\overline{P}=337$ гПа.

Следует иметь в виду, что если в оптическом эксперименте исходной информации достаточно для определения $\overline{m}''(z)$ (например, выполнены сопутствующие оптические измерения с помощью самолетных нефелометров), то функциональные уравнения вида (3.88) могут использоваться для оценки нерегулярной составляющей температурного профиля $T(z)$. Подобные информационные возможности оптического мониторинга атмосферы делают актуальными дальнейшие исследования по методам решения обратных задач оптики атмосферы применительно к изучению процессов, связанных с формированием климата планеты.

3.4.4. Дальнейшее развитие метода интегральных уравнений

В изложенной выше теории касательного зондирования основное внимание уделялось определению оптических характеристик атмосферы. Что же касается возможности определения оптических свойств подстилающей поверхности, то к ней мы пришли в процессе уточнения исходных функциональных уравнений, когда вводили в них дополнительные факторы, влияющие на формирование оптических сигналов в геометрической схеме метода. Можно полагать, что интегральное уравнение (3.79) не является наилучшим, если требуется найти распределение $\omega_Q(l)$ из обращения данных по светорассеянию в атмосфере. Имеется в виду и достигаемое пространственное разрешение по параметру l и чувствительность к ошибкам в задании ядра $K(D, Q)$.

Резонно поставить вопрос о надлежащем изменении геометрической схемы зондирования и выборе параметрического семейства

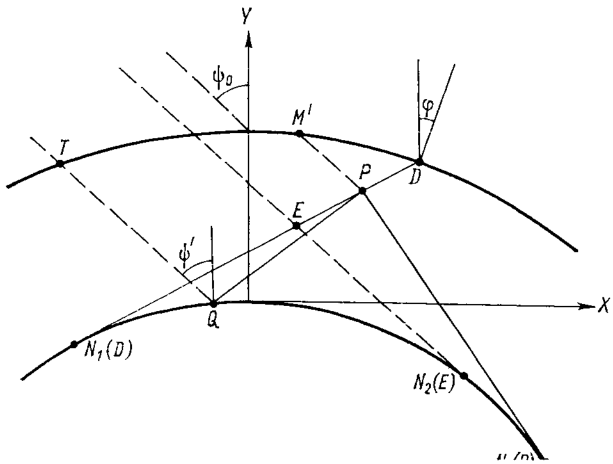

Рис. 3.14. Геометрическая схема зондирования для семейства линий визирования, касательных к поверхности.

секущих линий с целью построения более эффективного в указанном выше смысле ядра интегрального уравнения (3.72). В пределах настоящей работы не будем пытаться решать сформулированную задачу аналитическими средствами, поскольку для практических приложений зачастую вполне достаточно ограничиться качественным обсуждением результатов численного моделирования. В этой связи рассмотрим еще два варианта схем зондирования, основанных на фотометрических орбитальных измерениях интенсивности рассеянного солнечного света. В первом случае речь будет идти о параметрическом семействе линий визирования, касательных к земной поверхности (рис. 3.14). Порядок построения интегрального уравнения вида (3.72) здесь ничем не отличается от описанного ранее. Разница состоит в том, что теперь область интегрирования по переменной Q (то же самое по дифференциалу дуги dl_Q) имеет следующее разбиение:

$$\left.\begin{aligned} &N_1(D) \leqslant Q \leqslant N_2(P) \quad \text{при} \quad N_1(D) \leqslant P \leqslant E, \\ &N_1(D) < Q \leqslant N_2(E) \quad \text{при} \quad E < P \leqslant D. \end{aligned}\right\} \qquad (3.89)$$

В соответствии с этим выражение для измеряемых интенсивностей в точке наблюдения D примет вид

$$\hat{I}(D) = \int\limits_{N_1(D)}^{E} \underbrace{\qquad\quad}\, dl(P) + \int\limits_{E}^{D} \underbrace{\qquad\quad}\, dl(P).$$

Соответствующие подынтегральные выражения те же, что и в случае (3.70). Ядра интегральных операторов K_1 и K_2 вычисляются по формулам, аналогичным (3.79), за исключением, конечно, пределов в соответствующих интегральных выражениях. Возможным

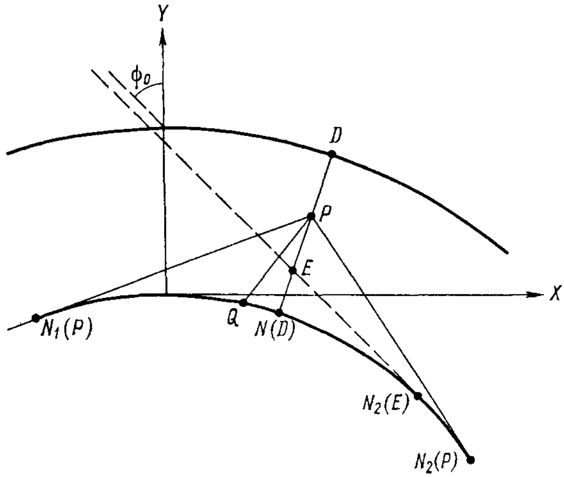

Рис. 3.15. Схема зондирования системы атмосфера — подстилающая поверхность по радиальным направлениям.

отличием теперь является то, что для задания семейства секущих удобнее использовать параметр φ (см. рис. 3.14). Его введение в расчетную схему метода осуществляется с помощью подстановки вида $D = \{x_D, y_D\} = \{(r+\bar{H}) \sin\varphi;\ (r+\bar{H}) \cos\varphi\}$. В связи с этим измеряемая интенсивность $\hat{I}(D)$ представляется как функция угла φ, т. е. $\hat{I}(\varphi)$. Можно надеяться, что получаемый в этой схеме интегральный оператор K относительно распределения $\omega_Q(l)$ обусловлен лучше, нежели в предыдущем примере, поскольку область интегрирования по мере dl_Q в среднем здесь несколько уже. Уменьшение усредняющих эффектов в функциональных уравнениях всегда влечет повышение их обусловленности. Для количественной оценки эффективности уравнения, соответствующего схеме зондирования на рис. 3.14, необходим надлежащий численный эксперимент. Следует заметить, что в этой схеме эффекты многократного рассеяния могут сказываться более существенно, нежели в первом варианте.

Геометрическую схему зондирования, представленную на рис. 3.15, можно считать естественной модификацией предыдущей. Семейство линий визирования совпадает теперь с радиальными лучами. Схема зондирования наиболее информативна при решении обратной оптической задачи (3.72) относительно альбедо подстилающей поверхности. Область интегрирования $L(P)$ в ней представляется следующими выражениями:

$$\left.\begin{array}{ll} N_1(P) \leqslant Q \leqslant N_2(P) & \text{при } N(D) \leqslant P \leqslant E, \\ N_1(P) < Q \leqslant N_2(E) & \text{при } E < P \leqslant D. \end{array}\right\} \tag{3.90}$$

Для всех трех вариантов алгоритм построения расчетных выражений (3.79) остается без изменения, в связи с чем выше и говорилось о различных ядрах одного и того же интегрального уравнения (3.72). С учетом схемы вычислений (3.79) измеряемая интенсивность $\widehat{I}(D)$ является функционалом $\widehat{I}[\omega_Q, \tau]$, который зависит от двух распределений, $\omega_Q(l)$ и $\tau(z)$. Задание $\tau(z)$ при расчете ядра $K(D, Q)$ можно рассматривать в этом случае как коррекцию результатов обращения $\widehat{I}_\sigma(\varphi)$ по атмосферным оптическим характеристикам [17]. Поскольку технически подобная коррекция осуществляется через интегральное уравнение, уместно в этой связи употребление термина «метод интегрального уравнения». Определение ядра $K(D, Q)$ в излагаемой здесь теории связывается не с оптическими моделями атмосферы, а с синхронным оптическим зондированием, комплексом измерительных средств и последующим применением регуляризирующих операторов типа $W^{(\alpha)}$ и $V^{(\alpha)}$ теории светорассеяния.

Завершая общий анализ уравнения (3.72), остановимся несколько подробнее на свойствах ядра $K(D, Q)$, которые имеют непосредственное отношение к надежности результатов обращения. Допустим, что профиль оптической толщи атмосферы $\tau(z)$ известен в пределах вариации $\delta\tau(z)$. Напомним, что речь всюду идет о спектральных оптических характеристиках, и поэтому следует писать $\tau(\lambda, z)$ и $\delta_z\tau(\lambda, z)$. Для упрощения записи выражений иногда опускается переменная λ. Будем считать, что при $\delta\tau(z) \to 0$ равномерно для всех точек z из интервала высот $Z = [Z_1, Z_2]$, в пределах которого исследуется функция $K(D, Q)$, $\tau(z)$ стремится к точному профилю $\tau_0(z)$. Задание ядра $K(D, Q)$ можно считать вполне корректным в математическом отношении, если функционал $K[\tau(z), \varphi, l]$, рассчитываемый согласно (3.79) с привлечением оператора $W^{(\alpha)}_{D, ex}$, осуществляющего преобразование спектрального хода $\beta_{ex}(\lambda)$ в $D_{11}(\lambda|\vartheta)$, непрерывен по $\tau(z)$ и $\delta_\tau K \to 0$ при $\delta\tau \to 0$. Используя стандартные приемы вариационного исчисления, нетрудно показать, что вариация ядра по τ $\delta_\tau K$ включает в себя два слагаемых, одно из которых пропорционально $\tau \cdot W^{(\alpha)}_{D, ex}\delta\tau$, а второе — $\delta\tau \cdot W^{(\alpha)}_{D, ex}\tau$. Ограниченность оператора $W^{(\alpha)}_{D, ex}$ автоматически влечет непрерывность ядра $K(D, Q)$ по $\tau(z)$.

Здесь также следует учесть и представимость рассматриваемого функционала в виде параметрического интеграла, о чем уже упоминалось выше, в предыдущем разделе. Характерно, что непрерывность ядра $K(D, Q)$ связана со свойствами операторов $W^{(\alpha)}$ теории светорассеяния. Продолжая анализ в этом направлении, можно выявить и более сильные свойства ядра (то же самое функционала) $K(D, Q)$. Напомним, что оператор $W^{(\alpha)}_{D, ex}$ не только ограничен, но и является еще оператором сжатия, т. е. удовлетворяет условию: $\|W^{(\alpha)}_{D, ex}\| < 1$. Если это так, то последовательность $\{K[\tau^{(p)}(z), \varphi, l], p=1, \ldots\}$ является сильно сходящейся, даже если исходная последовательность оптических характеристик $\{\tau^{(p)}(z), p=1, \ldots\}$ сходится слабо. Значит, требования к точности задания профилей $\tau(z)$ при вычислении ядра $K(D, Q)$ могут быть существенно ослаблены при прочих равных условиях. Указанное свойство имеет также первостепенное значение для сходимости итерационных процедур, лежащих в основе программных комплексов обработки оптической информации. Необходимо отметить, что все сказанное выше о свойствах ядра $K(D, Q)$ в полной мере относится и к функционалу $R(D, P)$, играющему роль функции источника в уравнениях переноса вдоль секущих. На этом можно закончить анализ свойств интегрального уравнения (3.72) как теоретической основы дистанционного исследования оптических свойств земной поверхности с использованием данных зондирования системы атмосфера — подстилающая поверхность.

3.5. Заключение

Обсудив основы теории оптического мониторинга системы атмосфера — подстилающая поверхность, вернемся к тем исходным предположениям, которые делались при выводе основных функциональных соотношений (3.4), (3.67), а также последнего интегрального уравнения (3.72). Дело в том, что при их построении не учитывались возможные эффекты многократного рассеяния и, следовательно, процесс формирования оптического сигнала во всех без исключения геометрических схемах зондирования существенно упрощен. В частности, при расчете функций источника нами учитывались лучи двух типов (соответственно *1* и *2* на рис. 3.16) из той совокупности, которые в принципе могут достичь точек на выбранной линии визирования. Более строгий подход к выводу уравнений теории зондирования рассеивающей компоненты атмосферы, когда необходимо учесть, скажем, лучи типа *3* и *4* (см. рис. 3.16), неминуемо приводит к использованию уравнения переноса в более общей форме, каким, в частности, является его трехмерный вариант для сферически однородной атмосферы.

Рассмотрение обратных задач теории переноса для сферической геометрии, когда альбедо подстилающей поверхности меняется по пространственным координатам, естественно, выходит за рамки настоящей работы. Уместно также заметить, что в задачах оптического мониторинга земной поверхности предпочтительней исходить из теории однократного рассеяния, а затем использовать численные решения трехмерных уравнений переноса с целью внесения поправок на фон многократного рассеяния при интерпретации оптических измерений. Подобная точка зрения развивается в ряде исследований, посвященных вопросам зондирования атмосферных аэрозолей с орбитальных станций [12]. Поскольку техника численного решения уравнения переноса для сферически однородной атмосферы достаточно хорошо развита в настоящее время, то принципиальных трудностей в дополнении вычислитель-

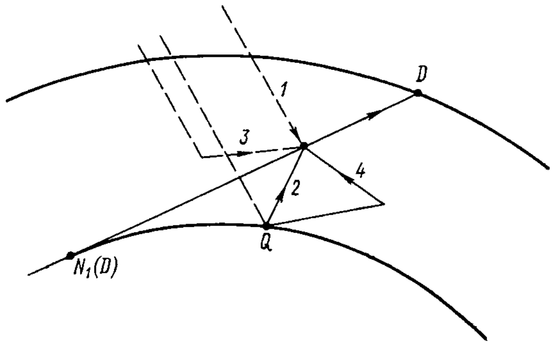

Рис. 3.16. Совокупность лучей, участвующих в формировании оптических сигналов $I(D)$.

ных схем интерпретации соответствующими алгоритмами для учета фона многократного рассеяния не существует. Конечно, большинство публикаций по расчету интенсивности рассеянного солнечного света в земной атмосфере относятся к простейшим вариантам, а именно когда $\omega_Q(l)=\mathrm{const}$ на земной поверхности. Подобные модели не всегда могут быть использованы в задачах оптического мониторинга, особенно когда речь идет о зондировании системы атмосфера — подстилающая поверхность, поэтому для обратных задач в форме интегрального уравнения (3.72) в общее уравнение переноса, записанного для атмосферы в целом, должно вводиться двумерное распределение $\omega_Q(l_1, l_2)$, характеризующее альбедо подстилающей поверхности в координатных линиях l_1 и l_2 на поверхности сферы радиуса r. Вся исходная информация об оптических характеристиках атмосферы и альбедо подстилающей поверхности для расчета корректирующих поправок на основе решения соответствующей прямой задачи переноса имеется в нашем распоряжении.

Теперь несколько замечаний математического характера относительно рассматриваемой здесь коррекции. Выражения (3.79) позволяют рассчитать ядро $K(D, Q)$ в предположении однократного рассеяния, что обусловлено соответствующим выбором функции источника $R(D, P)$. Для более корректного вычисления последней необходимо решить уравнение переноса в сферической атмосфере с неоднородной подстилающей поверхностью. При этом важно подчеркнуть, что исходная оптическая информация при расчете любого приближения для $R(D, P)$ одна и та же, т. е. это совокупность данных $\{\omega_Q, \tau=\tau^{(a)}+\tau^{(м)}, D_{11}^{(a)}\}$. Поэтому коррекция методов оптического зондирования по фону многократного рассеяния носит формальный характер, или, лучше сказать, расчетно-аналитический и достигается за счет учета полной геометрии рассеяния. В этом отношении коррекция обратных задач оптики аэрозоля по показателю преломления существенно отлична, поскольку обусловливалась неопределенностью в знании $\overline{m}$ и требовала дополнительных оптических измерений.

Вычислительный алгоритм можно строить, как и ранее, на основе метода последовательных приближений. Выражения (3.79) дают ядро $K^{(1)}(D, Q)$, а решение (3.72) — распределение $\omega_Q^{(1)}(l)$. Решение прямой задачи переноса с $\omega_Q^{(1)}(l)$ (точнее с $\omega_Q^{(1)}(l_1|l_2)$) при известных оптических характеристиках атмосферы определяет $R^{(2)}(D, Q)$ и соответственно $K^{(2)}(D, Q)$. Таким образом, схема решения прямой задачи генерирует последовательность функционалов $R^{(p)}[\omega_Q^{(p-1)}, D, P]$ и $K^{(p)}(D, Q)$, где p — номер очередного приближения в итерационной схеме обращения оптических данных. Нет особой необходимости останавливаться на сходимости последовательности решений $\{\omega_Q^{(p)}(l)\}$. Последовательность поправок $\Delta^{(p, p-1)}(R)$ должна вести себя вполне регулярно в силу достаточно ясных причин. Неудивительно, что в ряде работ фон многократного рассеяния в методе касательного зондирования предлагается учитывать с помощью нормирующих множителей для функции $R^{(1)}(D, P)$, которые рассчитываются заранее для стандартных оптических моделей атмосферы.

Разумеется, можно использовать и более строгие методы коррекции результатов интерпретации по фону многократного рассеяния. Один из подобных методов описан в монографии [13]. Его достоинством является относительная простота реализации вычислений и возможность учета индикатрисы отражения подстилающей поверхности. Вопросы коррекции спектральных фотометрических наблюдений со спутников затронуты также в монографии [20].

В заключение отметим, что рассмотренные в главе схемы обращения даже для простейшего варианта, каким является одномерный вариант переноса излучения в плоском сечении сферически однородной атмосферы, достаточно сложен с точки зрения анализа и вычислений. Поэтому в настоящее время практика атмосферно-оптических исследований на первый план выдвигает разработку программного обеспечения для численного моделирования всего взаимоувязанного комплекса прямых и обратных задач оптического мониторинга системы атмосфера — подстилающая поверхность.

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ И ПРИКЛАДНОГО АНАЛИЗА В АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКЕ

В практике атмосферно-оптических исследований часто возникает необходимость в применении численных методов интерполяции и экстраполяции спектральных и угловых характеристик светорассеяния. Например, это имеет место в задачах разделения спектрального хода молекулярных и аэрозольных коэффициентов ослабления в атмосфере по данным спектральной прозрачности. В случаях, когда требуется дать корректную оценку величины молекулярного поглощения при наличии в соответствующих экспериментальных данных значительного фона рассеяния и т. п. Разработка эффективных методов экстраполяции спектральных характеристик позволит, в частности, прогнозировать значения аэрозольных коэффициентов рассеяния и ослабления в ИК- и УФ-областях, где их непосредственное измерение затруднено из-за преобладания молекулярного поглощения. Исходные оптические данные для подобной экстраполяции можно получить в видимом диапазоне, где имеется достаточно «окон прозрачности». Излагаемая ниже теория аппроксимации аэрозольных спектральных характеристик светорассеяния основана на их аналитическом представлении параметрическими интегралами и регуляризирующих алгоритмах численного обращения последних. То, как технически реализуется этот метод аппроксимации, уже говорилось выше, при обсуждении возможных применений операторов восстановления, в первой главе.

При аппроксимации функциональных зависимостей недостаточно указать алгоритм численного построения последовательности приближающих функций. Необходимо также указать условия сходимости и ее характер (равномерное приближение или в среднем). Желательно оценить и скорость сходимости. Все это вместе определяет эффективность рассматриваемого метода аппроксимации.

Для оценки ошибок аппроксимации необходимо иметь представление о локальном поведении исследуемых функций, что обычно в анализе достигается построением соответствующих степенных разложений. Применительно к задачам оптики дисперсных сред нам следует построить ряды Тейлора для функций, представимых интегралами. К сожалению, эта операция осложняется тем обстоятельством, что ядра соответствующих интегралов не обладают требуемой гладкостью. Для преодоления аналитических трудностей ранее в работе [19] была предложена формула дифференцирования спектральных характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц. В главе иллюстрируется техника аналитического построения степенных разложений для указанных характеристик на основе этой формулы.

Помимо решения аппроксимационных задач, предлагаемая техника дифференцирования оказалась эффективным средством анализа и численного решения некоторых нелинейных задач оптики аэрозоля. В частности, речь идет о задачах, в которых требуется, помимо спектра размеров частиц, найти одновременно и спектральный ход показателя преломления их вещества либо зависимость его от размера частиц. В равной мере это относится, например, и к зондированию аэрозолей, взаимодействующих с полем влажности. Удается показать, что в подобных случаях обратные задачи в форме интегрального уравнения первого рода можно свести к интегральным уравнениям второго рода. Иными словами, удается осуществить так называемую естественную регуляризацию некорректных задач. Аналогичный факт известен в теории интегральных уравнений Вольтерра [27].

Изложенные в главе методы аппроксимации спектрального хода аэрозольного коэффициента ослабления (рассеяния) могут быть использованы при решении разнообразных задач оптического зондирования атмосферы и прежде всего тех, которые основываются на явлении молекулярного поглощения. В частности, к ним можно отнести восстановление профилей концентрации озона по данным лазерного зондирования, когда в дифференциальной методике требуется корректно учесть влияние вклада аэрозольного и молекулярного рассеяния. В главе подробно излагается так называемая методика локального прогноза, развитая на основе качественных методов теории аппроксимации оптических характеристик светорассеяния в атмосфере. Кратко обсуждены математические аспекты, связанные с постановкой и решением обратных атмосферно-оптических задач, использующих явление поглощения газовыми составляющими. Физическое содержание этих задач и их практическую значимость можно найти в работах [8, 10, 11].

4.1. Методы аппроксимации аэрозольных оптических характеристик

Метод оптических операторов, используемый выше при разработке теории оптического зондирования рассеивающей компоненты атмосферы, может играть роль эффективного аналитического аппарата при решении аппроксимационных задач, возникающих в практике атмосферно-оптических исследований. К подобным примерам можно, в частности, отнести задачу восстановления непрерывного хода аэрозольных характеристик светорассеяния $\beta(\lambda)$ по дискретным измерениям $\{\beta_\sigma(\lambda_i),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$, выполненных в пределах спектрального интервала Λ. Следует заметить, что эта задача для атмосферной оптики имеет особое значение. Действительно, обратимся к определению спектрального хода коэффициента ослабления $\beta_{ex}(\lambda)$, осуществляемого с помощью фотометра по горизонтальной трассе. В основу метода положена функциональная зависимость

$$\exp\{-\beta_{ex}(\lambda) L\} = I(\lambda)/I_0(\lambda),$$

где $I(\lambda)$ — интенсивность света в точке приема, а I_0 — интенсивность источника; L — длина трассы. Для некоторых длин волн λ из спектрального интервала Λ, в пределах которого ведутся измерения, может существенно сказываться молекулярное поглощение, и тогда коэффициент ослабления должен содержать две компоненты, одна из которых обусловлена эффектами рассеяния, а вторая — молекулярным поглощением. Последнюю компоненту ниже будем обозначать через $\beta_{ab}^{(м)}(\lambda)$. Ее величина в ряде случаев может существенно превышать компоненту $\beta_{ex}(\lambda)$, обусловленную эффектами рассеяния на молекулах и аэрозолях. В этих условиях интерпретация данных по спектральной прозрачности на основе записанного выше функционального уравнения становится затруднительной, поскольку не представляется возможным определить из них объемные коэффициенты ослабления, связанные с взаимодействием излучения с рассеивающей компонентой атмосферы.

Если речь идет о видимом диапазоне, то избежать указанных трудностей можно за счет соответствующего выбора рабочих длин волн измерительной аппаратуры, которые должны попадать в так называемые окна прозрачности. Окна прозрачности определяются условием $\beta_{ab}^{(м)}(\lambda_i) \ll \beta_{sc}(\lambda_i)$. Иными словами, молекулярным поглощением пренебрегают для соответствующих λ_i. Поэтому в условиях реальной атмосферы, используя спектральный фотометр, в пределах любого спектрального диапазона можно измерить значения коэффициента рассеяния $\beta_{sc}(\lambda)$ лишь для некоторого дискретного набора длин волн $\{\lambda_i, i=1, \ldots, n\}$. Что же касается непрерывного хода $\beta_{sc}(\lambda)$ в пределах интервала оптического зондирования Λ, то его в лучшем случае можно попытаться восстановить по дискретному набору измерений $\{\beta_{sc}(\lambda_i)\}$, используя те или иные методы теории аппроксимации.

В пределах настоящего раздела будут изложены методы численного решения аппроксимационных задач для оптических характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц. Решив задачу по восстановлению непрерывного хода $\beta_{sc}(\lambda)$, нетрудно затем выделить из $\beta_{ex}(\lambda)$ вторую компоненту $\beta_{ab}^{(м)}(\lambda)$ в пределах интервала зондирования Λ. Этим самым решается одна из очень важных задач прикладной оптики по разделению эффектов рассеяния и поглощения. Заметим, что в ряде случаев поглощение не обязательно должно относиться только к газовым компонентам. Поглощение, и особенно селективное, может относиться и к аэрозольному веществу, обусловленному сильной зависимостью его мнимой части $\bar{m}''$ от λ. Эффекты поглощения играют особо важную роль в задачах переноса радиации УФ- и ИК-диапазонов. Излагаемые ниже методы аппроксимации позволят одновременно решать задачи по разделению $\beta_{sc}(\lambda)$ на две составляющие, а именно: $\beta_{sc}^{(a)}(\lambda)$ и $\beta_{sc}^{(м)}(\lambda)$, что требуется нам для завершения теории оптического мониторинга рассеивающей компоненты атмосферы, основанного на методах лазерного и касательного зондирования.

4.1.1. Методы интерполирования спектральных оптических характеристик

Одним из простейших подходов к решению задач восстановления непрерывного хода $\beta_{sc}(\lambda)$ по дискретному набору измерений $\{\beta_{sc}(\lambda_i),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ может быть подход, основанный на методе численного интерполирования. Допустим, что длины волн λ_i в совокупности принадлежат спектральному интервалу Λ. Построение непрерывного хода функции $\beta(\lambda)$ по исходным данным $\{\beta_i, \lambda_i\}$ начинается с надлежащего выбора интерполяционного многочлена $P_n(\lambda)$, который удовлетворяет условиям $P_n(\lambda_i)=\beta_i$ для всех i. Оценка погрешности интерполирования для некоторой фиксированной точки λ из интервала Λ выполняется с использованием известных формул для остаточных членов (см., например, [15]):

$$\Delta_\beta(\lambda)=\beta(\lambda)-P_n(\lambda)=\beta^{(n+1)}(\lambda')\,\omega_n(\lambda)/(n+1)\,!, \tag{4.1}$$

где $\omega_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1\ (\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$ и λ' — некоторая точка интервала Λ (неопределенная точка в теореме об остаточном члене). Значение многочлена $\omega_n(\lambda)$ удовлетворяет неравенству $\|\omega_n(\lambda)\,|\leqslant(\lambda_n-\lambda_1)^{n+1}$.

Для того чтобы воспользоваться выражением (4.1) для оценки $\Delta_\beta(\lambda)$, необходимо знать производные искомой оптической характеристики $\beta(\lambda)$ вплоть до порядка $(n+1)$. В конкретной ситуации известны лишь последовательности $\{\beta_i)$ и $\{\lambda_i\}$, которые в теории приближений функций называют системой отсчетов и узлов соответственно. Сказать в этом случае что-либо определенное о поведении $\beta(\lambda)$ и тем более ее производных не представляется возможным. В принципе можно прибегнуть к построению верхней оценки для ошибки интерполирования, записав неравенство вида

$$|\Delta_\beta(\lambda)|\leqslant\max_{\lambda'\in\Lambda}|\Delta_\beta(\lambda)|\leqslant\max_{\lambda\in\Lambda}\left|\beta^{(n+1)}(\lambda)\right|(\lambda_n-\lambda_1)^{n+1}/(n+1)\,!, \tag{4.2}$$

и пытаться затем найти величину $\max|\beta^{(n+1)}(\lambda)|$, используя ту или иную априорную информацию о поведении $\beta(\lambda)$. Указанная величина выступает в (4.2) как количественная характеристика степени гладкости интерполируемой функции. Априорное знание подобных величин в теории оптического зондирования играет важную роль, поскольку позволяет оценить требуемое число отсчетов измеряемой функции для ее восстановления с заданной точностью. Зная характеристику гладкости интерполируемой функции $\beta(\lambda)$ и задав ошибку интерполирования, с помощью неравенства (4.2) нетрудно оценить искомое значение n.

Рассмотренный выше пример показывает, что, применяя к задаче восстановления непрерывного хода характеристики $\beta(\lambda)$ методы обычной степенной интерполяции, мы сталкиваемся с необходимостью априорной оценки производных этой функции. Если в аналитических задачах исходная функция обычно известна и речь идет о том, чтобы ее заменить более простым аналитическим аналогом, каким, в частности, и является интерполяционный многочлен, то в экспериментальных методах исследования функциональных зависимостей ситуация совершенно иная. Искомые функции здесь суть реализации некоторого случайного процесса. Хорошо известна нерегулярность их аналитического поведения [12]. Поэтому неудивительно, что методы теории аппроксимации не находят сколько-нибудь заметного применения ни в обработке оптических измерений по светорассеянию, ни в планировании соответствующих экспериментов в атмосфере.

Необходимость знания априорных оценок гладкости оптических характеристик светорассеяния является, к сожалению, не единственной трудностью, с которой столкнулось применение стандартных методов интерполирования к восстановлению их непрерывного спектрального хода. Как показывает анализ, определенные затруднения возникают и в связи с зависимостью показателя преломления вещества рассеивающих частиц от длины волны. В этом случае интерполируемую оптическую характеристику $\beta(\lambda)$ следует уже рассматривать как функционал $\beta[\bar{m}(\lambda), \lambda]$ от функции $\bar{m}(\lambda)$. Появление зависимости $\bar{m}(\lambda)$ делает спектральный ход $\beta(\lambda)$ более чем нерегулярным, и интерполяционная задача практически теряет свой смысл, поскольку требует слишком большого числа отсчетов. Единственным выходом в этом случае является сужение интервала Λ, с тем чтобы предположение $\bar{m}(\lambda)=\text{const}$ можно было принять с бо́льшим основанием. Однако, как уже говорилось выше, в условиях реальной атмосферы нет возможности произвольно варьировать узлами $\{\lambda_i\}$ ввиду наличия молекулярного поглощения.

Следует заметить, что в рамках интерполяционного подхода априорное значение зависимости $\bar{m}(\lambda)$ для исследуемой дисперсной среды практически ничем не может помочь в построении более эффективного интерполяционного многочлена $P_n(\lambda)$ для характеристики $\beta(\lambda)$. На основании вышеприведенного анализа становится ясно, что методы интерполирования не решают в полной мере задач восстановления непрерывного хода спектральных оптических характеристик $\beta(\lambda)$ по дискретному набору $\{\beta_i, \lambda_i, i=1, \ldots, n\}$. Интерполяционные многочлены в лучшем случае могут рассматриваться как средство для изучения особенностей локального поведения характеристик $\beta(\lambda)$, когда все узлы $\{\lambda_i\}$ выбраны в узкой спектральной области, в пределах которой можно пренебречь спектральной зависимостью показателя $\bar{m}$. От указанных недостатков свободны аппроксимационные аналоги, которые можно построить для функций $\beta(\lambda)$, используя метод обратной задачи теории светорассеяния полидисперсными системами частиц, изложение которого дается ниже.

4.1.2. Метод обратной задачи в теории аппроксимации полидисперсных интегралов

Идея этого метода применительно к задачам аппроксимации характеристик светорассеяния достаточно проста и уже высказывалась выше, когда рассматривались свойства оптических операторов. Будем, как и ранее, исходить из совокупности оптических данных $\{\beta_i, \lambda_i,\ i=1, \ldots, n\}$, по которым требуется восстановить непрерывный ход $\beta(\lambda)$ в пределах интервала оптического зондирования Λ. Помимо этого будем полагать известной функциональную зависимость показателя преломления $\bar{m}$ от λ. В этих условиях вполне определена обратная задача светорассеяния

$$\int_R K[\bar{m}(\lambda_i),\ \lambda_i,\ r]\, s(r)\, dr = \beta_i, \quad i=1, \ldots, n, \tag{4.3}$$

решение которой $s_\alpha(r)$ дает некоторое приближение для действительного распределения $s_0(r)$, характеризующего в терминах плотности распределения геометрического сечения частиц микроструктуру исследуемой дисперсной среды. Заметим, что подстрочный индекс α в обозначении приближенного решения не обязательно должен увязываться с явной формой построения регуляризующего оператора K_α^{-1}. Его введение указывает на то, что в качестве правой части системы (4.3) используется вектор $\boldsymbol{\beta}_\sigma$ и обращение осуществляется на компактном множестве возможных решений. В этом смысле запись $s_\alpha(r)$ ниже будет использоваться для обозначения некоторого регуляризованного решения (4.3) вне связи с какой-либо конкретной вычислительной схемой обращения оптических данных.

Величина отклонения $[s_0(r) - s_\alpha(r)]$, характеризующая распределение ошибки обращения по интервалу размером R, зависит от погрешности измерения σ, числа отсчетов n и точности априорного задания $\bar{m}(\lambda)$. В первом приближении будем считать определяющим среди перечисленных выше факторов погрешность оптических измерений. Тогда правомерно ожидать выполнения условия

$$\| s_0 - s_\alpha \|_{L_2(R)} \leqslant \delta(\sigma), \tag{4.4а}$$

если, конечно,

$$\| \boldsymbol{\beta}_0 - \boldsymbol{\beta}_\sigma \|_{l_2} \leqslant \sigma. \tag{4.4б}$$

В (4.4а) $\delta(\sigma)$ — величина, имеющая тот же порядок малости, что и σ. Второе условие допускается априори и основывается на предположении, что интегральное представление (4.3) для измеренной оптической характеристики вполне применимо, а заданные значения $\bar{m}(\lambda_i)$ несущественно отклоняются от действительных. ная функция $\beta_\alpha(\lambda) = (K_{S\alpha})(\lambda)$ также дает состоятельную оценку для $s_0(r)$ в пределах R, то можно утверждать, что вспомогательная функция $\beta_\alpha(\lambda) = (Ks_\alpha)(\lambda)$ также дает состоятельную оценку для $\beta_0(\lambda) = (Ks_0)(\lambda)$ всюду в пределах интервала Λ. Это утверждение для излагаемой ниже теории аппроксимации является основополагающим. Не усложняя изложения материала, мы опустим его строгое доказательство, полагая, что высказанных выше наводящих соображений вполне достаточно для понимания предлагаемого метода. Функцию $\beta_\alpha(\lambda)$ ниже будем показывать аппроксимирующей. Ее значения могут быть вычислены для любого наперед заданного λ при известном значении $\overline{m}(\lambda)$ независимо от того, на каких длинах волн λ_i измерялись исходные компоненты вектора β_σ. В силу этого аппроксимирующая $\beta_\alpha(\lambda)$ решает задачу восстановления непрерывного спектрального хода исходной характеристики $\beta_0(\lambda)$ в пределах Λ по вектору β_σ. При этом в соответствии с основным утверждением полагается, что имеет место оценка

$$\|\beta_0 - \beta_\alpha\|_{L_2(\Lambda)} \leqslant \eta\sigma, \tag{4.5}$$

где η — некоторый доверительный коэффициент ($\eta \geqslant 1$). Важно отметить, что в данном случае речь идет не о восстановлении непрерывного хода измеряемой в эксперименте функции $\beta_\sigma(\lambda)$ по ее дискретным отсчетам $\beta_\sigma(\lambda_i)$, а об аппроксимации действительной характеристики $\beta_0(\lambda)$. Основанием для подобного утверждения является то обстоятельство, что вычислительная схема построения аппроксимирующего аналога $\beta_\alpha(\lambda)$ основывается на соответствующем регуляризирующем операторе для уравнения (4.3), который подавляет шумовую компоненту в исходном векторе β_σ. Эта «фильтрация» шумов выгодно отличает данный метод от других аппаратов приближения, и прежде всего интерполяционных многочленов, которые непосредственно строятся на множестве исходных данных $\{\beta_{i\sigma}, \lambda i\}$ и поэтому весьма чувствительны к ошибкам измерений. Такова идея метода обратной задачи в восстановлении непрерывного спектрального хода аэрозольных характеристик светорассеяния по дискретным оптическим измерениям в окнах прозрачности.

Если этот метод рассматривать с точки зрения теории аппроксимации функций, нетрудно видеть, что исходным в нем является представление аппроксимируемых функций параметрическими интегралами типа (4.3). Действительно, в нашей задаче аналитическая структура функций $\beta(\lambda)$ известна и, следовательно, отсутствует надобность строить и навязывать оптическим характеристикам какие-либо иные аналитические конструкции, подобные, скажем, многочленам, рядам Фурье и т. п. Поэтому метод обратной задачи является численным методом аппроксимации функций, который реализует их главное аналитическое свойство, а именно представимость параметрическими интегралами. Следует заметить, что это представление может принимать как форму интеграла Римана, так и Стилтьеса. Для обоих вариантов выше изложены соответствующие алгоритмы.

Важным является и то, что аппроксимирующая функция $\beta_\alpha(\lambda)$ может быть без каких-либо принципиальных затруднений продолжена вправо и влево от границ исходного интервала Λ, в пределах которого выполнялись дискретные измерения $\{\beta_{i\sigma}, i=1, \ldots, n\}$.

Поэтому здесь в рамках единого подхода (то же самое с помощью одного вычислительного алгоритма) решаются одновременно и задачи экстраполяции (прогноза) спектрального хода исследуемых характеристик. Примеры подобных аппаратов в теории приближения функций привести трудно. Конечно, в данном случае речь идет о частных задачах, а не о функциях действительного переменного вообще. Однако, как бы там ни было, принципиальная возможность прогноза аэрозольных характеристик светорассеяния, скажем, в УФ- либо ИК-области по их измерениям в видимом диапазоне имеет важное прикладное значение в атмосферно-оптических исследованиях.

Изложенный метод аппроксимации алгоритмически реализуется с помощью матричного оператора $V^{(\alpha)}_{n'n}$, который преобразует экспериментальный вектор размерности n в вектор β_α размерности n'. Помимо подавления шумовой компоненты в исходных оптических данных, вычислительные схемы, использующие оператор $V^{(\alpha)}_{n'n}$, позволяют вполне корректно оценить параметры R_1 и R_2 в обратных задачах светорассеяния, о чем уже упоминалось выше.

В заключение кратко коснемся оценки погрешности аппроксимации в методе обратной задачи. Для простоты изложения будем полагать, что в эксперименте измеряется непрерывная реализация $\beta_\sigma(\lambda)$ в пределах спектрального интервала Λ, и требуется оценить погрешность функционального преобразования $\beta_\sigma \to \beta_\alpha$, осуществляемого интегральным оператором $V^{(\alpha)}$. Допустим, что нам удалось найти такое s_α при обращении характеристики $\beta_\sigma(\lambda)$, что

$$\| \beta_\sigma - \beta_\alpha \|_{L_2(\Lambda)} \leqslant \sigma. \tag{4.6}$$

Поскольку по определению β_σ считается σ-приближением для исходной характеристики β_0, то по известному неравенству треугольника для метрических пространств получаем

$$\| \beta_0 - \beta_\alpha \|_{L_2(\Lambda)} \leqslant 2\sigma. \tag{4.7}$$

Таким образом, ошибка аппроксимации имеет тот же порядок σ, что в полной мере подтверждает оценку (4.5), записанную для векторного варианта задачи. Важно отметить, что близость $\beta_0(\lambda)$ и $\beta_\alpha(\lambda)$ в пределах интервала Λ ни в коей мере не означает локальной близости распределений $s_0(r)$ и $s_\alpha(r)$ в интервале возможных размеров частиц R. Действительно, запишем очевидное равенство

$$\beta_0(\lambda) - \beta_\alpha(\lambda) = \int_R K(\lambda, r)[s_0(r) - s_\alpha(r)]\, dr.$$

Интеграл от знакопеременной функции может быть малым по абсолютной величине, но это не обязательно влечет малость выражения в квадратных скобках. Поэтому, хотя аппроксимация оптических характеристик и микроструктурный анализ дисперсных сред из оптических данных осуществляются одним и тем же методом обратной задачи, они все же различны по существу и требуют различного информационного обеспечения в эксперименте. Строгий сопоставительный анализ этих оптических задач выходит за рамки настоящего исследования, поскольку требует привлечения достаточно сложных математических средств, включая понятия сильной и слабой сходимости приближенных решений в соответствующих функциональных пространствах.

4.1.3. Пример численного решения аппроксимационной задачи для спектральных измерений

По аналогии с теми численными экспериментами, которые уже обсуждались выше в связи с исследованием свойств операторов

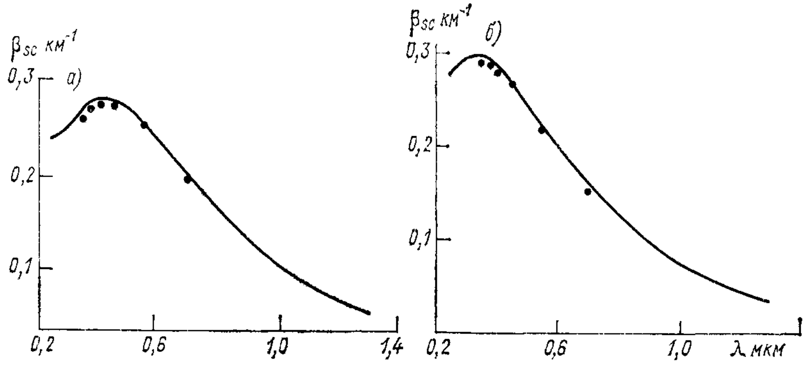

Рис. 4.1. Примеры аппроксимирующих функций $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$, построенные по дискретным измерениям $\{\beta_{sc,i\sigma}\}$ (точки).

W, можно оценить эффективность векторного преобразования $\beta_\sigma \to \beta_\alpha$, осуществляемого оператором восстановления $V^{(\alpha)}_{n'n}$. Как и ранее (см. п. 3.3), исходным оптическим материалом будет служить спектральный ход коэффициента рассеяния атмосферной дымкой, измеренного с помощью спектрального нефелометра. По результатам соответствующих численных расчетов на рис. 4.1 представлены аппроксимирующие функции $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$, построенные по компонентам вектора $\beta_{sc,\sigma}=\{\beta_{sc,\sigma}(\lambda_i),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$. Рабочие длины волн λ_i те же, что и в табл. 3.3. Нетрудно видеть, что аппроксимационные аналоги $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$ вполне приемлемо решают задачу среднеквадратичного приближения функции, представленной дискретным набором отсчетов. В процессе построения аппроксимирующей функции осуществлялась надлежащая коррекция по параметру R_2 в соответствии с методикой, описанной выше. Одновременно с аппроксимацией в пределах интервала оптического зондирования $\Lambda=[0{,}353;\ 0{,}70$ мкм$]$ рассчитывались значения $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$ и вне указанных границ, т. е. решались и экстраполяционные задачи. Поскольку отсутствуют соответствующие оптические измерения, то оценить эффективность этой экстраполяции не представляется возможным. Для оценки устойчивости преобразования $\beta_{sc,\sigma} \to \beta_{sc,\alpha}$ проводились соответствующие численные эксперименты, результаты которых представлены в табл. 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1

Отклонения прогнозируемых значений $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$ от исходной оптической модели при различных вариациях показателя и „возмущениях" в исходном векторе β_{sc}

λ мкм	Исходная характеристика, км$^{-1}$	Вариация показателя и „возмущение" в исходном векторе							
		$\Delta m'=0{,}02$ $\sigma=0$	$\Delta m'=-0{,}02$ $\sigma=0$	$\Delta m'=0$ $\sigma=0{,}05$	$\Delta m'=0$ $\sigma=-0{,}05$	$\Delta m'=0$ $\sigma=0{,}1$	$\Delta m'=0$ $\sigma=-0{,}1$	$\Delta m'=0$ $\sigma=0{,}2$	$\Delta m'=0$ $\sigma=-0{,}2$
0,25	0,2767	—0,0014	0,0015	0,0219	0,0046	0,0083	0,0047	0,0773	0,0155
0,30	0,2926	0,0002	0,0013	0,0172	0,0062	0,0085	0,0062	0,0538	0,0176
0,35	0,3000	0,0012	0,0010	0,0119	0,0072	0,0083	0,0072	0,0280	0,0189
0,40	0,2937	0,0014	0,0009	0,0080	0,0072	0,0075	0,0073	0,0129	0,0187
0,50	0,2539	0,0012	0,0001	0,0037	0,0059	0,0056	0,0060	—0,0003	0,0159
0,60	0,2041	0,0010	0,0008	0,0020	0,0043	0,0039	0,0043	—0,0028	0,0123

Таблица 4.2

Отклонения прогнозируемых значений $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$ от исходной оптической модели при различных вариациях показателя и „возмущениях" в исходном векторе β_{sc} для ближнего ИК-диапазона

λ мкм	Исходная характеристика, км$^{-1}$	Вариация показателя и „возмущение" в исходном векторе			
		$\Delta m'=0{,}02$ $\sigma=0$	$\Delta m'=-0{,}02$ $\sigma=0$	$\Delta m'=0$ $\sigma=0{,}05$	$\Delta m'=0$ $\sigma=-0{,}05$
0,60	0,2041	0,0010	—0,0008	0,0020	0,0043
1,00	0,0735	0,0010	—0,0005	0,0003	0,0011
1,30	0,0348	0,0009	—0,0006	0,0005	0,0003
1,60	0,0179	0,0006	—0,0005	0,0002	0,0001
1,90	0,0100	0,0004	—0,0004	0,0001	0,0001
2,25	0,0054	0,0003	—0,0003	0,0001	0,00001

λ мкм	Исходная характеристика, км$^{-1}$	Вариация показателя и „возмущение" в исходном векторе			
		$\Delta m'=0$ $\sigma=0{,}1$	$\Delta m'=0$ $\sigma=-0{,}1$	$\Delta m'=0$ $\sigma=0{,}2$	$\Delta m'=0$ $\sigma=-0{,}2$
0,60	0,2041	0,0039	0,0043	—0,0028	0,0123
1,00	0,0735	0,0010	0,0011	—0,0013	0,0040
1,30	0,0348	0,0003	0,0003	0,0016	0,0016
1,60	0,0179	0,0002	0,0001	0,0007	0,0009
1,90	0,0100	0,0001	0,0001	0,0005	0,0005
2,25	0,0054	0,00003	0,00001	0,0004	0,00023

Исходной характеристикой служила функция $\beta_{sc,\,\alpha}(\lambda)$, предварительно восстановленная по экспериментальному вектору $\boldsymbol{\beta}_{sc,\,\sigma}$ (рис. 4.1 *а*). В последующих численных экспериментах предполагалось, что эта характеристика представлена четырьмя отсчетами для длин волн 0,35; 0,4; 0,5 и 0,6 мкм. На эти отсчеты накладывались «возмущения», значения которых, как и ранее, характеризовались параметром σ. Возмущения вносились и в показатель преломления $\bar{m}$, вариации которого влияют на оператор $V^{(\alpha)}$. Расчеты соответствующей аппроксимирующей функции проводились для спектрального интервала [0,2; 2,25 мкм] и представлены в указанных выше таблицах. Очевидно, нет особой необходимости подробно комментировать результаты расчетов. Они подтверждают в полной мере вывод о том, что ошибки аппроксимации находятся в среднем на уровне значений величины σ для всего спектрального интервала Λ.

Исследуемое преобразование вполне устойчиво к вариациям показателя преломления $\bar{m}$. Причины подобной устойчивости операторов преобразования уже рассматривались ранее в п. 3.3. В расчетах предполагалось, что в исходной (модельной) характеристике показатель преломления не зависел от λ и составлял $\bar{m}_0 = 1{,}5 - 0{,}002\,i$. Конечно, при обработке экспериментального материала, полученного при оптическом зондировании атмосферных аэрозолей, необходимо учитывать наличие спектральной зависимости $\bar{m}_0(\lambda)$ как слева, так и справа от границ интервала [0,35; 0,60 мкм]. Для фоновых атмосферных аэрозолей соответствующая информация представлена обширными таблицами в монографической литературе (см., например, [4, 7]). Заметим, что экстраполяция спектрального хода аэрозольного коэффициента ослабления в УФ-область важна в тех задачах, которые связаны с оценкой концентрации атмосферного озона из оптических измерений [5]. Методы прогноза аэрозольных характеристик светорассеяния в ИК-диапазон важны для повышения надежности в интерпретации данных термического зондирования атмосферы, особенно в полосе 4,3 мкм [28]. Используя развитые выше методы теории аппроксимации, можно решать и ряд других задач оптики и физики атмосферы, в которых учет эффектов аэрозольного рассеяния оптического излучения играет важную роль.

Приведем еще один пример анализа экспериментального вектора $\boldsymbol{\beta}_{sc,\,\sigma}$. Нетрудно видеть, что дискретные измерения, представленные на рис. 4.1 *а*, явно указывали на наличие максимума в характеристике $\beta_{sc}(\lambda)$ в интервале $\Lambda = [0{,}353;\ 0{,}7$ мкм]. В других реализациях подобный максимум может лежать вне интервала оптического зондирования. Напомним, что знание точек экстремума спектральных аэрозольных характеристик светорассеяния очень важно в качественных методах интерпретации измерений, которые позволяют, не решая обратных задач, получить общее представление о микроструктуре дисперсной среды. Методы качественной интерпретации спектральных характеристик светорассеяния дисперсными средами изложены в работах [18, 19]. Используя изложенные выше методы аппроксимации, нетрудно оценить положение точек экстремума исследуемой спектральной характеристики $\beta(\lambda)$, располагая лишь дискретным набором отсчетов $\{\beta_{i\sigma}\}$. На рис. 4.1 *б* представлен пример, когда максимум характеристики лежит где-то левее границ интервала зондирования. Аппроксимационный аналог, построенный по вектору $\beta_{sc,\,\sigma}$ позволяет оценить его положение.

В заключение заметим, что развитая выше теория аппроксимации полидисперсных характеристик светорассеяния в полной мере раскрывает свои информационные возможности при решении сложных задач теории оптического зондирования атмосферы, в которых приходится учитывать не только эффекты аэрозольного рассеяния, но и поглощение газовыми компонентами. Эти задачи будут рассматриваться ниже.

4.1.4. Восстановление аэрозольных индикатрис рассеяния по дискретным отсчетам

Решение аппроксимационных задач представляет практический интерес не только для спектральных оптических характеристик, но и при исследовании диаграмм углового рассеяния локальными объемами дисперсной среды. В связи с этим ниже приводятся результаты численных исследований эффективности аппроксимационных регуляризирующих аналогов в задачах восстановления непрерывного углового хода аэрозольного коэффициента направленного светорассеяния $D_{11}(\vartheta|\lambda)$ и индикатрисы $\mu(\vartheta)=4\pi D_{11}(\vartheta)/\beta_{sc}$. В предыдущей главе была показана роль, которую играют эти характеристики при интерпретации данных в методе касательного зондирования атмосферы. Более того, ни одно сколько-нибудь серьезное исследование по переносу радиации в рассеивающих средах не может обойтись без знания этих характеристик. Поэтому восстановление непрерывной диаграммы углового рассеяния по некоторым «опорным» ее отсчетам имеет важное прикладное значение. Напомним, что подобную задачу для молекулярной компоненты рассеяния решать не требуется, поскольку $\mu^{(\text{м})}(\vartheta)$ в теории молекулярного рассеяния является известной функцией угла ϑ. Таким образом, располагая аппаратом восстановления аэрозольных индикатрис рассеяния, можно вполне обоснованно находить априорные оценки диаграмм рассеяния для локальных объемов воздуха.

Приступая к численному исследованию аппроксимационной задачи для угловых характеристик светорассеяния аэрозольными системами, следует заметить, что их аналитическое поведение в целом в области $(0,\pi)$ более регулярно, нежели поведение спектральных характеристик. В частности, функция $D_{11}(\vartheta|\lambda)$ при изменении угла ϑ для любого фиксированного λ ведет себя заметно «проще», нежели частная функция $D_{11}(\lambda|\vartheta)$ в пределах видимой области длин волн для фиксированного угла ϑ. Напомним, что количественно регулярность (то же самое гладкость) аналитического поведения исследуемых функций можно характеризовать модулем их производной, либо модулем логарифмической производной. Последняя характеристика предпочтительнее в оптике дисперсных сред [8]. Не вдаваясь в подробное обсуждение этого вопроса, укажем лишь, что помимо аналитического поведения рядов Ми (1.5) не последнюю роль играет здесь и спектральная зависимость показателя преломления аэрозольного вещества $\overline{m}(\lambda)$. С учетом этого обстоятельства можно полагать, что аппрок-

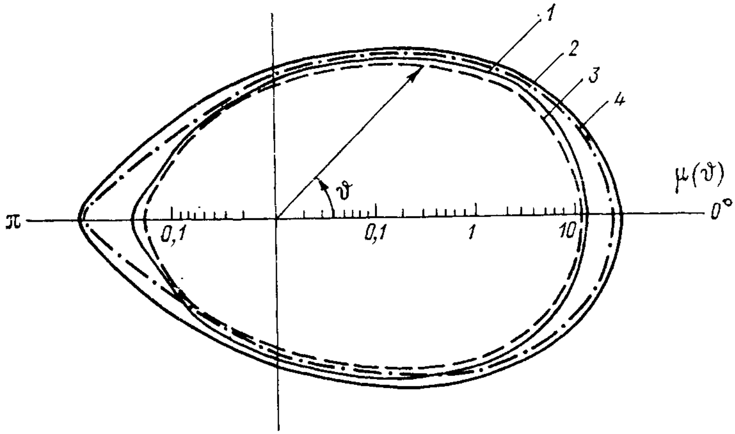

Рис. 4.2. Примеры восстановления полидисперсной индикатрисы при различном числе дискретных отсчетов и их расположении в области $[0, \pi]$.

1 — исходная модель $\mu_0(\vartheta)$; *2* — аппроксимирующий аналог $\mu_\alpha(\vartheta)$ для трех измерений D_{11} в углах 45, 90 и 135°; *3* — то же при добавлении трех углов в передней полусфере; *4* — в задней полусфере.

симация углового хода $D_{11}(\vartheta)$ так же, как и $\mu(\vartheta)$, с использованием метода обратной задачи может быть осуществлена не менее эффективно, нежели это имело место выше для спектральных характеристик типа $\beta_{sc}(\lambda)$ и $\beta_\pi(\lambda)$. Нижеследующие численные исследования полностью подтверждают эту мысль.

Обратимся к графическому материалу, представленному на рис. 4.2. Диаграмма *1* соответствует индикатрисе рассеяния $\mu_0(\vartheta)$ полидисперсной системы частиц, спектр размеров которой описывается гамма-распределением (дымка Н [3]). Расчеты этой модельной характеристики приводились для длины волны $\lambda = 0{,}55$ мкм и показателя преломления $\overline{m} = 1{,}51 - 0{,}002\, i$. В первом варианте аппроксимационный аналог $\mu_\alpha(\vartheta)$ строился всего по трем отсчетам характеристики $D_{11}(\vartheta)$, соответствующих углам 45, 90 и 135°. Значения $\mu_\alpha(\vartheta)$ находились как отношение двух величин, $4\pi D_{11,\alpha}(\vartheta)$ и $\beta_{sc,\alpha}$, которые рассчитываются программным специальным комплексом (см. его описание в [2]) по дискретным отсчетам $D_{11}(\vartheta_i)$. Как следует из представленных диаграмм, регуляризованный аналог $\mu_\alpha(\vartheta)$ вполне удовлетворительно аппроксимирует исходную индикатрису $\mu_0(\vartheta)$ в средней области углов $45° \leqslant \vartheta \leqslant 135°$. Хуже дело обстоит с прогнозом значений $\mu(\vartheta)$ в области малых и больших углов рассеяния. Можно отметить, что вполне приемлемо оцениваются интегральные характеристики диаграммы рассеяния, такие как степень асимметрии индикатрисы рассеяния (то же самое средний косинус). В силу этого обстоятельства построенный аналог $D_{11,\alpha}(\vartheta)$ может быть использован для приближенной оценки ряда функционалов от $D_{11}(\vartheta)$, среди которых наиболее важными для нас являются, конечно, функции источника из предыдущей главы. Однако вернемся к области больших и малых значений угла рассеяния.

В оптике дисперсных сред указанные области, получившие название областей ореола и глории соответственно, представляют особый практический интерес. Не останавливаясь на этом подробно (см. монографии [1, 29]), заметим, что именно в этих областях затруднительны прямые измерения значений $D_{11}(\vartheta)$ в силу чисто технических причин. Требуется создание специальной измерительной аппаратуры для измерения $D_{11}(\vartheta)$ в областях $\vartheta \leqslant 5°$ и $\vartheta \geqslant 175°$ [26]. Поэтому очень важно иметь вычислительные процедуры, которые бы эффективно решали задачи экстраполяции угловых измерений в окрестности точек $\vartheta \simeq 0$ и $\vartheta \simeq \pi$. Это позволило бы прогнозировать значения $D_{11}(0)$ и $D_{11}(\pi)$ по дискретным измерениям $D_{11}(\vartheta)$ внутри интервала $(0, \pi)$.

На рис. 4.2 кривая *3* соответствует аналогу $\mu_\alpha(\vartheta)$, построенному по шести значениям характеристики $D_{11}(\vartheta)$, когда к прежним трем добавлены три новых отсчета для $\vartheta = 5$, 10 и 15°. Как видно из представленной диаграммы, подобное расширение объема исходной информации оказалось вполне достаточным для приемлемой аппроксимации $\mu_0(\vartheta)$ во всей области $(0, \pi)$, включая и граничные точки. Наибольшая ошибка аппроксимации не превышает 10 % вблизи $\vartheta \simeq 0$. В среднем по всему интервалу она заметно меньше. В расчетах использовались точные значения $D_{11}(\vartheta_i)$ $(i=1, \ldots, 6)$, поэтому те ошибки, о которых здесь идет речь, обусловливаются конечной размерностью исходного вектора $\mathbf{D}_{11} = \{D_{11}(\vartheta_i),\ i=1, \ldots, 6\}$. В рассматриваемых численных экспериментах нас интересует, прежде всего, эффективность аппроксимации в зависимости от числа «опорных» отсчетов исследуемой характеристики. Что же касается влияния ошибок измерения компонент опорного вектора на точность аппроксимации, то мы не будем касаться здесь этих вопросов. Как показывает численный анализ, особых отличий в этом отношении между восстановлением спектральных характеристик светорассеяния и угловых не существует.

Возвращаясь к последнему примеру (кривая *3*), необходимо подчеркнуть, что указанные узлы позволяют строить приемлемые аппроксимационные аналоги не только в данном примере, но и для других модельных сред, связанных естественно с теми аэрозольными системами, которые принято классифицировать как атмосферные дымки. Ниже мы приведем соответствующие примеры, а пока вновь вернемся к рис. 4.2.

Кривая *4* — еще один вариант аналога $\mu_\alpha(\vartheta)$, также построенный по шести отсчетам характеристики $D_{11}(\vartheta)$. Разница состоит в том, что теперь дополнительные три угла взяты в задней полусфере и соответственно равны 165, 170, 175°. Нетрудно видеть, что новая функция $\mu_\alpha(\vartheta)$ несущественно улучшает аппроксимацию по

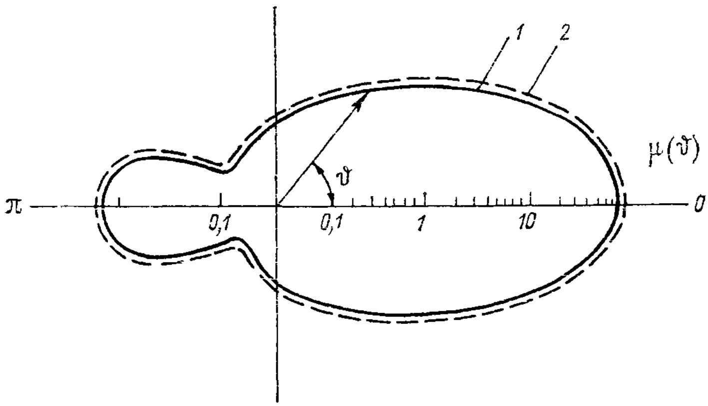

Рис. 4.3. Пример аппроксимации модельной индикатрисы $\mu_0(\vartheta)$ (кривая *1*) функций $\mu_\alpha(\vartheta)$ (кривая *2*) в методе обратной задачи.

сравнению с первым вариантом (диаграмма *2*). В этом нет ничего неожиданного. Действительно, угловой ход $D_{11}(\vartheta)$ в задней полусфере углов рассеяния мало информативен при оценке спектра размеров частиц [8], что и объясняет незначительное уменьшение ошибки аппроксимации, осуществляемой методом обратной задачи. Диаграмма рассеяния полидисперсной системы в основном определяется крупной фракцией частиц, индикатрисы рассеяния которых характеризуются сильной вытянутостью вперед. Поэтому углы в передней полусфере рассеяния в целом более информативны при восстановлении непрерывного хода $\mu(\vartheta)$ по дискретным измерениям.

На рис. 4.3 представлен пример восстановления индикатрисы $\mu(\vartheta)$ в том случае, когда микроструктура модельной дисперсной среды описывается логнормальным распределением с модой $r_s=0{,}7$ мкм и эффективными границами $R_1 \simeq 0{,}4$ мкм и $R_2 \simeq$ $\simeq 1{,}4$ мкм. Характерной особенностью спектра размеров является отсутствие «слишком малых» частиц в отличие от типичных микроструктурных моделей, используемых в оптике атмосферных (фоновых) аэрозолей. Форма соответствующей индикатрисы рассеяния (кривая *1*) теперь заметно отличается от индикатрисы предыдущего примера. Аппроксимационный аналог $\mu_\alpha(\vartheta)$ (кривая *2*) построен по шести отсчетам, первые три из которых взяты в передней полусфере углов рассеяния (5, 10 и 15° соответственно). Как видно из диаграммы, аппроксимационная задача решается вполне приемлемо для подобного типа индикатрис, которые характеризуются относительно большей сложностью своего аналитического поведения по сравнению с первым примером (см. рис. 4.2).

Последний графический пример (рис. 4.4) связан с результатами численных исследований по восстановлению непрерывного

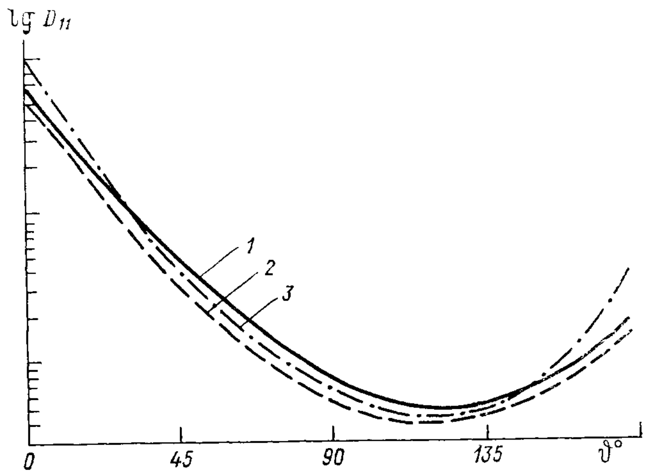

Рис. 4.4. Примеры восстановления непрерывного хода $D_{11}(\vartheta)$ (кривая *1*) по шести опорным отсчетам в передней полусфере рассеяния (кривая *2*) и задней (кривая *3*).

хода коэффициента направленного светорассеяния $D_{11}(\vartheta)$. Исходная микроструктурная модель описывается в этом примере композицией двух логнормальных распределений с модами $r_{s1}=0{,}2$ и $r_{s2}=0{,}6$ мкм. Построение первого аналога $D_{11,\alpha}(\vartheta)$ (кривая *2*) осуществлялось для тех же шести отсчетов, что и выше (см. рис. 4.3). Во втором варианте (кривая *3*) также использовалась система шести отсчетов с той разницей, что три последних соответствовали углам в задней полусфере и равны 165, 170 и 175°. Все, что говорилось ранее при обсуждении диаграмм рассеяния, представленных на рис. 4.2, в полной мере справедливо и в этом примере. Первая система узлов, ориентированная главным образом на переднюю полусферу, позволяет удовлетворительно восстанавливать непрерывный ход $D_{11}(\vartheta)$ во всей области $(0, \pi)$. Вторая совокупность узлов, лежащая в основном в задней полусфере, позволяет удовлетворительно восстанавливать ход $D_{11}(\vartheta)$ в средней части интервала $(0, \pi)$, но не дает возможности прогнозировать значения характеристики на его концах. Таковы в целом характерные особенности восстановления непрерывного хода угловых характеристик светорассеяния полидисперсными системами частиц в методе обратной задачи.

Последнее, что необходимо здесь рассмотреть, это влияние «внешних» возмущающих факторов, сопутствующих обращению оптических данных, на точность аппроксимации. К ним следует отнести прежде всего ту неопределенность, которая сопутствует априорному заданию показателя преломления вещества частиц исследуемой среды в схемах обращения. Известно, что угловой ход полидисперсных индикатрис рассеяния в меньшей мере чувствителен к вариациям показателя $\bar{m}$ для углов в передней полусфере. В большей мере они сказываются на поведении $\mu(\vartheta)$ для углов рассеяния в задней полусфере. Указанные особенности наглядно иллюстрируются результатами расчетов, представленными в табл. 4.3. Исходная индикатриса $\mu_0(\vartheta)$ соответствует кривой *1* на рис. 4.2. В первом случае (третий столбец таблицы) возмущения касались вещественной части показателя $\bar{m}'$ и составили $\Delta\bar{m}'=0{,}05$. С подобной точностью вполне можно априори задавать величину $\bar{m}'$ при зондировании атмосферных дымок, особенно если ее увязывать с относительной влажностью воздуха [9]. Во втором случае (четвертый столбец) существенно завышалась мнимая часть $\bar{m}''$. Указанное в таблице значение показателя соответствует случаю сильно загрязненной атмосферной дымки [3], которую иногда называют «городской» дымкой. Как видно из табл. 4.3, указанные возмущения мало сказываются на значениях $\mu_\alpha(\vartheta)$ вблизи $\vartheta \simeq 0$ и заметно больше в окрестности $\vartheta \simeq \pi$.

Таблица 4.3

Значения исходной индикатрисы $\mu_0(\vartheta)$ для ряда углов рассеяния и аппроксимационные аналоги $\mu_\alpha(\vartheta)$, соответствующие двум значениям показателя $\bar{m}$

$\vartheta°$	$\mu_0(\vartheta)$ $\bar{m}=1{,}51-0{,}002\,i$	$\mu_\alpha(\vartheta)$ $\bar{m}=1{,}56-0{,}002\,i$	$\mu_\alpha(\vartheta)$ $\bar{m}=1{,}51-0{,}02\,i$
0	12,90	11,71	12,96
45	1,65	1,13	1,12
90	0,22	0,18	0,16
135	0,15	0,17	0,13
165	0,18	0,17	0,11
180	0,24	0,16	0,12

Погрешности измерения отсчетов $D_{11}(\vartheta)$ и вариации границ R_1 и R_2, которые известны лишь приближенно при обработке экспериментальной информации, проявляют себя в поведении $D_{11,\alpha}(\vartheta)$ примерно так же, как это имело место для аппроксимационных аналогов типа $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$. Следует указать, что поведение аналога $\mu_\alpha(\vartheta)$ при различных возмущениях в исходном векторе $\mathbf{D}_{11}$ более устойчиво, нежели поведение $D_{11,\alpha}(\vartheta)$. Объясняется это тем, что значения $\mu_\alpha(\vartheta)$ находятся через отношение $4\pi D_{11,\alpha}(\vartheta)/\beta_{sc}$, которое менее чувствительно к систематическим ошибкам по сравнению со значениями $D_{11,\alpha}(\vartheta)$ и $\beta_{sc,\alpha}$. В численных исследованиях полидисперсной индикатрисы рассеяния наглядно проявляются достоинства метода обратной задачи, вычислительные схемы которого позволяют одновременно оценивать любую требуемую комбинацию оптических характеристик для ис-

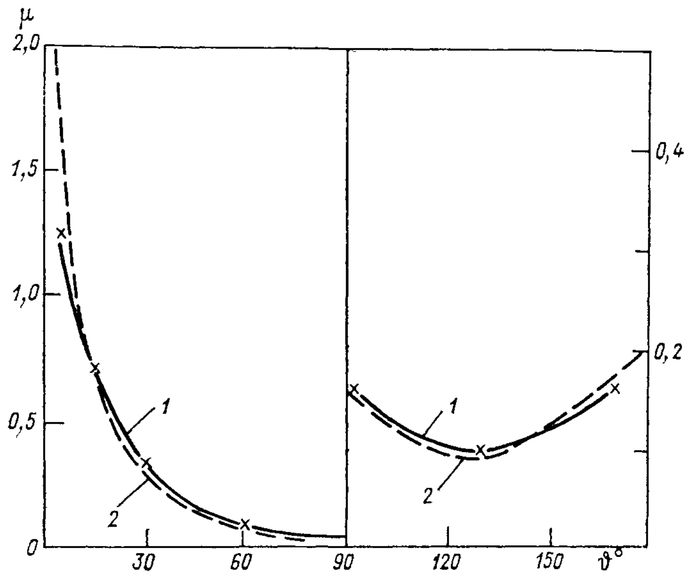

Рис. 4.5. Измеренная в эксперименте индикатриса (кривая *1*, [22]) и ее аппроксимационный аналог $\mu_\alpha(\vartheta)$ (кривая *2*), построенный методом обратной задачи по семи отсчетам (отмечены крестиками).

ходного экспериментального вектора. В последнем примере при построении $\mu_\alpha(\vartheta)$ по вектору $\mathbf{D}_{11,\sigma}$ восстанавливался непрерывный ход $D_{11,\alpha}(\vartheta)$ и одновременно оценивался коэффициент рассеяния $\beta_{sc,\alpha}$. При необходимости можно по вектору $\mathbf{D}_{11}$ восстанавливать непрерывный спектральный ход $\beta_{sc,\alpha}(\lambda)$, если известна спектральная зависимость $\overline{m}(\lambda)$. Подобные аппроксимационные задачи были опущены, поскольку прямо они не связаны с теми оптическими методами исследования атмосферы, теория которых излагается в настоящей работе.

В заключение приведем пример аппроксимации экспериментальной аэрозольной индикатрисы, измеренной в условиях прибрежной атмосферной дымки. Измерения $\mu_\sigma(\vartheta)$ проводились с шагом 5°. Для углового хода $\mu_\sigma(\vartheta)$ характерна высокая гладкость (то же самое плавность хода), поэтому дискретный набор измерений $\{\mu_\sigma(\vartheta_i),\ i=1, \ldots\}$ нетрудно заменить на графике плавной кривой (рис. 4.5, кривая *1*). В подобной ситуации построение

$\mu_\alpha(\vartheta)$ диктуется необходимостью прогноза углового хода индикатрисы в области $\vartheta<5°$ и $\vartheta>175°$. Как показали расчеты, для построения $\mu_\alpha(\vartheta)$ по дискретному набору отсчетов $\{\mu_\sigma(\vartheta_i)\}$ при погрешности измерений $\sigma\leqslant 10$ % достаточно взять семь отсчетов (отмечены крестиками на рис. 4.5). Аппроксимационный аналог индикатрисы $\mu_\alpha(\vartheta)$ (кривая *2*) решал вполне удовлетворительно задачу приближения для $\mu_\sigma(\vartheta)$ в интервале (5, 175°), одновременно прогнозируя ее значения слева и справа от указанных границ. В этом смысле можно говорить о восстановлении непрерывного хода индикатрисы во всей области углов рассеяния (0, 180°).

4.2. Методы прикладного анализа полидисперсных интегралов и их приложения в оптике дисперсных сред

Нетрудно заметить, что изложение теории аппроксимации характеристик светорассеяния дисперсными средами по существу носило качественный (расчетный) характер. Не предпринималось каких-либо попыток дать оценку ошибок аппроксимации аналитическими средствами. В значительной степени это обусловливалось тем обстоятельством, что у нас отсутствует надлежащий аналитический аппарат для решения подобных задач. Вместе с тем независимо от метода обратной задачи и его приложений существует настоятельная необходимость в оценке ошибок интерполяции модельных характеристик светорассеяния атмосферным аэрозолем. Так, например, в последнее время публикуется достаточно много табличного материала по оптическим моделям атмосферы и при этом не делается никаких попыток оценить его разумный объем. Иными словами, выбор шага дискретизации при составлении таблиц никоим образом не обосновывается. В пределах настоящего раздела мы изложим основы прикладного анализа спектральных характеристик светорассеяния дисперсными средами и дадим его возможные приложения в атмосферно-оптических исследованиях.

4.2.1. Формула дифференцирования полидисперсных интегралов

При оценке эффективности того или иного аппарата приближения функций необходимо вычислять их производные. В силу этого аппроксимация оптических характеристик требует разработки методов дифференцирования функций, представляемых параметрическими интегралами. Соответствующий подход к решению этой аналитической задачи впервые был изложен в работе [19], где он использовался для априорной оценки гладкости искомых аэрозольных распределений в обратных задачах светорассеяния. Изложим кратко основы этого подхода, исходя, как и ранее, из представления спектральных оптических характеристик в виде интеграла

$$\beta(\lambda) = \int\limits_R K(\lambda, r) s(r) dr, \tag{4.8}$$

где функция $s(r)$ принадлежит множеству распределений Φ, заданных на конечном интервале размеров $R = [R_1, R_2]$. Напомним, что $s(r)$ удовлетворяет вполне естественным граничным условиям

$$s(R_1) = s(R_2) = 0. \tag{4.9}$$

Если подходить чисто формально, то производная функция $\beta(\lambda)$ вычисляется с помощью интеграла

$$\beta'(\lambda) = \int\limits_R K'_\lambda(\lambda, r) s(r) dr. \tag{4.10}$$

Если этот интеграл существует для всех λ из спектрального интервала Λ, то функция $\beta(\lambda)$ считается дифференцируемой в Λ. С учетом тех особенностей ядра $K(\lambda, r)$ для сферических рассеивающих частиц, о которых речь шла выше, выражение (4.10) лишено практического смысла. Слабая сходимость исходных рядов (1.64) не может гарантировать сходимости рядов, получаемых из них путем дифференцирования для любой пары значений λ и r. В связи с этим для производной от полидисперсного интеграла необходимо ввести иное определение. Это нетрудно сделать по аналогии с теорией дифференцирования обобщенных функций, если полагать, что распределение $s(r)$ вполне регулярно в области своего определения и обладает суммируемой, по Риману, производной.

Начнем с того, что факторы $K(\lambda, r)$ теории дифракции оптических волн на сфере являются однородными функциями степени ноль, т. е. их значения для пары r и λ определяются не r и λ в отдельности, а величиной отношения, записываемого обычно в виде некоторого дифракционного параметра $x = 2\pi r/\lambda$. Иными словами, значение $K(\lambda, r)$ не меняется, если отношение r/λ остается неизменным. Поэтому аналитическое поведение ядра $K(\lambda, r)$ как функции двух переменных полностью определяется поведением функции одного переменного $K(x)$. Конечно, параметр x можно рассматривать как функцию переменных r и λ. Указанное аналитическое свойство позволяет записать формально два выражения для частных производных ядра:

$$\left.\begin{aligned} K'_r &= K'_x x'_r; \\ K'_\lambda &= K'_x x'_\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

которые приводят нас к хорошо известному соотношению Эйлера для производных однородной функции степени ноль

$$rK'_r + \lambda K'_\lambda = 0. \tag{4.12}$$

С учетом (4.12) интеграл (4.10) можно переписать в виде

$$\beta' = -\int_R K'_r(\lambda, r)\, s(r)\, dr.$$

Интегрируя это выражение по частям и учитывая граничные условия (4.9), получим

$$\lambda\beta' = \int_R K(\lambda, r)(rs)'\, dr. \qquad (4.13)$$

Выражение (4.13) позволяет найти производную функции $\beta(\lambda)$, представимую полидисперсным интегралом (4.8), не прибегая к дифференцированию ядра $K(\lambda, r)$. Его следует рассматривать как определение производной полидисперсного интеграла (4.8). Действительно, вывод (4.13) основывался на соотношении Эйлера (4.12) в предположении, что K'_r и K'_λ существуют. Однако если отказаться от последнего условия, то (4.13) уже не следует из (4.8), и его нужно рассматривать как определение обобщенной производной полидисперсного интеграла, как это делается в теории обобщенных функций. Приведенные выше построения, опирающиеся на соотношения (4.12) между частными производными, просто облегчали понять истоки формулы (4.13) и носили не более как вспомогательный характер.

Выражение (4.13) будем называть формулой дифференцирования полидисперсных интегралов. В операторной форме она имеет вид

$$\lambda D_1\beta = KD_1(rs). \qquad (4.14)$$

где D_1 — оператор дифференцирования первого порядка, а K — как и ранее, интегральный оператор, соответствующий (4.8). Соотношение (4.14) в некоторой степени характеризует свойства данного интегрального оператора K на множестве Φ. В частности, его можно переписать в виде

$$\lambda D_1 K s = KD_1(rs).$$

Отсюда видно, что хотя оператор K и не коммутирует в полной мере с оператором D_1, как это имеет место, например, для операторов сдвига, тем не менее он близок к последним по своим свойствам, на что указано в работе [25].

Интеграл (4.13) определен для функций s, которые обладают производной, суммируемой по Риману, поэтому множество исходных распределений Φ нам необходимо в дальнейшем сузить до Φ_1. Очевидно, что функции s из Φ_1 несколько глаже функций из Φ. Если по определению $\Phi = \{s;\ 0 \leqslant s \leqslant M\}$, то $\Phi_1 = \{s \in \Phi,\ |s'| \leqslant M_1\}$, где M_1 — некоторая фиксированная константа, так же как и M.

Предложенный выше метод дифференцирования характеристик светорассеяния позволяет решать задачи прикладного анализа в оптике дисперсных сред, что ниже иллюстрируется соответствующими примерами.

4.2.2. Ряды Тейлора для спектральных оптических характеристик

Для построения степенных разложений оптических характеристик на основе ряда Тейлора необходимы формулы для вычисления производных от $\beta(\lambda)$ высших порядков. Имея в своем распоряжении формулу дифференцирования (4.13), нетрудно решить эту аналитическую задачу. Для начала в качестве примера найдем вторую производную от полидисперсного интеграла (4.8). Для этого достаточно повторно применить формулу дифференцирования к полидисперсному интегралу $\lambda\beta'$, т. е. к (4.13), потребовав, конечно, при этом выполнения условий $s'(R_1)=s'(R_2)=0$. Опуская промежуточные выкладки, аналогичные тем, которые приводились ранее при выводе (4.13), имеем

$$\lambda^2\beta'' = \int_R K(\lambda r)\, r\, (rs)''\, dr. \tag{4.15}$$

Следует заметить, что наложение указанных граничных условий на $s'(r)$ придает формулам дифференцирования более простой вид. В целом же они не имеют принципиального значения в излагаемой теории. Для их введения есть вполне определенные причины, которые будут указаны ниже. И наконец, если потребовать выполнения условий

$$s^{(\nu)}(R_1) = s^{(\nu)}(R_2) = 0$$

для всех $\nu=0, 1, \ldots, n$, то получим следующее обобщение формулы дифференцирования:

$$\lambda^{\nu}\beta^{(\nu)} = \int_R K(\lambda, r)\, r^{\nu-1}(rs)^{(\nu)}\, dr. \tag{4.16}$$

Эта последовательность интегралов существует для тех распределений s, которые принадлежат множеству $\Phi_n = \{s \in \Phi,\ |s^{(\nu)}| < M_n,\ \nu \leqslant n\}$, где M_n — как и ранее, некоторая константа, общая для всех распределений s из Φ_n.

Выражение (4.16) позволяет уже непосредственно записать ряд Тейлора функции $\beta(\lambda)$ в окрестности любой точки λ_0 интервала оптического зондирования, а именно

$$\beta(\lambda) = \beta(\lambda_0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\lambda-\lambda_0)^{\nu}}{\nu!\,\lambda_0^{\nu}} \int K(\lambda_0,\ r)\, r^{\nu-1}(rs)^{(\nu)}\, dr + R_{n+1}. \tag{4.17}$$

Характерной особенностью этого ряда является быстрое убывание величины членов с ростом λ_0 при прочих равных условиях. Это означает, что функции $\beta(\lambda)$ по мере роста длины волны становятся все более гладкими. Факт хорошо известен как из многочисленных модельных расчетов, так и из экспериментальных данных. В этом смысле выражение (4.17) дает ему аналитическое обоснование. Этим же можно объяснить и слабое влияние микроструктуры атмосферных дымок на поведение $\beta_{ex}(\lambda)$ в ИК-диапазоне, где значительно в большей степени проявляет себя зависимость $\overline{m}(\lambda)$.

С другой стороны, при уменьшении λ_0 наличие члена $\lambda_0^{-\nu}$ делает поведение ряда (4.17) все более и более чувствительным к интегральным членам. В связи с этим область малых λ можно считать наиболее информативной при многочастотном зондировании дисперсных сред, поскольку в этой области отсчеты можно брать более близкими друг к другу при прочих равных условиях. Это тоже хорошо известно из практики атмосферно-оптических исследований [8].

И наконец, последнее, чего следует коснуться, это множества распределений Φ_n. Ясно, что для описания микроструктуры дисперсных сред подобных распределений не требуется. Они «удобны» лишь в аналитическом отношении, поскольку их можно многократно дифференцировать, и следовательно, использовать в задачах прикладного анализа. Эти функции следует рассматривать как некоторые аналитические модели, предназначенные для аппроксимации реальных распределений.

Примером подобных моделей могут служить многочлены $b_m(r, s)$, введенные выше в обратные задачи светорассеяния. По переменной r эти функции m раз дифференцируемы, и, следовательно, модельные оптические характеристики $\beta[b_m, \lambda]$ обладают m производными. Вычисление этих производных осуществляется с помощью формулы дифференцирования, которая в данном случае применяется к полидисперсным интегралам $\overline{K}_l(\lambda)$, определенным согласно (2.57б). В пределах данной работы мы не будем строить соответствующий аналитический аппарат, а ограничимся рассмотрением более простых и широко используемых в оптике аэрозоля модельных распределений.

4.2.3. Погрешность линейного интерполирования спектральных оптических характеристик

Умея вычислять производные любого порядка от функции $\beta(\lambda)$, можно вернуться к задачам интерполирования и оценкам соответствующих погрешностей. Как указывалось выше, одним из простейших подходов к восстановлению непрерывного хода характеристики $\beta(\lambda)$ является линейное интерполирование по измеренным дискретным отсчетам β_i $(i=1, \ldots, n)$. В соответствии с (4.1) для определения величины ожидаемой при этом ошибки необходимо априори оценить вторую производную от интерполируемой функции $\beta(\lambda)$. Поскольку в задачах оптического зондирования речь идет об интерполировании экспериментальных функций, по существу неизвестных, то для оценки их вторых производных можно воспользоваться лишь некоторыми модельными характеристиками $\beta_M(\lambda)$, полагая при этом, что они не слишком по своим аналитическим свойствам отличаются от измеряемых. В соответствии с (4.15) для существования подобной оптической модели $\beta_M(\lambda)$ необходимо существование некоторого модельного распределения $s_M(\tau)$, такого, что

$$\left| \int\limits_R K(\lambda,\ r)\, r\,[(rs_0)'' - (rs_M)'']\, dr \right| \leqslant \delta(\sigma), \tag{4.18}$$

где $s_0(r)$ — действительное распределение частиц по размерам для исследуемой среды. Следует заметить, что условие (4.18) не является жестким, т. е. оно не требует непосредственной близости функций $s_0(r)$ и $s_M(r)$ и соответственно их вторых производных. Речь идет всего лишь о близости интегралов от этих распределений. Последнее можно условно интерпретировать как близость в среднем. Величина $\delta(\sigma)$ в (4.18) имеет порядок σ, т. е. сопоставима с ошибками оптических измерений, с учетом, конечно, масштаба и размерности выражения в левой части рассматриваемого неравенства.

Напомним, что в оптике атмосферных аэрозолей наиболее распространенными модельными распределениями являются функции

$$n(r) = ar^{\alpha} \exp\{-r^{\gamma} b\}; \tag{4.19а}$$

$$n(r) = \left(N\delta/\pi^{1/2} r\right) \exp\{-\delta^2 \ln r/r_0\}, \tag{4.19б}$$

определенные на полуоси $(0,\ \infty)$. Подбирая параметры a, α, b, γ в первой модели и $\{N,\ \delta,\ r_0\}$ — во второй, можно приближенно аппроксимировать этими функциями любое одновершинное распределение частиц по размерам $n_0(r)$, получаемое в эксперименте. При необходимости аппроксимировать многовершинные распределения необходимо прибегать к линейным композициям указанных моделей. С точки зрения излагаемой здесь теории важным свойством этих модельных распределений является их неограниченная дифференцируемость, т. е. существование интегралов вида (4.16) для любого ν. В дальнейшем нас будут интересовать распределение $s(r) = \pi r^2 n(r)$ и его дифференциальные характеристики. Для первой модели при $\gamma = 1$ имеем соответствующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &s(r) = ar^{\alpha+2} \exp\{-br\};\\ &(rs)' = s(r)(\alpha + 3 - br);\\ &r(rs)'' = s(r)\{[\alpha + 2 - br][\alpha + 3 - br] - br\}.\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Для второй модели аналогичные соотношения записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} &s(r) = \left(S\delta/\pi^{1/2} r_s^2\right) r \exp\{-\delta^2[\ln r/r_s + 1/(2\delta^2)]^2\};\\ &(rs)' = s(r)(1 - 2\delta^2 \ln r/r_s);\\ &r(rs'') = s(r)\, 2\delta^2 [2 \ln^2 r/r_s - \ln r/r_s - 1].\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

В распределении (4.21) параметр $r_s = r_0 \exp\{^1/_2\delta^2\{$ является его модой, а S — интеграл от $s(r)$ в пределах $(0, \infty)$. При переходе от распределения числа частиц по размерам к распределению геометрического сечения частиц в этой модели желательно заменить параметры N, r_0 на S, r_s, что и было сделано в (4.21).

Теперь можно обратиться к оценке погрешности линейного интерполирования оптических характеристик $\beta_M(\lambda)$, соответствующих этим двум моделям. Будем использовать для остаточного члена в (4.1) так называемую интегральную форму

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \beta^{(n+1)}(t)(\lambda - t)^n\, dt. \tag{4.22}$$

С учетом (4.16) ее можно переписать в виде

$$R_{n+1} = \int_R r^n (rs)^{(n+1)} \left\{ \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^n}{n!\, t^{n+1}} K(r,\ t)\, dt \right\} dr. \tag{4.23}$$

Нетрудно заметить, что подынтегральное выражение во внутреннем интеграле положительно в силу положительности исходного ядра $K(\lambda,\ r)$, и, следовательно, к нему можно применить теорему о среднем. Получаем

$$R_{n+1}(\xi) = \int_R K(\xi,\ r)\, r^n (rs)^{(n+1)}\, dr \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^n}{n!\, t^{n+1}}\, dt, \tag{4.24}$$

где ξ — некоторая точка между λ_0 и λ.

Поскольку имеет место оценка

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^n}{n!\, t^{n+1}}\, dt \leqslant \frac{(\Delta\lambda)^{n+1}}{(n+1)!\, \lambda_0^{n+1}}, \tag{4.25}$$

где $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, то нам остается оценить по величине первый интеграл в (4.24). Эту задачу будем решать только для второй производной от распределения $s(r)$, поскольку нас прежде всего интересует задача линейного интерполирования спектральных аэрозольных характеристик.

В соответствии с (4.25) при $n=1$ имеем

$$|R_2| \leqslant \frac{(\Delta\lambda)^2}{2!\, \lambda_0^2} \left| \int_R K(\xi,\ r)\, r^2 (rs)''\, dr \right|. \tag{4.26}$$

Согласно (4.20) и (4.21) функцию $r(rs)''$ можно представить в виде произведения $s(r) \cdot g(r)$. Тогда для интеграла в (4.26) можно записать неравенство

$$\left| \int_R K(\xi,\ r)\, s(r)\, g(r)\, dr \right| \leqslant \int_R K(\xi,\ r)\, s(r)\, |g(r)|\, dr. \tag{4.27}$$

В силу положительности подынтегрального выражения в правой части (4.27) можно вновь прибегнуть к теореме о среднем и представить его в виде произведения $|g(\eta)|\cdot\beta(\xi)$, где η — некоторая неопределенная точка в пределах интервала R. С учетом этого приходим к следующей оценке остаточного числа линейной интерполяции модельных оптических характеристик с распределениями типа (4.20), (4.21):

$$|R_2(\xi)| \leqslant \frac{(\Delta\lambda)^2}{2\lambda_0^2}\beta(\xi)\,|g(\eta)|. \tag{4.28}$$

Выше мы подробно излагали технику построения оценок остаточных членов интерполирования для модельных оптических характеристик светорассеяния аэрозольными системами частиц. Это обусловлено необходимостью разработки теории линейного интерполирования применительно к численному табулированию оптических аэрозольных моделей. Приведенные выше формулы, в частности, позволяют разумно оценить размер шага дискретизации $\Delta\lambda$ при заданной точности табулирования. К тому же следует иметь в виду, что аналогично строится теория интерполирования угловых характеристик светорассеяния полидисперсных систем, среди которых наиболее распространенной является коэффициент направленного светорассеяния.

Однако вернемся к (4.28). Для того, чтобы практически воспользоваться этим неравенством необходимо оценить величину $|g(\eta)|$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что, хотя интервал R в используемых моделях бесконечен, практически распределение s_M локализовано в некоторой конечной, а в ряде случаев и весьма узкой области размеров. Эту область можно условно назвать интервалом эффективных размеров частиц. Длина этого интервала и его положение на оси r определяются параметрами распределения и прежде всего, конечно, значением параметра r_s, которое определяет наиболее вероятный размер частиц в исследуемом локальном объеме. Поскольку ядро $K(\lambda, r)$ в полидисперсных интегралах не обладает подобными фокусирующими свойствами и всюду на оси r заметно отличается от нуля, то подынтегральные выражения в (4.27) как функции r будут локализоваться там же по оси r, где локализуется распределение $s_M(r)$, т. е. в окрестности точки r_s. Следовательно, в качестве приближенной оценки величины $|g(\eta)|$ можно взять ее значение в точке $\eta \simeq r_s$. Конечно, положение точки η на оси r, помимо всего прочего, зависит еще и от длины волны λ, как это следует из интегралов в (4.27). Однако этой зависимостью в первом приближении можно пренебречь, считая, что в области локализации распределения $s_M(r)$ поведение ядра $K(r, \lambda)$ по переменной r для всех λ является вполне регулярным. В последнем случае речь идет о гладкости хода частных факторов $K(r|\lambda)$ в окрестности точки r_s, которая является экстремальной для $s_M(r)$. Следует иметь в виду, что, если подобные предположения не выполняются в той или иной конкретной оптической задаче, можно прибегнуть к численному исследованию параметрических интегралов, входящих в неравенство (4.27). Считая приемлемыми сделанные выше допущения, остается найти значение $|g(r_s)|$ для двух рассматриваемых моделей. В первой модели, которую принято называть гамма-распределением, модальный радиус r_s связан с параметрами α и b соотношением

$$r_s = (\alpha + 2)/b, \tag{4.29}$$

и, следовательно,

$$|g(r_s)| = \alpha + 2. \tag{4.30}$$

Во второй модели

$$|g(r_s)| = 2\delta^2. \tag{4.31}$$

Выражение (4.28) удобно использовать для оценки относительной ошибки интерполирования, т. е. величины $\varepsilon(\xi) = |R_2(\xi)|/\beta(\xi)$, где $\xi \in (\lambda_0, \lambda)$. Во второй модели, наиболее распространенной в практике атмосферно-оптических исследований, получаем для указанной величины простое соотношение

$$\varepsilon \leqslant (\delta\,\Delta\lambda/\lambda_0)^2, \tag{4.32}$$

справедливое для всех точек ξ между λ_0 и $\lambda_0+\Delta\lambda$. В последнем выражении величину ε следует понимать как относительную ошибку интерполирования характеристики $\beta_M(\lambda)$ в пределах указанного выше спектрального интервала.

Если требуется оценить размер предельно допустимого интервала между двумя соседними спектральными измерениями, осуществляемыми с относительной ошибкой не ниже σ, то, полагая в (4.32) $\varepsilon \simeq \sigma$, находим

$$\min(\Delta\lambda) \geqslant \delta^{-1}\lambda_0\sigma^{1/2}. \tag{4.33}$$

Смысл этой формулы достаточно ясен. Предельное значение интервала $\Delta\lambda$ между двумя смежными измерениями спектрального хода характеристики светорассеяния определяется ошибкой измерений σ, положением этого интервала, т. е. значением λ_0 и параметром распределения δ, характеризующим гладкость полидисперсного интеграла (то же самое значение производной β' в точке λ_0). Напомним, что значение δ обратно пропорционально дисперсии логарифма в распределении (4.19б), и чем оно меньше, тем шире исходное распределение и, как следствие, глаже характеристика $\beta(\lambda)$, и поэтому ее можно интерполировать при прочих равных условиях с меньшей ошибкой.

Все, о чем говорилось выше, относится к случаю линейного интерполирования. Для квадратичного интерполирования оценки получаются более громоздкими, и мы их здесь не приводим. Применение квадратичного интерполирования имеет больший смысл в задачах табулирования оптических аэрозольных моделей, нежели в практике зондирования аэрозоля. В последнем случае σ, как правило, не меньше значений 0,05—0,1, поэтому оценок (4.33) вполне достаточно для практического применения. Использование более сложных интерполяционных формул оправдано лишь при соответствующем повышении точности исходных данных.

Аналогичные соотношения могут быть построены и для первой модели (гамма-распределения). Опуская промежуточные вычисления, получаем

$$\min(\Delta\lambda) \geqslant (\alpha+2)^{-1/2}\lambda_0\sigma^{1/2}. \tag{4.34}$$

Для атмосферных дымок параметр α в соответствующих моделях, как правило, не превышает 2 [23]. Кстати, подобная оценка справедлива и для параметра δ, т. е. в тех случаях, когда спектр размеров частиц атмосферных дымок аппроксимируется логнормальным распределением. Откуда следует, что соответствующие значения предельно допустимого интервала дискретизации спектральных измерений, получаемые из (4.33) и (4.34), близки друг к другу и примерно равны $(\lambda\sigma^{1/2})/2$. Подобного результата следовало ожидать, поскольку оптические модели $\beta_M(\lambda)$ для данного типа аэрозольных образований в атмосфере не должны существенно зависеть от вида функции $s_M(r)$, используемой для аппроксимации спектра размеров частиц. Что же касается каких-то отдельных особенностей аналитического поведения двух рассматриваемых модельных распределений $s_M(r)$, то они сглаживаются интегральным оператором K, и как следствие, соответствующие оптические модели $\beta_M(\lambda) = (Ks_M)(\lambda)$, являясь гладкими функциями, несущественно отличаются друг от друга. В этом отношении выбор аналитического вида модельного распределения $s_M(r)$ не является принципиальным в оптике дисперсных сред. Аналитическое поведение оптических характеристик $\beta(\lambda)$, как полидисперсных интегралов типа (4.8), прежде всего определяется поведением по λ частного фактора $K(\lambda|r)$. Подобный вывод следует из теории интегралов, зависящих от параметра. Поэтому вопрос о выборе одного из двух модельных распределений (4.19) несуществен при планировании экспериментов по аэрозольному светорассеянию.

4.2.4. Обобщение формулы дифференцирования

Формула дифференцирования полидисперсных интегралов (4.13) позволила построить содержательный анализ поведения спектральных оптических характеристик. Напомним, что при ее выводе предполагалась независимость показателя преломления вещества частиц полидисперсной системы от длины волны λ, что, естественно, ограничивает ее применение. Вместе с тем подобное допущение не является принципиальным, и ниже мы дадим соответствующее обобщение формулы (4.13). В отличие от (4.8) теперь полидисперсный интеграл будем писать в виде

$$\beta(\lambda) = \int_R K[\bar{m}(\lambda),\ \lambda,\ r]\, s(r)\, dr. \tag{4.35}$$

Строго говоря, необходимо было бы писать $\beta[\bar{m}, s, \lambda]$, подчеркивая то обстоятельство, что теперь β является функционалом от двух распределений, $\bar{m}(\lambda)$ и $s(r)$, в отличие от обычной характеристики $\beta[s, \lambda]$. Однако в целях упрощения не будем использовать иных, более сложных обозначений, полагая, что это не вызывает здесь какого-либо недопонимания. Напомним, что ранее при выводе формулы (4.13) исходным моментом являлась однородность ядра $K(\lambda, r)$ по указанным переменным. Теперь сделаем предположение, что ядро $K[\bar{m}(\lambda), \lambda, r]$ является функцией некой переменной $y = \bar{m}(\lambda)x(r, \lambda)$. Конечно, трудно сказать, в какой мере обосновано это предположение в самом общем случае. Аналитический вид выражений (1.4) и (1.5) слишком сложен, чтобы питать надежду на получение какого-либо конструктивного результата в этом направлении. Тем не менее для одного очень важного частного случая указанное предположение действительно имеет место. Речь идет о достаточно больших сферах, показатель преломления которых не слишком отличается от единицы [29]. Соответствующий фактор эффективности ослабления имеет вид

$$K_{ex}(\rho) = 2 - 4\rho^{-1}\sin\rho + 4\rho^{-2}(1 - \cos\rho), \tag{4.36}$$

где $\rho \equiv 2(\bar{m} - 1)x$.

Заметим, что в излагаемой здесь теории дифференцирования параметрических интегралов важным является наличие таких аналитических свойств ядра, которые в принципе выражались бы в виде соотношений между частными производными по соответствующим переменным. При этом сам вид подобных соотношений несуществен. Примером могут служить методы дифференцирования полидисперсных индикатрис рассеяния в области малых углов и их интерпретация [16, 17].

Итак, если исходить из предположения, что $K[\bar{m}(\lambda), \lambda, r]$ является сложной функцией вида $K[y(r, \lambda)]$, то справедливы соотношения:

$$\left.\begin{aligned} K'_r &= K'_y y'_r; \\ K'_\lambda &= K'_y y'_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

Исключая из (4.37) K'_y и учитывая, что

$$y'_r = \bar{m}x'_r, \quad y'_\lambda = \bar{m}'_\lambda x + x'_\lambda \bar{m},$$

искомое соотношение между K'_r и K'_λ примет вид

$$rK'_r + \bar{m}\lambda(\bar{m} - \bar{m}'_\lambda \lambda)^{-1} K'_\lambda = 0. \tag{4.38}$$

Это выражение, естественно, отличается от соотношения Эйлера (4.12) наличием множителя $\bar{m}/(\bar{m} - \bar{m}'_\lambda \lambda)$, который равен единице при $\bar{m}'_\lambda = 0$ (то же самое $\bar{m}(\lambda) = \text{const}$). С учетом (4.38) получаем формулу дифференцирования полидисперсных интегралов вида (4.35), а именно

$$\bar{m}\lambda\,(\bar{m} - \bar{m}'_\lambda\lambda)^{-1}\,\beta' = \int\limits_R K(\lambda,\ r)\,(rs)'\,dr. \tag{4.39}$$

Повторное применение формулы (4.39) к (4.35) дает

$$\{\bar{m}\lambda\,(\bar{m} - \bar{m}'_\lambda\lambda)^{-1}\}^2\,\beta'' = \int\limits_R K(\lambda,\ r)\,r\,(rs)''\,dr. \tag{4.40}$$

С учетом (4.40) можно откорректировать выражение для остаточного члена при линейной интерполяции спектральных оптических характеристик, когда требуется учет спектральной зависимости $\bar{m}$ в пределах Λ. Выражение (4.28) теперь записывается в виде

$$|R_2(\xi)| \leqslant (\Delta\lambda/2\lambda_0)^2\,\beta(\xi)\,|g(\eta)|\,[1 - \lambda\bar{m}'_\lambda/\bar{m}]^2_{\lambda=\xi}. \tag{4.41}$$

Величину $[1 - \lambda\bar{m}'_\lambda(\lambda)/\bar{m}(\lambda)] = [1 - (\ln\bar{m}(\lambda))']^2$ можно рассматривать как фактор изменчивости $\bar{m}(\lambda)$ в пределах Λ. Его значения оцениваются на основе априорной информации о составе зондируемой дисперсной среды и возможной зависимости соответствующего показателя $\bar{m}$ от длины волны λ.

Интересно в этом отношении рассмотреть атмосферные дымки. Для видимого диапазона вещественная часть показателя преломления $\bar{m}'$ слабо зависит от λ, и указанный фактор изменчивости близок к единице. Картина резко меняется при переходе в ИК-диапазон. В связи с этим проблема интерполирования аэрозольных характеристик в этой области существенно усложняется. В равной мере это относится и к восстановлению спектрального хода $\beta(\lambda)$ в ИК-области методом обратной задачи. В связи с практической важностью задачи остановимся несколько подробнее на оценке ожидаемой погрешности экстраполяции, обусловленной неопределенностью в априорном задании показателя преломления, которую ниже будем характеризовать величиной $\delta\bar{m}$. В соответствии с выражением (4.35) эта ошибка может быть представлена следующим выражением:

$$\Delta_\alpha(\lambda) = \beta_0(\lambda) - \beta_\alpha(\lambda) = \int\limits_R \{K[\bar{m}_0(\lambda),\ \lambda,\ r)]\,s_0(r) -$$

$$- K[\bar{m}(\lambda),\ \lambda,\ r]\,s_\alpha(r)\}\,dr, \quad \lambda \in \Lambda', \tag{4.42}$$

где Λ' — интервал, лежащий справа от интервала оптического зондирования Λ. Для того чтобы несколько упростить нижеследующие аналитические построения, будем считать ядро функцией трех независимых переменных, $\bar{m}$, λ и r. Иными словами, откажемся от априорного задания зависимости $\bar{m}(\lambda)$, что практически сделать очень трудно. В дальнейшем опустим переменную λ, поскольку все получаемые соотношения справедливы для любых ее значений. Рассматривая ядро как функцию параметров $\bar{m}$ и r, можно записать следующее соотношение:

$$K(\bar{m}_0 + \delta\bar{m},\ r) \simeq K(\bar{m}_0,\ r) + K'_m(\bar{m}_0,\ r)\,\delta\bar{m},$$

с учетом которого (4.42) переписывается в виде

$$\Delta_\alpha = \int_R K(\bar{m}_0,\ r)\{s_0(r) - s_\alpha(r)\}\,dr + \delta\bar{m}\int_R K'_m(\bar{m}_0,\ r)\,s_\alpha(r)\,dr. \qquad (4.43)$$

Ясно, что первая компонента ошибки обусловлена отклонением приближенного решения обратной задачи $s_\alpha(r)$ от $s_0(r)$ и зависит прежде всего от ошибок оптических измерений и размерности обращаемого вектора β_σ. Второй интеграл в правой части (4.43) обусловлен ошибками в задании показателя преломления при экстраполяции в ИК-диапазон. Считая ядро $K(\bar{m},\ r)$ функцией двух переменных и полагая, что выполняются допущения, сделанные ранее для ядер типа (4.36), найдем соотношение для его частных производных:

$$rK'_r - \bar{m}K'_m = 0, \qquad (4.44)$$

которое приводит нас к равенству

$$\int_R K'_m(\bar{m}_0,\ r)\,s_\alpha(r)\,dr = \bar{m}_0^{-1}\int_R K(\bar{m}_0,\ r)\,(rs_\alpha)'\,dr. \qquad (4.45)$$

В силу формулы дифференцирования (4.13) интеграл справа представляет собой $\partial\beta_\alpha/\partial\ln\lambda$, и, следовательно, для второго члена в (4.43) получаем оценку

$$\Delta_{\alpha\bar{m}} = -(\delta\bar{m}/\bar{m}_0)\,\partial\beta_\alpha(\lambda)/\partial\ln\lambda. \qquad (4.46)$$

При $\delta\bar{m}\to 0$ значение этой ошибки становится малым, и, следовательно, ошибка экстраполяции обусловливается тем, в какой мере эффективно решена обратная задача, т. е. построен аппроксимирующий аналог $\beta_\alpha(\lambda)$ по вектору β_σ. Выражение (4.46) показывает, что величина $\Delta_{\alpha\bar{m}}$ помимо относительной ошибки в задании показателя $\bar{m}$, зависит от значения производной экстраполируемой функции в окрестности рассматриваемой точки λ. Ясно, что чем более сложным является поведение исследуемой функции, тем выше модуль ее производной и тем с меньшей точностью можно прогнозировать ее значения. На этом закончим изложение методов прикладного анализа спектральных оптических характеристик и их приложений в теории аппроксимации. Нижеследующие примеры будут в большей мере иллюстрировать информационные возможности развитых методов дифференцирования полидисперсных интегралов в постановке и решении обратных задач оптики дисперсных сред, включая и нелинейные варианты.

4.2.5. Некоторые приложения формул дифференцирования к интерпретации оптических измерений

Помимо решения чисто аналитических задач в оптике дисперсных сред формулы дифференцирования (4.13) и (4.39) можно использовать для построения новых функциональных уравнений в теории оптического зондирования рассеивающих сред. Для иллюстрации подобной возможности обратимся к модельным распределениям (4.20), (4.21). В первом случае оптическая характеристика системы рассеивающих частиц записывается в виде интеграла

$$\beta(\lambda) = \int_0^\infty K(\lambda,\ r)\,\pi a r^{\alpha+2} \exp\{-br\}\,dr.$$

Применяя к нему формулу дифференцирования (4.13), приходим к выражению

$$\lambda\beta'/\beta = \alpha + 3 - \bar{r}(\lambda)/r_s, \tag{4.47}$$

где $\bar{r}(\lambda)$ — средний оптически эффективный размер частиц для данного λ. Если измеряется спектральный ход $\beta(\lambda)$ и оценивается затем $\beta'_\alpha(\lambda)$ с использованием, скажем, оператора $D_{1\alpha}$, то (4.47) позволяет найти зависимость $\bar{r}(\lambda)$, если априори задать параметры микроструктуры. Для тех точек λ^*, в которых характеристика $\beta(\lambda)$ имеет экстремумы, получаем простое соотношение

$$\bar{r}(\lambda^*) = r_s(\alpha + 3). \tag{4.48}$$

Конечно, выражение (4.48) справедливо лишь для модельных распределений типа (4.20). Не составляет труда построить аналогичные соотношения для логнормальных распределений.

Однако обратимся к возможным приложениям более сложной формулы дифференцирования, а именно (4.39). Обозначим его правую часть через $F[\bar{m}(\lambda),\ s,\ \lambda]$. Нетрудно построить выражение

$$\bar{m}(\lambda) = \bar{m}(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \bar{m}(\lambda')\left[\frac{1}{\lambda} - \beta'/F[\bar{m}(\lambda'),\ s,\ \lambda']\right] d\lambda'.$$

Обозначая далее через $Q[\bar{m}(\lambda), s, \lambda]$ выражение в квадратных скобках, приходим к следующему функциональному уравнению

$$\bar{m}(\lambda) = \bar{m}(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \bar{m}(\lambda') Q[\bar{m}(\lambda'), s, \lambda'] d\lambda' \tag{4.49}$$

относительно распределений $\bar{m}(\lambda)$ и $s(r)$. Очевидно, что это уравнение в большей степени интересно при определении функции $\bar{m}(\lambda)$ в предположении, конечно, что спектр размеров частиц в исследуемом объеме известен. Действительно, в этом случае имеем дело с интегральным уравнением Вольтерра второго рода, т. е. с решением корректно поставленной задачи. Следует особо отметить, что этот факт сам по себе достаточно показателен. Он свидетельствует о том, что с помощью формальных преобразований интегральное уравнение первого рода (4.3) относительно $\bar{m}(\lambda)$ можно свести к уравнению второго рода. Иными словами, обратная задача светорассеяния относительно спектрального хода $\bar{m}(\lambda)$ допускает естественный регуляризатор и является корректной в математическом отношении задачей.

Экспериментальный вектор β_σ с компонентами $\beta_{i\sigma}$ $(i=1, \ldots, n)$, по которому определяются значения $\bar{m}(\lambda_i)$, входит в уравнение (4.49) через производную β'_α. Предварительное преобразование $\beta_\sigma \to \beta'_\alpha$ осуществляется с помощью регуляризирующего оператора $D_{1\alpha}$, который рассматривался выше (см. п. 2.2). Поскольку распределение $s(r)$, которое нам требуется задать априори, в (4.49) входит под знак интеграла, то вполне можно прибегнуть к «подходящей» параметрической модели $s_M(r)$. Выбор параметров этой модели желательно согласовать с некоторыми опорными оптическими измерениями $\beta_{i\sigma}$, для которых можно считать известными значения $\bar{m}(\lambda_j)$. Подобные возможности в частности открываются, когда решаются задачи по определению $\bar{m}(\lambda)$ для атмосферных дымок в ИК-диапазоне и известны контрольные измерения, скажем $\beta_{ex}(\lambda)$ для видимой области. Уравнение (4.49) как раз и предназначено для интерпретации оптических данных, получаемых в комплексных экспериментах, когда зондирование осуществляется в нескольких спектральных интервалах и различными средствами. Особенно эффективно его можно использовать для определения спектрального хода мнимой части аэрозольного вещества $\bar{m}''$ в ИК-диапазоне, знание которой необходимо при оценке влияния аэрозолей на термический баланс атмосферы.

Помимо задач, в которых необходимо учитывать зависимость $\bar{m}(\lambda)$, оптика реальных аэрозольных систем может потребовать введения в обратные задачи и такого распределения, как $\bar{m}(r)$. Подобным примером могут служить задачи оптического зондирования аэрозольных систем, находящихся в поле влажности. Показатель преломления аэрозольного вещества зависит от количества конденсированной на частицах влаги. Последнее, в свою очередь, пропорционально, при прочих равных условиях, поверхности частиц, что и ведет к появлению в оптике аэрозольных систем указанных функций. Оптические характеристики системы частиц, взаимодействующей с полем влажности, должны рассматриваться как функционалы $\beta[\bar{m}(r), \lambda]$ либо как параметрические полидисперсные интегралы $\beta(\lambda, f)$, где f — относительная влажность. Для подобных интегралов нетрудно построить методики прикладного анализа, аналогичные тем, которые описывались выше для $\beta[\bar{m}(\lambda), \lambda]$. Соответствующее обобщение формулы дифференцирования в этом случае осуществляется на основе соотношения

$$\lambda K'_\lambda - \bar{m}(\bar{m} + r\bar{m}'_r)^{-1} K'_r = 0,$$

аналогичного (4.38). Нетрудно показать, что определение $\bar{m}(r)$ либо $r(f)$ из обращения оптических данных $\beta(\lambda, f)$ может быть осуществлено с помощью соответствующего нелинейного интегрального уравнения второго рода [21].

4.3. Теория оптического зондирования слабозамутненной атмосферы и учет эффектов молекулярного поглощения

В пределах настоящего раздела кратко излагаются методики интерпретации оптических данных, получаемых при зондировании слабозамутненной атмосферы, когда объемные коэффициенты аэрозольного рассеяния заметно меньше соответствующих коэффициентов для молекулярной компоненты. Подобные задачи имеют первостепенное значение в оптических исследованиях средней и верхней атмосферы, осуществляемых с использованием измерительных систем, установленных на космических платформах [32, 33]. Для того чтобы в этом случае можно было сколько-нибудь достоверно судить о концентрации аэрозольных частиц и их средних размерах, необходимо решить задачу разделения аэрозольного и молекулярного рассеяния из оптических измерений. С аналогичной задачей мы уже сталкивались выше в теории касательного зондирования. В тех ситуациях, когда молекулярное рассеяние доминирует в формировании оптических сигналов, оказывается полезным привлекать для исследования параметров атмосферы и эффекты молекулярного поглощения.

4.3.1. Разделение аэрозольной и молекулярной компонент рассеяния из спектральных измерений

Необходимость решения указанной задачи возникает при разработке теории любого оптического метода зондирования рассеивающей атмосферы. В теории поляризационного метода она касалась локальных объемов среды; в теории лазерной локации и касательном зондировании речь шла об определении профилей оптических характеристик указанных компонент. Соответствующий аналитический аппарат для решения подобных оптических задач будем строить в рамках операторного подхода, который лежит в основе настоящего исследования по обратным задачам оптики атмосферы. С формальной точки зрения задачу разделения компонент рассеяния можно рассматривать как поиск решения системы уравнений

$$\beta_i^{(\text{а})} + \beta_i^{(\text{м})} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.50}$$

Величина β в этом уравнении в конкретных задачах может означать такие оптические характеристики, как β_{sc}, β_{ex}, β_π и т. д., измеряемые соответствующими измерительными комплексами в спектральных интервалах Λ. Напомним, что $\beta_i^{(\text{м})}$ связаны между собой соотношениями типа (2.9), и поэтому совокупность значений $\{\beta_i^{(\text{м})},\ i = 1, \ldots, n\}$ определяется одним значением, скажем $\beta_n^{(\text{м})}$, либо каким-то иным из указанной совокупности. В результате число неизвестных в системе (4.50) с $2n$ уменьшается до $n+1$. Для того чтобы сделать ее полностью определенной, необходимо надлежащим образом уменьшить число неизвестных еще на единицу. Ясно, что это должно касаться значений аэрозольной характеристики $\beta^{(\text{а})}$. Решить подобную задачу можно, если воспользоваться оператором восстановления $V^{(\alpha)}$ теории полидисперсного светорассеяния.

В теории аппроксимации нам уже встречался матричный оператор $V^{(\alpha)}_{n'n}$, который осуществлял преобразование экспериментального вектора β_σ размерности n в вектор β_α размерности $n' \geqslant n$. Подобную задачу нам требуется решить и сейчас для того, чтобы доопределить систему (4.50). Построим оператор $V^{(\alpha)}_{nn'}$, где $n' = n - 1$. Тогда вместо (4.50) можно записать систему

$$\left.\begin{aligned} &\beta_i^{(\text{а})} + a_{in}\beta_n^{(\text{м})} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n-1; \\ &\sum_{j=1}^{n-1} v_{nj}^{(\alpha)}\beta_j^{(\text{а})} + \beta_n^{(\text{м})} = \beta_n. \end{aligned}\right\} \tag{4.51a}$$

В этой системе оператор $V^{(\alpha)}_{nn'}$ (то же самое матрица $\{v_{ij}^{(\alpha)}\}$) решает аппроксимационную задачу восстановления n значений аэрозольной оптической характеристики по $(n-1)$ известным ее значениям. С первого взгляда наши построения могут выглядеть несколько формальными, однако за ними стоит вполне определенная физическая основа, и заключается она в том, что совокупность значений $\{\beta_i^{(a)},\ i=1, \ldots, n\}$ образует систему взаимозависимых величин. Эта взаимозависимость реализуется через операторы типа W и V в рамках априорных допущений о морфологии частиц зондируемой дисперсной среды. Однако, возвращаясь к системе (4.51а), мы видим, что теперь в ней ровно n неизвестных, а именно: $\beta_1^{(a)}, \ldots, \beta_{n-1}^{(a)}, \beta_n^{(м)}$. В совокупности они образуют некоторый вектор. Если его обозначить через γ, то (4.51а) можно переписать в виде

$$U\gamma = \beta. \tag{4.51б}$$

Поскольку матрица $\{v_{ij}^{(\alpha)}\}$ невырождена при $\alpha > 0$, то $\det U \neq 0$ и, следовательно, матричный оператор U также невырожден. Выбором параметра регуляризации α в операторе восстановления $V_{nn'}^{(\alpha)}$ можно влиять на устойчивость обратного оператора U^{-1} при численном решении системы (4.51), когда в правой части стоит экспериментальный вектор β_σ. Подобной регуляризации может оказаться вполне достаточно при решении практических задач, учитывая при этом, что искомый вектор γ обладает только положительными компонентами и, следовательно, помимо указанной регуляризации действует ограничение $\gamma \in \Psi_n^+$. При возрастании уровня внешних помех указанной («внутренней») регуляризации может оказаться недостаточно, и тогда необходимо прибегать к более жесткой схеме регуляризации, а именно вводить обратный регуляризирующий оператор U_α^{-1}, построение которого осуществляется в соответствии с (1.78). Подобная ситуация возникает в тех случаях, когда аэрозольное рассеяние в спектральном интервале зондирования заметно меньше молекулярного, т. е. имеет место соотношение $\beta^{(a)}(\lambda) \ll \beta^{(м)}(\lambda)$ для всех λ.

Напомним, что характеристика β, фигурирующая в системе (4.51), может быть связана с локальным объемом рассеивающей атмосферы и зависеть от пространственной координаты z, как это, например, имеет место в лазерной локации. При использовании этого метода для средней атмосферы указанное неравенство действительно имеет место. В подобной ситуации разумно говорить не о разделении компонент рассеяния, а скорее о задаче обнаружения аэрозольной компоненты в пределах пространственного слоя $[Z_1, Z_2]$ на основе эффектов рассеяния оптического излучения в спектральных интервалах. Эта задача решается в излагаемой здесь методике специальным оператором U^{-1}, который является новым оператором теории светорассеяния и может быть назван оператором разделения оптических данных по спектральному рассеянию в атмосфере. В соответствии со своим назначением оператор U^{-1} трансформирует экспериментальный вектор β_σ в два вектора, $\beta^{(a)}$ и $\beta^{(м)}$. Очевидно, что последние два вектора нам следует снабдить подстрочным индексом α, поскольку в процессе численного решения системы (4.51) одновременно осуществляется и фильтрация измерительных помех.

Для практического использования описанной методики разделения необходимо, очевидно, иметь как минимум три измерения, поскольку минимально возможная размерность матрицы $\{v_{ij}^{(\alpha)}\}$ равна 2×2. В последнем случае удобно прибегнуть к параметрической форме обращения оптических данных. При двухчастотном зондировании отсутствует возможность численного построения оператора разделения. Единственной альтернативой является априорное задание аэрозольной оптической модели, что и делается в работах по интерпретации данных оптического зондирования атмосферы [32, 33]. В предельном варианте, когда в распоряжении исследователя оказывается всего один профиль оптической характеристики $\beta(z)$, априори задается так называемая «стандартная» модель молекулярной рассеивающей атмосферы $\beta^{(\text{м})}(z)$ и оценивается так называемое рассеивающее отношение $\beta(z)/\beta^{(\text{м})}(z)$, которое в какой-то мере служит показателем аэрозольного замутнения атмосферы. Расчет этой величины по существу исчерпывает проблему интерпретации измерительной информации в подобном эксперименте.

4.3.2. Эффекты молекулярного поглощения в задачах многочастотного зондирования

Проблему учета, или лучше сказать, использования эффектов молекулярного поглощения будем рассматривать на примере многочастотной лазерной локации, поскольку именно в этом случае достигается наибольший информационный эффект в исследовании параметров атмосферы.

Предположим, что на некоторой рабочей длине волны λ_j (в принципе их может быть и несколько) имеет место сильное поглощение излучения одной из многих газовых составляющих молекулярной атмосферы, и ее концентрация вдоль трассы зондирования характеризуется плотностью $\rho(z)$. В соответствии с этим в уравнение лазерного зондирования (см. (2.1)) необходимо ввести дополнительный экспоненциальный множитель, и оно примет вид

$$S_j(z) = \beta_j(z) T_j(z) \exp\left\{-2\int\limits_{Z_1}^{z} k_j(z')\rho(z')\,dz'\right\}, \qquad (4.52)$$

где $k_j(z)$ — массовый коэффициент поглощения на λ_j. В дальнейшем будем полагать, что ослабление зондирующего излучения, обусловленное эффектами рассеяния, несущественно на λ_j, и поэтому $T_j(z)\approx 1$ для всех $Z_1 \leqslant z < Z_2$.

Допустим, что одновременно с зондированием на λ_j осуществляется зондирование и в окнах прозрачности, соответствующих λ_i $(i=1, \ldots, n)$. Эта информация позволяет с использованием изложенных выше методов дать эффективную оценку значения β_j

для всех z по трассе. Зная $\beta_j(z)$, выражение (4.52) может рассматриваться как интегральное уравнение относительно профиля плотности $\rho(z)$ для соответствующей газовой составляющей (загрязняющей примеси и т. п.). Уравнение для плотности $\rho(z)$ ниже будем писать в форме

$$\int_{Z_1}^{z} k_j(z')\rho(z')\,dz' = \tau_j(Z_2) - \tau_j(z), \tag{4.53}$$

где правая часть представляет собой оптическую толщину, обусловленную поглощением в пределах слоя $[Z_1, Z_2]$. Напомним, что в схеме лазерного зондирования оценка значений $\tau_j(z)$ осуществляется посредством величины $\ln(S_j(z)/\beta_i(z)T_j(z))$. Решение этого уравнения Вольтерра на множестве распределений Φ (множество положительных функций) может быть осуществлено одним из описанных выше регуляризирующих алгоритмов (см. гл. 2). Конечно, требуется знание профиля массового коэффициента поглощения $k_j(z)$. Возможность получить измерительную информацию на одной длине волны λ_j для уравнений типа (4.53) и последующего определения профилей концентрации газовых составляющих $\rho(z)$ является характерной особенностью метода лазерного (импульсного) зондирования атмосферы. Если, например, в данном случае обратиться к схеме метода спектральной прозрачности, то получим лишь значение интеграла

$$\int_{Z_1}^{Z_2} k_j(z')\rho(z')\,dz' = \tau_j(Z_2) - \tau_j(Z_1). \tag{4.54}$$

Ни о каком определении профиля $\rho(z)$ по одному измерению не может быть и речи. Определение профиля концентрации поглощающей компоненты в этом методе может быть осуществлено лишь при наличии нескольких спектральных измерений. Подобное сопоставление еще раз подчеркивает достоинства метода лазерного зондирования как дистанционного метода локального исследования атмосферы на основе явления рассеяния. Кстати, рассеивающая компонента представлена профилем $\beta_j(z)$ и неявно входит в правую часть уравнения (4.53).

Интересно заметить, что в ряде случаев методику интерпретации локационных измерений, выполненных с учетом эффектов поглощения, удается существенно упростить, если в окрестности λ_j существует окно прозрачности и технически оказывается возможным выбрать в нем вторую рабочую длину волны лидара. Обозначим для простоты указанные длины волн через λ_1 и λ_2 соответственно. По предположению $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ в определенном смысле считается малым. Если окажется, что $\beta_2(z) \approx \beta_1(z)$ в пределах ошибок измерений, то составляя отношение $S_2(z)/S_1(z)$, вновь приходим к уравнению (4.53) с той лишь разницей, что теперь правая часть не зависит от профиля характеристики рассеяния $\beta(z)$. В этих условиях простейший метод обращения локационных данных основывается на применении регуляризирующего оператора $D_{1\alpha}$ к логарифму отношения $S_{2\sigma}/S_{1\sigma}$. Получающийся при этом профиль $\gamma_\alpha(z)$ прямо пропорционален концентрации $\rho(z)$.

Эффективность применения оператора $D_{1\alpha}$ к решению локационных задач иллюстрируется примером на рис. 4.6. Пример связан с зондированием атмосферного озона на длинах волн $\lambda_1 = 0{,}300$ мкм и $\lambda_2 = 0{,}308$ мкм. Физические аспекты данной обрат-

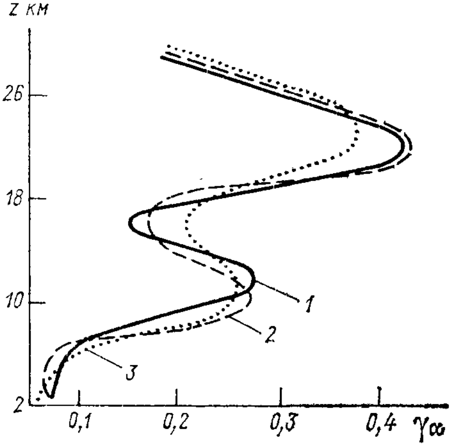

Рис. 4.6. Численный пример, иллюстрирующий эффективность обработки локационных сигналов двухчастотного лидара при зондировании профилей концентрации атмосферного озона с помощью регуляризирующих операторов.

1 — исходный нормированный профиль концентрации озона, *2* — восстановленный при уровне измерительных ошибок $\sigma \leqslant 0{,}05$, *3* — то же при $\sigma \leqslant 0{,}1$.

ной задачи исследовались ранее авторами в работах [5, 8]. Рассмотренная схема интерпретации в работах по атмосферной оптике получила название методики дифференциального поглощения. Подробный анализ ее возможностей на примере дистанционного лазерного зондирования профилей концентрации водяного пара в атмосфере дан в предыдущей монографии авторов [8]. Хотя методика дифференциального поглощения выглядит достаточно простой, все же предпочтителен первый из описанных вариантов, когда зондирование осуществляется не в одном окне прозрачности, а в нескольких, желательно соседствующих и справа и слева от линии поглощения исследуемого газа. С одной стороны, это повышает надежность интерпретации локационных данных во всей их совокупности, а с другой — заметно ослабляет требование малости $\Delta\lambda$. Итерационные схемы для совместной интерпретации локационных данных, одни из которых попадают в окна прозрачности, а другие соответствуют линиям поглощения атмосферных газов, изложены в монографии [21].

Завершая обсуждение интегрального уравнения (4.53), появление которого в теории обратных задач оптики атмосферы обязано эффектам поглощения молекулярными составляющими, следует обратить внимание на одно очень важное обстоятельство, которое необходимо учитывать при оценке его информационных возможностей. Дело в том, что уравнение (4.53) носит сугубо качественный характер. Действительно, априорное задание коэффициента $k_j(z)$ требует знания профиля температуры $t(z)$, который в равной мере определяет и искомую плотность $\rho(z)$ любой газовой составляющей. При строгом подходе необходимо считать первую и вторую величины функционалами от профиля температуры $t(z)$, и, следовательно, вместо (4.53) мы должны писать нелинейное интегральное уравнение вида

$$\int_{Z_1}^{z} Q_j[t(z'),\ z']\,dz' = \tau_j(Z_2) - \tau_j(z). \tag{4.55}$$

относительно температурного профиля. К сожалению, методы численного решения подобных уравнений (нелинейное интегральное уравнение с оператором Урысона [13]) весьма сложны и их обсуждение выходит за рамки настоящей работы. Следует при этом заметить, что решение уравнения (4.55) во всех без исключения случаях не следует рассматривать в качестве эффективного способа определения температурного профиля. Речь идет о том, что может оказаться разумным при интерпретации оптических данных, связанных с эффектами поглощения, вначале сделать оценку профиля температуры, а затем уже найти плотность зондируемой газовой компоненты, прибегая к спектроскопической информации. Методы лазерного зондирования обеспечивают, как известно, высокую чувствительность и пространственное разрешение, но чтобы эти достоинства были в полной мере реализованы, необходимы адекватные и по возможности более строгие методы обращения. В связи с этим уместно заметить, что в практике атмосферно-оптических исследований обратные задачи, основанные на спектроскопических эффектах, грешат излишними аналитическими упрощениями, которые в математическом отношении мало оправданы. Имеется в виду, что обратные спектроскопические задачи более естественно формулируются как нелинейные интегральные уравнения. Другое дело — обратные задачи светорассеяния полидисперсными системами, в которых предположение о независимости рассеивателей автоматически влечет аддитивность и простые интегральные представления оптических величин.

4.3.3. Методика локального прогноза спектральных аэрозольных характеристик

Вернемся вновь к выражению (4.52) и постараемся оценить неизвестное значение β_j, считая известным значение $\beta(\lambda_j+\Delta\lambda)$. Исходим из того, что эти две величины уже нельзя считать близкими в пределах погрешности измерения, и, следовательно, дифференциальная методика не может быть использована. Подобная ситуация имеет место при лазерном зондировании концентрации атмосферного озона в линиях его поглощения в УФ-диапазоне.

Напомним, что в области малых λ аэрозольные характеристики светорассеяния обладают более сильной изменчивостью спектрального хода (см. п. 4.2), и поэтому для выполнения условия $\beta^{(a)}(\lambda_j) \simeq \beta^{(a)}_j(\lambda_j+\Delta\lambda)$ требуется выбирать слишком малые интервалы $\Delta\lambda$, что технически невыполнимо при зондировании озона [5]. В связи с этим возникает задача аналитического прогноза (продолжения) значений аэрозольных оптических характеристик в точку λ_2, если известны их значения в точке λ_1, отстающей от первой на $\Delta\lambda$. Для решения этой задачи, естественно, требуется некоторая априорная информация об аэрозольных характеристиках. Прежде всего, конечно, необходимо исходить из того, что они представляются полидисперсными интегралами. Знание общего аналитического вида исследуемых функций существенно упрощает задачу аналитического продолжения $\beta(\lambda)$ из точки λ_1 в точку λ_2. Поскольку по предположению величина $\Delta\lambda$ все же мала, то для локального прогноза значений $\beta(\lambda)$ в первом приближении можно воспользоваться линейной экстраполяцией, полагая справедливым следующее приближенное соотношение:

$$\beta(\lambda_2) \simeq \beta(\lambda_1) + \beta'(\lambda_1)\Delta\lambda. \tag{4.56}$$

Для последующих оценок удобно ввести в рассмотрение величину

$$\omega(\lambda) = \int_R K(\lambda, r)(rs)'\,dr \Big/ \int_R K(\lambda, r)s(r)\,dr.$$

Тогда, с учетом формулы дифференцирования (4.13), (4.56) перепишем в виде

$$\beta(\lambda_2) \approx \beta(\lambda_1)[1 + (\Delta\lambda/\lambda_1)\omega(\lambda_1)], \tag{4.57}$$

и для оценки эффективности линейного прогноза значений $\beta(\lambda_2)$ по $\beta(\lambda_1)$ нам остается исследовать область возможных значений величины $\omega(\lambda)$ для практически важных случаев. Ниже будет показано, что для типовых микроструктурных моделей атмосферных дымок, во всяком случае тех, которые описываются распределениями типа (4.20), (4.21), величина $\omega(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$|\omega(\lambda)| \lesssim 1. \tag{4.58}$$

Откуда следует оценка

$$|\beta(\lambda_2) - \beta(\lambda_1)| \leqslant \beta(\lambda_1)\,|\Delta\lambda/\lambda_1|, \tag{4.59}$$

которая позволяет сверху оценить эффективность прогноза (4.57) в зависимости от $\Delta\lambda$ и λ_1. Конечно, в принципе можно ввести и квадратичный член в исходную формулу (4.56) и тем самым сделать локальный прогноз более надежным. Однако усложнение методики локального прогноза навряд ли будет оправданным без соответствующего увеличения известных значений $\beta(\lambda)$.

В ряде случаев может потребоваться более точная оценка для величины $\omega(\lambda)$, нежели та, которая дается неравенством

(4.58). Тогда можно воспользоваться явным выражением этой функции, прибегая одновременно к модельным распределениям. В частности, для первой модели (4.20) имеем

$$\omega(\lambda)=\alpha+3-b\int K(\lambda,\ r)\,rs(r)\,dr\Big/\int K(\lambda,\ r)\,s(r)\,dr, \qquad (4.60)$$

где интегралы берутся по области $(0, \infty)$. Поскольку $b=(\alpha+2)r_s^{-1}$, то правая часть (4.60) суть функции двух микроструктурных параметров, α и r_s. Если распределение $s(r)$ локализуется в окрестности точки r_s и не слишком асимметрично, то отношение указанных интегралов близко к значению r_s. Точнее, оно несколько превышает величину r_s, особенно при росте λ в силу роста асимметрии факторов $K(r|\lambda)$ для бóльших λ, и приближается к r_s при уменьшении λ (подробно техника анализа рассматриваемых здесь параметрических интегралов изложена в работах [8, 18]). Если рассматривать спектральную область (0,25—0,35 мкм), представляющую наибольший интерес для зондирования озона, то вполне можно принять оценку (4.58) для линейного локального прогноза аэрозольных коэффициентов обратного рассеяния. Действительно, если отношение интегралов близко к r_s, то правая часть (4.60) близка к единице.

Для второй микроструктурной модели (4.21) имеем

$$\omega(\lambda)=1-2\delta^2\int \ln(r/r_s)\,K(\lambda,\ r)\,s(r)\,dr\Big/\int K(\lambda,\ r)\,s(r)\,dr. \qquad (4.61)$$

Для атмосферных дымок (фоновых аэрозолей) значение параметра δ лежит в пределах 0,6—1,2 [23]. Поскольку модель $s(r,\ r_s,\ \delta)$ также локализуется в окрестности $r\simeq r_s$, то первый интеграл в (4.61) близок к нулю по абсолютному значению в силу малости соответствующих значений $\ln(r/r_s)$. В результате снова имеет место оценка (4.58). Относительная независимость значений $\omega(\lambda)$ от вида параметрической модели $s(r,\ \mathrm{a})$ имеет над собой вполне определенные аналитические основания, останавливаться на которых не представляется возможным. Укажем лишь, что в соответствии с формулой дифференцирования полидисперсных интегралов можно записать

$$\omega(\lambda)=d\ln\beta(\lambda)/d\ln\lambda.$$

Таким образом, введенная выше функция может рассматриваться как характеристика гладкости спектрального хода исследуемых коэффициентов рассеяния $\beta(\lambda)$. Исследование ее поведения в связи с решением различных задач теории оптического зондирования атмосферных аэрозолей можно найти в работах [8, 20]. Выражения (4.60), (4.61) могут использоваться при оценке значений $\omega(\lambda)$ численными методами при решении целого ряда задач по интерпретации оптических измерений [8].

Обращаясь вновь к задаче линейного прогноза, уместно указать на определенную аналогию соотношения (4.57) и оператора восстановления $V_{nn'}^{(\alpha)}$. Правую часть указанного выражения можно представить как произведение $\beta(\lambda_1)$ на множитель b_{21}, который соответствует выражению в квадратных скобках. Подстрочный индекс этого коэффициента связан со значениями λ_1 и λ_2. Ясно, что соотношение $\beta_2=b_{21}\beta_1$ эквивалентно предельному варианту оператора $V^{(\alpha)}_{n,\,n-1}$ при $n=2$. Конечно, задача прогноза любого из значений $\beta(\lambda)$ по дискретным (опорным) измерениям в Λ решается оператором перехода строго, в то время как коэффициенты b_{21} обеспечивают не более как качественную оценку. Применение полученных выше соотношений в схемах интерпретации оптической информации аналогично соответствующему применению операторов восстановления, и нет необходимости останавливаться на этом подробно (см. монографию [21]).

4.3.4. К теории аппроксимации спектральных характеристик молекулярного поглощения методом обратной задачи

Явление молекулярного поглощения широко используется при разработке методов и измерительной аппаратуры для дистанционного контроля концентрации газовых загрязнений атмосферы и оптическом мониторинге полей основных метеопараметров. Однако для реализации в полной мере тех информационных возможностей, которые могут быть связаны с применением этого явления в атмосферно-оптических исследованиях, требуется создание соответствующей теории зондирования. В ее основе должны лежать функциональные уравнения, описывающие формирование и перенос оптических сигналов при наличии молекулярного поглощения и их связь с физическими полями в атмосфере. В качестве последних обычно выступают поля метеопараметров, чем и обусловливается особый интерес к практическим применениям явления молекулярного поглощения. Напомним, что в случае аэрозольного рассеяния оптические характеристики были связаны линейными функциональными уравнениями с полями микрофизических параметров дисперсной компоненты атмосферы, что и позволило выше построить теорию оптического зондирования в достаточно компактной и простой форме. К сожалению, для молекулярного поглощения связь оптических характеристик и полей метеопараметров носит нелинейный характер, что естественно затрудняет разработку теории и программного обеспечения для интерпретации соответствующих оптических данных. Их отсутствие приводит к тому, что при решении спектроскопических задач обычно прибегают к операциям статистического усреднения экспериментальных данных, чтобы в какой-то мере осуществить требуемую регуляризацию при извлечении физической информации из оптических измерений [11, 14, 24]. Ниже будет проиллюстрирована возможность построения теории оптического зондирования на основе явления молекулярного поглощения с применением метода обратной задачи. Эта теория основывается на тех же исходных посылках, что и теория зондирования, изложенная выше, в гл. 1, и во многом будет ей идентична, особенно в части математического аппарата.

Для ясности изложения основных положений теории обратимся к конкретной спектроскопической задаче, изложенной в обстоятельной работе [31]. Здесь речь идет о возможности оценки атмосферного давления на поверхности океана по спутниковым измерениям потоков рассеянной солнечной радиации в А-полосе поглощения кислородом на верхней границе атмосферы. В соответствии с теорией в указанной полосе (в качестве опорной частоты в А-полосе можно считать $\nu_0 = 14403{,}0$ см$^{-1}$) основные формулы для расчета оптических характеристик имеют следующий вид [31]:

$$\beta_{ab}^{(\text{м})}(z,\ \nu) = \rho(z) \sum_{i=1} \frac{S_i}{\pi} \frac{\alpha_i u^{1/2} v}{(\nu - \nu_i)^2 + \alpha_i^2 u v^2}, \tag{4.62}$$

где

$$u(z) = T_0/T(z), \quad v(z) = p(z)/p_0;$$

$$S_i = S_{0i} u \exp\left\{\frac{hc}{kT_0}(u-1)\right\};$$

$$p(z) = p_0 \exp\left\{-\frac{g}{RT_0}\int_0^z u(z')\,dz'\right\}.$$

Смысл величин, входящих в (4.62), вполне ясен. Функции высоты z $p(z)$ и $\rho(z)$ определяют соответственно профили давления и массовой концентрации кислорода. Квантовомеханические константы S_{0i} и α_i $(i=1, \ldots)$ характеризуют А-полосу поглощения кислородом. Поскольку выражение (4.62) справедливо только для частот ν из этой полосы, то ниже будем писать $\nu \in \Omega(\nu,\ \mathbf{S}_0,\ \boldsymbol{\alpha})$, введя обозначения $\mathbf{S}_0 = \{S_{0i},\ i=1, \ldots\}$ и $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i,\ i=1, \ldots\}$. Остальные постоянные взяты из молекулярно-кинетической теории газов, при этом $T_0 = 296$ К, $p_0 = 1000$ гПа. В соответствии с этими выражениями коэффициент поглощения кислородом $\beta_{ab}^{(\text{м})}(z,\ \nu)$ является ограниченной и непрерывной функцией температуры для всех значений z и ν. С точки зрения функционального анализа (4.62) определяет некое, вполне непрерывное преобразование распределения $T(z)$ в распределение $\beta_{ab}^{(\text{м})}(z)$ для фиксированных значений ν из области $\Omega(\nu,\ \mathbf{S}_0,\ \alpha)$. Это функциональное преобразование будем писать в виде

$$T(z) \to \beta_{ab}^{(\text{м})}(z \mid \nu). \tag{4.63a}$$

Напомним, что под распределениями, как и выше, понимаются ограниченные положительные функции, а вертикальная черта в правой части (4.63а) означает, что значения параметра ν каждый раз фиксированы в процессе указанного преобразования.

Поскольку последнее непрерывно и ограниченно, то, в свою очередь должно существовать также и обратное отображение, а именно

$$\beta_{ab}^{(\text{м})}(z\,|\,\nu) \to T(z), \tag{4.63б}$$

справедливое для всех ν из $\Omega(\nu,\ \mathbf{S}_0,\ \alpha)$. В практике при необходимости оценить профиль $T(z)$ обычно стремятся выбрать одно, как считается, наиболее информативное значение частоты ν^*, обеспечивающее наименьшую погрешность преобразования при прочих равных условиях. В целом подобный прием навряд ли себя оправдывает во всех случаях. Предпочтительно использовать несколько спектральных измерений оптической характеристики $\beta_{ab}^{(\text{м})}$, скажем, на частотах ν_l $(l=1,\ \ldots,\ n)$ из интервала оптического зондирования Ω^*, входящего в $\Omega(\nu\,|\,\mathbf{S}_0,\ \alpha)$. Об эффективности преобразования (4.63б) для эмпирических функций сколь-нибудь достоверно можно судить лишь по серии измерений, соответствующих различным частотам, входящим в Ω^*. Это в полной мере подтверждается результатами расчетного анализа, выполненного в указанной работе. После этих предварительных замечаний можно обратиться к методам аппроксимации характеристик $\beta_{ab}^{(\text{м})}(z,\ \nu)$ на основе метода обратной задачи, т. е. на основе двух функциональных преобразований (4.63а) и (4.63б).

Допустим, что требуется оценить значения характеристики $\beta_{ab}^{(\text{м})}$ для некоторых частот ν_j $(j=1,\ \ldots)$, входящих, разумеется, в интервал $\Omega(\nu,\ \mathbf{S}_0,\ \alpha)$, в условиях, когда не представляется возможным задать некий «подходящий» профиль температуры $T(z)$, но зато можно воспользоваться экспериментальными измерениями для неких опорных частот $\{\nu_l,\ \ l=1,\ \ \ldots,\ \ m\}$ значений $\beta_{ab,\,\sigma}^{(\text{м})}(z\,|\,\nu_l)$. Напомним, что подстрочный индекс «σ» указывает на приближенный характер соответствующих функций. Для решения аппроксимационных задач подобного типа необходимо численно осуществить следующее преобразование исходных оптических данных:

$$\beta_\sigma(z) \to T^*(z) \to \beta^*. \tag{4.64}$$

Верхнее обозначение «звездочка» указывает на оценочный характер соответствующих величин, который может быть связан не только с ошибками измерений, но и с приближенным характером тех физических допущений, которые лежат в основе оптической модели (4.62). Векторные обозначения имеют тот же смысл, как и ранее, т. е.

$$\beta_\sigma = \left\{\beta_{ab}^{(\text{м})}(\nu_l),\ \ l=1,\ \ldots,\ m\right\} \ \text{и}\ \beta^* = \left\{\beta_{ab}^{(\text{м})*}(\nu_j),\ \ j=1,\ \ldots\right\}.$$

Напомним, что в преобразовании (4.64) речь не идет об определении профиля температуры с некоторой требуемой точностью. Функция $T^*(z)$ в вычислительной схеме обработки экспериментальных данных играет сугубо вспомогательную роль. Ее отклонение от действительного высотного хода температуры $T(z)$ может быть существенным и, следовательно, неприемлемым с практической точки зрения. Однако это не мешает вектору β^* с приемлемой ошибкой прогнозировать искомые значения $\beta_{ab}^{(м)}(z, \nu_j)$ при ограниченном числе измерений m. Формальное условие корректного прогноза состоит в том, чтобы при $\sigma \to 0$ и последовательном увеличении числа измерений m в интервале $\Omega(\nu, \mathbf{S}_0, \alpha)$ функция $T^*(z)$ равномерно стремилась к $T(z)$. В этом смысле преобразование (4.64) решает задачу численного восстановления спектрального хода коэффициента поглощения $\beta_{ab}^{(м)}(z, \nu)$ в полосе $\Omega(\nu, \mathbf{S}_0, \alpha)$ по ограниченной выборке дискретных отсчетов.

Таким образом, преобразование (4.64) в теории аппроксимации спектральных характеристик поглощения играет такую же роль, как и преобразование (1.68) в оптике дисперсных сред. Если в первом случае переход осуществляется через оценочный профиль температуры $T^*(z)$, то во втором — через приближение функции плотности $s^*(r)$. Преобразование (4.64) можно представить в виде одного оператора, а именно

$$V^{(м)} : \beta_\sigma \to \beta^*. \tag{4.65}$$

Поскольку этот оператор решает аппроксимационную задачу для функции $\beta_{ab}^{(м)}(\nu, z)$, то он может быть назван оператором восстановления. В его основе лежит операция обращения формул (4.62), что и делает понятным смысл выражения «аппроксимация на основе метода обратной задачи».

В теории аэрозольного светорассеяния распределение $s(r)$ с полем оптических характеристик было связано линейным функциональным (интегральным) уравнением, и это естественно влекло линейность оператора восстановления $V_\alpha^{(а)}$ и возможность его представить в некоторых случаях явно в виде матрицы (см. (1.93)).

Оператор $V^{(м)}$ подобными свойствами уже не обладает в силу нелинейного характера исходной оптической модели, заключенной в соотношениях (4.62). Исходя из (4.62) можно построить функциональное уравнение относительно функции $u(z)$, записав его в неявной форме следующим образом:

$$u(z) = F\left[\beta_{ab}^{(м)}, G_1 u, u, z\right]. \tag{4.66}$$

Квадратные скобки означают, что справа стоит некий функционал, а оператор G_1 соответствует вычислению по функции $u(z)$ ее первообразной.

Напомним, что оператор $D_{1\alpha}$, который встречался неоднократно выше, является обратным к G_1. Анализ интегрального уравнения (4.66) и обсуждение методов его численного решения выходит за рамки настоящей работы. Можно лишь заметить, что это уравнение типично для обратных задач спектроскопии атмосферных газов, особенно когда для получения исходной оптической информации используется метод лазерного зондирования в их линиях поглощения. Будучи методом дистанционного оптического зондирования локальных объемов атмосферы, он позволяет находить профили соответствующих оптических характеристик и, следовательно, ставить обратные задачи в форме интегрального уравнения (4.66). При использовании так называемых пассивных методов оптического зондирования аналогичное интегральное уравнение становится более сложным, а главное, хуже обусловленным относительно температурных профилей. Общий вид этих уравнений в лучшем случае соответствует выражению (4.55), в худшем варианте теряется зависимость верхнего предела от z. Примером подобных обратных задач являются интегральные уравнения теории термического зондирования атмосферы в полосе 15 мкм поглощения углекислым газом [10]. Достоинством уравнения (4.66) является то, что оно явно разрешимо относительно $u(x)$ и для его численного решения можно эффективно использовать итерационные процедуры (см. п. 2.3.4).

В заключение уместно провести аналогию обратных задач типа (4.66) с интерпретацией локационных данных, полученных только на основе рассеяния, в которых удается корректно учесть вклад аэрозольного рассеяния в оптические сигналы, надежно выделить профили объемного коэффициента обратного рассеяния воздухом $\beta_{sc}^{(\text{м})}(z, \lambda)$, а затем оценить температурные профили $T(z)$. Поскольку объемная плотность воздуха определяется давлением и температурой в зондируемом слое, соответствующая обратная задача для характеристики $\beta_{sc}^{(\text{м})}(z, \lambda)$ сводится к интегральному уравнению, аналогичному по форме (4.66). Конечно, в нем будут отсутствовать члены, характерные для молекулярного поглощения (в частности, суммы и соответствующие спектроскопические константы). Пример практической реализации подобной оптической задачи дан в работе [30], в которой осуществлялась лазерная локация стратосферы в окнах прозрачности на длинах волн $\lambda_1 = 0{,}532$ мкм и $\lambda_2 = 0{,}355$ мкм, а затем делалась попытка расчета профиля температуры по высотному ходу молекулярного коэффициента обратного рассеяния. Корректировка по аэрозольному рассеянию осуществлялась с помощью измерений рассеивающих отношений $\xi(z, \lambda)$ (рис. 4.7).

Как показали сопоставления получаемых профилей температуры с измеряемыми радиозондом, описанная методика дает вполне приемлемые результаты (рис. 4.8). Наибольшая погрешность приходится на те слои, где наблюдается повышенная замутненность аэрозолями. В связи с этим примером уместно заметить следующее. Методика коррекции по аэрозольному рассеянию, используемая при оценке $\beta_{\pi}^{(\text{м})}(z, \lambda)$, была весьма грубой и определялась небольшим объемом имеющейся оптической информации. Увеличение числа длин волн зондирования позволило бы в этой задаче ввести коррекцию на основе метода обратной задачи аэрозольного светорассеяния, о чем подробно говорилось выше. Во-вторых, расчет профилей температуры не сопровождался надлежащей регуляризацией обращения оптических данных. Как принято в прикладных работах, осуществлялось лишь временное осреднение локационных данных, что позволило снизить влияние шумов на результаты расчетов. Однако фильтрация

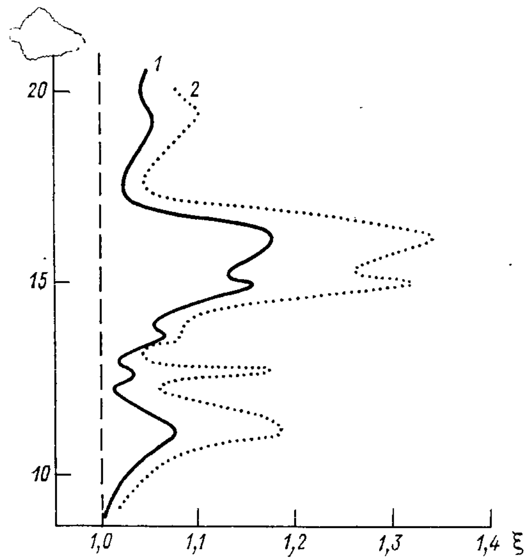

Рис. 4.7. Примеры высотного хода рассеивающих отношений $\xi = 1 + \beta_{\pi}^{(а)}/\beta_{\pi}^{(м)}$ по данным лазерного зондирования [30] на двух длинах волн.

1) $\lambda_1 = 0{,}355$ мкм; 2) $\lambda_2 = 0{,}532$ мкм.

шумов в измеренных данных хотя и важна, но сама по себе не решает проблемы регуляризации интегральных уравнений в полной мере.

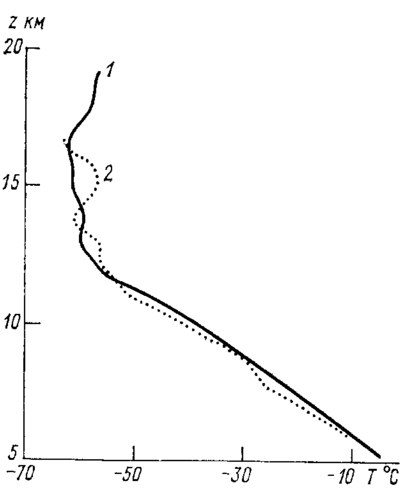

Рис. 4.8. Примеры профилей температуры $T(z)$.

1 — по данным двухчастотного лазерного зондирования; 2 — измерения радиозондом [30].

Следует напомнить, что обратная задача лазерного зондирования профилей температуры на основе молекулярного поглощения (скажем, в линиях А-полосы кислорода [14]) более эффективна (то же самое лучше обусловлена), нежели обратная задача, рассмотренная в вышеприведенном примере. Обусловливается это более сильной температурной зависимостью спектрального хода $\beta_{ab}^{(м)}(z, \nu)$, нежели $\beta_{sc}^{(м)}(z, \nu)$. Здесь можно сослаться на расчетно-аналитические исследования, выполненные в работе [31].

Помимо операторов восстановления $V^{(м)}$, в рамках изложенной теории можно построить и операторы взаимного преобразования спектральных характеристик поглощения одних газовых компонент в соответствующие характеристики других. Физической основой для решения этой вычислительной задачи является их общая зависимость от полей температуры и давления. Здесь полная аналогия с подобной задачей в оптике аэрозоля, где все характеристики светорассеяния определялись в конечном итоге полем микроструктуры. Разработка теории оптических операторов для явления молекулярного поглощения атмосферными газами необходима в интерпретации оптических данных, когда поглощение в спектральных интервалах обусловливается несколькими газовыми составляющими. Операторный подход, реализуемый в методе обратной задачи, дает возможность построить единый расчетно-аналитический аппарат для решения сложных информационных задач теории оптического зондирования, основанного на совместном применении различных физических явлений взаимодействия оптических волн с компонентами атмосферы.

4.4. Заключение

Изложение методов прикладного анализа спектральных характеристик светорассеяния системами частиц сопровождалось достаточно простыми примерами из атмосферной оптики, а именно: решением задач аппроксимации, построением степенных разложений и операторов разделения компонент рассеяния в теории зондирования слабозамутненной атмосферы. К более сложным задачам оптики дисперсных сред, где их применение приводит к существенным аналитическим результатам и эффективным вычислительным схемам обращения, следует отнести нелинейные обратные задачи рассеяния. В этом случае, как было показано в главе, оказывается возможным с использованием разработанных методик дифференцирования полидисперсных интегралов формальное преобразование интегральных уравнений первого рода в интегральные уравнения второго рода. Эта возможность иллюстрировалась на примере обратной задачи светорассеяния относительно спектрального хода показателя преломления аэрозольного вещества. В полной мере это справедливо и в том случае, когда требуется найти распределение $\varphi(f)$, характеризующее взаимодействие зондируемой аэрозольной системы частиц с полем влажности. Построение соответствующего регуляризованного аналога исходного уравнения выполнено в ранее опубликованной работе [21].

Соответствующие примеры можно продолжить, если перейти к обратным задачам нелинейной оптики аэрозоля, в которых необходимо учитывать взаимодействие падающего оптического излучения с частицами зондируемой среды. Микроструктура и показатель преломления вещества частиц аэрозольной системы, находящейся в поле мощного оптического излучения, подвергаются временной трансформации, для описания которой требуется введение функциональной зависимости вида $r[E(t)]$, где $E(t)$ — полная энергия, поглощенная частицей радиуса r за время взаимодействия t [6]. По аналогии с фактором взаимодействия $\varphi(f)$ для данного класса обратных задач можно ввести фактор $\varphi(E)$. Определение этой функции методом обратной задачи светорассеяния открывает возможность изучения физических процессов взаимодействия мощной оптической волны с реальными аэрозольными системами. Разработка теории подобных обратных задач нелинейной оптики дисперсных сред является еще одной областью приложения тех аналитических методов, которые излагались выше.

И последнее, что следует заметить в заключение настоящей главы, связано с существенным увеличением информационных возможностей оптических многоканальных систем дистанционного зондирования атмосферы при надлежащей разработке методов численного решения обратных задач спектроскопии атмосферных газов. Общая методология построения соответствующей теории зондирования на основе явления молекулярного поглощения остается той же, что и при использовании явления рассеяния молекулярной и аэрозольной компонентами. Действительно, как показывает анализ в конце главы, существуют аналогичные функциональные связи между спектральным поведением характеристик молекулярного поглощения в различных частотных интервалах, и их можно представить с помощью аналогичных операторов восстановления и взаимного прогноза (операторов перехода). Таким образом, в рамках операторного подхода открывается перспектива построения единой физической и информационной теории оптического зондирования атмосферы в целях синхронного определения полей оптических характеристик, метеопараметров и микрофизических характеристик дисперсной компоненты. Подобная теория должна служить методологической основой создания многоканальных измерительных комплексов оптической аппаратуры в целях мониторинга окружающей среды.

18 Заказ № 214

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе 1

1. Алексеев А. В., Кабанов М. В., Куштин И. Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере.— Новосибирск: Наука, 1982.— 159 с.
2. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.— М.: Мир, 1977.— 223 с.
3. Балицкий Г. Р., Любич Ю. И. Нормы матриц и их приложение.— Киев: Наукова думка, 1984.— 158 с.
4. Бляшке В. Круг и шар.— М.: Наука, 1967.— 232 с.
5. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами.— М.: Мир, 1986.— 660 с.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1970.— 856 с.
7. Булычев Е. В., Мишин И. В. О возможности восстановления оптических параметров атмосферы по данным угловых спутниковых измерений.— Деп. в ВИНИТИ, рег. № 5630—В86.— 22 с.
8. Бушуев В. Д., Наац И. Э. Программный комплекс «Спектр» для решения аппроксимационных задач теории светорассеяния аэрозольными системами.— Томск: Препринт № 15/ТФ СО АН СССР, 1987.— 50 с.
9. Волковицкий О. А., Павлова Л. Н., Петрушин А. Г. Оптические свойства кристаллических облаков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.— 198 с.
10. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ.— М.: Физматгиз, 1967.— 415 с.
11. Глазов Г. Н. Статистические вопросы зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1987.— 310 с.
12. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами.— М.: Мир, 1971.— 165 с.
13. Донченко В. А. Электрооптические эффекты при распространении оптического излучения в аэрозольной атмосфере//Оптика атмосферы.— 1989.— Т. 2, № 1.— С. 15—20.
14. Зуев В. Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере.— М.: Радио и связь, 1981.— 288 с.
15. Зуев В. Е., Креков Г. М. Оптические модели атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 256 с.
16. Зуев В. Е., Макушкин Ю. С., Пономарев Ю. Н. Спектроскопия атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987.— 247 с.
17. Зуев В. Е., Наац И. Э. Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1982.— 240 с.
18. Иванов В. К., Ванин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.— 206 с.
19. Ивлев Л. С. Химический состав и структура атмосферных аэрозолей.— Л.: ЛГУ, 1982.— 366 с.
20. Ирисов А. Л., Панченко М. В., Савельев Б. А., Фадеев В. Я. Спектральный атмосферный нефелометр//Распространение оптических волн в атмосфере.— Новосибирск: Наука, 1975.— С. 52—56.
21. Като Т. Теория возмущения линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.
22. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Мир, 1969.— 447 с.
23. Кондратьев К. Я., Григорьев А. А., Покровский О. М., Шалина Е. В. Космическое дистанционное зондирование атмосферного аэрозоля.— Л.: Гидрометеоиздат, 1983.— 216 с.

24. Костко О. К., Портасов В. С., Хаттаев В. У., Чаянова Э. В Применение лазеров для определения состава атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1983.— 216 с.
25. Крамер Г. К., Лидееттер М. Стационарные случайные процессы.— М.: Мир, 1969.— 398 с.
26. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский Е. П. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М.: Наука, 1966.— 499 с.
27. Мак-Картни Э. Оптика атмосферы.— М.: Мир, 1979.— 421 с.
28. Морозов В. А. Линейные и нелинейные некорректные задачи. Математический анализ. Т. 2.— М.: ВИНИТИ, 1973.— С. 129—178.
29. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.— М.: Наука, 1987.— 239 с.
30. Наац И. Э. Вопросы теории дистанционного определения микроструктуры атмосферного аэрозоля методами лазерной локации//Лазерное зондирование атмосферы.— М.: Наука, 1976.— С. 3—10.
31. Наац И. Э. К определению статических свойств случайной хорды в выпуклом теле//Известия ТПИ, т. 203.— Томск: Изд-во ТГУ, 1974.— С. 75—79.
32. Наац И. Э. К теории лазерной многочастотной локации аэрозолей в малых освещенных объемах.— Томск: Препринт № 38/ИОА СО АН СССР, 1985.— 53 с.
33. Наац И. Э. Метод обратной задачи в атмосферной оптике.— Новосибирск: Наука, 1986.— 198 с.
34. Наац И. Э. Определение моментов случайной хорды в эллипсоиде//Изв. ТПИ, т. 203.— Томск: Изд-во ТГУ, 1974.— С. 80—83.
35. Наац И. Э., Попов А. А. К оптической локации кристаллических облаков.— Томск: Препринт № 16/ИОА СО АН СССР, 1986.— 52 с.
36. Наац И. Э. Теория многочастотного лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1980.— 157 с.
37. Наац И. Э., Попов А. А. О проявлении несферичности частиц рассеивающего объема в поляризационных характеристиках поля обратного рассеяния//Труды IX Всесоюз. симп. по лазерному и акустическому зондированию атмосферы. Часть 1.— Томск, ИОА ТФ СО АН СССР, 1987.— С. 287—294.
38. Наац И. Э., Полуянов А. Л. К теории оптического зондирования полидисперсных систем несферических частиц//Оптикометеорологические исследования земной атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1987.— С. 87—97.
39. Покровский О. М. Методы решения обратных задач дистанционного зондирования атмосферы и природных ресурсов.— Обнинск: ВНИИГМИ — МЦД (Гидрометеорология. Сер. 37.21. Метеорология. Вып. 6. Обзорная информация), 1986.— 53 с.
40. Попов А. А. Рассеяние электромагнитной плоской волны на полупрозрачном выпуклом многограннике произвольной формы.— Деп. в ВИНИТИ, рег. № 8006—84 от 15 декабря 1984.— 55 с.
41. Попов А. А. Сечения ослабления и обратного рассеяния поляризованного излучения на круглой пластинке в приближении физической оптики//Оптика атмосферы.— 1988.— Т. 1, № 5.— С. 19—24.
42. Пшеничный В. Н., Далинин Ю. М. Численные методы в экспериментальных задачах.— М.: Наука, 1975.— 320 с.
43. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике.— М.: Мир, 1985.— 589 с.
44. Розенберг Г. В., Горчаков Г. И., Георгиевская Ю. С., Любовцева Ю. С. Оптические параметры атмосферного аэрозоля//Физика атмосферы и проблемы климата.— М.: Наука, 1980.— С. 216—257.
45. Самохвалов И. В., Копытин Ю. Д., Ипполитов И. И. и др. Лазерное зондирование тропосферы и подстилающей поверхности.— Новосибирск: Наука, 1987.— 262 с.
46. Смеркалов В. А. Метод доопределения обратных задач.— М.: Гидрометеоиздат, 1979.— С. 120—128.— (Труды ИПГ; вып. 36).
47. Смоктий О. И. Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии.— Л.: Наука, 1986.— 352 с.

48. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач— М.: Наука, 1974.— 203 с.
49. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация.— М.: Наука, 1983.— 198 с.
50. Трикоми Ф. Интегральные уравнения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 299 с.
51. Фаддеев Д. К. Об обусловленности матриц//Труды Мат. ин-та АН СССР.— 1959.— Т. 53.— С. 387—391.
52. Grünbaum B. Measures of Symmetry for Convex Sets//Proc. Symp. Pure Math. (Convexity). Providence (USA).— 1963.— V. 7.— P. 233—270.
53. Pinnick E. G., Carroll D. E., Hofman D. J. Polarized Light Scattered from Monodisperse Randomly Oriented Nonspherical Aerosol Particles Measurements//Appl. Opt.— 1976.— V. 15, N 2.— P. 384—393.
54. Pollack J. B., Cuzzi J. N. Scattering by Nonspherical particles of Size Comparable to a Wavelength: A New semi-Empirical Theory and Its Application to Tropospheric Aerosols//Journ. Atm. Sci.— 1980.— V. 37, N 4.— P. 868—881.
55. Reagan J. S., Spinhirne J. O. e. a. Atmospheric Particulate Properties from Lidar and Solar Radiometer Observation compared with Simultaneous in situ Aircraft Measurements: A Case Study//J. Appl. Meteorol.— 1977.— V. 16, N 9.— P. 911—928.
56. Reagan J. A., Byrne D. M., Herman B. M. Ristatic Lidar: A Tool for Characterizing Atmospheric Particulates. Part II. The Inverse Problem//IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing.— 1982.— V. GE—20, N 3.— P. 236—243.

К главе 2

1. Балицкий Г. Р., Любич Ю. И. Нормы матриц и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1984.— 158 с.
2. Бушуев В. Д., Наац И. Э. Методы обращения оптических характеристик на компактах//Оптико-метеорологические исследования.— Новосибирск: Наука, 1987.— С. 97—108.
3. Бушуев В. Д., Наац И. Э. Программный комплекс «Спектр» для решения аппроксимационных задач теории светорассеяния аэрозольными системами.— Томск: Препринт № 15/ТФ СО АН СССР, 1987.— 50 с.
4. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами.— М.: Мир, 1971.— 165 с.
5. Емиленко А. С., Толстобров В. Г. Рассеяние света полидисперсным золем. Таблицы.— М.: Наука, 1981.— 212 с.
6. Зуев В. Е., Наац И. Э. Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1982.— 240 с.
7. Иванов В. И., Малевич И. А., Чайковский А. П. Многофункциональные лидарные системы.— Минск: Изд-во университетское, 1986.— 286 с.
8. Иванов А. П., Чайковский А. П., Дятлов К. Н., Хутко И. С. Лидары для исследования характеристик атмосферного аэрозоля//ЖПС.— 1978.— Т. 29, вып. 6.— С. 1044—1052.
9. Иванов А. П., Чайковский А. П., Осипенко Ф. П., Воробей И. А. Многочастотное зондирование атмосферного аэрозоля//V Всесоюз. симп. по лазерному и акустическому зондированию атмосферы (тез. докл., ч. 1).— Томск: ИОА СО АН СССР, 1978.— С. 19—23.
10. Ивлев Л. С. Химический состав и структура атмосферных арозолей.— Л.: ЛГУ, 1982.— 366 с.
11. Комплексный энергетический эксперимент.— Л.: Гидрометеоиздат, 1972.— 280 с.— (Труды ГГО; вып. 276).
12. Костин Б. С., Наац И. Э. Исследование атмосферных аэрозолей методом многочастотного лазерного зондирования. I. Теория метода и основы дистанционного микроструктурного анализа аэрозольных полидисперсных систем.— Деп. в ВИНИТИ, рег. № 1566—84 от 13.02.84.— 63 с.

13. Костин Б. С., Наац И. Э. Исследование атмосферных аэрозолей методом многочастотного лазерного зондирования. II. Определение спектра размеров и оптических констант аэрозолей пограничного слоя атмосферы.— Деп. в ВИНИТИ, рег. № 1485—В86 от 5.03.86.— 42 с.
14. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.— М.: Наука, 1982.— 319 с.
15. Межерис Р. Лазерное дистанционное зондирование.— М.: Мир, 1987.— 550 с.
16. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа.— М.: Гостехтеоретиздат, 1953.— 527 с.
17. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.— 688 с.
18. Наац И. Э. Вопросы теории дистанционного определения микроструктуры атмосферного аэрозоля методами лазерной локации//Лазерное зондирование атмосферы.— М.: Наука, 1976.— С. 3—10.
19. Наац И. Э. Метод обратной задачи в атмосферной оптике.— Новосибирск: Наука, 1986.— 198 с.
20. Наац И. Э. К теории лазерной многочастотной локации аэрозолей в малых освещенных объемах.— Томск: Препринт № 38/ИОА СО АН СССР, 1985.— 53 с.
21. Наац И. Э. Теория многочастотного лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1980.— 157 с.
22. Самохвалов И. В., Копытин Ю. Д., Ипполитов И. И. и др. Лазерное зондирование тропосферы и подстилающей поверхности.— Новосибирск: Наука, 1987.— 262 с.
23. Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 536 с.
24. Cai O., Liou K. N. Theory of Time-dependent multiple Back-Scattering from Clouds//Journ. Atm. Sci.— 1981.— V. 38, N 17.— R. 1452—1466.
25. Gross A., Post M. J., Hall F. F. Depolarization, Backscatter and Attenuation of CO_2 Lidar by Cirrus Clouds//Appl. Opt.— 1984.— V. 23, N 15.— P. 2518—2522.
26. Hirono M., Fujiwara N., Fujiwara M., Shibata T. Comparative Study of the Aerosol Properties Measured by Two-Wavelength Lidar and Detector on Balloon//Journ. Meteorol. Soc. Japan.— 1985.— V. 63, N 2.— P. 294—302.
27. Jenning S. G. Backscatter and Extinction Measurements in Cloud and Drizzle at CO_2 Laser Wavelengths//Appl. Opt.— 1986.— V. 25, N 15.— P. 2499—2505.
28. Menzies R. T., Kavaya M. J., Flamant P. H., Haner D. A. Atmospheric Aerosol Backscatter Measurements Using a Tunable Coherent CO_2 Lidar//Appl. Opt.— 1984.— V. 23, N 15.— P. 2510—2517.
29. Müller H., Quenzel H. Information Content of Multispectral Lidar Measurements with respect to the Aerosol Size Distribution//Appl. Opt.— 1985.— V. 24, N 5.— P. 648—654.
30. Reagan J. S., Spinhirne J. O. e. a. Atmospheres Particulate Properties from Lidar and Sodar Radiometer Observation Compared with Simultaneous in situ Aircraft Measurements: A Case Study//J. Appl. Meteorol.— 1977.— V. 16, N 9.— P. 911—928.
31. Spinhirne J. D., Reagan J. A., Herman B. M. Vertical Distribution of Aerosol Extinction Cross Section and Inference of Aerosol Imaginary Index in the Troposphere by Lidar Technique//Journ. Appl. Meteorol.— 1980.— V. 19, N 4.— P. 426—438.
32. Yue G. K., Kent G. S., Farrukh U. O., Deepak A. Modeling Atmospheric Aerosol Backscatter at CO_2 Laser Wavelengths. 3. Effects of Changes in Wavelength and Ambient Conditions//Appl. Opt.— 1983.— V. 22, N 11.— P. 1671—1678.

К главе 3

1. Атмосферный аэрозоль и его влияние на перенос излучения/Под ред. К. Я. Кондратьева.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.— 120 с.
2. Бадинов И. Я., Поберовский А. Б., Попова Л. В., Бабылева А. П. Наземные измерения оптической толщины атмосферы в области спектра 0,3—2,5 мкм//Комплексный энергетический эксперимент.— Л.: Гидрометеоиздат, 1972.— С. 89—92.— (Труды ГГО; Вып. 276).
3. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами.— М.: Мир, 1986.— 660 с.
4. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами.— М.: Мир, 1971.— 165 с.
5. Зуев В. Е., Креков Г. М. Оптические модели атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 256 с.
6. Зуев В. Е., Наац И. Э. Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1982.— 240 с.
7. Ивлев Л. С. Химический состав и структура атмосферных аэрозолей.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.— 366 с.
8. Като Т. Теория возмущения линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.
9. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Мир, 1969.— 447 с.
10. Комплексный энергетический эксперимент.— Л.: Гидрометеоиздат, 1972.— 280 с.— (Труды ГГО; Вып. 276).
11. Кондратьев К. Я., Бузников А. А. Космическая спектрофотометрия природной среды с пилотируемых космических кораблей и орбитальных станций: опыт и перспективы.— М.: Препринт № 16/АН СССР, отдел вычислительной математики, 1981.— 42 с.
12. Кондратьев К. Я., Григорьев А. А., Покровский О. М., Шалина Е. В. Космическое дистанционное зондирование атмосферного аэрозоля.— Л.: Гидрометеоиздат, 1983.— 216 с.
13. Кондратьев К. Я., Козодеров В. В., Федченко П. П. Аэрокосмические исследования почв и растительности.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 231 с.
14. Кондратьев К. Я., Марчук Г. И., Бузников А. А. и др. Поле излучения сферической атмосферы.— Л.: ЛГУ, 1977.— 214 с.
15. Костин Б. С. Исследование эффективности оптического зондирования аэрозоля с использованием спектральных фотометров//Исследование атмосферного аэрозоля методами лазерного зондирования.— Новосибирск: Наука, 1980.— С. 70—83.
16. Костин Б. С., Наац И. Э. Исследование атмосферных аэрозолей методом многочастотного лазерного зондирования. I. Теория метода и основы дистанционного микроструктурного анализа аэрозольных полидисперсных систем.— Деп. в ВИНИТИ, рег. № 1566—84 от 13.02.84.— 63 с.
17. Костин Б. С., Наац И. Э. Исследование атмосферных аэрозолей методом многочастотного лазерного зондирования. II. Определение спектра размеров и оптических констант аэрозолей пограничного слоя атмосферы.— Деп. в ВИНИТИ, рег. № 1485—В86 от 5.03.86.— 42 с.
18. Микиров А. Е., Смеркалов В. А. Исследование рассеянного излучения верхней атмосферой Земли.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.— 208 с.
19. Наац И. Э. Теория многочастотного лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1980.— 157 с.
20. Смоктий О. И. Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии.— Л.: Наука, 1986.— 352 с.
21. Торопова Т. П., Тен А. П. и др. Оптические свойства приземного слоя атмосферы//Ослабление света в земной атмосфере.— Алма-Ата: Наука, 1976, с. 33—112.
22. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений.— М.: Мир, 1985.— 263 с.
23. Трикоми Ф. Интегральные уравнения.— Изд-во иностр. лит., 1960.— 299 с.
24. Хайди Г. М. Процессы удаления газообразных взвешенных загрязнений из атмосферы//Химия нижней атмосферы.— М.: Мир, 1976.— С. 153—222.

25. Avaste O. A., Kuvallik S. H. Remote Monitoring of Aerosols from Space//Adv. Space Res.— 1983.— V. 2, N 5.— P. 87—93.
26. Deluisi J. J., Furukawa P. M., Gillette D. A., Schuster B. G. Results of a Comprehensive Atmospheric Aerosol—Radiation Experiment in the Southwestern United States. Part II: Radiation Flux Measurements and Theoretical Interpretation//Journ. Appl. Meteorol.— 1976.— V. 15, N 5.— P. 455—463.
27. Fraser A. B. Solutions of the Refraction and Extinction Integrals for Use Inversions and Image Formation//Appl. Opt.— 1977.— V. 16, N 1.— P. 160—165.
28. Hirono M., Fujiwara N., Fuiwara M., Shibata T. Comparative Study of the Aerosol Properties Measured by Two Wavelength Lidar and Detector on Balloon//Journ. Meteorol. Soc. Japan.— 1985.— V. 63, N 2.— P. 294—302.
29. Jinhuan Q., Hongoi W., Xiuji Z. e. a. Experimental Study of Remote Sensing of Atmospheri Aerosol Size Distribution by Combined Solar Extinction and Forward Scattering Method//Advances in Atmospheric Sciences.— 1985.— V. 2, N 3.— P. 307—315.
30. King M. D., Byrne D. M., Herman B. M., Reagan J. A. Aerosol Size Distribution Obtained by Inversion of Spectral Optical Depth Measurements// Journ. Atm. Sci.— 1978.— V. 35, N 11.— P. 2153—2167.
31. Tanaka M., Nakajima T., Takamura T. Simultaneous Determination of Complex Refractive Index and Size Distribution of Airborne and Water-Suspended Particles from Light Scattering Measurements//Journ. Meteorol. Soc. Japan.— 1982.— V. 60, N 6.— P. 1259—1272.
32. Twasaka Y., Hayashida S., Ono A. Increasing Backscattered Light from the Stratospheric Aerosol Layer after Mt. El Chichon Eruption Laser Radar Measurement at Nagoya (35° N, 137° E)//Geophys. Res. Lett.— 1983.— V. 10, N 6.— P. 440—442.
33. Williams M. M. R. The Transmission of Radiation through a Coagulating Aerosol//Journ. Phys. D: Appl. Phys.— 1984.— V. 17, N 3.— P. 509—521.

К главе 4

1. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами.— М.: Мир, 1986.— 660 с.
2. Бушуев В. Д., Наац И. Э. Программный комплекс «Спектр» для решения аппроксимационных задач теории светорассеяния аэрозольными системами.— Томск: Препринт № 15/ТФ СО АН СССР, 1987.— 50 с.
3. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами.— М.: Мир, 1971.— 165 с.
4. Емиленко А. С., Толстобров В. Г. Рассеяние света полидисперсным золем. Таблицы.— М.: Наука, 1981.— 212 с.
5. Зуев В. Е., Иваненко Б. П., Наац И. Э. К оценке эффективности лазерного зондирования атмосферного озона с борта ИСЗ//Исследование Земли из космоса.— 1985.— № 5.— С. 117—122.
6. Зуев В. Е., Копытин Ю. Д., Кузиковский А. В. Нелинейные оптические эффекты в аэрозолях.— Новосибирск: Наука, 1980.— 184 с.
7. Зуев В. Е., Креков Г. М. Оптические модели атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 256 с.
8. Зуев В. Е., Наац И. Э. Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1982.— 240 с.
9. Ивлев Л. С. Химический состав и структура атмосферных аэрозолей.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.— 366 с.
10. Кондратьев К. Я., Тимофеев Ю. М. Метеорологическое зондирование атмосферы из космоса.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.— 280 с.
11. Костко О. К., Портасов В. С., Хаттатов В. У., Чаянова Э. В. Применение лазеров для определения состава атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1983.— 216 с.
12. Крамер Г. К., Лидеттер М. Стационарные случайные процессы.— М.: Мир, 1969.— 398 с.

13. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М.: Наука, 1966.— 499 с.
14. Межерис Р. Лазерное дистанционное зондирование.— М.: Мир, 1987.— 550 с.
15. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа.— М.: Гостехтеоретиздат, 1953.— 527 с.
16. Наац И. Э. Аналитические свойства полидисперсных индикатрис рассеяния в области малых углов//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1976.— Т. 12, № 3.— С. 320—332.
17. Наац И. Э. Асимптотическое поведение индикатрис полидисперсных систем и оценка границ спектра размеров аэрозольных частиц//Оптика и спектроскопия.— 1975.— Т. 39.— С. 595—596.
18. Наац И. Э. Качественные методы в теории полидисперсного светорассеяния и их применение к обратным задачам лазерного зондирования//Дистанционное зондирование атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1978.— с. 69—83.
19. Наац И. Э. К оценке гладкости распределений в обратных задачах аэрозольного светорассеяния//Вопросы лазерного зондирования атмосферы.— Новосибирск: Наука, 1976.— С. 74—83.
20. Наац И. Э. К теории лазерной многочастотной локации аэрозолей в малых освещенных объемах.— Томск: Препринт № 38/ТФ СО АН СССР, 1985.— 53 с.
21. Наац И. Э. Метод обратной задачи в атмосферной оптике.— Новосибирск: Наука, 1986.— 198 с.
22. Панченко М. В., Тумаков А. Г., Фадеев В. Я.— Томск: ИОА СО АН СССР, 1976.— С. 69—77.
23. Розенберг Г. В., Горчаков Г. И., Георгиевская Ю. С., Любовцева Ю. С. Оптические параметры атмосферного аэрозоля//Физика атмосферы и проблемы климата.— М.: Наука, 1980.— С. 216—257.
24. Самохвалов И. В., Копытин Ю .Д., Ипполитов И. И. и др. Лазерное зондирование тропосферы и подстилающей поверхности.— Новосибирск: Наука, 1987.— 262 с.
25. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.— 203 с.
26. Торопова Т. П., Тен А. П. и др. Оптические свойства приземного слоя атмосферы//Ослабление света в земной атмосфере.— Алма-Ата: Наука, 1976, с. 33—112.
27. Трикоми Ф. Интегральные уравнения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 299 с.
28. Фомин В. В. Молекулярное поглощение в инфракрасных окнах прозрачности.— Новосибирск: Наука, 1986.— 232 с.
29. Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 536 с.
30. Lefrere J., Megie G. Temperature measurements in the troposphere and lower stratosphere using a dual wavelength lidar/NASA Conf. Publ., 1982, N 2228: 11th Int. Laser Radar Conf., Madison, Wisc., June 21—25, 1982.— P. 23—25.
31. Mitchell R. M., O'Brien D. M. Error Estimates for Passive Satellite Measurement of Surface Pressure Using Absorption in the A band of Oxygen// Journ. Atm. Sci.— 1987.— V. 44, N 15.— P. 1981—1990.
32. Russell P. B., Morley B. M., Livingston J. M. et al. Orbiting Lidar Simulations. 1: Aerosol and Cloud Measurements by Independent—Wavelength Technique//Appl. OPt.— 1982.— V. 21, N 9.— P. 1541—1554.
33. Russell P. B., Morley B. M. Orbiting Lidar Simulations. 2: Density, Temperature, Aerosol, and Cloud Measurements by a Wavelength—Combining Technique//Appl. Opt.— 1982.— V. 21, N 9.— P. 1554—1563.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Монография

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ, ТОМ 7

Владимир Евсеевич Зуев,
Игорь Эдуардович Наац

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ

Редактор В. И. Кузьменко. Художник Е. Е. Городная. Художественный редактор Б. А. Бураков. Технический редактор Н. Ф. Грачева. Корректор Л. И. Хромова.

ИБ № 1905. Сдано в набор 20.08.89. Подписано в печать 29.01.90. М-19509. Формат 60×90[1]/16. Бумага типографская № 1. Литературная гарнитура. Печать высокая. Печ. л. 18. Кр.-отт. 18. Уч.-изд. л. 20,25. Тираж 1130 экз. Индекс МОЛ-182. Заказ № 214. Цена 3 р. 40 к.
Гидрометеоиздат. 199226. Ленинград, ул. Беринга, д. 38.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6.