Р. В. Озмидов ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСЕЙ ОКЕАНЕ



Ленинград Гидрометеоиздат 1986

Рецензент д-р физ.-мат. наук К. Д. Сабинин

Дан обзор полуэмпирических н статистических теорий турбулентиой диффузии примесей, рассмотрены особенности процесса диффузии в стратифицированной по плотности среде. Описаны методы экспериментального исследования диффузии примесей в океане. Приведены результаты опытов с мгновенными и непрерывными точечными источниками примеси, проведенных в разных районах океана. Большое внимание уделено нсследованию флюктуаций концентрации диффундирующей примеси. Рассмотрены особенности диффузии примесей от глобальных источников (естественных и искусственных изотопов, кислорода, углекислого газа, нефтяных и других загрязнений). Приведены рекомендации по методам расчета сбросных устройств, а также примеры расчетов поведения загрязнений в море.

Книга рассчитана на океанологов, специалистов по охране окружающей среды, гидродинамиков и гидротехников, а также аспирантов и студентов соответствующих высших учебных заведений.

The R. V. Ozmidov's monograph "Diffusion of contaminants in the ocean" contains a discussion of semi-empirical and statistical theories of turbulent diffusion of contaminants in a density-stratified medium. This is followed by a description of methods for the in situ study of contaminants in the ocean. Adduced are the results of experiments with instant and continuous sources of contaminants, conducted in a variety of ocean areas. Much consideration is given to the study of concentration fluctuation of the diffusing contaminant. Analysed are the diffusion patterns of contaminants coming from global sources (of natural isotopes, oxigen, carbon dioxide, petroleum and other pollutants). The work results in recommendations related to the ways of designing marine waste disposal systems. It also includes practical instances of computations of pollutant behavior in marine conditions.

The book is intended to be used by oceanographers, environment conservation workers, specialists in hydrodynamics, marine technology, as well as by undergraduates and postgraduate students of the appropriate higher education institutions.

O 1903030100-080 069(02)-86 36-86

© Гидрометеоиздат, 1986 г.

предисловие

Процессы диффузии примесей в океане имеют определяющее значение в формировании полей как естественных, так и искусственно вносимых в водную среду субстанций. Без знания закономерностей диффузии примесей в океане невозможен рациональный выбор методов расчета переноса биогенных элементов, растворенных газов, загрязняющих веществ. Процессы диффузии в океане весьма сложны из-за большого числа факторов, влияющих на распространение вещества. В связи с этим прогресс в исследованиях закономерностей диффузии примесей в океане может быть достигнут лишь при сочетании теоретических и экспериментальных методов изучения явления.

Как теоретическим, так и экспериментальным исследованиям диффузии примесей в океане посвящено большое число работ во многих странах мира. Результаты исследований опубликованы в целом ряде журналов и сборников, однако до настоящего времени обобщающая работа по проблеме диффузии примесей в океане отсутствовала.

В предлагаемой читателям монографии сделано обобщение результатов, полученных автором и другими исследователями по данной проблеме. Изложение теоретических аспектов проблемы сочетается с данными, полученными во время специальных диффузионных опытов с искусственными трассерами. Даются также практические рекомендации по расчетам поведения примесей в различных гидрометеорологических ситуациях.

Ряд разделов монографии основан на исследованиях, выполненных автором совместно с А. Н. Гезенцвей, В. И. Зацем, Г. С. Карабашевым, С. С. Муравьевым, А. Окубо и другими исследователями, фамилии которых приведены в списке литературы. Автор благодарит своих соавторов за возможность использовать совместные материалы. Автор приносит искреннюю благодарность А. С. Монину за постоянное внимание и ценные советы, способствующие улучшению содержания книги.

Диффузия, т. е. перенос субстанций хаотическими молекуляриыми или турбулентными движениями среды, имеет для океана первостепенное значение. Диффузия является одним из важнейших факторов, формирующих поля солености, содержания кислорода, биогенных элементов, различного рода примесей в океанских водах. В связи с этим знание закономерностей диффузии в океане важно для понимания механизмов формирования как естественных гидрофизических полей океана, так и полей загрязнений, обусловленных различного рода источниками примесей антропогенного происхождения. Перенос субстанций любого происхождения и ее концентрация в данной точке океана зависит, конечно, не только от процесса диффузии, но и от целого ряда других факторов. Среди таких факторов могут быть и биологические (аккумуляция и перенос вещества живыми организмами), и химические (химический распад вещества, соединение его с другими веществами с переходом в газообразное состояние или с выпадением в осадок и т. д.), физические (переход в другое агрегатное состояние, коагуляция, адсорбция, ядерный распад) и, наконец, механические (перенос движущимися водами океана). Механический перенос в свою очередь может быть разделен на две составляющие: перенос, обусловленный полем осредненных скоростей течений (адвекция), и перенос, вызванный наличием в поле скорости случайных хаотических составляющих (диффузия). В настоящей монографии основное внимание будет, естественно, уделено последнему процессу, однако в ряде моделей диффузии, как будет показано далее, в определенной степени удается учитывать и другие перечисленные выше факторы.

Расчет механического переноса субстанций в океане представляет собой весьма сложную задачу, так как для ее решения необходимо знание закономерностей большого числа факторов, влияющих на процесс. Так, для расчета адвективного переноса субстанций нужно иметь сведения о векторном поле осредненных скоростей течений в исследуемом районе океана, а также об изменчивости этого поля во времени. Такие сведения могут быть почерпнуты из атласов или получены в результате расчетов по полю плотности воды или полю ветра и потокам тепла через поверхность океана. При этом весьма существен выбор пространственно-временного масштаба осреднения, так как от этого зависит степень нестационарности поля скорости и относительная инего флюктуационных (турбулентных) составляютенсивность щих. Задание же самих турбулентных составляющих или их параметризация — еще более сложная проблема. Характеристики океанской турбулентности зависят от динамического состояния

океана (градиентов скоростей осредненных течений, поверхностного и внутреннего волнения, плотностной стратификации морских вод). Так, при устойчивой стратификации слоев морской воды вертикальная турбулентность, а следовательно, и вертикальная диффузия весьма ослабляются. В условиях же неустойчивой стратификации при наличии конвекции примесь, внесенная в поверхностные слои моря, может быстро распространяться на большие морские глубины.

Главным отличием турбулентной диффузии от молекулярной является многомасштабность турбулентных движений и обусловленная этим коррелятивная связь движений отдельных частиц диффундирующей примеси в разных точках потока. С этим явлением связана зависимость интенсивности турбулентной диффузии от масштаба рассматриваемого явления.

Большое значение процессов диффузии в океане для всех сторон его «жизни» было осознано еще в начале нашего века. Так, в 1913 г. Якобсен (см. ссылку в [91]) изучал турбулентный обмен солью в проливах Бельт и Каттегат. Однако исследования процессов диффузии в открытых частях океана начались значительно позднее. Первый этап этих исследований характеризовался попыткой установить связи параметров диффузии с распределениями легко наблюдаемых свойств океанской воды: солености S и температуры Т. Подбором значений коэффициентов диффузии (или температуропроводности) добивались наилучшего согласия наблюденных распределений S и T с решениями некоторых упрощенных полуэмпирических уравнений переноса S и T. При этом приблизительно до конца 30-х годов считалось, что из-за сравнительно малых горизонтальных перепадов значений S и T в океане горизонтальной диффузией (пропорциональной градиенту ИХ свойства) всегда можно пренебрегать. И лишь в 1936 г. Россби, а в 1938 г. Парр (см. ссылки в [91]) приходят к выводу, что горизонтальные коэффициенты диффузии в океане могут быть на несколько порядков больше вертикальных, в связи с чем горизонтальная диффузия часто оказывается весьма существенной. При исследовании закономерностей горизонтальной диффузии вскоре была подмечена большая изменчивость коэффициентов горизонтальной диффузии, а также связь этой изменчивости с масштабом рассматриваемого диффузионного процесса. Стало очевидным, что такое явление связано со сложной структурой турбускорости течений в океане. Без лентного поля исследования внутренней структуры океанской турбулентности дальнейшее продвижение в изучении процессов диффузии в океане стало затруднительным.

Этап исследования закономерностей диффузии в океане, основанный на прямых измерениях турбулентных пульсационных скоростей, начался в 40-х годах нашего столетия. Пионерские работы В. Б. Штокмана [108, 109] в этом направлении были развиты затем А. Г. Колесниковым [44] и другими авторами. Примыкали к этому направлению и работы по исследованию диффузии с использованием дискретных индикаторов (поплавков), наблюдения над хаотическими движениями которых в океане позволялн определять параметры диффузии (Ричардсон и Стоммел [153], Р. В. Озмидов [72]). Весьма плодотворным для исследования закономерностей диффузии в океане оказалось использование красителей и радиоактивных изотопов. Контролируемый выпуск определенных количеств этих индикаторов в диффузионных опытах позволил проводить управляемые эксперименты и получать необходимые данные в различных условиях протекания процесса. Эти работы, получившие широкое распространение в океанологии с конца 50-х и в 60-х годах, продолжаются и в настоящее время с применением новейших контактных и неконтактных (в частности, аэрокосмических) методов регистрации индикаторов.

По мере накопления данных о процессах диффузии примесей в океане развивались и теоретические модели явления. В первый период исследований, как уже упоминалось, основой интерпретации наблюдаемых распределений примесей служили полуэмпирические уравнения диффузии, и главной задачей при этом становилась оценка значений входящих в эти уравнения коэффициентов диффузии. Когда таких оценок накопилось достаточное количество, стал вопрос о поиске зависимостей коэффициентов диффузии от определяющих факторов — масштаба явления, градиентов скорости течений и плотности воды, параметров волнения и т. п. В последующие годы для описания диффузионных процессов в океане стали использоваться не только полуэмпирические уравнения диффузии, по которым рассчитывались осредненные поля примеси, но и соотношения для расчета более сложных характеристик полей концентрации примеси, например спектральных или корреляционных функций вариаций концентрации. Появление мощных вычислительных машин позволило также решать численно системы уравнений для совместного определения полей скорости течений и полей концентрации примеси.

Результатам экспериментальных и теоретических исследований диффузии примесей в океане посвящено весьма большое число журнальных публикаций. Однако обобщающие, монографические работы по проблеме как у нас в стране, так и за рубежом отсутствуют. Правда, еще в 1975 г. была издана монография по проблеме диффузии примесей в атмосфере [8]. Ряд закономерностей диффузии в атмосфере схож с аналогичными проявлениями. процесса в океане, но, естественно, специфика океана обусловливает и особенности диффузионных явлений, требующих специального рассмотрения. Некоторые вопросы диффузии примесей в океане затрагиваются в книге [121]. Однако в этом издании. главное внимание уделяется общей теории диффузии с приложениями к диффузии в различных средах без надлежащего анализа специфики процесса в океане. Весьма краткому изложению результатов исследований закономерностей диффузии примесей в океане, полученных до 1976—1977 гг., посвящен параграф в главе «Турбулентность в океане» [91].

6

Для обсуждения проблем диффузии примесей в океане неоднократно собирались представительные форумы. Так, в 1970 г. в Варнемюнде (ГДР) был проведен Международный симпозиум [115], на котором обсуждались результаты национальных и совместных усилий стран—участниц СЭВ по исследованию турбулентной диффузии в океане. Следующий Международный симпозиум по аналогичной тематике был проведен в Москве в 1976 г. [83], а в 1982 г., также в Москве, было организовано Международное совещание по моделям диффузии примесей в море [84].

Большой опыт как экспериментальных, так и теоретических исследований диффузии примесей в океане накоплен в Институте океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР. В Институте были созданы первые образцы флюориметров для определения концентрации флюоресцирующих красителей, используемых для диффузионных опытов, разработана методика экспериментов с мгновенными и непрерывными источниками красителя. Широко использовались в экспериментальных работах как в прибрежных водах, так и в открытом океане дискретные индикаторы разного типа. Еще в начале 1970-х годов сотрудниками Института в содружестве с океанологами других учреждений СССР и стран участниц СЭВ стали изучаться статистические характеристики полей примесей в океане. Работы проводились в Балтийском, Черном и Каспийском морях, на оз. Байкал и в открытом океане.

В настоящей монографии сделана попытка обобщить имеющиеся данные по закономерностям диффузии примесей в море, полученные как в Институте океанологии, так и в других учреждениях СССР и за рубежом. Основное внимание в монографии уделено закономерностям диффузионных процессов малого и среднего масштаба (сотни метров — десятки километров), имеющим важное значение для разработки мер борьбы с загрязнением океана. Естественно, что в первую очередь необходимо стремиться к уменьшению или полному прекращению сброса загрязняющих примесей в океан. Однако мероприятия такого рода обычно связаны с очень большими затратами, в связи с чем устранить сброс часто полностью не удается и возникает вопрос о прогнозе поведения примесей в океане. Знание закономерностей диффузии примесей в океане позволяет при этом оптимизировать место и время сброса, дать нормы сброса, при которых допустимые концентрации примеси в океанских водах не будут превышаться. В связи с этими вопросами в книге значительное внимание уделяется методам расчета концентрации диффундирующих примесей в океане в различных гидрометеорологических ситуациях.



элементы теории диффузии примесей

1.1. Молекулярная диффузия

Основной количественной характеристикой поля примеси в жидкости является концентрация примеси с. Под концентрацией понимается масса примеси Δm , отнесенная к элементарному объему жидкости ΔV , в котором эта примесь находится, т. е.

$$c = \Delta m / \Delta V. \tag{1.1}$$

Если изменение концентрации *с* на малом расстоянии Δ*x* мало, то с большой степенью приближения можно положить

$$c(x + \Delta x) - c(x) = \Delta x \, \partial c / \partial x. \tag{1.2}$$

Поток примеси q через элементарную площадку $\Delta x \Delta y$ за время Δt можно, очевидно, определить выражением

$$q = \Delta m / (\Delta x \, \Delta y \, \Delta t), \tag{1.3}$$

где Δm — общая масса примеси, прошедшая через площадку за время Δt . Если по одну сторону площадки концентрация примеси больше, чем по другую, то в результате хаотических молекулярных движений в жидкости в среднем будет существовать поток примеси через площадку в сторону меньшей концентрации. При этом можно предположить, что такой поток пропорционален перепаду значений концентрации примеси, т. е.

$$q = -D \partial c / \partial x, \tag{1.4}$$

где величина D носит название коэффициента молекулярной диффузии. Аналогичные (1.4) выражения можно написать (при естественном предположении об изотропности коэффициента D) и для потоков примеси вдоль двух других декартовых координат. Общий же поток примеси (векторная величина) будет, очевидно, в этом случае записываться в виде

$$\mathbf{q} = -D\nabla c, \tag{1.5}$$

где ∇ — знак градиента.

Соотношение (1.5) является основным в теории диффузии примеси в неподвижных или ламинарно движущихся жидкостях.

8

В кинетической теории газов показывается, что коэффициент молекулярной днффузии *D* может быть выражен через среднюю скорость движения молекул газа (жидкости) u_m и среднюю длину свободного пробега молекул l_m простой формулой

$$D = u_m l_m. \tag{1.6}$$

Коэффициент молекулярной диффузии *D* зависит от типа жидкости и примеси, температуры жидкости, давления и других факторов. Для океанской воды он имеет порядок 10⁻⁹ м²/с и меняется приблизительно в два раза в диапазоне температур океанских вод.



Рис. 1.1. Элементарный кубический элемент объема жидкости и декартова система координат.

Составим теперь уравнение баланса примеси в кубическом элементе $\Delta x \Delta y \Delta z$ при отсутствии течения жидкости (рис. 1.1). Согласно (1.4), через нижнюю площадку $\Delta x \Delta y$, перпендикулярную оси *z*, за время Δt в рассматриваемый кубический объем поступит

 $m_{z1} = -D \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=0} \Delta x \Delta y \Delta t$ примеси, а через верхнюю площадку выйдет $m_{z2} = -D \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta t$, т. е. прирост количества примеси в кубике за счет этих потоков примеси будет равен

$$\Delta_{z}m = D\left(\frac{\partial c}{\partial z}\Big|_{z=\Delta z} - \frac{\partial c}{\partial z}\Big|_{z=0}\right) \Delta x \,\Delta y \,\Delta t = D \,\Delta_{z} \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right) \Delta x \,\Delta y \,\Delta z,$$
(1.7)

где через Δ_z обозначено приращение вдоль оси z. Аналогично, рассматривая потоки вещества через стороны кубика, перпендикулярные декартовым координатам x и y, получим, что общее изменение количества примеси в кубике за время Δt составит

$$\Delta m = D \Big[\Delta_x \Big(\frac{\partial c}{\partial x} \Big) \Delta y \, \Delta z + \Delta_y \Big(\frac{\partial c}{\partial y} \Big) \Delta x \, \Delta z + \Delta_z \Big(\frac{\partial c}{\partial z} \Big) \Delta x \, \Delta y \Big] \Delta t, \quad (1.8)$$

где Δ_x и Δ_y — приращения вдоль осей x и y. Разделив теперь величину Δm на объем кубика $\Delta x \Delta y \Delta z$, а также на Δt и переходя от конечных разностей к бесконечно малым приращениям, придем к выражению для изменения концентрации примеси со временем вида

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) = D\nabla^2 c, \qquad (1.9)$$

где ∇² — знак лапласиана.

Соотношение (1.8) носит название уравнения молекулярной диффузии в неподвижной среде. Если же жидкость находится в движении относительно системы координат, то через стенки рассматриваемого кубического объема будут существовать дополнительные адвективные потоки примеси. Например, через площадки, перпендикулярные оси z, эти потоки будут равны соответственно $(wc)_{z=0}\Delta x \Delta y \Delta t$ и $(wc)_{z=\Delta z}\Delta x \Delta y \Delta t$, где w — компонент скорости движения жидкости вдоль оси z. Из-за этих потоков в уравнении диффузии примеси должен появиться дополнительный член вида $\nabla(\mathbf{u} \cdot c)$, где \mathbf{u} — вектор скорости течения. Если жидкость можно считать несжимаемой, то $\nabla(\mathbf{u}c) = \mathbf{u}\nabla c$, и уравнение диффузии с учетом адвекции принимает вид

$$\partial c/\partial t + \mathbf{u} \nabla c = D \nabla^2 c.$$
 (1.10)

Диффундирующая примесь, как уже говорилось выше, может распадаться или, наоборот, возникать в рассматриваемом объеме жидкости. Это явление можно учесть в уравнении диффузии некоторым членом Q, описывающим удельную (на единицу объема и времени) мощность источников (стоков) примеси. Часто можно считать, что удельный прирост или убыль примеси в толще воды пропорциональны концентрации примеси. В этом случае уравнение диффузии дополняется членом вида γc , где γ — коэффициент пропорциональности, знак которого зависит от того, распадается или возникает примесь.

Для решения уравнения диффузии (1.10) к нему необходимо добавить начальные и краевые условия. Начальное условие состоит в задании функции c(x, y, z, t) в некоторый момент времени $t = t_0$, обычно принимаемый за нулевой, т. е. при t = 0. Граничные условия для уравнения (1.10) могут быть разного типа. Можно задать на границах Г рассматриваемой области G значеконцентрации, т. е. считать известной функцию $c(t)|_{\Gamma}$. ние В ряде случаев задается значение потока примеси на границе Г, т. е. в этом случае известной считается функция $D\nabla c(t)|_{\Gamma}$. Могут быть граничные условия и более сложных типов, когда на К задаются, например, потоки, пропорциональные некоторым степеням концентрации примеси у границы области. Если же диффузия примеси рассматривается вдали от границ области или исследователя интересуют лишь начальные моменты диффузии от локализованных источников примеси, то тогда влиянием границ области на процесс обычно можно пренебречь и диффузионная задача решается с граничными условиями равенства нулю концентрации на бесконечно больших расстояниях от источника.

Типы источников примеси, естественно, также могут быть самыми разнообразными. Обычно для облегчения решения уравнения диффузии рассматриваются некоторые идеализированные типы источников, например мгновенный точечный, когда примесь считается вводимой в океан в определенный момент времени в точке (x_0 , y_0 , z_0). Более сложным типом идеализированного источника является непрерывный точечный источник с удельной мощностью q^2/c , действующий с момента t_0 в точке (x_0 , y_0 , z_0). Еще более сложные типы источников — мгновенный распределенный по пространству, непрерывно распределенный, но действующий и постоянной мощностью в каждой точке пространства, распределенный по пространству и во времени по определенному закону и т. д.

Уравнение диффузии (1.10) в ряде случаев может быть упрощено. Если процессами переноса примеси в двух направлениях можно пренебречь, то уравнение приводится к одномерному виду. В океане такой случай может наблюдаться, когда горизонтальные градиенты примеси малы (например, при равномерном выпадении примеси из атмосферы над большой акваторией океана). Если при этом можно пренебречь и вертикальной адвекцией примеси, то уравнение диффузии сводится к виду

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}.$$
 (1.11)

Решение одномерного уравнения (1.11) с граничными условиями равенства нулю концентрации с при $|z| \rightarrow \infty$ для случая мгновенного точечного источника примеси мощностью 1 г, помещенного в момент t=0 в точку z=0, имеет вид *

$$c_1(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right).$$
 (1.12)

Выражение (1.12) носит название фундаментального решения одномерного уравнения диффузии. Из этого решения видно, что при $t \rightarrow 0$ $c \rightarrow 0$ для всех |z| > 0 й $c \rightarrow \infty$ при z=0. Последнее свойство равносильно утверждению, что при $t \rightarrow 0$ функция cстремится к дельта-функции $\delta(z)$. С ростом t концентрация примеси в точке z=0 падает обратно пропорционально корню квадратному из t, а примесь распространяется при этом в обе стороны от источника. Общее количество примеси в процессе диффузии, естественно, не меняется, в чем нетрудно убедиться, проинтегрировав выражение (1.12) по z в пределах от $+\infty$ до $-\infty$.

Распределения концентрации примеси вдоль оси z при некоторых значениях величины Dt приведены на рис. 1.2. Кривые рис. 1.2 известны как графики гауссовой, или нормальной функции, таблицы которой приводятся во многих справочниках и учебниках по теории вероятностей. Нормальная кривая симмет-

^{*} С методами решения уравнения диффузии (1.11) при различных граничных и начальных условиях можно ознакомиться, например, по книге [101].

рична относительно начала координат, а ее «ширина» определяется выражением $\sigma^2 = 2Dt$, носящим название дисперсии. Квадратный корень из дисперсии называется «стандартным отклонением». Как не трудно видеть, стандартное отклонение имеет размерность длины, в связи с чем оно может служить некоторым пространственным масштабом диффузионного процесса.

Из фундаментального решения (1.12) следует, что даже при малых временах диффузии t концентрация примеси отлична от



Рис. 1.2. Кривые нормированного одномерного распределения концентрации примеси, диффундирующей от точечного мгновенного источника единичной мощности.

Кривые 2, 3 и 4 — распределения концентрации примеси при временах диффузии, соответственно в 5, 10 и 50 раз превосходящих время диффузии для кривой 1.

нуля для всех значений г. Такое свойство решения можно интерпретировать как результат бесконечно быстрого распространения примеси в процессе диффузии. Естественно, это противоречит физической реальности, что является следствием использования при выводе уравнения диффузии представлений, не учитывающих инерционность молекул и конечность скорости их движения. Однако погрешности, вносимые в значения концентрации такими допущениями, обычно пренебрежимо малы И могут не учитываться в практических расчетах. Кроме того, на больших расстояниях от точки выпуска примеси сильно идеализированные граничные условия вносят, как правило, большие погрешности в результаты расчета.

Для двумерного уравнения диффузии, например в плоскости (x, y), фундаментальное решение имеет вид

$$c_2(x, y, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right).$$
 (1.13)

В этом случае) как следует из формулы, концентрация примеси в точке x=0, y = 0 уменьшается со временем обратно пропорционально первой степени времени диффузии.

В случае трехмерной диффузии в неограниченном пространстве решение уравнения диффузии для мгновенного точечного источника единичной мощности, помещенного в момент t=0 в начало координат, записывается в виде

$$c_3(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^3 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4Dt}\right).$$
 (1.14)

Здесь концентрация примеси падает со временем в начале координат уже обратно пропорционально времени в степени ³/₂.

Фундаментальные решения (1.12), (1.13) и (1.14) позволяют строить решения уравнений диффузии и для более сложных типов источников примеси. В силу линейности уравнения (1.11) можно считать, что диффузия примеси от отдельных источников происходит независимо друг от друга, в связи с чем общая концентрация примеси, создаваемая такими источниками, является суммой концентраций от каждого из них. Возможность такого сложения значений концентраций носит в теории диффузии название принципа суперпозиции. Этот принцип значительно упрощает построение решений для сложных типов источников примеси. Действительно, каждый распределенный по пространству и во времени источник можно представить как сумму элементарных источников, действующих в малых объемах пространства и в короткие промежутки времени. В этом случае решение уравнения диффузии можно получить простым интегрированием фундаментального решения по соответствующему объему и времени. Так, например, если мгновенный точечный источник имеет не единичную мощность, а испускает Q грамм вещества, то решение задачи сводится к простому умножению фундаментальных решений на величину Q. Если же в момент t=0 мгновенно вводится примесь, распределенная в пространстве по закону $\phi(x, y, z)$, то решение уравнения диффузии (1.11) для бесконечного пространства будет иметь вид

$$c(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^3 \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4Dt}\right) \times \\ \times \varphi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \qquad (1.15)$$

где ξ, η и ζ — переменные интегрирования.

Решения уравнений диффузии с более сложными начальными и гранинчыми условиями могут быть не столь тривиальны, особенно в случае сложных очертаний границ области, в которой происходит диффузия примеси. Еще более сложными будут решения уравнений диффузии с учетом адвективных членов. Аналитические решения здесь удается найти обычно лишь для самых простых полей скорости течений жидкости. В остальных же случаях приходится использовать численные методы решения.

1.2. Диффузия примеси в турбулентно движущейся жидкости

При турбулентном типе движения жидкости скорость течения испытывает хаотические флюктуации, создаваемые существующими в потоке многочисленными вихрями различных размеров. В турбулентном потоке флюктуируют не только скорость движения жидкости, но и все другие гидродинамические и термодинамические характеристики, в том числе и концентрация имеющихся в жидкости примесей. Определять значения концентрации примеси в каждой точке потока и в любой момент времени в турбулентном течении, очевидно, безнадежное, да часто и ненужное дело. Представлять интерес в таком потоке могут сведения об осредненных тем или иным способом полях концентрации, а также о статистических характеристиках случайного флюктуирующего поля c(x, y, z, t). Для турбулентного потока, естественно, невозможно детерминированно задать в уравнении (1.10) значения компонентов скорости как функции координат и времени. В связи с этим уравнение диффузии (1.10) необходимо осреднить. Такое осреднение должно осуществляться, вообще говоря, по ансамблю реализаций рассматриваемых полей. При осреднении должны выполняться определенные правила, известные под названием правил осреднения Рейнольдса:

$$\overline{\varphi + \psi} = \overline{\varphi} + \overline{\psi}; \qquad (1.16)$$

$$a\varphi = a\varphi, \quad a = \text{const};$$
 (1.17)

$$\bar{\bar{\varphi}\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi}; \qquad (1.18)$$

$$\overline{\lim f_n} = \lim \overline{f_n}, \tag{1.19}$$

где φ и ψ — некоторые случайные функции (компоненты скорости, концентрация примеси); f_n — функциональная последовательность, а черта означает осреднение.

Из правил осреднения Рейнольдса следует, в частности, что повторное осреднение не должно менять значений получаемой величины. Однако это правило при использовании вместо вероятностного пространственного или временного осреднения в условиях океана, как мы увидим дальше, не всегда выполняется.

Представим значения мгновенных концентраций примеси и компонентов скорости течения жидкости в виде сумм осредненных значений и пульсационных добавок: $c = \bar{c} + \delta'$, $u = \bar{u} + u'$, $v = = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$, и подставим эти выражения в уравнение (1.10). Осредняя полученное таким образом выражение, придем к уравнению диффузии вида

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = D\nabla^2 \bar{c} - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u'c'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v'c'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w'c'}).$$
(1.20)

Три последних члена в правой части уравнения (1.20) появились из-за турбулентного характера течения жидкости. Эти члены описывают вклад в баланс примеси переноса, обусловленного пульсационными скоростями потока. Уравнение (1.20), в отличие от уравнения молекулярной диффузии, оказывается незамкнутым,

так как турбулентные потоки примеси u'c', v'c' и w'c' являются неизвестными величинами. В связи с этим возникает проблема замыкания уравнения (1.20). Для этого необходимо тем или иным путем выразить новые неизвестные величины через искомую функцию \bar{c} . Наиболее естественно предположить (по аналогии с выражением для потока примеси при молекулярной диффузии), что турбулентные потоки пропорциональны градиенту средней концентрации примеси. Для одномерного случая выражения такого типа были предложены еще Тэйлором в 1915 г. [160] и Шмидтом в 1917 г. [155]. В общем случае диффузии в трехмерном пространстве гипотеза о пропорциональности турбулентных потоков примеси и градиента средней ее концентрации может быть, очевидно, записана в виде

$$\overrightarrow{u_ic} = -K_{ij}\,\partial\overline{c}/\partial x_j,\tag{1.21}$$

где u'_i — любая из компонентов пульсационной скорости $(i=1, 2, 3); x_j$ — любая из декартовых координат (j=1, 2, 3), а величина K_{ij} является тензором второго ранга и носит название тензора коэффициентов турбулентной диффузии (или турбулентного обмена). Так как величина K_{ij} , в отличие от коэффициента молекулярной диффузии, не является физической константой, то компоненты тензора K_{ij} могут, вообще говоря, быть функциями и координат, и времени.

Подставляя теперь выражение (1.21) в уравнение диффузии (1.20), приходим к так называемому полуэмпирическому уравнению турбулентной диффузии:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = D \nabla^2 \bar{c} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \right).$$
(1.22)

В подавляющем числе случаев турбулентный перенос примеси в океане, как будет показано ниже, на много порядков превосходит молекулярный, поэтому в уравнении (1.22) члены с молекулярной диффузией, как правило, опускают. Теории диффузии, использующие полные или упрощенные варианты полуэмпирического уравнения (1.22), носят название *К*-теорий и широко применяются для решения диффузионных задач.

1.3. Коэффициенты турбулентной диффузии

Тензор коэффициентов турбулентной диффузии второго ранга имеет 9 компонентов и в развернутом виде записывается следующим образом:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{11} + K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{81} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}.$$
 (1.23)

Сложность задания всех 9 компонентов тензора и решения полного полуэмпирического уравнения диффузии заставляет искать пути упрощения тензора (1.23). Естественно прежде всего предположить (см. [68], ч. I), что тензор коэффициентов турбулентной диффузии симметричен, т. е. K_{ii} = K_{ii}. Но и в этом случае в тензоре остается 6 компонентов, задание которых для решения уравнения диффузии нереально. Действительно, если в данной точке потока даже известны все три составляющие турбулентного потока примеси $\overline{u'_{c'}}$ и все три производные от среднего поля концентрации примеси $\partial \bar{c}/\partial x_i$, то и в этом случае из соотношений. связывающих $\overline{u'_i c'}$ с $\partial \bar{c} / \partial x_i$, определить 6 компонентов тензора Кіі невозможно. Такая ситуация объясняется, естественно, тем, что коэффициенты К_{іі} не являются физическими константами, а зависят в свою очередь от характеристик потока. Дальнейшие упрощения вида тензора (1.23) можно осуществить, приняв гипотезу о симметрии тензора К_{іі} в океане относительно вертикального направления z [42]. Такая гипотеза основывается на выделенности вертикальной оси в океане из-за наличия плотностной стратификации его вод. Стратификация, как правило, устойчивая, вносит резкие отличия в процесс диффузии по вертикали и в горизонтальных направлениях х и у (начало координат поместим на поверхности океана, ось z направим вниз). Различием же процесса диффузии в горизонтальной плоскости вдоль осей х и и для сравнительно крупномасштабных процессов можно, по всей видимости, пренебречь. (Что нельзя сказать о мелкомасштабных процессах, на которые уже может существенно влиять горизонтальная анизотропия процессов малых масштабов (например, волн) в океане.) Следует отметить, что симметричность тензора К_{іі} не обязательно должна влечь за собой симметричность потоков uic'.

Общее выражение для осесимметричного тензора второго ранга имеет вид [118]

$$K_{ij} = K_L \sigma_{ij} + (K_z - K_L) \lambda_i \lambda_j, \qquad (1.24)$$

где величины K_L («горизонтальный» коэффициент турбулентной диффузии) и K_z («вертикальный» коэффициент турбулентной

диффузии) являются уже скалярами; σ_{ij} — единичный тензор; λ_i и λ_i — компоненты орта λ , задающего ось симметрии.

При однородности процесса диффузии в горизонтальной плоскости и при сделанных предположениях выражения для турбулентных потоков примеси в системе координат (x, y, z) примут вид

$$\overline{u'c'} = -K_L \,\overline{\partial c}/\partial x; \quad \overline{v'c'} = -K_L \,\overline{\partial c}/\partial y; \quad \overline{w'c'} = -K_z \,\overline{\partial c}/\partial z, \quad (1.25)$$

а полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии (с пренебрежением молекулярной диффузией), соответственно

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = K_L \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right),$$

(1.26)

где коэффициент K_z предполагается зависящим от вертикальной координаты и, вообще говоря, от времени. От z и t может зависеть в уравнении (1.26) и коэффициент K_L .

Уравнение диффузии (1.26), как и его модернизированные или упрощенные варианты, широко используется в океанологии для решения диффузионных задач. Для решения уравнения к нему, естественно, необходимо присоединить граничные условия на поверхностях, ограничивающих рассматриваемый район океана, а также соответствующие начальные условия. Кроме того, для решения поставленной таким образом диффузионной задачи необходимо задать поле осредненных компонентов скорости $\bar{u}(x, y, z, t)$, $\bar{v}(x, y, z, t)$ и $\bar{w}(x, y, z, t)$, являющихся, вообще говоря, функциями координат и времени. И, наконец, необходимо сделать предположения о функциональных видах и о значениях коэффициентов турбулентного обмена K_L и K_z .

Оценки порядков величин коэффициентов K_L и K_z в океане вначале осуществлялись путем сопоставлений наблюденных в океане распределений солености (и температуры) с решениями упрощенных вариантов уравнения (1.26). Так, в упомянутой во введении работе Якобсена о турбулентном обмене в проливе Каттегат было использовано уравнение диффузии вида

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial\bar{c}}{\partial z} \right), \qquad (1.27)$$

т. е. процесс переноса соли в проливе считался стационарным, а вектор осредненного поля скорости был направлен вдоль оси х.

Интегрируя выражение (1.27) от 0 до z_1 и принимая, что поток соли через поверхность моря равен нулю, приходим к расчетной формуле для коэффициента вертикальной турбулентной диффузии на горизонте z_1 :

$$K_{z}(z_{1}) = \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}\right)_{z=z_{1}}^{-1} \int_{0}^{z_{1}} \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} dz.$$
(1.28)

Используя данные о поле солености и течениях в проливе Каттегат, Якобсен произвел подсчет значений K_z для нескольких горизонтов. Эти значения приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значения коэффициента вертикальной турбулентной диффузии в проливе Katterat, по данным Якобсена

Глубина, м	3,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20, 0
К₂ см²/с	0,3	0,4	0,18	0,05	0,04	0,2	0,74	2,1

Расчет, осуществленный Якобсеном, естественно, весьма приближенный, так как предположения, использованные при выводе формулы (1.28), не совсем строги. Однако этот расчет с убедительностью впервые показал, что вертикальный турбулентный обмен в море по крайней мере на 2—3 порядка может превосходить (во всяком случае в верхних слоях моря) молекулярную диффузию. Этот вывод был позднее подтвержден В. Б. Штокманом [107], который по формуле (1.28) для Каспийского моря (район Аграханского полуострова) получил для K_z значения, достигающие 30 см²/с.

Еще более простое соотношение для оценки K_z было использовано Кремзером и Брозиным [134], которые считали, что коэффициент K_z в районе их наблюдений (Балтийское море, к северо-востоку от о. Готланд) можно считать величиной постоянной. Часто, однако, скорость течения \bar{u} в районе наблюдений также бывает неизвестна. Тогда из упрощенного уравнения турбулентной диффузии, имея лишь данные о поле солености, можно найти отношение

$$\frac{K_z}{\bar{u}} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} / \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}.$$
 (1.29)

Выражение (1.29) было в 1939 г. использовано Монтгомери (см. ссылку в [91]) для оценки отношения K_z/\bar{u} в Экваториальном противотечении в Атлантике. Дефант (см. ссылку в [81]) этот же прием применил в 1936 г. для оценок характеристик турбулентной диффузии соли в промежуточных водах Атлантики.

Для оценок значений коэффициента вертикальной турбулентной диффузии использовались и нестационарные уравнения диффузии. Так, Джеффрис (см. ссылку в [81]), считая среднее течение отсутствующим, пренебрегая горизонтальной диффузией и считая коэффициент K_z постоянным, привел уравнение диффузии (1.26) к виду

$$\partial \bar{c} / \partial t = K_z \partial^2 \bar{c} / \partial z^2. \tag{1.30}$$

Используя далее данные о годовом ходе солености в районе Сегне-фиорда, Джеффрис получил для K_z значения, заключенные в интервале 8—35 см²/с. Аналогичным методом В. Б. Штокман [108] для Каспийского моря нашел, что $K_z = 0.88...2,55$ см²/с. Уравнение (1.30) использовали также Озмидов и Попов [90], которые по данным о распределении в водах Атлантики стронция-90 получили для K_z оценку 30 см²/с.

Графический метод определения K_z , основанный на свойствах так называемых T_sS -диаграмм (T — температура, S — соленость морской воды), предложил в 1927 г. Якобсен (см. ссылку в [81]). Теория T, S-диаграмм была разработана Штокманом [110] и другими авторами. Теория позволяет оценивать коэффициенты турбулентного обмена между водными массами с отличающимися температурами и с разным содержанием соли.

Если содержание соли в поверхностном слое океана меняется по периодическому закону, то в глубь океана будут распространяться волновые возмущения поля солености, скорость продвижения которых и амплитуды будут зависеть от K_z . Действительно, решение уравнения (1.30) с граничным условием на поверхности океана

$$\bar{c}|_{z=0} = \bar{c}_0 \cos(\omega t)$$
 (1.31)

и стремлением значения \bar{c} при $z \rightarrow \infty$ к нулю имеет вид

$$\bar{c}(z, t) = \bar{c}_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2K_z}}z\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2K_z}}z\right), \quad (1.32)$$

где \bar{c}_0 — амплитуда колебаний солености на поверхности океана; ω — угловая частота колебаний (ω = $2\pi/T_0$, где T_0 — период колебаний).

Интересно отметить, что для уравнения (1.30) задание начальных условий в рассматриваемой задаче не обязательно, если с момента возникновения колебаний прошел достаточно большой промежуток времени. При многократном, периодическом повторении на поверхности моря значений \bar{c} влияние начального распределения концентрации примеси становится несущественным и им можно пренебречь. Из формулы (1.32) следует, что амплитуда колебаний значений концентрации примеси в толще океана A(z)описывается формулой

$$A(z) = \bar{c}_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} z\right), \qquad (1.33)$$

т. е. убывает с глубиной по экспоненциальному закону, а сдвиг фаз колебаний ф связывается с z линейным выражением

$$\varphi = \sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} z. \tag{1.34}$$

Если известны амплитуды колебаний значений концентрации примеси на глубинах z_1 и z_2 (A_1 и A_2 соответственно), то коэффициент K_z может быть определен по формуле, следующей из (1.33):

$$K_{z} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{z_{2} - z_{1}}{\ln \frac{A_{1}}{A_{2}}} \right)^{2}.$$
 (1.35)

Можно рассчитать K_z и из данных о сдвиге фаз между колебаниями на горизонтах z_1 и z_2 по формуле, следующей из (1.34):

$$K_{z} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{z_{2} - z_{1}}{\varphi_{2} - \varphi_{1}} \right)^{2}. \qquad (1.36)$$

Оценка коэффициентов вертикального турбулентного обмена в океане по формулам (1.35) и (1.36) была осуществлена целым рядом авторов. Так, Штокман [103] использовал обе эти формулы для определения Kz в Саргассовом море. Правда, Штокман, так же как и впоследствии Кремзер с Маттэусом [135], Пивоваров [95] и другие авторы, использовали для расчетов данные не о вертикальных потоках диффундирующей примеси, а сведения о потоках тепла. Однако порядки величин определяемых при этом коэффициентов вертикальной турбулентной температуропроводности по всей видимости не слишком отличаются от соответствующих коэффициентов турбулентной диффузии. Дело в том, что уравнение турбулентной теплопроводности полностью идентично уравнению турбулентной диффузии, а введение коэффициентов турбулентной температуропроводности основывается на предположениях и гипотезах о переносе тепла турбулентными пульсациями скорости, аналогичных с предположениями и гипотезами, принимаемыми при введении коэффициентов турбулентной диффузии. Тем не менее полного совпадения значений коэффициентов турбулентной диффузии и температуропроводности может и не быть, хотя бы из-за того, что изменение температуры жидкости существенно влияет на динамические характеристики движения жидкости, так как от температуры зависит плотность жидкости, которая в свою очередь во многом определяет характер движения жидкой среды. Концентрации же диффундирующих примесей обычно бывают невелики и сильно влиять на плотность жидкости не могут. Поэтому вопрос о соотношении коэффициентов турбулентной температуропроводности и турбулентной диффузии достаточно сложен и требует специального рассмотрения, однако при оценке порядков величин этих коэффициентов при сравнительно малых диапазонах изменчивости температуры среды, их по-видимому, можно считать приближенно одинаковыми.

Используя формулы (1.35) и (1.36), Штокман нашел, что для Саргассова моря значения коэффициента вертикального турбулентного обмена лежат в пределах 2,3—9,5 см²/с для слоя 0—50 м, 1,4—9 см²/с — для слоя 50—100 м и 14—22 см²/с — для слоя 100— 200 м. По данным о суточном ходе температуры в проливе Каттегат по тем же формулам были получены значения K_z от нескольких единиц до 24,2 см²/с. Изменчивость полученных оценок K_z по глубине привела Штокмана к мысли учитывать зависимость K_z от вертикальной координаты z в самом уравнении обмена, т. е. не выносить коэффициент K_z за знак дифференцирования по z. Для аналитического решения такого уравнения необходимо, очевидно, задать какую-либо зависимость K_z от z. Было предложено считать К, экспоненциально затухающей по глубине функцией:

$$K_z = K_z^0 \exp(-\beta z),$$
 (1.37)

где K_z^0 — значение коэффициента K_z на уровне z=0, а β — постоянный коэффициент.

Решение нестационарного уравнения диффузии с зависящим от вертикальной координаты коэффициентом K_z по формуле: (1.37) и с периодическим граничным условием имеет вид

$$\bar{c}(z, t) = \bar{c}_0 \sqrt{\exp(\beta z)} \sqrt{\frac{-\operatorname{hei}_1^2 \xi + \operatorname{her}_1^2 \xi}{\operatorname{her}_1^2 \xi_0 + \operatorname{hei}_1^2 \xi_0}} \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.38)^{\circ}$$

где hei₁ и her₁ — вещественные коэффициенты соответственно у действительной и мнимой частей функции Ханкеля первого рода и первого порядка,

$$\xi = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{\omega \exp{(\beta z)}}{K_z}}, \quad \xi_0 = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{\omega}{K_z}},$$

а сдвиг фаз ф в свою очередь записывается в виде

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{hei}_{1}\xi_{0}\operatorname{her}_{1}\xi - \operatorname{her}_{1}\xi_{0}\operatorname{hei}_{1}\xi}{\operatorname{her}_{1}\xi_{0}\operatorname{her}_{1}\xi + \operatorname{hei}_{1}\xi_{0}\operatorname{hei}_{1}\xi}\right).$$
(1.39)

Из формул (1.38) и (1.39) можно опять-таки получить выражения для коэффициента обмена через отношение амплитуд и сдвигов фаз температурных волн на двух горизонтах наблюдений. Произведя расчет по тем же данным о температуре вод Саргассова моря, Штокман обнаружил, что расхождение значений коэффициента обмена, подсчитанных при предположениях о постоянстве и зависимости коэффициента от *z*, может достигать 50— 100 %.

Несколько иной способ оценки переменного по глубине коэффициента K_z при периодическом граничном условии для уравнения вида

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right)$$
(1.40)

был предложен Фьельдстадом в 1933 г. [123]. Предположим, что изменение концентрации примеси (или температуры воды) на глубине *z* можно представить в виде ряда Фурье

$$\bar{c}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) \cos(n\omega t - \varphi_n), \qquad (1.41)$$

где A_n и φ_n — амплитуды и сдвиги фаз соответствующих гармоник колебаний величины $\bar{c}(z, t)$. Подставляя далее выражение (1.41) в уравнение (1.40), дифференцируя и группируя члены, придем к тождеству, которое должно выполняться для любой гарзмоники:

$$\left[\frac{d}{dz}\left(K_{z}A_{n}\frac{d\varphi_{n}}{dz}\right)+K_{z}\frac{dA_{n}}{dz}\frac{d\varphi_{n}}{dz}+A_{n}n\omega\right]\sin\left(n\omega t-\varphi_{n}\right)+$$

 $+\left[\frac{\omega}{dz}\left(K_{z}\,\frac{\omega n}{dz}\right)-K_{z}A_{z}\left(\frac{u\psi n}{dz}\right)^{*}\right]\cos\left(n\omega t-\varphi_{n}\right)=0.$ (1.42)

Для выполнения (1.42) необходимо, очевидно, чтобы

$$\frac{d}{dz}\left(K_z A_n \frac{d\varphi_n}{dz}\right) + K_z \frac{dA_n}{dz} \frac{d\varphi_n}{dz} + A_n n\omega = 0 \qquad (1.43)$$

И

$$\frac{d}{dz}\left(K_z \frac{dA_n}{dz}\right) - K_z A_z \left(\frac{d\varphi_n}{dz}\right)^2 = 0.$$
(1.44)

Умножив (1.43) на A_n , приведем это выражение к компактному виду:

$$\frac{d}{dz}\left(K_z A_n^2 - \frac{d\varphi_n}{dz}\right) + A_n^2 n\omega = 0.$$
(1.45)

Интегрируя далее (1.45) в пределах от z до h, получим:

$$\left(K_z A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz}\right)_h - \left(K_z A_n^2 \frac{d\varphi}{dz}\right)_z = -n\omega \int_z^n A_n^2 dz.$$
(1.46)

Если теперь выбрать уровень h на такой глубине, где n-я гармоника колебаний $\bar{c}(z, t)$ практически затухает, получим формулу Фьельдстада для определения коэффициента $K_z(z)$:

$$K_z(z) = \frac{n\omega}{A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz}} \int_z^h A_n^2 dz. \qquad (1.47)$$

Если коэффициент K_z зависит не только от вертикальной координаты z, но и меняется во времени, его оценка может быть сделана по данным о.пространственном и временном ходе поля $\bar{c}(z, t)$. Действительно, записывая уравнение (1.30) в конечных разностях, можно получить выражение для значения коэффициента $K_z(z; t)$ в точке z_0 и момент времени t_0 в виде

$$K_{z}(z_{0}, t_{0}) = \frac{\bar{c}(z_{0}, t'') - \bar{c}(z_{0}, t')}{2\Delta t} \frac{h^{2}}{\bar{c}(z'', t_{0}) + \bar{c}(z', t_{0}) - 2\bar{c}(z_{0}, t_{0})},$$
(1.48)

тде t'' и t' — моменты времени, отстоящие от t_0 на Δt и — Δt , а z'' и z' — точки, лежащие на расстояниях h и — h от точки z_0 соответственно.

Формула (1.48) была использована Штокманом [103] для оценки сезонной изменчивости K_z в Каспийском, Баренцевом и Саргассовом морях. Значения K_z оказались заключенными между долями квадратного сантиметра в секунду и 12—16 см²/с для разных районов наблюдений, причем обнаружился четкий сезонный ход величины K_z . Различия в характере такого сезонного хода для каждого из рассмотренных морей могли быть объяснены спецификой их гидрометеорологического режима.

Как уже отмечалось во введении, приблизительно до конца 30-х годов океанологи считали, что порядки величин горизонтальных и вертикальных коэффициентов обмена в океане приблизительно одинаковы. Однако в 1939 г. Монтгомери (см. ссылку в [91]) пришел к выводу, что распределение солености в Экваториальном противотечении в Атлантике можно объяснить, лишь приняв, что там $K_L = 4 \cdot 10^7$ см²/с. В этом же году Свердруп [158] показал, что в Южной Атлантике $K_L = 10^8$ см²/с, а отношение коэффициентов вертикального и горизонтального обмена должно иметь порядок 10⁶. Попытка объяснить такое расхождение значений коэффициентов К_z и К_L была предпринята Штокманом [103]. Он предложил представить пульсации концентрации примеси (температуры) с' в виде произведения перепада осредненного значения концентрации на некоторую величину l, имеющую размерность длины. Очевидно, что такое предположение аналогично широко известному приему введения так называемой «длины пути смешения», авторство чему в теории турбулентности принадлежит Прандтлю. При сделанном предположении выражения для турбулентных потоков примеси вдоль горизонтальной и вертикальной осей х и г будут записываться в виде

$$\overline{u'l_x}\,\partial\bar{c}/\partial x = -K_L\,\partial\bar{c}/\partial x; \quad \overline{w'l_z} = -K_z\,d\bar{c}/dz, \qquad (1.49)$$

где l_x и l_z — проекции пути смешения на направления x и z соответственно.

Интересно отметить, что согласно (1.49) коэффициенты турбулентного обмена при сделанных предположениях оказываются равными произведению пульсационных скоростей на величины размерности длины в полной аналогии с формулой (1.6) для коэффициента молекулярной диффузии. Но, в отличие от строго определенной средней длины свободного пробега молекул l_m , при турбулентном типе движения жидкости длина пути смешения lчеткого определения не имеет. Менее четко можно определить и пульсационную турбулентную скорость по сравнению со скоростью u_m . Тем не менее запись коэффициентов турбулентного обмена через произведение некоторой характерной скорости на характерный линейный масштаб оказывается весьма полезной и будет нами еще неоднократно использована.

Из (1.49) для отношения коэффициентов получаем

$$K_x/K_z = \overline{u'l_x}/\overline{w'l_z}.$$

Если далее, следуя Прандтлю, сделать предположение о пропорциональности проекций пути смешения соответствующим компонентам пульсационной скорости, то нетрудно прийти к отношениям

$$\frac{K_x}{K_z} = \frac{l_x^2}{l_z^2} = \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \middle| \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right)^2.$$
(1.50)

Данные наблюдений в океане показывают, что значения средних горизонтальных и вертикальных перепадов температуры в океане имеют порядки 10⁻⁷ и 10⁻⁴ °С/см соответственно. Отсюда для отношения K_x к K_z находим значение 10⁶, полученное по данным наблюдений Свердрупом. Однако следует сразу же оговориться, что это отношение может, конечно, сильно варьировать во времени, от места к месту, и самое главное, от масштаба осреднения тех горизонтальных и вертикальных процессов, для которых определяются коэффициенты обмена. Кроме того, соотношение (1.50), конечно, не может служить в качестве объяснения такой резкой анизотропии процесса обмена в океане. Различие в средних перепадах значений температуры по горизонтали и по вертикали является скорее следствием анизотропии обмена, а не его причиной. Причиной же этого служат вертикальная плотностная стратификация вод и различие характерных вертикальных и горизонтальных масштабов океана. О роли этих факторов в формировании особенностей турбулентного обмена в океане будет более подробно сказано ниже.

Зависимость коэффициентов горизонтального турбулентного обмена от масштаба явления была подмечена вскоре после начала определений значений К_L в океане. Так, Свердруп совместно с Флеммингом [159] для района Калифорнийского течения оценили значение K_L в 2·10⁶ см²/с, а Мак-Ивен [138], исследуя динамику крупномасштабных (как теперь принято говорить, синоптических) вихрей у Калифорнии, нашел, что K_L=5·10⁵ см²/с. В то же время Манк, Юинг и Ревелл [140] по данным о диффузии примеси (с радиусом около 3 км) в атолле Бикини получили для коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии значение лишь 1,5·10⁵ см²/с. С другой стороны, Миядзаки (см. ссылку в [81]) пришел к выводу, что при расчете схемы общей циркуляции вод Тихого океана для лучшего ее согласия с натурными данными приходится использовать для горизонтального коэффициента обмена значение порядка 10¹² см²/с. Естественно, что эта (как и другие приведенные выше) цифра может оспариваться, так как авторы при определении значений К_L допускали многие, часто недостаточно обоснованные допущения. Однако сам факт зависимости К_L от масштаба явления не мог вызывать сомнений.

1.4. Зависимость коэффициентов обмена от определяющих факторов

На вертикальную турбулентную диффузию и тем самым на значения вертикальных коэффициентов диффузии должна существенно влиять плотностная стратификация вод океана. Действительно, в устойчиво стратифицированной жидкости вертикальные турбулентные пульсации должны быть «угнетены», так как перенос частицы более плотной жидкости в вышерасположенный слой и, наоборот, более легкой частицы в нижерасположенный слой требует затраты значительной энергии. Действительно, если вертикальный градиент плотности воды $\partial \rho/\partial z$ равен γ , то для перемешивания столбика жидкости с поперечным сечением 1 см² и высотой *l* потребуется затратить

$$E = g\gamma l^3 / 12 \tag{1.51}$$

единиц энергии. Для перемешивания же столбика высотой 1 см и единичной массы эта энергия будет равна

$$E_0 = g_{\gamma} l^2 / (12\rho_0) = l^2 N^2 / 12, \qquad (1.52)^{3}$$

где ρ_0 — средняя плотность жидкости в столбике; g — ускорение свободного падения, а величина

$$(g\gamma/\rho_0)^{1/2} = N$$
 (1.53)

имеет размерность обратной секунды и носит название частоты. Вяйсяля—Брента.* С частотой N совершают в переслоенном океане свободные колебания частицы, выведенные из своего положения равновесия малыми смещениями по вертикали.

Демпфирующее влияние устойчивого градиента плотности воды на турбулентность может привести к тому, что турбулентность в рассматриваемом потоке не разовьется, хотя при всех других прочих условиях она могла бы существовать. В качестве критерия существования турбулентности в стратифицированной среде используется безразмерное число Ri, введенное в гидродинамику Ричардсоном в 1921 г.:

$$\operatorname{Ri} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial \bar{u} / \partial z)^2} = N^2 (\partial \bar{u} / \partial z)^{-2}.$$
(1.54)

Число Ричардсона (1.54) носит название градиентного или кинематического, в отличие от динамического числа Rf, записываемого в виде

$$Rf = \frac{K_z^0}{K_z^u} Ri, \qquad (1.55)$$

^{*} Строго говоря, в выражение для частоты Вяйсяля—Брента должна входить потенциальная плотность жидкости, т. е. плотность, адиабатически приведенная к стандатному давлению. При использовании же в выражении (1.53) значения плотности *in situ* к градиенту плотности $\partial \rho/\partial z$ необходимо ввести поправку— $g\rho_0/c^2$, где c — скорость звука в морской воде. Однако для большинства практических целей этой поправкой можно пренебрегать.

где K_z^{ρ} — вертикальный коэффициент турбулентного обмена массой, а K_z^u — вертикальный коэффициент обмена импульсом (коэффициент турбулентной вязкости).

В общем случае при наличии в потоке обоих горизонтальных компонентов вектора скорости выражение для Ri (1.54) обобщается к виду

$$\operatorname{Ri} = N^{2} \left[(\partial \bar{u} / \partial z)^{2} + (\partial \bar{v} / \partial z)^{2} \right]^{-1}.$$
(1.56)

Число Ричардсона представляет собой отношение работы архимедовых сил (со знаком минус) к работе турбулентных напряжений и характеризует тем самым отношение работы механизма затухания турбулентности (без учета действия сил вязкости) к работе механизма ее генерации. Естественно при этом, что критерием существования турбулентности в устойчиво стратифицированном потоке должно быть условие Rf < 1 (условие Rf = 1может быть принято только при стремлении вязкости жидкости к нулю). Для разных типов движений критерий Ричардсона может быть конкретизирован. Так, в частности, для стационарного, горизонтально однородного течения с устойчивым вертикальным градиентом плотности критерием устойчивости, как показали Майлс и Ховард [127, 139], будет условие

$$Ri \ge \frac{1}{4}.$$
 (1.57)

Если же турбулентность в устойчиво стратифицированной жидкости существует, то ее вертикальные проявления и параметры (в том числе и вертикальный коэффициент обмена) должны существенно зависеть от числа Ричардсона. Такая зависимость может быть получена, в частности, из анализа уравнения баланса турбулентной энергии в стратифицированном потоке или из данных наблюдений. Этим путем рядом авторов были получены формулы вида

$$K_z = K_z^0 (1 + a \operatorname{Ri})^n,$$
 (1.58)

где K_z — значение вертикального коэффициента турбулентного обмена в стратифицированной, а K_z^0 — в нестратифицированной жидкости; *а* и *n* — некоторые постоянные. В метеорологии широкое распространение получили выражения, связывающие K_z с высотой точки наблюдения над поверхностью Земли. Предлагались формулы, по которым K_z линейно возрастает до некоторой высоты, затем остается постоянным, а также степенные и экспоненциальные выражения.

Более физически обоснованные суждения о влиянии плотностной стратификации среды на характеристики турбулентного обмена могут быть получены на основе теории Монина—Обухова для турбулентного режима приземного слоя атмосферы (см. [68] или [67]). Согласно этой теории характеристики стационарного однородного по горизонтали турбулентного течения определяются целиком пятью внешними параметрами: толщиной слоя h, высотой шероховатости границы z₀, параметром плавучести g/p₀, перепадами скорости бU и потенциальной плотности бо поперек. слоя. При определении характеристик турбулентных полей температуры Т и солености S вместо бо следует задать соответствующие перепады температуры δΤ и солености δS. а вместо» g/ρ_0 — параметры αg и βg , где α и β — коэффициенты сжимаемости морской воды, обусловленные изменениями температуры и солености соответственно. Из указанных внешних параметров. можно определить так называемую скорость трения (кореньквадратный из турбулентного потока импульса, деленного на плотность жидкости) u_* , вертикальные турбулентные потоки тепла q_T, соли q_S и массы q_o на шероховатой границе слоя. Единственным образом также можно ввести масштаб длины (толщину подслоя) L_{*} с постоянными по глубине турбулентными потоками и масштабы вариаций плотности R_{*}, температуры T_{*} и солености S.:

$$L_{*} = \frac{u_{\bullet}^{3}}{\varkappa q_{\rho} g / \rho_{0}}; \quad R_{*} = -\frac{q_{\rho}}{\varkappa u_{*}}; \quad T_{*} = -\frac{q_{T}}{\varkappa c_{\rho} \rho u_{*}}; \\ S_{*} = -\frac{q_{S}}{\varkappa \rho u_{*}}, \quad (1.59)$$

где ср — теплоемкость воды при постоянном давлении; и — так называемая постоянная Кармана, вводимая в формулы для удобства некоторых дальнейших выкладок.

На высотах, значительно превышающих средний размер неровностей подстилающей поверхности, величина г не должна влиять на характеристики движения в слое, поэтому для каждой точки потока здесь все безразмерные характеристики процессов (с масштабами, превосходящими характерные размеры действия молекулярных эффектов) должны быть универсальными функциями безразмерного отношения h/L_{*}. С убыванием плотностной стратификации и с переходом ее в неустойчивую турбулентные пульсации скорости будут возрастать (при прочих равных условиях). Пульсации плотности при очень большом устойчивом градиенте будут малы, так как турбулентные пульсации скорости в этом случае очень сильно подавлены. С уменьшением стратификации турбулентность усиливается, но средний градиент плотности убывает, поэтому рост значений р' будет замедляться, а затем значения пульсаций плотности начнут убывать до минимума при нейтральной стратификации потока (напомним, что пульсации скалярной величины пропорциональны произведению пульсации скорости на градиент осредненного поля рассматриваемой. субстанции). При неустойчивой стратификации и развитии конвективных движений пульсации р опять будут возрастать вплоть до режимов с сильным конвективным перемешиванием, когла плотность жидкости выровняется и пульсации плотности снова уменьшатся. Пульсации температуры, солености и концентрации

27

примеси с изменением плотностной стратификации потока могут вести себя еще более сложным образом в зависимости от вкладов градиентов *T*, *S* и *с* в градиент плотности, от типов источников этих субстанций и граничных условий.

Масштабы длины типа L_* , до которых влияние стратификации плотности на характеристики турбулентного потока мало, могут быть построены и из другого (равноценного) набора определяющих параметров. Так, Панчев [93] предложил использовать для температурно-стратифицированного потока следующие параметры: $\partial \bar{u}/\partial z$, $\partial \bar{T}/\partial z$, ε , ε_T и αg , где ε и ε_T — скорость диссипации турбулентной энергии и скорость выравнивания температурных неоднородностей соответственно. Величины ε и ε_T определяются из выражений

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{i, j=1}^{3} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2}; \qquad (1.60)$$

$$\varepsilon_T = 2\gamma \sum_{i=1}^3 \overline{\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2}, \qquad (1.61)$$

где v и χ — кинематические молекулярные коэффициенты вязкости и температуропроводности соответственно.

Из перечисленных выше параметров из соображений размерностей можно составить следующее общее выражение для масштаба длины:

$$L = \varepsilon^{1/2} \left(\alpha g \, \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right)^{-3/4} \varphi \left[\frac{\alpha g \varepsilon_T}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right)^{-1}, \, \left(\alpha g \, \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right)^{-1/2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right], \quad (1.62)$$

где ф — некоторая универсальная функция от двух безразмерных аргументов.

Если постулировать для ф степенной вид и опускать поочередно один из пяти определяющих параметров, то можно получить семь различных выражений для масштаба длины. В океанологии наиболее широкое распространение получил масштаб, введенный Озмидовым в 1965 г. [78]. В общем случае не только температурной, а плотностной стратификации выражение для этого масштаба имеет вид

$$L_0 = a \left[\overline{\rho} \varepsilon^{2/s} / \left(g \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial z} \right) \right]^{3/4} = a \varepsilon^{1/2} N^{-3/2}, \qquad (1.63)$$

где a — некоторая константа, вид которой конкретизируем ниже. Выражение для L_0 может быть получено не только из соображений размерности, но и выведено из некоторых физических построений. Преодолеть силы Архимеда в стратифицированном потоке могут, очевидно, лишь турбулентные вихри характерного размера L и с определенным перепадом скоростей $\Delta \bar{u}$. Если для этих вихрей плотностной «барьер» преодолен, то турбулентность до масштаба L должна быть трехмерно изотропной, и тогда величина $\Delta \bar{u}$ связывается с *L* известным соотношением теории локально-изотропной турбулентности Колмогорова [46]:

$$\Delta \bar{\mu} \sim \varepsilon^{1/3} L^{1/3}, \qquad (1.64)$$

а характерный градиент скорости в этом случае будет равен

$$d\bar{u}/dz = c \varepsilon^{1/3} L^{-2/3}, \qquad (1.65)$$

где *с* — универсальная безразмерная постоянная порядка единицы.

Но преодолеть плотностной барьер могут лишь движения, для которых число Ричардсона достигло критического значения Ri_{кр}. Заменяя в выражении для Ri_{кр} градиент скорости по соотношению (1.65), получим:

$$\operatorname{Ri}_{\kappa p} = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho} / \partial z}{c^2 \varepsilon^{2/s} L^{-4/s}}, \qquad (1.66)$$

откуда следует для L

$$L = L_0 = \operatorname{Ri}_{\mathrm{Kp}}^{3/4} \varepsilon^{3/2} \varepsilon^{1/2} N^{-3/2}, \qquad (1.67)$$

что совпадает с (1.63) при $a = \operatorname{Ri}_{KD}^{3/4} c^{3/2}$.

Изложенные сейчас рассуждения могут быть применены и для выяснения вида зависимости коэффициента вертикального турбу-

лентного обмена K_z от градиента плотности $\partial \rho/\partial z = \gamma$. Если до масштаба L_0 турбулентность трехмерно-изотропна, то единственными определяющими параметрами для процессов, не превосходящих по размерам L_0 , но больших процессов с влиянием молекулярных эффектов, будут величины є и l, где l — масштаб рассматриваемого процесса (гипотеза Колмогорова [46]). В этом случае из соображений размерности для изотропного коэффициента обмена K получаем

$$K = c_1 \varepsilon^{1/3} l^{4/3}, \tag{1.68}$$

где c₁ — универсальная безразмерная постоянная.

Согласно (1.68) коэффициент вертикального турбулентного обмена возрастает с увеличением масштаба явления в степени 4/3. Но до каких пределов будет осуществляться такой рост в стратифицированной по плотности среде? Очевидно, что этот процесс будет происходить до масштабов L_0 , после чего рост коэффициента K_z в вертикальном направлении должен прекратиться (или по крайней мере резко замедлиться), так как более крупные вертикально ориентированные вихри в стратифицированном потоке не должны наблюдаться. Следовательно, «максимальное» значение коэффициента K_z в стратифицированной жидкости будет записываться в виде

$$K_z^{\max} = c_1 \varepsilon^{1/3} L_0^{1/3} = c_1 c^3 \operatorname{Ri}_{\mathrm{Kp}} \varepsilon N^{-2}.$$
 (1.69)

В свете рассмотренного механизма турбулентного обмена в стратифицированной турбулентной среде интересно проследить,

как будет происходить диффузия примеси, помещенной в поток в некоторый момент времени в малый («точечный») объем пространства. При малых размерах облака примеси преобладающее действие на его диффузию будут оказывать эффекты молекулярной диффузии с постоянным коэффициентом D. Следовательно, в этот период диффузия примеси будет описываться выражением (1.14). Но по достижении некоторого характерного размера l_0 в «игру» вступят турбулентные вихри малых масштабов и диффузия примеси несколько ускорится. Величина l_0 носит название масштаба Колмогорова и из соображений размерности записывается в виде

$$l_0 = \sqrt[4]{\nu^3/\epsilon}. \tag{1.70}$$

При последующем росте размеров пятна на его диффузию будут оказывать влияние турбулентные вихри все больших и больших размеров, ускоряя и ускоряя его диффузию изотропно во всех направлениях. Пятно примеси на этом этапе диффузии будет, естественно, иметь сферическую форму (при том или ином способе осреднения турбулентных флюктуаций в поле концентрации примеси). Но как только размеры пятна достигнут значения Lo, произойдет его «сплющивание», так как вертикальный рост пятна не будет ускоряться (коэффициент K_z выйдет на «насыщение»), а в горизонтальных направлениях этот рост будет по-прежнему происходить ускоренно, так как росту горизонтального коэффициента обмена ничего не будет препятствовать. Следовательно, с этого момента процесс диффузии станет анизотропным с постоянным значением коэффициента вертикальной диффузии и возрастающим, зависящим от масштаба явления (а следовательно, и от времени диффузии), изотропным в горизонтальной плоскости коэффициентом К_L. Рост коэффициента К_L может продолжаться до масштабов, на которых нарушается горизонтальная изотропия процессов, например, из-за анизотропии граничных условий на поверхности океана, наличия градиентов среднего поля скорости и т. п. (рис. 1.3).

Интересен вопрос о том, как ведет себя горизонтальный коэффициент обмена при достижении масштабом явления значения L_0 . Единого мнения на этот счет среди океанологов не существует. Ряд авторов считает, что на горизонтальный обмен вертикальная плотностная стратификация вообще не должна влиять. Другая точка зрения — горизонтальный обмен должен быть более интенсивен в стратифицированной жидкости по сравнению с однородной средой (при прочих равных условиях). Такое заключение основывается на том, что при масштабах явления, превосходящих L_0 , турбулентные вихри «работают» только в горизонтальной плотности, не затрачивая энергию на вертикальное перемешивание. Свойства такой квазидвумерной турбулентности должны, естественно, каким-то образом отличаться от закономерностей трехмерного явления. Основное отличие двумерной турбулентности от трехмерной заключается в существовании в двумерном случае двух инерционных интервалов масштабов, в одном из которых происходит перенос кинетической энергии со скоростью є от мелкомасштабных вихрей к крупномасштабным (в отличие от противоположного потока в трехмерном случае), в то время как в другом интервале масштабов осуществляется перенос энстрофии (половины среднеквадратичной завихренности) со скоростью ε_{ω} в сторону меньших вихревых образований (больших волновых чисел k). Если имеется приток энергии и энстрофии в области волновых чисел k_0 , то распределение энергии турбулентных пуль-



Рис. 1.3. Зависимость коэффициентов вертикального и горизонтального турбулентного обмена от масштаба явления *l* в стратифицированном по плотности океане (по *0* [78]).

саций E(k) по волновым числам для меньших k, куда направлен поток энергии, будет пропорционален k в степени «—⁵/₃» («колмогоровский» спектр), в то время как для больших значений k(вплоть до масштаба $k_d = (e_{\omega}/v)^{1/6}$), где будет существовать поток энстрофии, из соображений размерности получаем $E(k) \sim k^{-3}$. При поступлении энергии и энстрофии не только «в точке» k_0 или при ограниченности интервала значений k законы распределения энергии по волновым числам будут, естественно, более сложными.

Если в двумерной турбулентности в инерционном интервале определяющими параметрами являются величины є и ε_{ω} , то из соображений размерности для этого интервала можно получить выражения и для распределения по волновым числам «энергии» пульсаций концентрации пассивной примеси $E_c(k)$, диффундирующей в потоке. Величина $E_c(k)$, кратко именуемая «спектром» пульсаций концентрации c', связывается с c' выражением

$$\overline{c'}^2 = \int_0^\infty E_c(k) \, dk. \tag{1.71}$$

В качестве размерного параметра, определяющего величину $E_c(k)$ должна, в общем случае, выступать и скорость передачи по спектру меры неоднородности пульсаций концентрации при-

меси ε_c . Тогда из соображений размерности для $E_c(k)$ в инерционном интервале получаем

$$E_c(k) = \varepsilon_c \varepsilon^{-1/s} k^{-s/s} f(l/L), \qquad (1.72)$$

где f(l/L) — некоторая безразмерная функция, имеющая при нулевом аргументе значение 1; $L = (\varepsilon/\varepsilon_{\omega})^{\frac{1}{2}}$ — постоянный масштаб длины; l = 1/k — текущий масштаб длины. Для достаточно больших l, когда можно пренебречь вязкими силами и, следовательно, диссипацией энергии (инерционно-конвективный интервал масштабов), величина ε не должна входить в выражение (1.72). В этом случае $f(l/L) \sim k^{2/3} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ и для $E_c(k)$ получаем

$$E_{c}(k) = c_{2} e^{-1/3} \varepsilon_{c} k^{-1}, \qquad (1.73)$$

где *c*₂ — числовая постоянная.

Из аналогичных размерностных построений можно получить и выражение для коэффициента диффузии $K_L(l)$ в инерционном интервале двумерной турбулентности. В общем случае имеем

$$K_L(l) = \varepsilon^{1/s} l^{1/s} \psi(l/L), \qquad (1.74)$$

где $\psi(l/L)$ — универсальная функция.

Если масштаб l принадлежит интервалу переноса энстрофии, то из формулы (1.74) должен выпасть параметр ε , для чего необходимо, чтобы $\psi(l/L) \sim k^{2/3} \varepsilon^{1/3} \varepsilon^{-1/3}$. В этом случае имеем

$$K_L(l) = c_3 \varepsilon_{\omega}^{1/3} l^2,$$
 (1.75)

где *с*₃ — безразмерная константа.

Выражение (1.75) было получено Линем [137] в 1972 г., а позднее критически проанализировано Мирабелем и Мониным [64]. Дело в том, что двумерное полуэмпирическое уравнение диффузии, записанное в полярных координатах

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r K(r) \frac{\partial \bar{c}}{\partial r} \right]$$
(1.76)

(r - paquyc-вектор), не имеет решения для мгновенного точечного источника примеси как раз для $K(r) \sim r^2$. При всех других степенных зависимостях K(r) от r такое решение существует, причем некоторые такие решения используются в океанологии, о чем будет сказано ниже. Указанная особенность случая $K(r) \sim r^2$ связана, естественно, и со спецификой спектра (1.73), при котором, как не трудно видеть из формулы (1.71), происходит логарифмическая расходимость среднего квадрата пульсаций концентрации $\overline{c'^2}$ при малых k, т. е. наблюдается сильная переоценка вклада

в $\overline{c'^2}$ от возмущений поля концентрации с очень малыми k. В [64] для вывода формул для спектра $E_c(k)$ и коэффициента K(l) использовано спектральное уравнение для $E_c(k)$, а для его замыкания применена гипотеза о нелокальном характере переноса

энстрофии по спектру. В результате таких построений в [64] получены следующие обобщения формул (1.73) и (1.75):

$$E_{c}(k) = (4)^{2/3} \varepsilon_{c} \varepsilon_{\omega}^{-1/3} k^{-1} \left(\ln \frac{k}{k_{0}} \right)^{-1/3}, \qquad (1.77)$$

$$K_L(l) = (2^{2/3}/3) \varepsilon_{\omega}^{1/3} l^2 \left(\ln \frac{l_0}{l} \right)^{-2/3}, \qquad (1.78)$$

где k_0 — волновое число, ограничивающее инерционный интервал; l_0 — масштаб, на котором происходит снабжение потока энергией.

Дополнительные логарифмические множители в этих формулах дают для спектра эффективную границу «среза» спектра при малых k и тем самым ликвидируют расходимость интеграла (1.71), а для коэффициента обмена — обеспечивают существование решения уравнения (1.76), так как при $l \rightarrow \infty$ имеем $l^2 K(l) \rightarrow 0$.

Вопрос о зависимости коэффициентов обмена от масштаба явления в условиях океана, конечно, не решается приведенными выше формулами. Притоки энергии и энстрофии к движениям океанских вод могут осуществляться, вообще говоря, по всему интервалу масштабов движений. Кроме того, и сами эти движения (даже самые крупномасштабные) не являются чисто двумерными. Поэтому ожидать точного выполнения формул (1.68) или (1.75) для коэффициентов обмена едва ли возможно. Чтобы в какой-то степени облегчить положение с выбором зависимости коэффициентов обмена от масштаба явления, Озмидовым [79] была высказана гипотеза о квазидискретном снабжении океана энергией и энстрофией. Согласно этой гипотезе, приток энергии и энстрофии к океану от внешних источников сосредоточен в основном в окрестностях некоторых выделенных значений волновых чисел k_i, в интервалах между которыми такими притоками можно в ряде случаев пренебречь. При выполнении этой гипотезы спектральное распределение энергии движений вод, а также зависимости коэффициентов обмена от масштаба явления должны быть весьма специфичными. Энергия и энстрофия, передаваемые внешними источниками океанским движениям в масштабах $L_i = 1/k_i$, будут затем перераспределяться по движениям других масштабов. Ввиду хаотичного механизма дробления турбулентных вихрей можно предположить, что в масштабах, существенно отличающихся от L_i, вихри потеряют преобладающую ориентацию, задаваемую внешними силами, и станут близки к изотропным (трехмерно или лишь в горизонтальной плоскости). При достаточно большом интервале между «соседними» значениями L_i здесь могут располагаться участки с универсальными зависимостями характеристик турбулентности от масштаба явления и других факторов. Параметры таких зависимостей могут, естественно, быть различными для каждого из таких участков, так как в зонах

энергоснабжения осуществляются «добавки» к потокам энергии є и энстрофии Е... Поэтому для каждого интервала выполнимости универсальных законов должны использоваться, вообще говоря, свои значения этих величин, т. е. є, и єію. Если приток энергии и энстрофии в данной зоне энергоснабжения велик по сравнению с их притоками в других зонах, то характеристики турбулентности в рассматриваемом интервале масштабов будут определяться «локальными» значениями параметров є, єіщ, т. е. процессы здесь практически не будут зависеть от явлений с другими масштабами. Этим океан существенно отличается от многих других турбулентных течений жидкости, у которых существует один определяющий масштаб L, на котором происходит энергоснабжение течения. Этот приток энергии (и энстрофии) полностью определяет динамику всех движений в потоке, начиная от L и кончая малыми движениями, которые уже подавляются молекулярной вязкостью. Таким определяющим масштабом, например, в движениях жидкости в трубах или каналах является диаметр (радиус) трубы или ширина канала. От масштаба L существенно зависит и тип движения жидкости. Как известно, переход от ламинарного к турбулентному типу движения осуществляется при определенных значениях числа Рейнольдса

$$Re = LU/v, \qquad (1.79)$$

где L — характерный пространственный масштаб; U — типичная скорость движения жидкости; v — коэффициент молекулярной вязкости жидкости.

В течениях в трубах, каналах и других подобного рода устройствах, в которых движущей внешней силой является гидравлический напор или составляющая сила тяжести, величина L в (1.79) совпадает с типичным размером потока, следовательно, число Re определяется с использованием этой величины. При наличии же нескольких зон энергоснабжения и характерных масштабов L_i существует, вообще говоря, и несколько значений числа Рейнольдса Re_i. С этим обстоятельством связана и возможность существования в океане областей с ламинарным или близким к ламинарному режиму движений вод. В таких областях локальное значение числа Рейнольдса Re_i сравнительно мало, а влияние движений других масштабов может быть пренебрежимо, если «соседние» масштабы энергоснабжения L_{i-1} и L_{i+1} отстоят достаточно далеко от L_i , а значения потоков энергии и энстрофии для них не велики.

Существование в каждом из интервалов выполнимости универсальных законов режима трехмерной или двумерной турбулентности определяется рядом факторов. В большинстве случаев, по-видимому, для океана типичны не совсем «чистые» закономерности трехмерной или двумерной турбулентности, а некоторые промежуточные случаи. Если, например, интервал волновых чисел k ограничен (а это, естественно, наблюдается в океане всегда), то вместо закона степени «—З» для спектра энергии в двумерной турбулентности можно получить [94]

$$E(k) \sim \varepsilon_{\omega 1}^{*/_{5}} k^{-3} (1 - k^{2}/k_{1}^{2})^{*/_{5}},$$
 (1.80)

где $k_1 = (\varepsilon_{\omega 1}/\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}$; $\varepsilon_{\omega 1}$ — поток энстрофии в обычном для двумерной турбулентности направлении, а ε_1 — поток энергии в направлении, типичном для трехмерного случая.

В рассматриваемом случае, при ограниченности интервала значений k и при притоке энергии и энстрофии в районе k_0 , по обе стороны от k_0 будет наблюдаться спад уровня E(k) с посте-



Рис. 1.4. Схема зависимости коэффициента ^{10⁰} горизонтального турбулентного обмена K_L в океане от масштаба явления *l* (по [80]).

пенно увеличивающейся крутизной спада. Еще более сложная картина для функции E(k) и, естественно, для K(k) будет существовать при нескольких значениях волновых чисел k_i , на которых происходит заметный приток энергии и энстрофии. Так, если один из источников расположен в зоне бароклинной неустойчивости крупномасштабной циркуляции океана, а другие источники — в масштабах инерционных и приливных движений, то в зоне движений синоптических масштабов (порядка сотни километров) будет происходить наложение потоков є и ε_{ω} от этих источников. Формы зависимостей спектров E(k), $E_c(k)$, а также коэффициента обмена K(k) от волнового числа (масштаба) в этом случае будут существенно зависеть от относительной интенсивности источников, их числа, взаимного расположения и т. п.

Простая схема распределения кинетической энергии океана по движениям разных масштабов, как уже упоминалось, была предложена Озмидовым [79]. В схеме имелись три выделенных масштаба L_i с притоком энергии (масштаб глобальной циркуляции, масштаб приливных и инерционных колебаний, масштаб поверхностных волн) и три интервала волновых чисел, где выполняются законы локально-изотропной турбулентности (но с разными значениями определяющего параметра є). Таким образом, согласно этой схеме, в интервалах между зонами энергоснабжения функция E(k) должна описываться законом «степени — $\frac{5}{3}$ », а коэффициент обмена — законом «степени 4/3». График зависимости коэффициента обмена от масштаба явления, следующий ИЗ схемы, приведен на рис. 1.4. Значения величины є, для каждого

3*

35

из участка выполнимости закона «степени 4/3» взяты равными 10^{-5} , 10^{-3} и 10^{-1} см²/с³.

Выполнимость закона «степени ⁵/₃» для функции E(k) и закона «степени ⁴/₃» для коэффициента обмена в различных диапазонах масштабов неоднократно подтверждалась в океане данными наблюдений. Обзор этих результатов можно найти в монографиях [81] и [67]. Здесь же мы лишь воспроизведем графики зависимо-



Рис. 1.5. Зависимость коэффициента K_L от масштаба явления l по данным опытов с диффузией пятен красителя (по [92]).



Рис. 1.6. Зависимость коэффициента *K_L* от масштаба явления в широком диапазоне изменения *l* (по [146]).

сти коэффициента горизонтальной диффузии в океане, полученные Окубо и Озмидовым [92] и Окубо [146] по данным диффузионных измерений в различных районах океана (рис. 1.5 и 1.6). Как видно из рис. 1.6, в среднем в широком диапазоне масштабов приблизительно от 10⁴ до 10⁷ см зависимость K (1) достаточно хорошо аппроксимируется степенным выражением с показателем степени 1,1. Для некоторых более узких интервалов масштабов лучше выполняются зависимости $K(l) \sim l^{t_3}$ (рис. 1.5) с разными значениями коэффициента пропорциональности, как это и следует из общей диаграммы рис. 1.4. Для некоторых промежуточных интервалов масштабов возможна аппроксимация экспериментальных точек степенными зависимостями и с другими показателями степени. Так, Иозеф и Сенднер [129] предложили использовать линейную связь К с l. Эти авторы показали, что в ряде случаев при такой зависимости наблюдается лучшее согласие результатов расчетов с экспериментальными данными, чем при использовании других степенных выражений для K (1). Укажем, что хорошее согласие теории с опытом часто имеет место и при пред-
положении K = const. Такой «разнобой» в функциональных формах K(l) в океане иллюстрирует, очевидно, сложную картину энергоснабжения океана от внешних источников (ветер, солнечный нагрев, приливные силы и др.), а также сложные механизмы перераспределения этой энергии по движениям океанических вод разного масштаба, что и приводит к многообразию вида функций K(l).

1.5. Модели диффузии с зависящими от времени и масштаба явления коэффициентами обмена

В предыдущем разделе было показано, что коэффициенты обмена, вводимые в полуэмпирических уравнениях диффузии, существенно зависят в турбулентном потоке от масштаба рассматриваемого явления l. Если исследуется диффузия от локализованных источников, то зависимость K(l) можно трактовать и как изменчивость коэффициента K во времени. Действительно, при малых размерах пятна диффундирующей примеси эффективный коэффициент обмена должен быть невелик, так как в «растаскивании» пятна участвуют лишь малые вихри. С ростом же размеров пятна, т. е. с увеличением времени диффузии, скорость диффузии (а следовательно, и коэффициент диффузии) должна возрастать. Особенно заметны эти явления, естественно, при горизонтальной диффузии примеси, так как диапазон масштабов в горизонтальных направлениях в океане на несколько порядков больше, чем по вертикали.

Попытки учесть зависимости коэффициентов диффузии от масштаба явления и времени в рамках полуэмпирического уравнения диффузии делались рядом авторов. В 1958 г. Озмидов [74] предложил для расчета диффузии в океане от точечных источников примеси задавать горизонтальный коэффициент диффузии в форме (1.68), причем в качестве масштаба явления *l* в этой формуле предлагалось считать радиус-вектор точки наблюдений r (источник примеси помещался в начале координат). При таком функциональном задании коэффициента K_L (1) автоматически учитывался рост значений К_L по мере увеличения размеров диффундирующего пятна примеси. Аналогичный прием замены масштаба явления 1 радиусом-вектором точки наблюдения использовали в том же году Йозеф и Сенднер [129], которые записали K_L(r) в виде линейной функции от r с коэффициентом пропорциональности и₁, имеющим размерность скорости (названным ими «скоростью диффузии»). В работе [143] были рассмотрены случан $K_L(r, t) = a_1 r^{4/3} t$ и $K_L(r, t) = a_2 r t$, а в [142] предложена формула $K_L(r, t) = a_3 t^2 r$, где a_1, a_2 и a_3 — некоторые постоянные с различной размерностью. В [143] был рассмотрен и более общий случай задания горизонтального коэффициента диффузии в виде

$$K_L(r, t) = a_4 r^n f(t),$$
 (1.81)

37

где a_4 — постоянная; n — показатель степени, такой, что $0 \le n \le \le 2$, а f(t) — некоторая функция времени.

Решение уравнения горизонтальной диффузии (1.76) с горизонтальным коэффициентом обмена, заданным в виде $K_L(r) = -c_1 e^{1/2} r^{1/2}$, было получено в [74]. Подставляя выражение для $K_L(r)$ в (1.76) и дифференцируя, будем иметь:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = c_1 \varepsilon^{1/s} \left[\frac{7}{3} r^{1/s} \frac{\partial \bar{c}}{\partial r} + r^{1/s} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial r^2} \right].$$
(1.82)

Производя замену переменных по формуле

$$r^{1/s} = \rho,$$
 (1.83)

приводим уравнение (1.82) к виду

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{c_1 \varepsilon^{1/3}}{9} \left(\frac{5}{\rho} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \rho^2} \right).$$
(1.84)

Решение (1.84) ищем в форме

$$\bar{c}(\rho, t) = mt^n \exp\left[-\frac{\rho^2}{4} / \left(\frac{c_1 \varepsilon^{1/s}}{9} t\right)\right], \qquad (1.85)$$

где т и п — постоянные, требующие определения.

Дифференцируя (1.85) и подставляя в (1.84), находим, что n=-3. Следовательно, решение уравнения (1.84) имеет вид

$$\bar{c}(\rho, t) = \frac{m}{t^3} \exp\left[-\frac{\rho^2}{4} \left| \left(\frac{c_1 \varepsilon^{2/3}}{9} t\right) \right].$$
(1.86)

Постоянная *m* определяется из условия сохранения примеси в процессе диффузии

$$Q = \int_{0}^{\infty} 2\pi r \bar{c} (r, t) dr, \qquad (1.87)$$

где Q — мощность мгновенного точечного источника примеси.

Подставляя (1.86) в (1.87) и интегрируя, находим:

$$m = Q / \left[6\pi \left(\frac{4c_1 e^{1/3}}{9} \right)^3 \right].$$
 (1.88)

Итак, решение уравнения (1.76) для мгновенного точечного источника мощностью Q, помещенного в момент времени t=0 в бесконечном двумерном пространстве в точке x=y=0, имеет в данном случае вид

$$\bar{c}(r, t) = \frac{Q}{6\pi \left(4c_1 \varepsilon^{1/3}/9\right)^3 t^3} \exp\left[-\frac{r^{2/3}}{4 \left(c_1 \varepsilon^{1/3}/9\right) t}\right].$$
(1.89)

Существенным отличием решения (1.89) от решения двумерного уравнения диффузии с постоянным коэффициентом [см. формулу (1.13)] является быстрое (пропорциональное t^{-3}) падение концентрации примеси в центре пятна $\bar{c}(0, t)$, в то время как при

постоянном коэффициенте в двумерном случае $\bar{c}(0, t)$ убывает лишь пропорционально первой степени t. В то же время спадание концентрации с расстоянием r от начала координат происходит, согласно (1.89), более медленно (показатель степени экспоненты пропорционален $r^{3/_8}$), чем это следует из решения уравнения диффузии с постоянным коэффициентом (показатель степени у экспоненты здесь пропорционален r^2).

Решение трехмерного уравнения диффузии с коэффициентом диффузии, пропорциональным пространственному радиусу-вектору точки наблюдения *R* в степени ⁴/₃, может быть получено аналогичным образом [77]. Для трехмерно-изотропного процесса уравнение диффузии в сферических координатах записывается в виде

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} K_L(R) R^2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial R} \right].$$
(1.90)

Подставляя выражение для коэффициента обмена в (1.90), получим в этом случае

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = c_2 \varepsilon^{1/3} \left(\frac{10}{3} R^{1/3} \frac{\partial \bar{c}}{\partial R} + R^{4/3} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial R^2} \right).$$
(1.91)

Заменяя далее переменные по (1.83) и предполагая, что решение имеет вид (1.85), находим, аналогично вышеизложенному, что в трехмерном случае $n = -\frac{9}{2}$. Условие сохранения количества примеси в процессе диффузии теперь будет иметь вид

$$Q = \int_{0}^{\infty} 4\pi R^{2} \bar{c} \left(R, t\right) dR, \qquad (1.92)$$

где Q — снова мощность мгновенного точечного источника.

Окончательно решение трехмерного уравнения диффузии с коэффициентом, задаваемым формулой (1.68), для мгновенного точечного источника примеси, помещенного в момент t=0 в начало координат, получаем в виде

$$\bar{c}(R, t) = \frac{Q}{192 \cdot 71 \pi^{3/2} \varepsilon^{3/2} \left(\frac{c_2 t}{9}\right)^{9/2}} \exp\left[-\frac{R^{2/3}}{4(c_2/9) \varepsilon^{1/3} t}\right], \quad (1.93)$$

где постоянная c_2 может, вообще говоря, отличаться от постоянной c_1 для двумерного случая.

Концентрация примеси при трехмерной диффузии согласно формуле (1.93) убывает в центре пятна весьма быстро — пропорционально времени в степени $^{9}/_{2}$ (при постоянном коэффициенте диффузии — лишь пропорционально t в степени $^{3}/_{2}$). В то же время падение концентрации с ростом расстояния от точки выпуска примеси здесь снова слабее, чем в классическом случае диффузии с постоянным коэффициентом (показатели степени у экспоненты $^{2}/_{3}$ и 2 соответственно). Решение двумерного уравнения диффузии (1.76) с коэффициентом обмена более общего вида (1.81) было получено позднее в [143]. Решение имеет вид

$$\bar{c}(r, t) = \frac{(2-n)Q}{2\pi (2-n)^{4/(2-n)} \Gamma [2/(2-n)] a_4^{2/(2-n)} [\psi(t)]^{2/(2-n)}} \times \exp\left[-\frac{r^{2-n}}{(2-n)^2 a_4 \psi(t)}\right], \qquad (1.94)$$

где Γ — гамма-функция; $\psi(t) = \int_{0}^{t} f(t) dt$.

Нетрудно видеть, что решения двумерного уравнения диффузии для различных частных видов задания коэффициента $K_L(r, t)$, приведенных выше, включаются в общее решение (1.94). В табл. 1.2 приведены некоторые характеристики решения уравнения горизонтальной диффузии примеси от мгновенных источников при различных заданиях коэффициента горизонтальной диффузии $K_L(r, t)$.

Сравнение приведенных в табл. 1.2 соотношений с экспериментальными данными осуществил Окубо [143] по имеющимся в его распоряжении результатам наблюдений над диффузией

Таблица 1.2

Характеристики двумерной диффузии примеси от мгновенного точечного источника мощностью Q при различных формах задания коэффициента диффузии $K_L(r, t)$

Автор решения	Зависимость концентра- ции примеси в центре пятна c (0, t) от времени t	Изменение логарифма нор- мированной концентрации примеси $\overline{c}(r, t)$ вдоль ра- диуса-вектора пятна $\ln [\overline{c}(r, t)/\overline{c}(0, t)]$
Классическое уравнение диф- фузии с постоянным коэффи- циентом	$\frac{Q}{4\pi K_L} t^{-1}$	$-\frac{1}{4K_L t} r^2$
Иозеф и Сенднер [129]	$\frac{Q}{2\pi u_1^2} t^{-2}$	$-\frac{1}{u_1t}r$
Окубо [143]	$\frac{Q}{\frac{3}{4}\pi^{3/2}a_1^3}t^{-3}$	$-\frac{1}{a_1^2 t^2} r^{4/3}$
Озмидов [74]	$\frac{Q}{6\pi (c_1 \varepsilon^{1/3})^3} t^{-3}$	$-\frac{1}{c_1\varepsilon^{1/3}t}r^{2/3}$
Окубо и Притчард [см. 143]	$\frac{Q}{\pi a_2^2} t^{-2}$	$-\frac{1}{a_2^2t^2}r^2$
Обухов [142]	$\frac{Q}{\pi a_3^3} t^{-3}$	$-\frac{1}{a_3^3t^3}r^2$

в океане. Однако отдать предпочтение какой-либо из приведенных в таблице формул на основании такого сравнения ему не удалось, что опять-таки свидетельствует о разнообразии режимов горизонтальной диффузии в океане в разных пространственновременных масштабах и в разных условиях протекания процесса.

Существенное влияние на поле концентрации примеси при горизонтальной диффузии, естественно, должна оказывать диффузия в вертикальном направлении. Правда, из-за существенного различия значений вертикальных и горизонтальных коэффициентов диффузии часто представляется возможным рассматривать эти два процесса независимо. Это можно делать, когда анализируется процесс с большим масштабом по горизонтали, а также в случаях заведомой малости градиентов концентрации примеси по вертикали или вдоль горизонтальных координат (например, при равномерном выпадении примеси из атмосферы над большой акваторней океана). При сильной вертикальной плотностной стратификации вод, когда вертикальный обмен сильно ослаблен, также в ряде задач оказывается возможным не учитывать диффузию примеси в вертикальном направлении.

Более подробно вопрос о взаимодействии процессов горизонтальной и вертикальной диффузии был рассмотрен Мониным [66]. Им предложено выделить четыре режима вертикальной диффузии, в первом из которых вертикальный обмен можно считать вообще отсутствующим, во втором коэффициент вертикального обмена K_z постоянен, при третьем этот коэффициент связан с вертикальной координатой линейной зависимостью и, наконец, при четвертом режиме K_z описывается законом «степени 4/3», т. е.

1)
$$K_z = 0;$$
 (1.95)

2)
$$K_z = \text{const};$$
 (1.96)

3)
$$K_z = \varkappa u_* z;$$
 (1.97)

4)
$$K_z \sim \varepsilon^{1/3} z^{4/3}$$
. (1.98)

где u_* — скорость трения; \varkappa — постоянная Кармана.

Первый режим может реализоваться в перечисленных выше случаях, второй — при сильной вертикальной плотностной стратификации вод, когда масштаб стратификации L_0 мал, третий — при близкой к нейтральной стратификации вод океана и с турбулентностью типа пристеночной, четвертый режим — с развитой трехмерной турбулентностью, существующей, например, при наличии плотностной конвекции в верхнем слое океана. Горизонтальная же диффузия считается всегда описываемой уравнением с коэффициентом K_L , связанным с масштабом явления законом «степени $4/_3$ ». Случай трехмерно-изотропной турбулентности с таким коэффициентом диффузии, а также случай чисто горизонтальной диффузии уже рассматривался нами выше. Для второго режима диффузии фундаментальное решение для мгновенного точечного источника примеси мощностью Q, помещенного в момент t=0 в начале координат, должно зависеть от координат, времени и параметра е. Если в океане существует течение с постоянной скоростью V, направленной вдоль оси x, то решение должно зависеть от x и y лишь в комбинации $(x - Vt) + y^2$. Решение в этом случае может быть записано в виде (при условии непроницаемости поверхности океана для примеси)

$$\bar{c}(x, y, z, t) = \frac{Q}{\epsilon t^3} f_0\left(\frac{(x - Vt)^2 + y^2}{\epsilon t^3}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi K_z t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4K_z t}\right), \quad (1.99)$$

где f₀ — некоторая универсальная функция.

При третьем режиме соответствующее решение будет иметь вид

$$\bar{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \frac{Q}{\varepsilon t^3} f_0\left(\frac{(\mathbf{x} - Vt)^2 + y^2}{\varepsilon t^3}\right) \frac{1}{\varkappa u_* t} \exp\left(-\frac{z}{\varkappa u_* t}\right), \quad (1.100)$$

где f_0 — универсальная функция, вообще говоря, отличная от f_0 в формуле (1.99).

Интересно отметить, что согласно формулам (1.89), (1.93), (1.99) и (1.100) концентрация примеси в центре диффундирующего пятна убывает со временем при четырех перечисленных режимах диффузии по законам t^{-3} , $t^{-3,5}$, t^{-4} и $t^{-4,5}$, т. е. тем быстрее, чем интенсивнее вертикальное перемешивание.

Используя принцип суперпозиции, нетрудно записать и общие выражения для концентрации примеси при четырех режимах диффузии и при наличии в точке x=y=z=0 стационарного источника примеси мощностью q. Имеем соответственно:

$$\bar{c}(x, y, z, t) = \frac{q\varepsilon}{V^4} f_1\left(\frac{\varepsilon r}{V^3}, \frac{x}{r}\right) \delta(z); \qquad (1.101)$$

$$\bar{c}(x, y, z, t) = \frac{q \epsilon^{3/2}}{K_z^{1/2} V^5} f_1\left(\frac{\epsilon r}{V^3}, \frac{x}{r}, \frac{\epsilon^{1/2} z}{K_z^{1/2} V}\right); \quad (1.102)$$

$$\bar{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \frac{q\varepsilon^2}{u_*V^6} f_1\left(\frac{\varepsilon r}{V^3}, \frac{\mathbf{x}}{r}, \frac{\varepsilon z}{u_*V}\right); \quad (1.103)$$

$$\bar{c}(x, y, z, t) = \frac{q \varepsilon^2}{V^7} f_1\left(\frac{\varepsilon R}{V^3}, \frac{x}{R}\right), \qquad (1.104)$$

где f_1 — универсальные функции (вообще говоря, все различные); $\delta(z)$ — дельта-функция; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В данном случае убывание концентрации примеси в точке, где помещен источник примеси, связывается, естественно, не с временем диффузии t, а со скоростью течения V, причем такое убывание пропорционально соответственно V^{-4} , V^{-5} , V^{-6} и V^{-7} , т. е. убыстряется с увеличением интенсивности вертикального обмена.

При отсутствии среднего течения непрерывный точечный источник примеси будет создавать поле концентрации, описываемое

в рассматриваемых четырех режимах диффузии следующими выражениями:

$$\bar{c}(x, y, z, t) = \frac{q}{\epsilon^{1/3} r^{4/3}} f_2(0) \delta(z); \qquad (1.105)$$

$$\bar{c}(x, y, z) = \frac{q}{K_z^{1/2} \varepsilon^{1/\delta_f^{5/3}}} f_2(0) \,\delta(z); \qquad (1.106)$$

$$\bar{c}(x, y, z) = \frac{q}{u_* r^2} f_2\left(\frac{\varepsilon^{1/3} z}{u_* r^{2/3}}\right); \qquad (1.107)$$

$$\bar{c}(x, y, z) = \frac{q}{\epsilon^{1/s} R^{7/s}} f_2(0), \qquad (1.108)$$

где <u>f</u>2-универсальные функции (вообще говоря, все различные).

Концентрация примеси на поверхности океана в этом случае убывает с расстоянием от источника соответственно по законам $r^{-4/3}$, $r^{-5/3}$, r^{-5

Из формул (1.106)—(1.108) нетрудно получить и выражения для распределений концентрации примеси по вертикали под стационарным источником. Для этого необходимо лишь в (1.106)—(1.108) перейти к пределу при $r \rightarrow 0$, в результате чего приходим к выражениям:

$$\bar{c}(0, 0, z) = \text{const} \frac{qK_z^2}{\epsilon z^5};$$
 (1.109)

$$\bar{c}(0, 0, z) = \text{const} - \frac{q u_{\bullet}^2}{\epsilon z^3};$$
 (1.110)

$$\bar{c}(0, 0, z) = \text{const} \frac{q}{\varepsilon^{1/3} z^{7/3}}$$
. (1.111)

Концентрация примеси здесь убывает с глубиной по законам z^{-5} , z^{-3} и $z^{-7/3}$, т. е. тем медленнее, чем интенсивней вертикальный обмен.

Все приведенные сейчас формулы, естественно, могут найти и находят применение при расчете полей концентрации примеси в океане. Однако, как справедливо отмечается в [66], в природе существуют, как правило, еще более сложные условия протекания процесса диффузии. В частности, поле осредненной скорости течений в океане весьма редко можно считать однородным и стационарным. А градиенты скорости течения и его изменчивость во времени могут существенно усложнять картину диффузии. Рассмотрению влияния пространственно-временной изменчивости поля осредненной скорости на диффузию примесей посвящен следующий раздел книги.

1.6. Диффузия примеси в неоднородном и нестационарном поле осредненной скорости течения

В уравнении турбулентной диффузии с адвективными членами (1.26) осредненные компоненты скорости течения и, v и w могут быть, вообще говоря, функциями координат и времени. Очевидно, что такая изменчивость поля скорости должна существенно влиять на распределение концентрации диффундирующей в потоке примеси. Впервые на эффект градиента (сдвига) скорости на диффузию примеси обратил внимание, по-видимому, Тэйлор [162, 163], исследуя процесс переноса примеси в трубах. Совместный эффект вертикальной диффузии и сдвига скорости приводит к быстрому вытягиванию пятна примеси вдоль течения, причем это явление можно описать, введя некоторый эффективный коэффициент горизонтальной диффузии Каф. Анализ основывается на стационарном уравнении с членами вертикальной диффузии и горизонтальной адвекции, причем горизонтальная скорость течения (направленная вдоль оси х) предполагается функцией вертикальной координаты z. Если осреднить такое уравнение диффузии от поверхности до дна (z=H), то в уравнении появится новый член, который можно трактовать как добавочный к горизонтальному переносу примеси. Оказывается, что вводимый при этом коэффициент Каф обратно пропорционален значению вертикального коэффициента диффузии Кг. Выражение для Каф при простых видах функции $\bar{u}(z)$ получено в [154], а для произвольного профиля $\bar{u}(z)$ — в [116]. Весьма простая и в то же время наглядная модель явления предложена в [148], где рассматривается последовательность актов деформации вертикального «столбика»» примеси градиентом скорости, а затем «размазывания» такого деформированного столбика по толщине потока процессом вертикальной диффузии. Концентрация примеси после п таких актов распределяется в элементарных «ячейках» вдоль оси х по биноминальному закону. При стремлении п к бесконечности биноминальное распределение переходит в нормальное с дисперсией nVt, где Vсредняя по глубине скорость течения, т — характерное время вертикальной диффузии примеси в слое толщиной Н. Производная от дисперсии по времени при стремлении n к бесконечности при этом оказывается равной V²т/2. А величина т в свою очередь

записывается в виде $\tau = H^2/(\pi^2 K_z)$ [это выражение следует из решения уравнения типа (1.12), имеющего для ограниченного пространства следующий вид: $\bar{c}(z, t) = \cos \frac{\pi z}{H} \exp \left(-\frac{\pi^2 K_z t}{H^2}\right)$]. Учитывая далсе, что коэффициент обмена можно определить как ¹/₂ производной от дисперсии распределения концентрации примеси по времени, получаем окончательно, что

$$K_L^{\rm sop} = V^2 H^2 / 2\pi^2 K_z. \tag{1.112}$$

При других моделях явления выражение (1.12) может несколько видоизмениться (например, в [154] получено $K_L^{a\phi} = \overline{V}^2 H^2/(30K_z)$), однако обратная зависимость $K_L^{a\phi}$ от K_z при этом сохраняется.

При не очень сложных видах функций $\bar{u}(x, y, z)$, $\bar{v}(x, y, z)$ и $\bar{w}(x, y, z)$ уравнение диффузии (1.26) может быть решено аналитически. Например, Окубо [144] рассмотрел случай двумерного уравнения диффузии, в котором горизонтальные компоненты скорости течения зависели от координат следующим образом:

$$\tilde{u}(x, y) = \alpha x + (h - \eta) y;$$
 (1.113)

$$\bar{v}(x, y) = (h + \eta) x - \alpha y,$$
 (1.114)

где

$$a = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{0} = -\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_{0}; \quad h = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_{0} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{0} \right];$$
$$\eta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \right], \quad (1.115)$$

а нижний индекс указывает на постоянство соответствующих производных во всем потоке. Уравнение диффузии в этом случае записывалось в виде

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + [\alpha x (h - \eta) y] \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + [(h + \eta) x - \alpha y] \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} =$$
$$= K_L \Big(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \Big). \tag{1.116}$$

Решение уравнения (1.116) для мгновенного точечного источника мощностью Q, помещенного в момент t=0 в начале координат, получено в форме

$$\bar{c}(x, y, t) = \frac{Q}{4\pi K_L P(t)} \exp\left[-\frac{M_1(t) x^2 + 2M_2(t) xy + M_3(t) y^2}{4K_L P^2(t)}\right],$$
(1.117)

где

$$P(t) = \left\{ \frac{h^2 + \alpha^2}{(h^2 + \alpha^2 - \eta^2)^2} \operatorname{sh}^2 \left[\left(h^2 + \alpha^2 - \eta^2 \right)^{1/2} t \right] - \frac{\eta^2}{h^2 + \alpha^2 - \eta^2} t^2 \right\}^{1/2};$$
(1.118)

$$M_{1}(t) = \frac{h^{2} + \alpha^{2} + h\eta}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{1}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right]$$

$$-\frac{h\eta + \eta^2}{h^2 + \alpha^2 - \eta^2} t - \frac{\alpha}{h^2 + \alpha^2 - \eta^2} \operatorname{sh}^2 (h^2 + \alpha^2 - \eta^2)^{1/2} t; \qquad (1.119)$$

$$M_{2}(t) = \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] - \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] + \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] + \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] + \frac{\alpha \eta}{2(h^{2} + \sigma^{2} + \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right]$$

$$-\frac{\alpha\eta}{h^2+\alpha^2-\eta^2}t + \frac{h}{h^2+\alpha^2-\eta^2}\operatorname{sh}^2(h^2+\alpha^2-\eta^2)^{1/2}t; \quad (1.120)$$

$$M_{3}(t) = \frac{h^{2} + \alpha^{2} - h\eta}{2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{3/2}} \operatorname{sh} \left[2(h^{2} + \alpha^{2} - \eta^{2})^{1/2} t \right] + t_{1}$$

$$+\frac{h\eta-\eta^2}{h^2+\sigma^2-\eta^2}t+\frac{\alpha}{h^2+\alpha^2-\eta^2}\operatorname{sh}^2(h^2+\alpha^2-\eta^2)^{1/2}t.$$
 (1.121)

Решение (1.117) может быть упрощено для более простых полей средней скорости течения. Так, если $\alpha = h = 0$, $\eta \neq 0$ (вращение жидкости как твердого тела), то (1.117) сводится к классическому решению (1.13) (естественно, с заменой *D* на K_L). Если же $h = \eta = 0$, но $\alpha > 0$ (деформация растяжения), то решение принимает вид

$$\bar{c}(x, y, t) = \frac{Q}{2\pi \frac{K_L}{\alpha} [(e^{2\alpha t} - 1)(1 - e^{-2\alpha t})]^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{x^2}{2\frac{K_L}{\alpha} (e^{2\alpha t} - 1)} - \frac{y^2}{2\frac{K_L}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})}\right].$$
 (1.122)

Выражение (1.122) было получено ранее Таунсендом [164].

Третий случай, проанализированный Окубо, когда $\alpha = 0$, $h = -\eta > 0$, близок к рассмотренному ранее Новиковым [71]. Им было найдено решение трехмерного уравнения диффузии вида

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = (u_0 + a_1 z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} - w_0 \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = K_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} + K_L \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \right), \qquad (1.123)$$

где u_0, v_0, w_0, K_z, K_L и a_1 — постоянные величины.

Фундаментальное решение уравнения (1.123), полученное Новиковым, можно записать в виде

$$\bar{c}(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2}} \sqrt{K^* K_L^2} \exp\left[-\frac{\left(x - u_0 t - \frac{1}{2} a_1 t z\right)^2}{4K^* t} - \frac{(y - v_0 t)^2 + (z - w_0 t)^2}{4K_L t}\right], \quad (1.124)$$

где

$$K^* = K_z + \frac{1}{12} K_L a_1^2 t^2. \tag{1.125}$$

Все приведенные сейчас решения уравнений диффузии с переменными значениями компонентов скорости имеют. не как трудно видеть, квадратичные формы по отношению к переменным х, у и z. Это означает, что изолинии концентрации примеси в диффундирующих пятнах имеют эллиптическую форму. Главные оси таких эллипсов, вообще говоря, не совпадают с осями координат, причем с течением времени эллипсы могут поворачиваться по отношению к системе координат. Изменяются со временем и дисперсии распределений концентрации в пятнах по направлениям главных осей эллипсов (σ_r^2 , σ_u^2 , σ_z^2). Следовательно, пятна не только поворачиваются в процессе диффузии, но могут «сплющиваться» или вытягиваться в различных направлениях. Интенсивность этих процессов, естественно, зависит от значений входящих в решения параметров. От этих значений зависит также и характерное время t_{кр}, начиная с которого влияние градиентов скорости на процесс становится существенным. Так, например, для **уравнения** вида

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + (u_0 + a_1 z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + (v_0 + a_2 z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = K_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} + K_L \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \right)$$
(1.126)

время $t_{\rm кр}$ определяется выражением

$$t_{\rm kp} = \sqrt{\frac{\frac{12}{K_z}}{\frac{K_z}{K_L}(a_1^2 + a_2^2)}},$$
 (1.127)

а угол α между большой осью эллипса изолиний концентрации и осью *х* — формулой

$$\lg \alpha = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} \,. \tag{1.128}$$

Для отношения полуосей эллипса λ можно в свою очередь получить

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{1}{12}(a_1^2 + a_2^2) \frac{K_z}{K_L} t^2} . \qquad (1.129)$$

Аналитические решения уравнения диффузии могут быть найдены и при зависимости компонентов осредненной скорости течений от времени. Так, Окубо [145] рассмотрел случай, когда один из компонентов скорости является гармонической функцией времени:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \left[\bar{u}_{S}(z) + \bar{u}_{t}(z)\sin\frac{2\pi t}{T}\right]\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_{L}\frac{\partial^{2}\bar{c}}{\partial x^{2}} + K_{z}\frac{\partial^{2}\bar{c}}{\partial z^{2}}, \quad (1.130)$$

где $\bar{u}_{s}(z)$ и $\bar{u}_{t}(z)$ — линейные функции от координаты z; T — период изменчивости скорости.

Анализ решения уравнения (1.130) показал, что в неограниченном пространстве по истечении достаточно большого времени диффузии эффект сдвига стационарного течения становится превалирующим фактором по сравнению со сдвигом в периодическом движении вод. Для ограниченного по глубине океана важным становится соотношение отрезка времени τ_0 , необходимого для перемешивания примеси во всей толще океана, к периоду колебаний *T*. Если $\tau_0 \gg T$, то сдвиг скорости в периодическом течении практически не влияет на распределение примеси. Если же τ_0 со-измеримо с *T*, то этот сдвиг по своему вкладу в процесс переноса примеси становится соизмеримым с вкладом сдвига скорости в стационарном потоке.

Стационарное уравнение диффузии с зависящими от координат компонентом скорости \bar{u} и коэффициентами диффузии K_z и K_L исследовалось В. И. Горошко [21]. Компонент скорости задавался им степенной функцией вида

$$\tilde{u}(y, z) = \tilde{u}_1 z^{\alpha} y^{\tau}, \ \alpha, \ \tau > 0,$$
 (1.131)

а коэффициенты обмена в свою очередь функциями

$$K_z = k_1 y^{1-\beta} z^{\alpha}; \quad K_L = k_2 z^{1-\beta} y^{\tau}, \quad (1.132)$$

где \bar{u}_1 , α , τ , β , k_1 и k_2 — некоторые константы.

Уравнение диффузии

$$u \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_L \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right)$$
(1.133)

решалось для водоема глубиной *h* и с прямолинейным берегом, направленным вдоль оси *x*. Потоки примеси через свободную поверхность водоема, дно и боковую стенку считались отсутствующими. Начало координат помещалось на берегу у уреза воды, ось *у* была направлена перпендикулярно к берегу в сторону водоема. Граничные условия задачи имели вид

$$\left(K_z(y, z) \frac{\partial \bar{c}(x, y, z)}{\partial z}\right)_{z \to 0} = 0; \qquad (1.134)$$

$$K_z(y, h) \frac{\partial \bar{c}(x, y, h)}{\partial z} = 0; \qquad (1.135)$$

$$\left(K_L(y, z) \frac{\partial \bar{c}(x, y, z)}{\partial y}\right)_{y \to 0} = 0; \qquad (1.136)$$

 $\bar{c}(x, y, z)_{x, y \to \infty} = 0.$ (1.137)

Точечный непрерывный источник примеси мощностью q помещался на оси y в океане на глубние z_0 и на расстоянии от берега y_0 .

Решение уравнения (1.133) с коэффициентами, задаваемыми формулами (1.131)—(1.132) и граничными условиями (1.134)—(1.137), было найдено в виде

$$\bar{c}(x, y, z) = \frac{ay^{\beta/2}}{x} \exp\left(-\frac{y^{2\sigma} + y_0^{2\sigma}}{2bx}\right) I_{-\beta/(2\sigma)} \left[\frac{(yy_0)^{\sigma}}{ax}\right] \times \\ \times \left\{1 + lz^{\epsilon/2} \sum_{k=1}^{\infty} J_{-\epsilon/(2\lambda)} \left[\sigma_k \left(\frac{z_0}{h}\right)\right]^{\lambda} J_{-\epsilon/(2\lambda)}^{-2}(\sigma_k) J_{-\epsilon/(2\lambda)} \times \\ \times \left[\sigma_k \left(\frac{z}{h}\right)\right]^{\lambda} \exp\left(-m\sigma_k^2 x\right)\right\}, \qquad (1.138)$$

где

$$a = \frac{q (\alpha + 1) y^{\beta/2}}{(\beta + \tau + 1) k_1 h^{\alpha + 1}}; \quad \sigma = \frac{\beta + \tau + 1}{2}; \quad b = \frac{2k_1 \sigma^2}{\bar{u}_1};$$

$$l = \frac{(\varepsilon + \alpha + 1) z_0^{\varepsilon/2}}{(\alpha + 1) h^2}; \quad \lambda = \frac{\varepsilon + \alpha + 1}{2}; \quad m = \frac{\lambda k_2}{\bar{u}_1 h^{\varepsilon + \alpha + 1}},$$

 σ_h — положительные корни уравнения $J(\alpha+1)/(\epsilon+\alpha+1)$ (δ) =0, J — функция Бесселя; I — модифицированная функция Бесселя первого рода.

На рис. 1.7 в качестве примера приведены нормированные кривые распределения концентрации примеси, рассчитанные по (1.138) для источника примеси, расположенного на расстоянии 45 м от береговой черты. Из рисунка следует, что с увеличением продольной координаты х максимальная в поперечном направленин концентрация примеси постепенно приближается к берегу, что связано с возрастанием коэффициентов обмена с увеличением координаты y. Интересно также, что береговая черта (y=0) практически не подвергается загрязнению на расстояниях до 500 м н более вниз по течению от места расположения источника примеси. Естественно, что такое свойство поведения концентрации примеси может быть использовано для оптимизации выбора точки сброса сточных вод, например с целью предотвращения загрязнения определенных участков береговой зоны моря.

Несмотря на сложность задачи (1.133)—(1.137), и она еще весьма идеализирована. В реальности, конечно, береговая черта редко бывает прямолинейна, глубина моря хотя бы приближенно постоянной, а скорость течения— неизменной. Учет этих и других факторов, влияющих на процесс, естественно, приводит к уравнениям диффузии, которые решить аналитически нереально. В этом случае приходится использовать численные методы решения, о которых более подробно будет сказано ниже.



Рис. 1.7. Распределение концентрации примеси вдоль продольной координаты *x* при различных расстояниях от береговой черты *y* (по [21]).

1.7. Диффузия дискретных частиц в турбулентном потоке

Уравнение диффузии типа (1.26) может быть получено не только из условий баланса диффундирующей примеси, но и из статистически-вероятностных представлений о движении диффундирующих частичек в потоке. Обозначим вероятность для частицы, вышедшей из точки M_0 в момент t_0 , находиться в момент $t > t_0$ в малой окрестности точки M через

$$p(M, t; M_0, t_0) \Delta V,$$
 (1.139)

где ΔV — элемент пространства. Так как пребывание частицы во всем пространстве V — событие достоверное, то функция (1.139) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{V} p(M, t; M_0, t_0) dV = 1.$$
 (1.140)

Если из точки M_0 за короткий промежуток времени Δt выходит больщое число (N) не взаимодействующих друг с другом частиц, то концентрация таких частиц при $\Delta t \rightarrow 0$ в точке M в момент t будет описываться выражением (1.139), если всего из точки M вышла масса частиц, равная единице. Этим устанавливается связь между понятием концентрации примеси в точке пространства и вероятностью пребывания в окрестности этой точки одной частицы, выпущенной источником. Если начальная концентрация частиц в момент времени равна $\varphi(M)$, то концентрация c(M, t) этих частиц в момент $t > t_0$ будет равна

$$c(M, t) = \int_{V_p} p(M, t; P, t_0) \varphi(P) dV_p, \qquad (1.141)$$

где *Р* — переменная интегрирования.

Из равенства (1.141) следует соотношение

$$p(M, t; M_0, t_0) = \int_{V_p} p(M, t; P, \theta) p(P, \theta; M_0, t_0) dV_p, \quad (1.142)$$

верное для любого момента времени $t_0 < \theta < t$. Уравнение (1.142) носит название уравнения Эйнштейна—Колмогорова.

При определенных условиях, налагаемых на функцию $p(M, t; M_0, t_0)$, уравнение (1.142) может быть преобразовано в уравнение в частных производных диффузнонного типа. Первое условие налагается на среднюю скорость движения диффундирующих частиц. Если для простоты рассмотреть одномерный случай движения частиц (вдоль оси x), то это условие можно записать в виде

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{x - \xi}}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_{L} (x - \xi) p(x, t + \tau; \xi, t) d\xi = A(x, t), \quad (1.143)$$

где ξ — координата частицы в начальный момент времени; x — координата по истечении времени τ ; A(x, t) — некоторая ограниченная функция; L — область интегрирования.

Второе условие записывается в виде

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{(x-\xi)^2}}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_L (x-\xi)^2 p(x, t+\tau; \xi, t) d\xi = 2K(x, t),$$

(1.144)

где K(x, t) — некоторая ограниченная функция. Требование (1.144) означает линейность зависимости среднего квадрата смещения частиц от времени при малых значениях т.

Третье условие налагается на среднее значение куба смещения частиц и записывается в виде

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{|x-\xi|^3}{\tau} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\tau} \int_{L} |x-\xi|^3 p(x, t+\tau; \xi, t) d\xi = 0.$$
(1.145)

Если далее умножить обе части уравнения (1.142) на произвольную функцию $\psi(z)$, обращающуюся вместе со своей производной в нуль на границах области интегрирования, проинтегрировать полученное уравнение по всей этой области, а затем разложить функцию $\psi(x)$ в ряд Тейлора по смещению $(x - \xi)$, то, используя вышеприведенные свойства функции $p(M, t; M_0, t_0)$, можно придти к выражению

$$\int_{L} \psi(x) \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (Ap)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (Kp)}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$
 (1.146)

Так как функция $\psi(x)$ — произвольная, то соотношение (1.146) должно выполняться при равенстве нулю выражения в прямых скобках под интегралом. Отсюда получаем дифференциальную форму уравнения Эйнштейна—Колмогорова

$$\partial p/\partial t = -\partial (Ap)/\partial x + \partial^2 (Kp)/\partial x^2.$$
 (1.147)

Уравнение (1.147) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \beta p , \qquad (1.148)$$

где $\alpha = -A + \partial K/\partial x$; $\beta = -\partial A/\partial x + \partial^2 K/\partial x^2 = \partial \alpha/\partial x$.

Как видно из (1.148), величина К имеет физический смысл коэффициента диффузии. Если процесс диффузии однороден в пространстве и времени, т. е. функция p зависит лишь от разностей $x - x_0$ и $t - t_0$, то коэффициенты A и K оказываются постоянными величинами. Если же функция p зависит лишь от модуля смещения частиц $|x - \xi|$, то A = 0 и уравнение (1.148) сводится к простейшему уравнению диффузии

$$\partial p/\partial t = K \,\partial^2 p/\partial x^2, \tag{1.149}$$

где вместо концентрации примеси искомой функцией служит плотность вероятности нахождения частицы в данной точке пространства и в данный момент времени, а коэффициент диффузии определяется по формуле (1.144).

Из формулы (1.144) следует, что определяемый по ней коэффициент диффузии является, вообще говоря, функцией времени. Конкретизировать вид этой функции можно, если известно, как меняется со временем значение дисперсии смещения частицы $\sigma_x^2 = \overline{[x(t) - x(t_0)]}$. Смещение частицы вдоль оси x за время t можно, очевидно, определить из выражения

$$x = \int_0^t u(\alpha) \, d\alpha, \qquad (1.150)$$

где u — компонент скорости движения частицы; α — переменная интегрирования. Если предположить, что средняя скорость течения отсутствует, то полная скорость u заменяется в выражении (1.150) на пульсационную скорость u'. Возводя (1.150) в квадрат и осредняя, придем к соотношению

$$\overline{x^2} = \left[\int_0^t u'(\alpha) \, d\alpha\right]^2 = \int_0^t \int_0^t \overline{u'(\alpha_1) \, u'(\alpha_2)} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2, \qquad (1.151)$$

где α_1 и α_2 — переменные интегрирования.

Если величину $u'(\alpha_1)u'(\alpha_2)$ разделить на средний квадрат пульсационной скорости u'^2 (предполагается, что u'^2 не зависит от координаты и времени), то под интегралом получим выражение для коэффициента корреляции скорости движения частицы (лагранжев коэффициент корреляции):

$$R_{u}(\alpha_{2}-\alpha_{1})=\overline{u'(\alpha_{1})u'(\alpha_{2})}/\overline{u'^{2}}.$$
 (1.152)

Учитывая (1.152), приводим (1.151) к виду

$$\overline{x^2} = \overline{u'^2} \int_0^t \int_0^t R_u (\alpha_2 - \alpha_1) d\alpha_1 d\alpha_2. \qquad (1.153)$$

Если коэффициент корреляции зависит только от разности моментов времени, а не от самих моментов, то, учитывая, что $R_u(\tau)$ — четная функция, приходим к формуле, полученной Тейлором [161]:

$$\overline{x^2} = 2\overline{u'^2} \int_0^t d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} R_u(\alpha_1) d\alpha_1, \qquad (1.154)$$

или к выражению, выведенному Кампе-де-Ферье (см. [104]):

$$\overline{x}^2 = 2\overline{u'^2} \int_0^t (t-\alpha) R_u(\alpha) \, d\alpha. \qquad (1.155)$$

Коэффициент диффузии $K_x(t)$, согласно формуле (1.144), теперь можно записать в форме

$$K_{\mathbf{x}}(t) = \overline{u'^2} \int_0^t R_u(\alpha) \, d\alpha. \qquad (1.156)$$

Аналогичным образом получаются выражения и для коэффициентов диффузии вдоль осей координат *у* и *z*.

Интеграл от коэффициента корреляции $R_u(\alpha)$ в формуле (1.156) имеет размерность времени и характеризует временной интервал, на котором сохраняется коррелятивная связь между движениями частицы в потоке:

$$T_{u} = \int_{0}^{\infty} R_{u}(\alpha) \, d\alpha. \tag{1.157}$$

Величина T_u носит название лагранжева масштаба турбулентности.

Если время диффузии t велико по сравнению с T_u , то формула (1.155) может быть приближенно записана в виде

$$\overline{x^2} \approx 2\overline{u'}^2 T_u t - 2\overline{u'}^2 \int_0^\infty \alpha R_u(\alpha) \, d\alpha. \qquad (1.158)^2$$

В этом выражении второй член в правой части — величина постоянная, поэтому при больших значениях *t* первый член начинает превалировать над вторым и приближенно получаем

$$\overline{x^2} = 2\overline{u'}^2 T_u t, \qquad (1.159)$$

53,

а для коэффициента диффузии при $t \gg T_u$ имеем

$$K_x = \overline{u'^2} T_u, \qquad (1.160)$$

т. е. в этом случае коэффициент диффузии становнтся постоянной величиной, а уравнение турбулентной диффузии — аналогичным уравнению молекулярной диффузии, но с коэффициентом, задаваемым выражением (1.160). Существует и аналогия между длиной свободного пробега молекул l_m в теории молекулярной диффузии и величиной с размерностью длины $T_u \sqrt{u'^2}$ при турбулентном течении жидкости [см. формулу (1.6)]. И в том, и в другом случаях эти величины характеризуют расстояния, в которых теряется корреляционная связь между движениями частицы (молекулы). Если же частица еще не «ушла» за масштаб корреляции, то коэффициент диффузии должен быть функцией времени диффузии. При малых временах диффузии функцию $R_u(\tau)$ можно разложить в ряд по времени. Если пренебречь всеми членами порядка выше второго, то получим

$$\overline{x^2}\approx \overline{u'^2}t^2,$$

и коэффициент диффузии в этом случае будет линейной функцией времени.

В общем случае зависимость коэффициента диффузии от времени может быть получена, если нзвестен вид функции $R_u(\tau)$. Для различных типов турбулентных потоков функции $R_u(\tau)$ [а также коэффициенты корреляции вдоль осей y и z: $R_v(\tau)$ и $R_w(\tau)$] определялись на основе эмпирических данных или с помощью тех или иных теоретических построений. Были предложены различные аналитические выражения для $R_u(\tau)$. Так, Тэйлор [161] записал $R_u(\tau) = e^{-\tau/\tau_1}$, где τ_1 — некоторый масштаб времени. Позднее Саттон [157] предложил аппроксимировать функцию $R_u(\tau)$ выражением

$$R_{u}(\tau) = (1 - \tau/\tau_{0})^{n},$$

тде τ_0 — масштаб времени, а показатель степени n может меняться в зависимости, например, от плотностной стратификации жидкости.

Если рассматривать диффузию в турбулентном потоке не отдельных частичек, а их пар, то для дисперсии расстояния между этими частицами, а также для коэффициента их относительной диффузии можно получить ряд конкретных выражений. Проблема относительной диффузии частиц более сложна, чем проблема диффузии отдельной частицы, так как относительная диффузия зависит. не только от характеристик турбулентности потока, но еще и от первоначального разделения частиц. Если расстояние между частицами невелико, то в их «растаскивании» участвуют лишь мелкомасштабные турбулентные вихри (мелкомасштабные флюктуации скорости), в то время как более крупные вихревые

образования (пульсации скорости) переносят частички как целое. Поэтому взаимная диффузия частиц есть процесс ускоряющийся, причем это ускорение будет происходить до тех пор, пока частицы не разойдутся на такое расстояние, при котором коррелятивная связь между ними перестанет существовать (т. е. турбулентных вихрей такого масштаба уже не будет в потоке). Параметры взаимной диффузии, как показал Бэтчелор [114], определяются в общем случае взаимными корреляцнями между движениями частиц в разные моменты времени. В конечной же стадии диффузии, когда частицы становятся независимыми, их взаимная дисперсия будет просто равна удвоенной дисперсии движения отдельной частицы [т. е. удвоенным значением дисперсий по формулам (1.153) — (1.155)]. Конкретизировать выражение для взаимной дисперсии пары частичек можно также в случае, когда расстояние между частицами лежит в интервале выполнимости гипотеории локально-изотропной турбулентности Колмогорова. тез В этом интервале, как известно, все характеристики процессов могут зависеть лишь от скорости диссипации турбулентной энергии є, кинематической вязкости жидкости у и, естественно, от самого разделения частиц l и времени диффузии t. Если же первоначальное разделение частиц l₁ много больше масштаба Колмогорова (1.70), то величина у должна выпасть из рассмотрения. В этом случае, т. е. в инерционном интервале масштабов, ско-

рость изменения взаимной дисперсии частиц dx^2/dt (удвоенное значение взаимного коэффициента диффузии) может выражаться следующими формулами:

1) для малых времен диффузии, когда роль первоначального разделения частиц еще существенна, имеем

$$d\overline{x^2}/dt \sim (\varepsilon l_1)^{2/3} t; \qquad (1.161)$$

2) для случая, когда время диффузии достаточно велико и частицы «забыли» свое первоначальное разделение (поэтому параметр l_1 выпадает из формулы), получаем

$$d\overline{x^2}/dt \sim \varepsilon t^2. \tag{1.162}$$

Момент времени t*, разделяющий эти два режима диффузии, может быть определен также из соображений размерности формулой

$$t^* = l_1^{2/3} \varepsilon^{-1/3}. \tag{1.163}$$

Чтобы учесть увеличение коэффициента взаимной диффузии частиц с ростом *l*, Ричардсон [152] предложил записывать коэффициент взаимной диффузии частиц *F* как функцию взаимного разделения частиц *l*. Уравнение же диффузии в этом случае он записал для функции плотности распределения частиц по их взаимным расстояниям *q* в следующем виде:

$$\frac{\partial q\left(l,\ t\right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \left[F\left(l\right) \frac{\partial q\left(l,\ t\right)}{\partial l} \right]. \tag{1.164}$$

55

Переход от функции q(l, t) к обычной концентрации $\bar{c}(x, y, z, t)$ достаточно сложен. В большинстве случаев, однако, как показал Ричардсон, можно приближенно считать, что $F \approx 3K$. В случае же независимости движения диффундирующих частиц F = = 2K.

Проанализировав данные о диффузии в атмосфере, Ричардсон установил, что коэффициент F(l) связан с масштабом явления l формулой

$$F(l) = k l^{1/3}, \tag{1.165}$$

которая совпадает с выражением закона «степени $\frac{4}{3}$ » (1.68) при $k = c_1 \varepsilon^{1/3}$.

1.8. Флюктуации концентрации диффундирующей примеси

Для практических целей интерес могут представлять сведения не только о средней концентрации диффундирующей в океане примеси $\bar{c}(x, y, z, t)$ или сведения о дисперсиях пятен примеси и о дисперсиях диффундирующих частиц, но и данные о самих флюктуационных составляющих поля концентрации примеси c'(x, y, z, t). Для исследования таких флюктуаций удобно уравнение переноса примеси, записанное для мгновенных значений концентрации и компонентов скорости (1.10), вычесть из осредненного уравнения (1.20). В результате получим

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + u'_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial c'}{\partial x_i} + \left(u'_i \frac{\partial c'}{\partial x_i} - u'_i \frac{\partial c'}{\partial x_i}\right) = D\nabla^2 c', \quad (1.166)$$

тде, как обычно, i = 1, 2, 3. Умножая теперь (1.166) на 2c', осредняя и сокращая некоторые члены с помощью уравнения неразрывности для пульсационных добавок скорости

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad (1.167)$$

получаем уравнение для дисперсии пульсаций концентрации примеси $\sigma_{a}^{2} = \overline{c'^{2}}$:

$$\frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x_i} = -2\overline{u_i'c'} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x_i} - \overline{u_i'c'}^2 \right) - 2D \overline{\left(\frac{\partial c'}{\partial x_i} \right)^2}.$$
(1.168)

Уравнение, аналогичное (1.168), было получено Корсиным [119] для дисперсии пульсаций температуры в турбулентных течениях. Уравнение (1.168) по своему виду сходно также с уравнением баланса энергии пульсаций скорости в турбулентном потоке. В связи с этим его можно интерпретировать как уравнение баланса «энергии» пульсаций концентрации примеси. Изменение этой «энергии» со временем, как следует из уравнения, обусловлено ее адвекцией средним течением (второй член в левой части уравнения), переносом молекулярными процессами и турбулентными пульсациями скорости (предпоследний член справа), генераций $\overline{c'^2}$ под действием турбулентного потока примеси в полеградиента ее средней концентрации (первый член справа) и, на-

конец, «диссипацией» $\overline{c'}^2$ [член $2D(\overline{\partial c'}/(\partial x_i)^2 = \varepsilon_c]$.

В уравнении (1.168) значения компонентов средней скорости течения \bar{u}_i и средняя концентрация примеси \bar{c} считаются известными величинами. Но и в этом случае, как нетрудно видеть, уравнение остается незамкнутым, так как, кроме искомой величины $\bar{c'}^2$, неизвестными функциями являются моменты $\bar{u'c'}$ и $\bar{u'c'}^2$ (по-

токи примеси и c'^2), а также величина ε_c . Эти величины тем или иным способом необходимо выразить через известные функции. Наиболее распространенным является прием, уже неоднократно использованный выше, когда потоки считаются пропорциональными градиентам средней концентрации переносимой субстанции. При таком предположении имеем

$$\overline{u_ic} = -K \,\partial \bar{c} / \partial x_i; \tag{1.169}$$

$$\overline{u_ic'}^2 = -K_c \frac{\partial c'^2}{\partial x_i}, \qquad (1.170)$$

где K — «обычный» коэффициент турбулентной диффузии, а K_c — коэффициент переноса $\overline{c'^2}$, вообще говоря, отличный от K.

При различных упрощающих предположениях о поле скорости (например, при его изотропии) величина ε_c также может быть выражена через искомую функцию $\overline{c'^2}$ и тем самым уравнение (1.168) приводится к замкнутому виду.

Естественно, могут быть использованы и другие приемы замыкания уравнения (1.168). Так, например, Тоомпуу [102] предложил представить величину є в форме

$$\varepsilon_c = f(x)\overline{c'^2}, \qquad (1.171)$$

где f(x) — некоторая универсальная функция координат.

При гипотезах (1.169)—(1.171) для случая цилиндрически симметричного процесса диффузии и однородного течения со скоростью V в направлении оси x уравнение (1.168) запишется в виде

$$V \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x} = 2K \left(\frac{\partial \overline{c}}{\partial r}\right)^2 + K_c \left(\frac{\partial^2 \overline{c'^2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial r}\right) - f(x) \overline{c'^2}, \quad (1.172)$$

где $r = y^2 + z^2$. Для полупространства z > 0 и источника единичной мощности решение уравнения (1.172) имеет вид [102]

$$\overline{c'^{2}}(r, r_{0}, x) = \frac{1}{\pi \sigma_{\sigma}^{2}(x)} \frac{\varphi(x)}{\varphi(0)} \exp\left[-\frac{r^{2} + r_{0}^{2}}{2\sigma_{\sigma}^{2}(x)}\right] J_{0}\left[\frac{rr_{0}}{\sigma_{\sigma}^{2}(x)}\right], \quad (1.173)$$

где $\varphi(x) = \exp\left[-\frac{1}{V}\int f(x) dx\right]$; r_0 — раднус источника, а величина σ_{σ}^2 — пространственная дисперсия величины σ_c^2 (с размерностійо квадратные сантиметры) — связана с K_c соотношением

$$K_c = \frac{V}{2} \frac{d\sigma_\sigma^2}{dx}.$$
 (1.174)

Если K_c — величина постоянная, то $\sigma_{\sigma}^2 = 2K_c x/V$. В этом случае значение дисперсии пульсаций концентрации примеси, согласно (1.174), будет уменьшаться обратно пропорционально координате x и экспоненциально убывать с расстоянием от оси x.

Сведений о пространственно-временной изменчивости величины σ^2 в ряде диффузионных задач, однако, оказывается еще недостаточно. Часто бывает необходимо знать спектральный состав пульсаций концентрации примеси. В этом случае величину c'(x, y, z, t), а также пульсации компонентов скорости $u'_i(x, y, z, t)$ удобно представить в виде интегралов Фурье:

$$C(\mathbf{k}, t) = \int c' \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{x}; \qquad (1.175)$$

$$U_{i}(\mathbf{k}, t) = \int u_{i}^{\prime} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \qquad (1.176)$$

где k — волновой вектор; x — пространственный вектор; i — мнимая единица.

Если теперь взять преобразование Фурье от уравнения (1.166), то его можно привести к виду

$$\partial C(\mathbf{k}, t)/\partial t + t \int k'_j U_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}') C(\mathbf{k}') dk' = -Dk^2 C(\mathbf{k}, t). \quad (1.177)$$

Спектр дисперсии пульсаций концентрации примеси $E_c(\mathbf{k}, t)$ определим как среднее от произведения функции $C(\mathbf{k}, t)$ на комплексно-сопряженную величину $C^*(\mathbf{k}, t)$:

$$E_c(\mathbf{k}, t) = C(\mathbf{k}, t) C^*(\mathbf{k}, t)$$
 (1.178)

и соответственно взаимный спектр компонентов пульсационных скоростей

$$E_{jk}(\mathbf{k}, t) = U_j(\mathbf{k}, t) U_k^*(\mathbf{k}, t).$$
(1.179)

Уравнение для спектральной функции $E_c(\mathbf{k}, t)$ можно получить из (1.177), суммируя его с комплексно-сопряженным уравнением. При этом уравнение для $E_c(\mathbf{k}, t)$, естественно, оказывается незамкнутым, так как нелинейный член, описывающий взаимодействие E_c и E_{jk} , не выражается, вообще говоря, через эти функции. (Взаимный спектр компонентов скорости E_{jk} в данной постановке задачи считается величиной известной.) Спектральное уравнение для $E_c(\mathbf{k}, t)$ становится замкнутым, если

предположить, что корреляция между E_c и E_{lk} мала. В этом случае уравнение для спектра E_c принимает вид

$$\partial E_c / \partial t + E_{jk} \int k_j k_k E_c \, d\mathbf{k} = -2Dk^2 E_c. \qquad (1.180)$$

Однако предположение о слабой корреляции между E_c и E_{jk} , по всей видимости, далеко от реальности, так как флюктуации c, очевидно, должны быть тесно связаны с пульсациями компонентов скорости в турбулентном потоке. Более реалистичной кажется гипотеза, согласно которой весь спектр турбулентных вихрей можно подразделить на два интервала, причем более мелкие изотропные вихри участвуют в диффузии величины E_c , а более крупные переносят E_c как целое («адвективным» образом). Если волновое число, разграничивающее эти два интервала, обозначить через k_0 , то уравнение для спектра E_c тогда может быть записано в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{0}^{k}E_{c}(k)\,dk = \left[D+a\int_{k_{0}}^{\infty}\left(E(k)\,k^{-3}\right)^{1/2}\,dk\right]\int_{0}^{k_{0}}2E_{c}(k)\,k^{2}\,dk,\quad(1.181)$$

где $E(k) = E_{ii}(k); a$ — численная постоянная.

Для решения уравнения (1.181) необходимо задать вид спектра энергии турбулентных пульсаций скорости E(k). Для изотропной турбулентности можно для этой цели воспользоваться «колмогоровским» спектром

$$E(k) = c_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \qquad (1.182),$$

где є — скорость диссипации турбулентной энергии; *с*₁ — универсальная константа.

Численное решение уравнения (1.181) с заданием E(k) в виде-(1.182) осуществил Ичийэ [128]. Продифференцировав уравнение (1.181) по k, он привел его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial E'_{C}(k', t')}{\partial t} = -(R^{-1} + ak^{-4/3})k^{2}E'_{c}(k', t') + \frac{4}{3}ak^{-7/3}\int_{0}^{k}E'_{c}(k', t')k'^{2}dk', \qquad (1.183).$$

где k' и t' — уже безразмерные волновое число и время; a и R — безразмерные параметры, равные: $a=6/7c_1eT'K'^{2/3}$, R= $= (2DT'K'^{2})^{-1}$, где в свою очередь T' и K' — характерные масштабы времени и волнового числа. Ичийэ были рассмотрены задачи с двумя начальными распределениями функции $E'_c(k', t')$:

$$E'_{c}(k', 0) = \exp(-k'^{2}/b^{2}); E'_{c}(k', 0) = m(-k'/b)^{4} \exp(-k'^{2}/b^{2}),$$
(1.184),

где *b* и *m* — постоянные.

Численные расчеты для начальных задач (1.183)—(1.184) были проведены при нескольких значениях параметров R и a. Полученные графики функции $E_c(k, t)$ показывали ее трансформацию во времени и в пространстве волновых чисел. В ряде случаев существовал поток «энергии» пульсаций концентрации примеси в сторону больших волновых чисел, а при других значениях параметров этот поток менял направление. Однако в ряде случаев наблюдалось возникновение интервалов волновых чисел, где функция $E_c(k, t)$ принимала отрицательные значения, что физически нереально. Такое явление, по мнению Ичийэ, связано с недостаточной обоснованностью делаемых при выводе уравнения (1.183) предположений. В связи с этим важная роль в определении особенностей поведения функции $E_c(k, t)$ должна принадлежать, как справедливо замечает Ичийэ, эксперименту.

Еще более полную информацию о флюктуирующем поле концентрации примеси в турбулентном потоке может дать функция плотности распределений значений пульсаций концентрации $p_{c'}$. Величина $p_{c'}dc'$ определяет долю пульсаций концентрации в интервале значений от c' до c' + dc' по отношению ко всем возможным пульсациям. Очевидно, что при этом функция $p_{c'}$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{0}^{\infty} p_{c'} dc' = 1.$$
 (1.185)

Уравнение для функции $p_{c'}$ может быть получено так же, как и уравнение для спектра пульсаций концентрации, из (1.166). Пусть φ — некоторая функция пульсаций концентрации примеси c'. Тогда, используя правила дифференцирования сложной функции, из (1.166) можно получить уравнение для $\varphi(c')$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial c'} \left[D \nabla^2 c' + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{c' u_i'} - \overline{c} u_i' \right) \right]. \quad (1.186)$$

Если теперь использовать тождество

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c'} \nabla^2 c' = \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c'^2} \left(\frac{\partial c'}{\partial x_i} \right)^2, \qquad (1.187)$$

то (1.186) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi u_i}{\partial x_i} = D \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c'^2} D \left(\frac{\partial c'}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial c'} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{c' u_i} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial c'} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{c u_i} \right).$$
(1.188)

Осреднив далее (1.188) и используя свойство (1.19), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\varphi} + \frac{\partial}{\partial x_{i}}(\bar{\varphi}u_{i}) = D\nabla^{2}\bar{\varphi} - D\frac{\overline{\partial^{2}\varphi}}{\partial c'^{2}}\left(\frac{\partial c'}{\partial x_{i}}\right)^{2} + \frac{\overline{\partial}\varphi}{\partial c'}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(\overline{c'u_{i}}\right) - \frac{\overline{\partial}\varphi}{\partial c'}u_{i}'\frac{\partial\bar{c}}{\partial x_{i}}.$$
(1.189)

В этом уравнении, как мы видим, имеется целый ряд членов типа средних значений от произведений двух функций. Рассмотрим более подробно среднее типа $\overline{\psi(c')u'_i}$, где $\psi(c')$ — некоторая функция от c'. По вероятностно-статистическому определению осреднения такая величина записывается в виде

$$\overline{\psi(c') u_i} = \int \int \psi(c') u_i p_{\mathbf{u}', c'} d\mathbf{u}' dc', \qquad (1.190)$$

где $p_{u',c'}$ — совместная плотность распределения вероятностей пульсаций скорости течения и пульсаций концентрации примеси. Если же воспользоваться понятием условной плотности распределения вероятностей пульсаций скорости при фиксированном значении пульсаций концентрации $p_{u'/c'}$, то (1.190) перепишется в виде

$$\overline{\psi(c') u'_{i}} = \int \psi(c') v'_{i}(c') p_{c'} dc', \qquad (1.191)$$

где $v'_i(c') = \int u'_i p_{\mathbf{u}'/c'} d\mathbf{u}'.$

Для члена $\overline{\psi u_i}$ выражение (1.191) запишется в виде

$$\overline{\varphi u}_{i} = \int \varphi(c') \{ \bar{u}_{i} + v'_{i} \} p_{c'} dc', \qquad (1.192)$$

а для члена $\overline{(\partial \varphi / \partial c') u'_i}$ соответственно

$$\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial c'} u'_{i} = \int \frac{\partial \varphi}{\partial c'} v'_{i} p_{c'} dc'. \qquad (1.193)$$

Аналогично можно представить и член $(\partial^2 \varphi / \partial c'^2) D (\partial c' / \partial x_i)^2$, имея в виду при этом, что величина $D (\partial c' / \partial x_i)^2$ есть не что иное, как «диссипация» пульсаций концентрации примеси ε_c (или скорость выравнивания неоднородностей концентрации примеси). Имеем

$$\frac{\overline{\partial^2 \varphi}}{\partial c'^2} \varepsilon_c = \int \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c'^2} \left(\overline{\varepsilon}_c + \varepsilon'_c \right) p_{\varepsilon'_c, c'} d\varepsilon'_c dc', \qquad (1.194)$$

где $p_{e'_c, c'}$ — совместная плотность распределения вероятностей для пульсаций е' и c'.

По аналогии с v'_i введем функцию f, определяемую выражением

$$f = \frac{1}{\overline{\epsilon_c}} \int \epsilon'_c p_{\epsilon'_c/c'} d\epsilon'_c, \qquad (1.195)$$

где $p_{e'_c/c'}$ — условная плотность распределения вероятностей e'_c при фиксированном значении пульсации концентрации c'.

61

С использованием выражения для функции f формула (1.194) перепишется в виде

$$\frac{\overline{\partial^2 \varphi}}{\partial c'^2} \varepsilon_c = \bar{\varepsilon}_c \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c'^2} (1+f) p_{c'} dc'. \qquad (1.196)$$

Подставив теперь выражения (1.192), (1.193) и (1.196) в уравнение (1.188), получим:

$$\int \varphi(c') \left\{ \frac{\partial p_{c'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\bar{u}_i + v'_i \right) p_{c'} \right] - D \nabla^2 p_{c'} \right\} dc' + \\ + \bar{e}_c \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {c'}^2} (1+f) p_{c'} dc' - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{c'} u'_i \right) \int \frac{\partial \varphi}{\partial c'} p_{c'} dc' + \\ + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \int \frac{\partial \varphi}{\partial c'} v_i p_{c'} dc' = 0.$$
(1.197)

Для функции v'_i , так же как и для f, верно следующее соотношение:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial c'} v'_i p_{c'} dc' = \int v'_i p_{c'} d\varphi - v'_i p_{c'} \varphi \int_{-\infty}^{\infty} -\int \varphi \frac{\partial}{\partial c'} (v'_i p_{c'}) dc'. \quad (1.198)$$

Но в силу быстрого убывания функции $p_{c'}$ на $\pm \infty$ можно положить первый член правой части соотношения (1.198) равным нулю. Тогда будут справедливы равенства

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c'^2} (1+f) p_{c'} dc' = \int \varphi \frac{\partial^2 p_{c'} (1+f)}{\partial c'^2} dc'; \qquad (1.199)$$

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial c'} p_{c'} dc' = -\int \varphi \frac{\partial p_{c'}}{\partial c'} dc'; \qquad (1.200)$$

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial c'} v'_i p_{c'} dc' = -\int \varphi \frac{\partial p v'_i}{\partial c'} dc'. \qquad (1.201)$$

Если теперь подставить выражения (1.199)—(1.201) в формулу (1.197), то получим

$$\int \phi(c') \left\{ \frac{\partial p_{c'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\bar{u}_i + v'_i \right) p_{c'} \right] - D \nabla^2 p_{c'} + \bar{\varepsilon}_c \frac{\partial^2 p_{c'} \left(1 + f \right)}{\partial c'^2} - \frac{\partial p_{c'} v'}{\partial c'} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{c'}}{\partial c'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{c'} u'_i \right) \right\} dc' = 0.$$
(1.202)

Но так как функция $\varphi(c')$ была произвольной, то должно обращаться в нуль выражение, стоящее под интегралом в фигурных скобках. Итак, окончательно для функции pc' получаем уравнение

$$\frac{\partial p_{c'}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i + v'_i) p_{c'}}{\partial x_i} = D\nabla^2 p_{c'} - \bar{\varepsilon}_c \frac{\partial^2 p_{c'} (1+f)}{\partial c'^2} - \frac{\partial p_{c'}}{\partial c'} \frac{\partial \overline{(c'u'_i)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{c'}v'_i}{\partial c'} \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_i}.$$
 (1.203)

Интересно отметить, что изменение во времени функции рс связано с переносом $p_{c'}$ не только осредненной скоростью \bar{u}_i , но и условно-осредненной скоростью v' (второй член левой части уравнения). Трансформация функции рс происходит также под действием молекулярной диффузии и диссипации (первый и второй члены справа), градиента потока концентрации примеси и градиента средней концентрации (третий и четвертый члены справа). Однако если даже считать известными среднюю и пульсационную скорости течения \bar{u}_i и u'_i среднюю концентрацию примеси \bar{c} , диссипацию ε_c и потоки примеси $\overline{c'u'_i}$, то и в этом случае уравнение (1.203) оказывается незамкнутым, так как в определения функций v', и f входят неизвестные условные плотности распределений $p_{\mathbf{u}'/c'}$ и $p_{\varepsilon'_c/c'}$. Поэтому опять-таки возникает задача замыкания уравнения (1.203). Разные формы такого замыкания предлагались рядом авторов. Например, в [56] предложено считать, что $v'_i = (c'u'_i/c'^2)c'$. При предположении статистической независимости ε_c и *с* получаем f=0. При таких условиях уравнение (1.203) замыкается и может быть решено тем или иным способом. Для случая стационарной и горизонтально-однородной турбулентности решение в автомодельном виде получено в [59].

На этом мы закончим краткое изложение некоторых положений и результатов теории диффузии примесей. По этой проблеме существует весьма обширная литература, список которой с каждым годом увеличивается. В настоящем обзоре мы не имели возможности остановиться на многих важных разделах проблемы. Например, имеются интересные работы по использованию для описания диффузии в турбулентных средах дифференциальных уравнений гиперболического типа, приводящих к конечным скоростям распространения «фронта» диффундирующего вещества. Много важных работ сделано по применению теории подобия для определения поля концентрации примеси, по учету пространственно-временной «памяти» процесса диффузии и другим вопросам. Некоторые из них будут упомянуты в последующих разделах книги, а для детального знакомства с проблемой можно отослать читателя к фундаментальному труду А. С. Монина и А. М. Яглома «Статистическая гидромеханика» [68], где явлению диффузии посвящено несколько разделов. С некоторыми последними результатами и тенденциями в развитии теории турбулентной диффузии можно ознакомиться по книге [63].



ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСЕЙ В ОКЕАНЕ ОТ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

2.1. Методы экспериментальных исследований диффузии примесей в океане

Оценки коэффициентов обмена различных субстанций в океане по данным о естественных полях этих субстанций позволили, как мы видели выше, составить представления о порядках этих коэффициентов. Однако для того чтобы такие оценки были достоверными, предварительно требуется провести детальный анализ существующих в рассматриваемом районе океана условий. В результате такого анализа должны быть выявлены главные механизмы формирования поля субстанции, а также показана возможность пренебрежения второстепенными факторами. Так, при оценке коэффициентов обмена по уравнениям переноса субстанции (так называемые косвенные методы определения коэффициентов) необходимо оценить роль каждого члена уравнения в балансе субстанции, оставив в конечной расчетной формуле лишь определяющие процесс слагаемые. Например, при использовании метода температурных воли необходимо показать возможность пренебрежения горизонтальными процессами, источниками тепла в толще океана, тепловыми потоками через дно океана и т. д. Только в этом случае правомочно использовать для оценки вертикального коэффициента обмена K_z уравнение теплопроводности лишь с нестационарным членом и членом вертикальной температуропроводности, решение которого и позволяет оценивать Kz по формулам температурных волн (1.33) — (1.36). Без предварительного же анализа факторов, влияющих на процесс, определение коэффициентов обмена косвенными методами может привести к ошибочным результатам, обусловленным не процессом перемешивания, а неучтенными факторами.

При оценке параметров обмена по данным наблюдений над естественными полями субстанций также обычно очень сложно правильно задать начальные условия задачи. В методе температурных волн, например, приходится предполагать, что на поверхности океана существует строго периодический режим для потоков тепла или температуры, причем этот периодический режим длится столь длительный период, что влиянием особенностей начальных распределений температуры в рассматриваемом слое океана вообще можно пренебречь. Конечно, столь сильно идеализированная картина процесса может привести к существенным ошибкам в определении параметров обмена.

Для расчета коэффициентов обмена по уравнениям переноса необходимо иметь весьма полную информацию о поле переносимой субстанции, а также о поле скорости течения в районе наблюдений. Эта информация должна быть столь подробной, чтобы по ней можно было уверенно оценивать первую и вторую пространственные, а также временную производные исследуемого поля. При оценке вертикальных производных желательно иметь непрерывные профили распределения значений рассматриваемой субстанции, так как измерения в дискретных точках могут привести к ошибочным оценкам производных из-за тонкоструктурных особенностей поля, пропускаемых при дискретных измерениях. В то же время непрерывную кривую перед расчетом производных следует определенным образом сгладить, чтобы привести ее в соответствие с масштабом осреднения, использованным при выводе уравнения переноса субстанции в океане. Выбор осредненного масштаба такого осреднения сам по себе является достаточно сложным вопросом, требующим для своего решения адекватной информации об особенностях изучаемого процесса, о типе источника субстанции, о граничных условиях, о пространственно-временной изменчивости этих условий и о предъявляемых требованиях к точности решений поставленной задачи. После определения масштаба осреднения необходимо выбрать оптимальный способ сглаживания исходных данных, чтобы не потерять в осредненных результатах наиболее важной для данной задачи информации.

Обычно наиболее бедная информация имеется об изменчивости исследуемого поля в горизонтальных направлениях на глубинных горизонтах. Измерения на отдельных гидрологических станциях, разнесенных на большие расстояния, дают лишь дискретные и обычно несинхронные данные, по которым оценивать пространственно-временные производные весьма сложно. Подсчитываемые по таким данным конечные разности поля исследуемой субстанции могут существенно отличаться от искомых производных.

Все указанные трудности приводят к тому, что косвенные методы оценки параметров диффузии по естественным океанологическим полям обычно могут дать лишь самые приближенные данные. Иногда же практикуемые массовые расчеты коэффициентов обмена по стандартным гидрологическим наблюдениям для больших акваторий океана едва ли следует приветствовать.

Более удобными для исследования особенностей процессов диффузии в океане оказались субстанции антропогенного происхождения, например радиоактивный изотоп ⁹⁰Sr. Этот изотоп, отсутствующий ранее в природе, образовался на земном шаре лишь после проведения ядерных испытаний. В связи с этим для диффузионных задач о распространении изотопа в океанских водах имелась возможность с определенной точностью поставить начальные условия. На акватории океана, достаточно удаленные от мест ядерных испытаний, искусственные радионуклиды поступали главным образом из так называемого стратосферного резервуара, образовавшегося в результате заброса продуктов взрывов в высокие слои атмосферы. Такой резервуар после своего образования обеспечивал глобальное и достаточно стабильное (конечно, в среднем) поступление изотопов на поверхность океана. С точки зрения диффузионной проблемы это означало возможность корректной постановки и граничных условий для задач о диффузии изотопа в водах океана. Такие задачи, решению которых посвящен целый ряд работ (см. главу 3), позволили оценить параметры обмена в океане с достаточной степенью надежности.

Начиная с 40-х годов нашего века в океанологии начали использоваться и прямые методы определения параметров обмена в океане. В отличие от косвенных методов, основывающихся на анализе осредненных полей примеси и скорости течений, в прямых методах анализируются данные о пульсационных характеристиках этих полей. Если соответствующие данные имеются у исследователя, то может быть осуществлен прямой подсчет потоков примеси по левой части формул (1.25) без привлечения полуэмпирической гипотезы о пропорциональности потоков примеси градиентам ее осредненного поля. В то же время, если, кроме данных о пульсационных составляющих полей, имеются сведения и о среднем поле концентрации, то по тем же формулам можно оценить и значения коэффициентов K_z и K_L. Вначале прямые методы были использованы для оценки коэффициентов турбулентной вязкости (см. [81]), так как для сбора синхронных сведений о пульсациях компонентов скорости и концентрации переносимой примеси требовалась специальная многоканальная аппаратура. Такая аппаратура у нас в стране была впервые создана Колесниковым [45], который сделал попытку определить коэффициент вертикальной турбулентной температуропроводности в океане К^т по формуле

$$K_z^T = \frac{\overline{w'T'}}{\partial \overline{T}/\partial z}.$$
 (2.1)

Значения коэффициентов K_z^T получались при этом порядка 1 см²/с, причем было обнаружено существенное уменьшение K_z^T с ростом устойчивой плотностной стратификации слоев воды в океане. Позднее подобного рода измерения и расчеты были проделаны Вильямсом и Гибсоном [165], Лозовацким и Озмидовым [58]. Первые авторы оценили вертикальные потоки тепла для района экваториального противотечения в Тихом океане в 5,9 · 10⁻³ — 11,7 · 10⁻² Дж/(см² · с), а значения коэффициента K_z^T — в пределах 0,52— 27 см²/с. Вторые авторы для фронтальной зоны Куросио в слое от 80 до 710 м получили соответственно для потоков тепла цифры от 1,7 до 74,4 Дж/(см² · с) и для коэффициента K_z^T — от 0,13 до 12,71 см²/с. Измерения перечисленными авторами проводились с помощью малоинерционной аппаратуры, датчики скорости и температуры которой позволяли регистрировать пульсации с частотами до сотен герц. Длительность синхронных записей пульсаций скорости и температуры, подвергаемых обработке, обычно не превышала 10 мин. Прямые методы определения потоков тепла и соли, а также коэффициентов обмена могут, конечно, основываться и на данных синхронных измерений температуры, солености и скорости течений стандартными гидрологическими приборами. При этом значения определяемых параметров будут, естественно, относиться к процессам несравненно большего масштаба, чем при измерениях малоинерционными приборами.

Сравнительно простым и в то же время дающим интересные данные методом исследования диффузии примесей в море является метод, основанный на наблюдении за движениями дискретных индикаторов в океане. Впервые такой метод был реализован Ричардсоном и Стоммелом [153] для исследования зависимости коэффициента горизонтального обмена в океане от масштаба явления. Ричардсон и Стоммел использовали для этой цели небольшие поплавки, наблюдения за движением которых осуществлялось с пирса в течение около 22 мин с дискретностью 30 с. В результате был получен ряд значений взаимных расстояний между парами индикаторов, а обработка этих данных велась по формулам теории относительной диффузии. Наблюдения с использованием плавающих индикаторов были затем повторены Стоммелом [156] вблизи Атлантического побережья Америки и в районе Бермудских островов. Обширные наблюдения, основанные на такой методике, были осуществлены в последующие годы Озмидовым [81] в искусственных водоемах, Каспийском море и в Тихом океане. Эти работы позволили, исследовать зависимости параметров диффузии от масштаба явления и других факторов в широком диапазоне их изменчивости. Диффузионные исследования с использованием дискретных индикаторов затем проводились в Черном море (см. [35]) и в других районах океана.

Интерпретация данных опытов с диффузией дискретных частиц в рамках теории относительной диффузии позволяет получить много интересных сведений о диффузии, однако извлекать из них сведения о полях концентрации примеси, как мы видели выше, достаточно сложно. В связи с этим большое распространение получили в океанологии опыты с искусственно вводимыми в океан растворимыми примесями, наблюдения за диффузией которых осуществляется тем или иным способом. Такой метод исследования позволяет проводить строго контролируемые диффузионные эксперименты, при которых точно известны и начальные, и граничные условия задачи. В качестве примесей в подобного рода опытах чаще всего используются радиоактивные изотопы или флюоресцирующие красители. Применение этих веществ позволяет определять весьма малые их концентрации с помощью соответствующей аппаратуры. При использовании радиоактивных изотопов

5*

67

такой аппаратурой служат различного рода детекторы излучений. Пробы воды могут отбираться и затем анализироваться на борту судна или на берегу. При этом часто осуществляется предварительное концентрирование радиоизотопов в пробе с использованием радиохимических или сорбционных методов. Для определения активности собранных проб, кроме стандартных радиометрических установок, могут использоваться и гамма-спектрометры. Более оперативно и удобно, естественно, использование в океане погруженных или буксируемых гамма-спектрометров [69].

Выбор тех или иных нерадиоактивных веществ в качестве индикаторов (трассеров) определяется следующими основными требованиями:

а) возможностью измерения малых концентраций индикатора в океанской воде;

б) безопасностью для морской флоры и фауны, а также для человека;

в) слабой зависимостью трассирующего свойства вещества от факторов океанской среды (температуры, солености, давления и т. д.) и высокой его стойкостью в реальных условиях океана;

г) небольшой стоимостью и доступностью.

Всем этим требованиям в значительной степени удовлетворяют люминесцирующие красители (родамин, натриевая соль флюоресцеина — уранин и др.), в связи с чем такие красители широко используются для диффузионных опытов в океане. Особенно удобно проводить такие опыты не методом отбора проб с последующим их анализом, а с помощью буксируемого датчика концентрации люминесцентных индикаторов (флюориметра). Приборы с такими датчиками обеспечивают достаточную скорость съемки поля концентрации, имея при этом хорошую чувствительность и высокое пространственно-временное разрешение.

Конструкция буксируемого флюориметра, естественно, должна учитывать особенности процесса диффузии примеси в море, закономерности люминесценции красителей, а также специфику морских натурных экспериментов. Первый работоспособный вариант буксируемого флюориметра был создан у нас в стране Карабашевым [43]. В конструкции датчика применена одна из традиционных оптических схем, когда пучок возбуждающего флюоресценцию света направлен под углом 90° к оси приемника света люминесценции. В качестве источника света использовалась обычная лампа накаливания. Пучок света от лампы через конденсор и поворотную линзу проходит через интерференционный светофильтр и иллюминатор. Свет люминесценции, возбужденный светом лампы, через иллюминатор и светофильтр попадает на фотокатод фотоэлектронного умножителя. Электронная схема прибора представляла собой модификацию логарифмического фотометра, что позрегистрировать концентрации красителя, меняющиеся воляло в пределах от 10⁻⁶ до 10⁻¹⁰ г/см³.

Флюоресцеин и родамин обладают яркими полосами люминесценции в видимой области спектра, возбуждаемыми электромагнитными колебаниями оптического диапазона частот. Максимум спектральной кривой поглощения флюоресцеина расположен на длине волны 480 нм, а родамина — на 550 нм. Максимумы полос люминесценции соответственно расположены на длинах волн 530 и 590 нм. Свечение красителей изотропно и практически безынерционно (возбужденное состояние молекул — порядка 10⁻⁸ с). Ис-

ходя из этих характеристик красителей подбирались и светофильтры в приборе.

Градуировка флюориметра осуществлялась с использованием набора растворов красителя с точно определенными концентрациями. Градуировочная кривая имела практически прямолинейный участок на большей части шкалы, и лишь при крайних значениях концентрации наблюдались небольшие отклонения от линейной зависимости.

Рис. 2.1. Оптическая схема флюориметра.

Л — источник света; 1 — коиденсор; 2 первичный светофильтр; 3 — поворотная призма; 4, 5 — илломинаторы; 6 — вторичный светофильтр; 7 — фотоумножна тель; 8 — диск с отверстиями; М электромотор; 0 — защитный экран.

Работа с первым образцом флюориметра на Черном море показала его эффективность для диффузионных исследований. Была подтверждена и правильность основных конструктивных решений прибора. Вместе с тем возникла необходимость устранить ряд недостатков прибора -- в первую очередь засветку фотоприемного устройства ярким дневным светом, что затрудняло работы в дневное время суток. Решение было найдено в модулировании возбуждающего излучения с помощью вращающегося диска с отверстиями. Такое устройство позволяло затем в электронной схеме прибора отфильтровывать переменную составляющую сигнала от постоянной фоновой засветки дневным светом. Для уменьшения уровня этой засветки использовались также защитные экраны у иллюминаторов и гофрированные пластинки, служащие световыми ловушками. Оптическая схема флюориметра изображена на рис. 2.1.

Электрическое питание погружаемой в море части прибора осуществлялось по кабелю от аккумуляторной батареи или от сети судна. По этому же кабелю на борт судна поступали и сигналы датчика флюориметра, а также датчика глубины погружения прибора. Регистрация сигналов может осуществляться на самописцы или на магнитные носители. Инерционность фотометрической схемы была близка к 0,2 с, объем воды, свечение которого регистрировалось прибором, было близко к 100 см³. Потребляемая мощность прибора — около 80 Вт, длительность непрерывной работы при уходе нуля на ± 4 % от всей шкалы не менее 7 ч, диапазон рабочих глубин 0—100 м при любых уровнях естественного освещения поверхности моря Солнцем.

Описанная модель флюориметра успешно использовалась для диффузионных опытов в водах с весьма различными оптическими характеристиками — от прозрачных вод Черного моря с глубиной видимости белого диска 20—22 м и до крайне мутных вод Балтийского моря в прибойной полосе отмелого песчаного берега. В одном из опытов была осуществлена синхронная регистрация содержания индикатора в одном и том же объеме воды двумя приборами — буксируемым флюориметром и проточным лабораторным флюориметром фирмы «AMINCO» (с линейной шкалой), в кювету которого забортная вода подавалась через шланг. Сопоставление полученных таким образом записей распределения индикатора обнаружило:

1) заметное запаздывание регистрации проточным флюориметром по сравнению с буксируемым;

2) искажение формы распределения индикатора проточным флюориметром при больших градиентах концентрации;

3) отсутствие тонкой структуры распределения при регистрации проточным флюориметром, что объясняется пространственным осреднением профиля концентрации каналом прокачки длиной несколько метров.

Эти недостатки проточного регистрирующего прибора особенно существенны на начальной стадии процесса диффузии, когда неоднородность пятна индикатора особенно велика. Последнее обстоятельство делает также неудобным линейный масштаб записи. Однако спустя 3-4 ч с момента запуска индикатора в море оба прибора давали почти одинаковые записи. Таким образом, этот эксперимент наглядно показал, что более полная информация о диффузии примеси в море при натурном моделировании процесса с помощью люминесцентных индикаторов может быть получена посредством буксируемой аппаратуры с регистрацией как в логарифмическом, так и в линейном масштабе. При этом линейный прибор не следует применять на начальной стадии процесса. Решающим требованием к такому прибору служит высокая чувствительность. В экспериментах в поверхностном слое моря буксируемый линейный флюориметр может быть заменен проточным бортовым прибором для регистрации распределений индикатора лишь спустя несколько часов после запуска индикатора в море.

Высокие эксплуатационные качества прибора позволили создать такую методику опытов, которая обеспечила объем исходных данных, достаточный для уверенного определения средних характеристик стохастического процесса диффузии в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. Главное внимание уделялось при этом отработке техники эксперимента с точечными стационарным и мгновенным источниками индикатора как имитацией двух случаев рассеяния примесей в море, представляющих наибольший практический и теоретический интерес.

При непрерывном и равномерном истечении индикатора из неподвижного точечного источника в водном потоке образуется индикаторное тело в виде «пера», вытянутого по течению и расширяющегося вследствие диффузии с удалением от источника. В силу статистически стационарного характера процесса мгновенные значения концентрации индикатора в любой точке «пера» флюктуируют относительно наиболее вероятного или среднего значения, однако последнее должно оставаться постоянным после начального переходного периода, если средняя скорость течения и другие параметры среды не меняются во времени. В этих условиях поле средней концентрации индикатора можно определить путем многократной регистрации распределения индикатора в поперечном сечении «пера» на нескольких фиксированных расстояниях от источника в различные моменты времени. Последнее обстоятельство чрезвычайно упрощает эксперимент. При достаточном числе промеров среднее распределение индикатора на данном расстоянии от источника может быть найдено с точностью, определяемой погрешностями измерения координат и инструментальной ошибкой оценки концентрации индикатора. Главное достоинство работ со стационарным источником в том и состоит, что средние распределения индикатора могут быть получены без особых затруднений и непосредственно сопоставлены с теоретическими выражениями, описывающими распределения осредненных значений концентрации примеси.

Для имитации стационарного источника используется специальная установка, в которой исходный раствор индикатора выдавливается сжатым воздухом поочередно из двух контейнеров через шланг на заданную глубину (рис. 2.2). Эта установка полностью автономна, пригодна для работы с любых судов и обеспечивает равномерную подачу индикатора в течение длительного времени в широком диапазоне глубин. В ряде случаев не менее успешным оказывается применение простейшего стационарного источника в виде открытого бака со шлангом, через который раствор красителя истекает в море. Мощность такого источника регулируется диаметром выходного отверстия и высотой бака над уровнем моря.

Определение поля концентрации индикатора от стационарного источника ведется следующим образом (рис. 2.3). Устройство для имитации стационарного источника устанавливается на судне C_1 . Это судно в месте проведения эксперимента становится на глубоководный якорь. После сборки устройства и заправки исходным

раствором индикатора обоих контейнеров свободный конец шланга заглубляется до требуемого горизонта. С подачей избыточного



Рис. 2.2. Устройство для создания непрерывного точечного источника индикатора.

1 — баллон со сжатым воздухом; 2 — манометры; 3, 4 вентили; 5 — емкости для раствора красителя; 6 — отверстия с заглушками для залива раствора; 7 — шланг для выпуска красителя в море.



Рис. 2.3. Схема опыта со стационарным точечным источником индикатора. Объяснения в тексте.

давления в один из контейнеров начинается истечение раствора и формирование индикаторного тела. Собственно измерения начинаются спустя некоторое время после начала процесса с помощью
судна C_2 , на котором установлена измерительная аппаратура. На различных удалениях L от источника судно C_2 с датчиком за бортом выполняет по 10—20 промеров для каждого L. Расстояние от источника до места промера может определяться радиолокатором, дальномером или просто по длине капронового фала, связывающего судно C_1 и дрейфующий буй B_1 , снабженный подводным парусом. Если позволяют условия эксперимента, то ниже по течению на удалении L_2 от буя B_1 желательно установить заякорный буй B_2 . Тогда судно C_2 может делать циркуляции, как показано на рис. 2.3, выполняя за одну циркуляцию два промера на удалении L_1 и $L_1 + L_2$ от источника. Величина L_2 определяется либо инструментально с судна C_1 , либо по скорости течения и времени дрейфа поплавка от B_1 до B_2 .

Подобная схема эксперимента со стационарным источником позволяет определить координаты промера с помощью доступных и несложных приемов с судов, не располагающих современным навигационным оборудованием. В частности, на Черном море работа велась с тралботов водоизмещением всего по 78 т. Если, как это обычно делается при теоретическом анализе, начало отсчета совместить с источником индикатора, ось x направить вдоль среднего вектора скорости течения V, ось z ориентировать в надир, то при подобной схеме эксперимента x-координата определяется величинами L_1 и L_2 , y-координата может быть найдена по длине и масштабу записи на ленте регистрирующего прибора, а z-координата — по отсчетам датчика глубины.

Размеры индикаторного тела в случае стационарного источника зависят как от мощности источника (количество индикатора, вводимого в море за единицу времени), так и от кинематической структуры потока. Описанное устройство для имитации стационарного источника позволяло получать «перья» индикатора длиной до 1—1,5 км и шириной до 40—60 м (в пределах чувствительности датчика) при скоростях течения 10—40 см/с и мощности источника 300—600 г/ч. Изменение мощности источника осуществлялось регулировкой избыточного давления в контейнерах, тогда как концентрация исходного раствора была во всех опытах одинакова и равнялась 1 · 10⁻³ г/мл.

Значительно труднее получить удобный для теоретических сравнений экспериментальный материал в экспериментах с мгновенным источником индикатора. Здесь для получения осредненных картин диффузии необходимо произвести несколько идентичных опытов и в каждом из них выполнить «мгновенные» съемки пятен индикаторов через определенные промежутки времени. Далее следует осреднить «мгновенные» картины по сериям съемок, сделанных в одинаковые периоды процесса диффузии. При этом средние гидрометеорологические условия должны оставаться неизменными. Сложность подобной работы даже при наличии надежной аппаратуры весьма велика и потому обычно диффузия от мгновенного источника исследуется путем периодических квазисинхронных съемок единственного пятна индикатора на протяжении OT нескольких часов до нескольких суток с момента запуска индикатора.

Устройство, предназначенное для имитации мгновенного источника примеси, помимо соответствия общим требованиям (компактность, транспортабельность, надежность и т. п.), должно обеспечивать достаточно быстрый (за время около 1 с) запуск больших количеств красителя (от 1 до 100 кг) на заданную глубину. Каких-либо типовых устройств, в полной мере отвечающих этим требованиям, до сих пор, по-видимому, не существует. Разработка их затрудняется главным образом тем, что из-за сравнительно малой растворимости индикаторов масса исходного раствора должна по крайней мере в несколько раз превышать массу содержащегося в нем индикатора. Поскольку размеры пятна непосредственно зависят от запущенного количества индикатора, для обеспечения достаточной длительности и масштабов процесса при каждом запуске желательно вводить в море возможно большее количество индикатора.

В опытах на Черном море мгновенный запуск индикатора на поверхность моря осуществлялся из специальной двухсотлитровой металлической емкости. Ниже ее центра тяжести была вварена горизонтальная ось, на концы которой надеты проушины рамы, служащей для крепления емкости к тросу лебедки. Несложный фиксатор на раме удерживает емкость от вращения вокруг оси. После заправки емкости исходным раствором и вывода ее на грузовой стреле за борт фиксатор выводится из зацепления с емкостью и при опрокидывании последней раствор выливается на поверхность моря. Для запуска малых количеств красителя (до 1-2 кг) был сконструирован специальный контейнер объемом 10 л. Контейнер представляет собой винипластовый цилиндр с крышками на торцах. Контейнер, заправленный исходным материалом, крепится зажимами к тросу лебедки и в закрытом виде (в отличие от обычного батометра) опускается на заданный горизонт. Под действием посыльного груза срабатывает механизм, управляющий движением крышек, причем последние занимают вертикальное положение. При последующем подъеме контейнера его содержимое остается на прежнем месте, практически сохраняя форму контейнера.

Наблюдение за диффузией от мгновенного источника по методу квазисинхронной съемки проводится следующим образом. Спустя некоторое время после запуска индикатора судно с датчиком за бортом выполняет серию промеров поперек пятна в возможно более короткий срок. Последующие съемки выполняют через фиксированные промежутки времени до полного исчезновения пятна. Как правило, направления промеров и интервалы между съемками выбираются в ходе экспериментов, так как предсказать заранее форму, ориентацию и скорость движения пятна затруднительно.

Если в результате подобного рода опыта должна быть получена пространственная картина распределения индикатора относи-

тельно неподвижной системы координат, особую роль должно иметь навигационное обеспечение эксперимента. Но точность навигационной привязки, обеспечиваемая даже системой навигации типа ДЕККА, является недостаточной для съемки пятен с размерами порядка 1-10 км. По этой причине можно использовать «навигацию относительно воды». Этот метод основан на измерении удаления и азимута судна относительно буя с отражателем и подводным парусом по показаниям судового радиолокатора, причем предполагается, что в течение всего времени измерений взаимная ориентация буя и области максимальной концентрации в пятне остается неизменным. Однако, как показывает опыт работ, такая ориентация сохраняется достаточно продолжительное время лишь при благоприятных погодных условиях во время эксперимента. При наличии же ветра даже средней силы дрейфующие буйки, как правило, выходили за пределы пятна через 2-3 ч после начала опыта. Таким образом, «навигация относительно воды» не отвечает требованиям всепогодности. В прибрежной зоне моря хорошую точность привязки могут обеспечить теодолитная засечка судна береговыми наблюдателями, радионавигационные и радиолокационные средства, а также аэрофотосъемка. Для интерпретации же результатов диффузионных опытов в рамках теории относительной диффузии вполне достаточной является «навигация относительно центра тяжести пятна». Очевидно, что такого вида навигация весьма проста, поскольку она требует лишь знания скорости движения судна и прокладки каждого измерительного галса судна через центральную часть пятна, которую обычно с достаточной степенью точности можно определить визуально.

Трехмерное распределение индикатора может быть оценено двумя способами: вертикальным зондированием датчиком с дрейфующего судна либо путем буксировки датчика через индикаторное тело на различных глубинах. Применение первого способа предполагает выполнение большого числа дрейфовых станций в пределах видимых границ индикаторного тела или заранее намеченного участка моря. Для исследования диффузии от мгновенного источника такая процедура малопригодна из-за дополнительных затрат времени на остановку судна и зондирование и, следовательно, несоблюдения требования «квазисинхронности» съемки. Фактор времени не играет существенной роли при исследовании стационарного распределения индикатора, однако и в этом случае получение трехмерной картины путем вертикального зондирования трудноосуществимо, ибо поперечные размеры индикаторного тела, как правило, меньше или сравнимы с размерами экспедиционных судов, что делает невозможным определение местоположения судна относительно «пера» индикатора. По-видимому, вертикальное зондирование оправдано лишь в отдельных случаях как вспомогательный прием для ориентировочной оценки распространения примеси по вертикали.

Измерение концентрации индикатора на ходу судна является наиболее результативным приемом, и при наличии буксируемого

датчика вертикальное распределение индикатора может быть легко получено, если заглубление датчика можно менять на ходу судна. Такая возможность была реализована, в частности, во время опытов на Черном море. Способ буксировки флюориметра показан на рис. 2.4. Для получения трехмерной картины распределения индикатора в «пере» от стационарного источника на каждом удалении от последнего необходимо произвести несколько серий



Рис. 2.4. Схема измерения распределения индикатора на глубинных горизонтах с помощью буксируемого флюориметра Д.

Р — заглубляющее устройство; К — кабель; длина несущего троса может меняться в ходе эксперимента с помощью лебедки. Кабель и трос могут быть заменены единым кабель-тросом.

промеров, каждая из которых соответствует определенному заглублению датчика. Подобным образом можно выполнить и разноглубинную съемку пятна индикатора от мгновенного источника, однако здесь несинхронность съемок на разных горизонтах может являться источником дополнительных погрешностей. Оптимальным решением проблем является использование нескольких датчиков, буксируемых на разных глубинах с одного судна на одном тросе.

В мелководных прибрежных районах моря может быть реализована методика диффузионных опытов, позволяющих исследовать временное изменение концентрации индикатора в фиксированной точке «пера» от стационарного источника (рис. 2.5). С этой целью на дно устанавливается тренога с прикрепленным к ней флюориметром, а выше него по течению размещается стационарный источник индикатора. При наличии нескольких датчиков подобная методика эксперимента может оказаться особенно эффективной для решения практических задач, например при натурном моделировании устройства для сброса отходов в море в тех случаях, когда буксировка оказывается невозможной (малые глубины, сложный рельеф дна, тяжелые погодные условия и т. д.).

В настоящее время существует еще целый ряд модификаций флюориметров. Например, в Институте океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР используется прибор, в котором, кроме собственно флюориметрической части, имеется датчик температуры воды, позволяющий одновременно с измерением поля концентрации при-



Рис. 2.5. Схема опыта с неподвижными источниками индикатора (О) и флюориметром (А) в прибрежной зоне моря.

Б — регнстрирующая аппаратура на береговой базе.

меси определять и термическую структуру водной среды. Ряд зарубежных фирм выпускают флюориметры серийно.

Весьма перспективными для исследования процессов диффузии примесей в океане являются дистанционные, аэрокосмические методы. Эти методы, несомненно, имеют ряд преимуществ перед контактными способами измерений. Первое из них - синхронность пространственной съемки, недоступная контактным методам. Второе преимущество - возможность получать серии синхронных съемок, разделенных наперед заданным интервалом времени, что позволяет исследовать временную изменчивость явления в широком диапазоне масштабов. И, наконец, еще преимущество — возможность исследовать процессы, не возмущая их прибором или судном, что особенно существенно для процессов с масштабами единицы-десятки метров. Естественно, что у дистанционных методов есть и недостатки по сравнению с контактными измерениями. Например, по аэрофотоснимкам пятен красителя не всегда просто восстановить истинные значения концентрации красителя в диффундирующем пятне или струе. Кроме того, на снимке фиксируется некоторое интегральное значение концентрации вдоль луча зрения, в связи с чем трехмерные картины диффузии в этом случае получить вообще затруднительно. Поэтому оптимальным при диффузионных экспериментах, очевидно, является сочетание контактных и дистанционных методов, взаимно дополняющих друг друга.

При обработке аэрофотоснимков или изображений, полученных из космоса, следует, вообще говоря, учитывать поглощающие свойства атмосферы, меняющиеся в зависимости от ее состояния. Объективной интерпретации полученных снимков помогает многозональная съемка. Для определения степени почернения негатива желательно использовать микрофотометры и денситометры. Наиболее удобными при этом являются приборы, автоматически переводящие контрасты изображения в цифровую информацию, вводимую затем в ЭВМ. Градуировку получаемых фотоматериалов необходимо проводить при помощи одновременных контактных измерений концентрации красителя флюориметром, причем желательны не только буксировки прибора, но и зондирования, обеспечивающие лучщую сопоставимость реальной и расчетной картин прохождения луча света через краситель к фотоаппарату.

2.2. Диффузия от мгновенных точечных источников

Флюоресцирующие красители для исследования процессов диффузии в море были, по-видимому, впервые применены Гуннерсоном в 1956 г. и японскими учеными в следующем году (см. [81]). Японские океанологи провели опыт с использованием 4 кг красителя, что позволило вести наблюдение над процессом диффузии около 4 ч, по истечении которых радиус пятна диффундирующего индикатора достигал 400-500 м. В 1960 г. опыты с запусками 1-2 кг родамина провели в Ботническом заливе Хела и Воипио [126]. Максимальные горизонтальные размеры пятен красителя при этом достигали 500 м, в то время как в глубину моря индикатор не проникал глубже 10 м. Методом отбора проб этим авторам удалось получить картину распределения концентрации красителя в пятне. При этом было обнаружено, что значение конценцентре пятна уменьшается со временем обратно трации в пропорционально третьей степени времени диффузии. В последующих опытах различных авторов с запусками небольших количеств индикатора были подмечены интересные особенности диффузии, в частности вытягивание пятен и их дробление на части. Эксперименты в Северном море с запусками больших количеств родамина провели в 1960—1962 гг. Йозеф, Сенднер и Вейдеман [130]. В трех опытах было использовано соответственно 175, 350 и 450 кг красителя, что позволило наблюдать за диффузией пятен в течение 3-5 сут, когда средние радиусы пятен достигали нескольких километров. Результаты опытов сравнивались с решениями уравнения диффузии с линейной зависимостью горизонтального коэффициента диффузии от радиуса-вектора точки наблюдения [129].

При этом удалось определить значение коэффициента пропорциональности в такой зависимости — так называемую скорость диффузии U_1 (см. раздел 1.5). Эти значения оказались близкими к 0,2—0,4 см/с. Глубина проникновения красителя в таких крупномасштабных опытах достигала 30—50 м.

В СССР целенаправленные опыты по исследованию диффузии с помощью флюоресцирующих индикаторов были начаты в Черном море в 1964 г. Опыты проводились с небольших научноисследовательских судов с помощью буксируемого флюориметра. Количество выпускаемого в каждом опыте красителя достигало нескольких килограммов. По истечении 1-2 ч с момента запуска красителя пятна достигали размеров до 500 м и были хорошо видимы на поверхности моря. Пятна обычно диффундировали не строго симметрично, а деформировались и принимали неправильные формы. Поле концентрации примеси в пятнах было весьма неоднородно, краситель образовывал в пятне отдельные «облака» и «перья» различной формы и ориентации. Примеры записей концентрации красителя вдоль ряда галсов, пересекающих пятно, приведены на рис. 2.6. Кривые на рисунке можно рассматривать как «мгновенные» распределения концентрации примеси вдоль различных направлений. Получить же осредненные по нескольким реализациям профили распределения концентрации по этим данным, как уже говорилось выше, затруднительно, так как каждое новое пересечение пятна прибором осуществляется в другое время нестационарного процесса диффузии пятна. Единственным возможным способом осреднения здесь является метод сглаживания (фильтрации) каждой индивидуальной кривой с помощью некоторого сглаживающего фильтра.

Аналитически операция фильтрации функции от одной переменной *u*(*t*) может быть представлена выражением

$$\bar{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta) R(t-\theta) d\theta, \qquad (2.2)$$

где $\bar{u}(t)$ — сглаженная функция u(t); $R(\theta)$ — ядро сглаживания; θ — переменная интегрирования. В идеальном случае через фильтр (2.2) должны «проходить» без искажения низкочастотные вариации u(t) до выбранного масштаба T_0 , а более короткопериодные составляющие при этом должны «подавляться» полностью. Выбор величины T_0 (масштаба осреднения) должен диктоваться физическими особенностями изучаемого процесса, предварительным анализом функции u(t) или какими-либо другими соображениями. Частотная (спектральная) характеристика идеального фильтра должна иметь, очевидно, вид прямоугольника со значением 1 от нулевой частоты до частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0$ (рис. 2.7). Функция $R(\theta)$ с такой характеристикой имеет вид

$$R(\theta) = \sin(\omega_0 \theta) / (\pi \theta). \tag{2.3}$$

Действительно, интеграл (2.2) при таком виде функции $R(\theta)$ и при $u(t) = \sin(\omega t)$ равен нулю для частот $\omega > \omega_0$, а при $\omega < \omega_0$ сину-

соидальное колебание остается неизменным после воздействия на него операции сглаживания. При $\omega = \omega_0$ значение интеграла в рассматриваемом случае равно 1/2.



Рис. 2.6. Примеры распределения концентрации примеси в диффундирующем пятне родамина на горизонтальных разрезах по данным опытов 1965 г. в Черном море.

Применение идеального фильтра (2.3) на практике, однако, неосуществимо, так как интегрирование в бесконечных пределах для экспериментально полученных функций (или рядов наблюдений) невозможно. Поэтому в практике используются ядра осреднения, определенные на конечных участках оси θ . При этом характеристика фильтра, естественно, изменяется — она «размазывается» тем или иным образом по оси частот (волновых чисел). Причем чем на более локализованном участке оси θ определена функция $R(\theta)$, тем шире такое «размазывание» частотной (спектральной) характеристики фильтра. В океанологии наиболее употребительным является так называемый «косинус-фильтр», функция $R(\theta)$ для которого записывается в виде

$$R(\theta) = \begin{cases} [1 + \cos(\omega_0 \theta)]/2, & -\pi/\omega_0 \leq \theta \leq \pi/\omega_0; \\ 0, & |\theta| > \pi/\omega_0, \end{cases}$$
(2.4)

где ω_0 — частота (или соответственно для пространственного осреднения волновое число k_0) определяет масштаб разделения гармо-



Рис. 2.7. Спектральные характеристики идеального ядра сглаживания (1) и косинус-фильтра (2).

нических составляющих функции u(t) на осредненные и пульсационные части. Частотная характеристика этого фильтра (отношение амплитуды поступающего на фильтр гармонического колебания к амплитуде прошедшего колебания той же частоты ω) приведена на рис. 2.7. Как видно, она существенно отличается от идеальной. Косинус-фильтр частично пропускает составляющие сглаживаемой функции с частотами, меньшими ω_0 (а для пространственных переменных соответственно возмущения с большими масштабами, чем $L_0 = 1/k_0$), и в то же время в некоторой степени подавляет составляющие с меньшими частотами, чем ω_0 .

Представления о скорости роста размеров диффундирующего пятна примеси дают распределения концентрации красителя в поперечных горизонтальных сечениях пятна в различные моменты времени, полученные в опытах 1965 г. через 44, 93, 108, 128, 172 и 258 мин после запуска «точечного» источника родамина (кривые a-e на рис. 2.8). Размеры пятна в процессе диффузии, естественно, в среднем увеличиваются, а концентрация примеси падает. Причем опять-таки из рисунка видно, что отдельные реализации функции c(x, y, z, t) носят нерегулярный характер, обусловленный сложной турбулентной структурой движения водных масс моря. Немонотонность роста размеров пятна по приведенным его разрезам обусловлена неправильной формой пятна, в связи с чем отдельные пересечения могут проходить вдоль или поперек направления вытянутости пятна.

В черноморских опытах с мгновенными точечными источниками примеси была четко зафиксирована и резкая анизотропия про-



Рис. 2.8. Примеры записей горизонтального распределения концентрации примеси в диффуидирующем пятне в последовательные моменты после запуска красителя (a - 44 мин, $\delta - 93$ мин, s - 108 мин, c - 128 мин, $\partial - 172$ мин, e - 258 мин). Опыт в Черном море, 1965 г.

цесса диффузии в горизонтальных и вертикальном направлениях. На рис. 2.9 приведен пример записи вертикального распределения концентрации красителя в центральной части пятна, когда оно имело горизонтальные размеры около 500 м. Запись получена

с неподвижного судна путем зондирования толщи воды флюориметром. Из рисунка видно, что глубина проникновения индикатора не превышала в рассматриваемом случае 15 м, причем участок записи приблизительно от 7 до 15 м имеет очень малые значения концентрации. То есть заметное проникновение примеси в глубину в момент зондирования не превышало 7 м и, следовательно, отно-



Рис. 2.9. Пример вертикального распределения концентрации примеси в центральной части диффундирующего пятна.

шение горизонтальной и вертикальной осей диффундирующего «тела» красителя достигало 70. Этот пример, так же как и результаты других авторов, может, очевидно, служить хорошей иллюстрацией изложенных в разделе 1.4 построений о влиянии плотностной стратификации вод моря на процесс диффузии.

В опытах 1965 г. в Черном море было произведено два запуска красителя. В одном случае использовано 6 кг родамина, во втором — 10 кг. Съемка первого пятна осуществлялась около 6 ч, в течение которых было сделано 26 пересечений пятна с буксируемым флюориметром. Второе пятно было пересечено 15 раз.

Удобной характеристикой для сопоставления теоретических предсказаний с данными эксперимента может служить, как мы ви-

дели, концентрация примеси в центре диффундирующего пятна. Однако оценить эту характеристику из отдельных записей при пересечках пятна не так просто. Во-первых, получаемые значения концентрации надо каким-то образом осреднить. Во-вторых, не надо упускать из виду, что отдельные пересечения пятна могут иметь не диаметральное, а хордовое направление, так как визуально определить во время измерений центр пятна достаточно сложно. Для устранения этих трудностей был предложен [88] следующий прием. Максимальные значения концентрации краси-



Рис. 2.10. Изменение во времени концентрации примеси в цеитре диффуидирующего пятна по данным опыта 1965 г. в Черном море.

теля в каждом из промеров наносятся на логарифмический график, по оси абсцисс которого откладывается время с момента запуска красителя. Такие точки на графике обычно располагаются хаотически. Но если считать, что максимальная концентрация примеси в пятне есть монотонно убывающая функция времени, то для выяснения вида этой функции естественно использовать на графике лишь точки, отстоящие от оси абсцисс на максимальные (по сравнению с соседними точками) расстояния. Остальные же точки естественно тогда относить к «хордовым» разрезам через пятно.

Изложенный прием был использован при анализе 26 записей концентрации, полученных при пересечении пятна, образовавшегося после запуска 6 кг красителя. Оказалось, что экстремальными по отношению к соседним точкам были максимальные значения концентрации для 3, 4, 5, 10 и 22 промеров. Эти точки нанесены на график рис. 2.10, на который нанесена методом наименьших квадратов и аппроксимирующая прямая. Ее наклон оказался весьма близок к 2 (2,03), что соответствует обратно-квадратичной зависимости осредненной максимальной концентрации в пятне от времени. Такая зависимость, как было показано в разделе 1.5, следует из некоторых теоретических моделей явления при зависимости коэффициента горизонтальной диффузии от масштаба явления и времени. В опытах 1966 г. в Черном море были проведены измерения распределения концентрации красителя в диффундирующих пятнах на разных глубинах. При этом был обнаружен интересный факт сдвига слоев индикатора относительно друг друга на разных горизонтах наблюдений. На рис. 2.11 приведены распределения концентрации красителя на глубинах 5 и 10 м. Как видно, сдвиг



Рис. 2.11. Записи горизонтального распределения концентрации примеси (в относительных единицах) на глубине 5 м (а) и 10 м (б) по данным опыта 1966 г. в Чериом море.

окрашенных слоев относительно друг друга достигал 80—90 м. Такое явление, очевидно, могло быть обусловлено изменением вектора скорости течения с глубиной, связанное, например, с известным фактом такой изменчивости в дрейфовом течении (течении Экмана). Сдвиг скорости в дрейфовом течении трудно наблюдать обычными измерителями течений, так как он, как правило, невелик и может быть затушеван другими процессами. В рассматриваемом случае относительный сдвиг слоев воды, разнесенных на 5 м, достиг 80—90 м по истечении приблизительно 2,5 ч после начала диффузии. Следовательно, средняя разность скоростей этих слоев жидкости была всегда около 2 см/с, что трудно обнаружить обычными измерителями течений. Аналогичный сдвиг окрашенных слоев жидкости в верхнем слое моря наблюдали на аэроснимке пятна родамина авторы работы [131], которые предложили «кометообразную» модель диффундирующего пятна с более высокой концентрацией красителя в передней (по направлению течения) части пятна по сравнению с концентраций в «хвостовой», заглубленной зоне пятна.

Сдвиг скорости течений (наряду с анизотропией турбулентности) может привести, как было показано в разделе 1.6, к вытягиванию и повороту пятен диффундирующего красителя. Экспериментальные подтверждения этим явлениям были получены во время опытов 1967 г. в Черном море [88]. Был осуществлен запуск двух пятен с использованием 5 и 13 кг родамина. Наблюдения за первым пятном продолжалось около 6 ч, второго — более 16 ч. Заметим, попутно, что измерения пятна красителя с одновременным определением местоположения корабля относительно береговых ориентиров (или при помощи других способов обсервации) дает возможность весьма точно определять средние скорости течения в море. Измерение скорости таким способом лишено ошибок, присущих методу дрейфующих поплавков, всегда подверженных в той или иной степени действию ветра.

Средние скорости течений в период опытов 1967 г. достигали 63 см/с. Такие быстрые течения и связанные с ними сдвиговые эффекты (наблюдения проводились в береговой зоне моря) привели к сильному вытягиванию пятен в процессе диффузии. Так, первое пятно по истечении 2 ч с момента запуска имело в длину 162 м, а в ширину 80 м (в пределах чувствительности прибора). Через 5 ч 45 мин с момента запуска длина пятна достигла 275 м при ширине 87 м. Еще более сильное вытягивание пятна наблюдалось во втором опыте. Через 3 ч с момента запуска пятно имело длину 725 м при ширине 162 м, а через 4 ч 45 мин продольный размер пятна достигал 1137 м, в то время как ширина его уменьшилась до 80 м. Схематические изображения пятен в указанные моменты времени приведены на рис. 2.12. Здесь же указаны направления среднего течения, ветра и береговой черты в районе наблюдений. Скорость ветра во время первого опыта равнялась 5-6,5 м/с, а во время второго менялась от 10 до 6 м/с с переходом от северо-западного до северо-северо-восточного направления. Как видно из рисунка, главные оси пятен не совпадают, вообще говоря, ни с одним из этих направлений.

Причиной вытягивания пятен может быть анизотропность турбулентного обмена в прибрежной зоне моря. На возможность такой анизотропии указывал ряд авторов, в частности Гезенцвей [20] для прибрежной зоны Черного моря. Однако эти выводы были получены для процессов с временными масштабами в несколько недель. В описываемых же опытах этот масштаб был намного меньше, в связи с чем предположение о влиянии береговой черты на процесс, по-видимому, необоснованно. На вытягивание пятен красителя влиял в основном, вероятно, совместный эффект вертикальной диффузии и вертикальной и горизонтальной составляющих градиента вектора скорости течения. Но если для оценки этих эффектов, например, по формуле (1.117) взять средние перепады скорости от берега до точки наблюдений и от поверхности моря до дна, то такие градиенты скорости окажутся недостаточными для объяснения столь интенсивных деформаций



Рис. 2.12. Схематические изображения двух диффундирующих пятен примеси по опытам 1967 г. в Черном море.

Пятно а — по истечении 120 мин (I) и 345 мин (II) с начала запуска, пятно б — по истечении 180 мин (I) и 255 мин (II) с начала запуска. Цифрами 1, 2 и 3 обозначены направления течения, ветра и береговой черты в районе наблюдений.

пятен. По-видимому, существенные для рассматриваемого явления градиенты скорости течений могут быть связаны с мезомасштабными неоднородностями поля скорости, в частности с так называемыми циркуляциями Ленгмюра, часто возникающими в море под действием ветра. Эти циркуляции на поверхности моря образуют полосы схождения течений, на которых скапливаются плавающие предметы и пена. Градиенты скорости в таких циркуляционных движениях вод могут достигать весьма заметных величин, так как расстояния между соседними полосами схождения обычно не превышают нескольких сотен метров. В диффузионных опытах 1967 г. наблюдалось, по всей видимости, вытягивание пятен красителя, обусловленное такими ветровыми циркуляциями, наложенными на сильное вдольбереговое течение. Подобное же явление было отмечено визуально в опытах с пятнами родамина Ичие [128], Крауссом [133] и другими авторами. При достаточно сильных ветрах пятна родамина в их опытах часто разбивались на ряд полос, параллельных ветру.

Приблизительно в эти же годы диффузионные опыты были проведены в разных акваториях океана. Так, у берегов Нидерландов осуществлено несколько опытов с мгновенными точечными источниками красителя [10]. Измерение концентрации индикатора производилось в отбираемых пробах, а также с помощью аэрофотосъемки. Были сделаны попытки сравнить наблюденные распределения концентрации с имеющимися теоретическими выражениями, но отдать предпочтение какому-нибудь из них не удалось. Это объясняется, по всей видимости, сложным очертанием береговой черты, изменчивым рельефом дна и другими факторами, влияющими на процесс в районе наблюдений, но не учитываемых в теоретических моделях. Аппроксимировать зависимость дисперсии пятен красителя от времени диффузии квадратичным и кубичным законами удалось Ичие [128]. По его наблюдениям, вытягивание пятен чаще происходит в направлении ветра или течения, а искривление заглубленной части пятен — в направлении вращения часовой стрелки (по спирали течения Экмана).

Большой комплекс диффузионных экспериментов был осуществлен в 1968 г. в Балтийском море в совместной экспедиции океанологов стран-членов СЭВ [82]. Работы проводились с научноисследовательского судна АН ГДР «Профессор А. Пенк». Использование в опытах буксируемого флюориметра позволило получить достаточно подробные трехмерные картины диффундирующих пятен красителя с точной привязкой положения пятен к координатной системе [115]. На рис. 2.13 приведен пример траектории движения пятна примеси по измерениям на горизонтах 1, 4 и 6 м во время трех съемок. Пятно оконтурено изолинией с концентрацией красителя 10-9 г/см³. Отдельные записи концентрации красителя в поперечных сечениях пятен были подвергнуты сглаживанию с помощью косинус-фильтра. Пример такого сглаживания с масштабами осреднения 15, 35, 70 и 140 м приведен на рис. 2.14. Картины изолиний концентрации красителя в диффундирующих пятнах в моменты времени и на горизонтах, соответствующих указанным на рис. 2.13, приведены на рис. 2.15. На рисунках нанесены также траектории измерительных галсов и направление юг-север. Масштаб каждого изображения отличен один от другого и указан под рисунками. Пятна ограничены на рисунках изолиниями с концентрацией красителя 10-9 г/см3. Аналогичные картины изолиний концентрации красителя при опыте со вторым пятном приведены на рис. 2.16. По полученным картинам распределений концентрации для четырех запусков красителя были построены зависимости максимальных концентраций красителя в центрах пятен от времени диффузии. Такие зависимости для разных горизонтов наблюдений приведены на рис. 2.17. Как видно из рисунка, все полученные во время опытов в Балтийском море данные



Рис. 2.13. Траектории движения пятна красителя во время опытов 23 августа 1968 г. в Балтийском море. Положение пятна в период съемок I, II и III на горизонтах 1 (а), 4 (б) и 6 (в) м. О — точка запуска пятна. Интервалы времени от запуска пятна до съемки Ia — 92 мии, до съемки IIa — 340 мин, до съемки IIв — 390 мин, до съемки IIIa — 516 мин.



Рис. 2.14. Пример сглаживания записи концентрации примеси с помощью косинус-фильтра с масштабом осредиения 15 (б), 35 (в), 70 (г) и 140 (д) м. Кривая а — запись без сглаживания.

очень хорошо удовлетворяют обратной кубической зависимости концентрации красителя в центре пятна от времени диффузии. Аппроксимация картин распределения концентрации красителя решениями уравнения диффузия без адвективных членов, но с различными для трех осей координат коэффициентами диффузии (K_x, K_y, K_z) позволила оценить значения этих коэффициентов. Полученные по данным двух опытов значения горизонтальных коэф-



Рис. 2.15. Картины распределения коицентрации красителя в диффундирую и на горизонтах, соответствующих

фициентов диффузии приведены в табл. 2.1. Значения вертикального коэффициента диффузии K_z для этих опытов оказались равными 4 и 5 см²/с, т. е., как и следовало ожидать, во много раз меньше значений K_x и K_y , которые, как не трудно заметить из таблицы, имеют тенденцию возрастать с увеличением времени диффузии. Значительное превышение значений коэффициента K_x (вдоль осредненного течения) по сравнению с K_y обусловлено фактическим включением в K_y эффектов сдвига скорости течения, не учитываемых при аппроксимации экспериментальных распределений модельными кривыми. Таким образом, в данном случае

оценивался фактически коэффициент $K_L^{\circ \phi}$, определенный, например, формулой (1.112).

Подробное исследование влияния градиентов скорости течения на диффузию пятен примеси было проведено во время опытов



щем пятне в опыте 23 августа 1968 г. в моменты времени изображенным на рис. 2.13.

1968 г. в Черном море [88]. Был осуществлен запуск пятна с использованием 25 кг родамина. В районе опыта были установлены две буйковые станции с измерителями течений. За время опыта сделано три съемки пятна, причем в каждой съемке было проведено по одному пересечению вдоль имеющего вытянутую форму пятна и по нескольку поперечных пересечений. Распределения концентрации примеси в пятне для каждой съемки приведены на рис. 2.18. Как и в опытах 1967 г., наблюдалось вытягивание пятен красителя в процессе диффузии. Так, по истечению 2 ч 16 мин с момента запуска (за момент съемки принимается время сере-







Рис. 2.16. Картины распределения концентрацни красителя в диффундирующем пятне в опыте 30 августа 1968 г. на горизонтах 1 (а), 5 (б) и 7 (в) м во время двух съемок (I и II). Интервал времени от запуска пятна до съемки Ia — 142 мин, до съемки I6 — 180 мин, до съемки II6 — 493 мии, до съемки II6 — 523 мин.

дины периода данной съемки) пятно имело в длину 750 м и в ширину 160 м (в пределах изолинии 10⁻⁹ г/см³). Через 4 ч 23 мин длина пятна достигала 1650 м, а ширина 300 м. Через 7 ч 46 мин с момента запуска длина пятна превысила 2200 м при ширине 400 м. Таким образом, отношение длины к ширине пятна равня-



Рис. 2.17. Зависимость от времени максимальной концентрации красителя в центре пятен по данным опытов в Балтийском море 21 августа (а), 23 августа (б), 30 августа (в) и 1 сентября 1968 г. (г) на горизонтах 1 (1), 3 (2), 4 (3), 5 (4), 6 (5) и 7 (6) м.

лось 4,7; 5,5 и 5,5 соответственно для каждой съемки. Угол наклона продольной оси пятна к оси *x*, направленной вдоль параллели, также менялся со временем. Этот угол оказался равным 48° для первой съемки и близким к 0° для двух последующих съемок. Наблюдаемое в опыте вытягивание пятна и изменение ориентации его продольной оси в период с момента запуска до первой съемки удалось объяснить совместным эффектом вертикального

Таблица 2.1

Значения горизонтальных коэффициентов днффузии по данным опытов в Балтийском море

Дата опыта	Горизонт наб- людения, м	Время с момента запуска красителя, мин	<i>К_х</i> см²/с	<i>Ку</i> см²/с
23.08.68	0	92	420	70
	4	340 390	2 630 6 740	107 382
30.08.68		516 142	26 800 2 330	1060 642
	55	180 493	5 130 2 380	733
	7	523	1 950	103

турбулентного обмена и вертикального градиента скорости течения. Интерпретация результатов опыта была проведена в рамках уравнения диффузии (1.126). В этом случае критическое время диффузии, угол наклона оси эллипса к оси x и отношение полуосей эллипса описываются соответственно выражениями (1.127)— (1.129). Для рассматриваемого масштаба явления по данным наблюдений в Черном и Балтийском морях отношение коэффициен-



Рис. 2.18. Распределение концентрации красителя в диффундирующем пятне в периоды трех съемок во время опыта 1968 г. в Черном море (в единицах 10⁻⁹ г/см³).

Длииными стрелками показаны галсы судиа во время съемок, короткими — направление ветра. Римскнми цифрами обозначены номера галсов в каждой съемке.

тов K_L/K_z оказалось близким к 20. Тогда, переписывая (1.129) в виде

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{1}{t} \sqrt{12(\lambda^2 - 1) \frac{K_L}{K_z}}$$
(2.5)

и используя схематические изображения диффундирующих пятен в виде эллипсов вместо сложных кривых на рис. 2.18, получаем для вертикального градиента скорости $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 58,5 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹. Прямой же расчет вертикального градиента скорости по данным измерителей течений на буйковых станциях в районе опыта привел к значению 59,9 · 10⁻⁴ с⁻¹ (при периоде осреднения значений скорости 6 ч). Хорошее согласие получается и для угла наклона большой оси эллипса к оси x: по экспериментальным данным — 48°, а по формуле (1.128) — 54°. Критическое время по формуле (1.127) оказалось равным 43 мин, т. е. первая съемка пятна действительно проходила в период времени, когда уже необходимо учитывать эффект вертикального сдвига скорости течения.

Для объяснения поведения пятна краски за период от первой до третьей съемки оказалось необходимым учесть влияние на процесс диффузии и горизонтальных градиентов скорости течения. Зависимость компонентов скорости от горизонтальных координат была взята следующая:

$$u = u_0 + ax + by; v = v_0 - ax - by,$$
 (2.6)

где постоянные *a* и *b* оценивались по данным измерений скорости течений на буйковых станциях. Решение двумерного уравнения диффузии с компонентами скорости вида (2.6) может быть полу-

чено из более общего выражения (1.117) в системе координат, движущейся вдоль осей x и y соответственно со скоростями u_0 и v_0 . По найденному таким образом решению были построены эллипсы изолиний концентрации, сравнение которых с наблюденными картинами диффузии показало хорошее их согласие. Таким образом, для первого периода диффузии основным определяющим фактором было действие вертикальных градиентов скорости течений. Когда же размеры диффундирующего пятна увеличились, до-

Рис. 2.19. Изменчивость максимальной концентрации красителя в центре диффундирующего пятна в период опыта 3 августа 1968 г. в Балтийском море (по [54]).

Цифрами показаны значения показателя степени *n** в формуле (2.9).

минирующим стало влияние горизонтальных градиентов скорости.

По данным диффузионных опытов в Балтийском море были подсчитаны важные характеристики диффузии пятен красителя дисперсии распределений концентрации красителя вдоль горизонтальных осей координат x и y. Так как концентрация является функцией координат и времени, то дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 определялись по формулам

$$\sigma_{x}^{2}(t) = \frac{\int \int \int x^{2}c(x, y, z, t) dx dy dz}{\int \int \int c(x, y, z, t) dx dy dz};$$
(2.7)
$$\sigma_{y}^{2}(t) = \frac{\int \int \int y^{2}c(x, y, z, t) dx dy dz}{\int \int \int c(x, y, z, t) dx dy dz}.$$
(2.8)



95

Зависимость дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 от времени диффузии *t* оказалась для различных опытов меняющейся в широких пределах. При аппроксимации такой зависимости степенными функциями *t* показатели степени варьировали от 1 до 3 при временах диффузии порядка нескольких часов (см. [55]). Напомним, что к таким зависимостям дисперсий от времени приводят горизонтально-симметричные модели диффузии при различных формах задания зависимости коэффициентов горизонтальной диффузии от масштаба явления.

Интересные результаты были также получены в Балтийском море по скорости падения концентрации примеси в центре пятен. При степенной аппроксимации такие зависимости привели к показателям степени, заключенным в основном между -2 и -3. Измерение средних гидрометеорологических характеристик в период диффузионных опытов дало возможность исследовать связь между значениями показателя степени и определяющими факторами. Так, в одном из экспериментов в Балтийском море было подмечено, что показатель степени —З наблюдался в случаях. когда вектор скорости течения вращался с глубиной, в то время как при однородном потоке показатель был ближе к -2. При быстрых изменениях гидрометеорологических условий во время эксперимента степенная аппроксимация полученных зависимостей вообще оказалась затрудненной [9]. Было также обнаружено, что при увеличении времени диффузии наблюдается тенденция перехода квадратичного закона к кубичному. В прибрежной зоне моря такой переход наблюдался приблизительно после 2 ч диффузии, причем при увеличении расстояния от места эксперимента до берега это время закономерно увеличивалось [117]. В опытах 1974 г. была также подмечена зависимость показателя степени от скорости ветра во время эксперимента.

Более подробно вопрос о связи скорости падения концентрации красителя в центре диффундирующих пятен от гидрометеорологических условий был исследован Кремзером [54]. Для анализа были использованы данные большого массива диффузионных экспериментов, выполненных совместно океанологами стран-членов СЭВ в период 1968—1978 гг. Оказалось, что в этих опытах показатель степени в зависимости $c_{\text{макс}} \sim t^n$ менялся в интервале от 0,3 до 11. В то же время согласно теоретическим моделям явления с постоянными коэффициентами диффузии, как МЫ видели в главе 1, показатель n может меняться лишь в пределах от ---1,0 до -4,5. Для объяснения же более широкого диапазона изменчивости п следует, очевидно, предположить, что и сами коэффициенты обмена могут быть переменными величинами. В общем случае (при постоянных коэффициентах обмена) значение Смакс можно считать пропорциональным (KxxKyyKzz)^{1/2}t-n. Если же коэффициенты диффузии сами могут меняться со временем диффузии по степенным зависимостям, то для смакс будем иметь .

$$C_{\text{MAKC}} \sim t^{-n + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/2} = t^{-n^*},$$
 (2.9)

96

где λ_1 , λ_2 и λ_3 — показатели степени в зависимостях коэффициентов обмена от t. Основным фактором, увеличивающим интенсивность турбулентного обмена в море, следует, очевидно, считать динамическую активность водной среды, обусловленную в первую очередь воздействием ветра. Зависимость показателя степени n^* от изменения скорости ветра V удалось проследить по данным

CMAKC · 10⁹ 2/CM³



Рис. 2.20. Связь значения показателя степени n^* (a) с изменчивостью скорости ветра dV/dt (б) во время опыта 30 августа 1968 г. (по [54]).

Рис. 2.21. Изменение со временем значений максимальной концентрации красителя в центрах диффундирующих пятен во время опытов 13 октября 1974 г. (а) и 7 марта 1977 г. (б).





диффузионного эксперимента 30 августа 1968 г. у о. Рюген (Балтийское море). Во время этого опыта наблюдались очень неустойчивые ветры, а показатель степени n^* оказался весьма изменчивым (рис. 2.19). На рис. 2.20 приведены кривые изменения во время опыта показателя степени n^* и производной по времени от скорорости ветра над районом опыта. Как видно из рисунка, четко прослеживается зависимость n^* от dV/dt.

Очень сильное изменение показателя степени n* (от —10,6 до —1,4) наблюдалось во время опыта 7 марта 1977 г. в западной части Балтийского моря [54]. Это было, по-видимому, связано с сильным штормом (с ветрами до 17,4 м/с), проходившим над районом работ 5 марта, но к 7 марта окончательно стихшим. На рис. 2.216 видно, как с течением времени показатель степени n* уменьшался, что свидетельствовало о затухании возбужденной штормом турбулентности морских вод. Во время другого опыта в южной части Балтики 13 октября 1974 г. с момента запуска и до $t = 2 \cdot 10^4$ с скорость ветра возрастала с 1,5 до 12,6 м/с, а затем уменьшилась до 2,6 м/с. В то же время скорость течения в период $2 \cdot 10^3 < t < 1,9 \cdot 10^4$ с увеличилась от 7 до 20 см/с. Такое сочетание определяющих факторов привело к монотонному умень-



шению (по модулю) n* от 4,6 до 1,3 (рис. 2.21 а). В ряде других опытов, наоборот, наблюдалось увеличение модуля значения показателя степени со временем (рис. 2.22). Такое явление, однако, не всегда удавалось однозначно связывать с увеличением скорости ветра или течений в районе наблюдений. Усиление турбулентного обмена в этих случаях может быть связано с другими причинами, например приходом в район опыта крупного турбулизированного вихря, что не может быть зафиксировано наблюдениями лишь за средними скоростями течений и ветра. Увеличение значений коэффициентов обмена при той или иной форме турбулизации морских вод можно по формуле оценить (2.9).Так. данным опыта 9 октября по 1974 г. произведение коэффициентов К_{их}К_{ии}К_{zz} за период времени

Рис. 2.22. То же, что и на рис. 2.21 во время опытов 9 октября 1974 г. (*a*), 27 нюня 1971 г. (*б*) и 30 июня 1971 г. (*в*) (по [54]).

порядка часа увеличилось в 9 раз, а по данным опыта 30 августа 1968 г.— уменьшилось в два раза. Сами же значения коэффициентов диффузии по данным опытов в Балтийском море оказались следующими. Вертикальный коэффициент диффузии имел в среднем для верхнего слоя моря порядок нескольких сантиметров квадратных в секунду, но от опыта к опыту это значение варьировало от сотых долей до десятков сантиметров квадратных в секунду. Горизонтальные коэффициенты диффузии, как и следовало ожидать, существенным образом росли с увеличением масштаба явления (времени диффузии). Так, по истечению 1— 2 ч с момента реализации точечного источника красителя, когда размеры пятна имели порядок сотни метров, горизонтальные коэффициенты диффузии обычно не превосходили нескольких сотен сантиметров квадратных в секунду; в то время как при временах диффузии порядка 10 ч (размеры пятен порядка километра) они увеличивались до тысяч или даже десятков тысяч сантиметров квадратных в секунду.

Конечно, эти цифры в отдельных опытах сильно варьировали, что в ряде случаев удавалось связать с гидрометеорологической ситуацией во время эксперимента. Характерная скорость диффузии

*u*₁ (определяемая, например, формулой $u_1 = K/l$, К — коэффициент гле диффузии в том или ином направлении, *l* — масштаб явления) в различных опытах также сильно менялась, принимая обычно значения от сотых дО десятых долей сантиметров секунду. в Для открытого океана эта величина, по-видимому, может быть несколько больше, достигая нескольких сантиметров в секунду.

Рис. 2.23. Зависимость от времени максимальной концентрации красителя в центре трех пятен во время опыта 7 октября 1977 г. в Черном море вблизи побережья Болгарии (по работе Заца, Немировского и др. в [11]).



Большой объем диффузионных исследований, позволивший определить основные параметры диффузии, а также их зависимости от определяющих факторов, был осуществлен в последующие годы в Черном море Зацем с соавторами [34], а также в период совместных работ океанологов стран-членов СЭВ вблизи болгарского побережья [11, 12]. В частности, в 1977 г. в совместном международном эксперименте «Камчия-77» опыты с мгновенными источниками красителя проводились около эстакады, с которой осуществлялся комплекс гидрофизических и метеорологических наблюдений. В опытах часто наблюдалось разбиение диффундирующих пятен красителя на части, вытянутые вдоль направления ветра или фронта рефрагирующих у берега волн зыби. Падение максимальной концентрации красителя в центрах пятен опять же хорошо описывалось степенными зависимостями с показателями степени, близкими в среднем к -2,5 (рис. 2.23). Аналогичные результаты были получены в прибрежной зоне Балтийского моря в период совместных диффузионных опытов океанологов странчленов СЭВ в 1974 и 1976 гг.

Много интересной информации о диффузии пятен красителя от мгновенных точечных источников было получено с применением аэрофотосъемки. Аэрометоды для изучения диффузии примесей в море стали использоваться с начала 60-х годов. Описание форм диффундирующих пятен красителя по их аэроснимкам было сделано Катцем с соавторами [131], Причардом с соавторами [151]. Аэрофотосъемку пятен красителя в прибрежной зоне моря осуществили японские ученые (см. [34]). В Черном море диффузионные работы с применением аэрофотосъемки были начаты в 1968 г. и продолжены в последующие годы [150]. В 1969-1970 гг. была проведена серия опытов у берегов Крыма [34]. Пуски пятен осуществлялись с судна на расстояниях 4-6 миль от берега. Аэросъемка производилась на спектрозональную фотопленку с размерами кадров 18 × 18 и 30 × 30 см. Интервалы между последовательными снимками равнялись 5-10 мин на начальной стадии диффузии и увеличивались до 20-30 мин в конце съемки. Общая продолжительность опыта с одним пятном 5-8 ч. В опытах 1969 г. осуществлялись запуски пятен с 17-30 кг красителя, раствор которого помещался на судне в цистернах емкостью 4-8 м³. Раствор из цистерн подавался в море мощным насосом по шлангу, оголовок которого поддерживался поплавками на расстоянии 15-20 м от судна. Продолжительность выброса раствора насосом равнялась примерно 5 мин, по истечении которых пятно имело обычно площадь около 50-200 м², в то время как в процессе диффузии оно увеличивалось до 80-200 тыс. м². В опытах 1970 г. методика образования пятен примеси была изменена. Раствор красителя заливался в емкость (формы усеченного конуса) из прорезиненной ткани, причем верхняя часть конуса прикреплялась к металлическому кольцу. Кольцо в свою очередь специальными замками крепилось к круглому резиновому понтону, плавающему на поверхности воды. Когда емкость, открытая сверху, заполнялась раствором красителя, замки отключались, кольцо опускалось вниз, увлекая за собой стенки емкости, емкость как бы выворачивалась наизнанку, оставляя свободным раствор красителя, который и начинал диффундировать в верхнем слое моря. Первоначальный объем такого источника равнялся приблизительно 5 м³, что для опытов подобного масштаба можно, очевидно, уже с большой степенью приближения считать «точечным». В максимальных стадиях развития пятен от источников красителя такого типа площади пятен в опытах 1970 г. достигали сотни тысяч квадратных метров. В то же время глубина проникновения красителя обычно не превышала 2-5 м.

По результатам аэрофотосъемки пятен красителя в 1969— 1970 гг. в Черном море были определены изменяющиеся в процессе диффузии площади, занятые красителем. Площади пятен подсчитывались по видимым на снимках границам пятен. Эти границы предполагались изолиниями определенной концентрации красителя, соответствующей порогу чувствительности фотопленки. Конечно, такое предположение не совсем точно, так как почернение негатива обусловлено, как уже об этом упоминалось, целым рядом факторов, а не только концентрацией примеси. Но при приблизительно одинаковых гидрометеорологических условиях и степени освещенности моря такое предположение, по всей видимости, не очень далеко от истины. Это было, в частности, подтверждено синхронными с аэрофотосъемкой измерениями концентрации красителя контактными методами. По полученным планиметрированием площадям пятен красителя S далее рассчитывались радиусы эквивалентных кругов R. Расчет велся по формуле $R = \sqrt{S/\pi}$. Для большинства экспериментов наблюдения велись на стадии роста размеров пятен, т. е. от значения R, близкого к нулю, и до R_{макс}. После достижения пятном размеров R_{макс} оно начинает убывать (в границах изолинии пороговой чувствительности фотоматериала!), а затем совсем исчезает. На стадии роста размеров пятна зависимость его площади от времени диффузии t можно в первом приближении аппроксимировать степенным выражением вида S ~ tⁿ. По данным опытов 1968—1969 гг. в Черном море показатель степени п менялся в пределах 0,63-1,92 при вариациях размеров радиусов пятен от 20 до 350 м. Естественно при этом, что при $R \to R_{\text{макс}} n \to 0$. Значения *п* по данным японских авторов оказались заключенными в пределах 0,93-1,96 при изменениях радиуса пятен от 40 до 378 м.

Более правильно, естественно, аппроксимировать зависимость S(t) [или R(t)] не степенной функцией, а некоторой кривой, возрастающей в период роста размеров пятна и убывающей в стадии его «рассеивания». Для горизонтальной двумерной диффузии с постоянным коэффициентом диффузии K функция R(t) может быть получена из фундаментального решения диффузионного уравнения типа (1.13) при приравнивании значения концентрации c(x, y, t) некоторой фиксированной пороговой величине c_0 . Несложные выкладки приводят к выражению для R(t) вида

$$R(t) = \sqrt{-4K_L t \ln (c_0 4\pi K_L t)}.$$
 (2.10)

При наличии среднего течения в море с постоянной скоростью u_0 (вдоль оси x) время диффузии t в формуле (2.10) заменяется величиной x/u_0 , где x — расстояние, пройденное центром диффундирующего пятна за время t от точки выпуска красителя (начала координат).

График функции (2.10) в безразмерных координатах R/x_0 и x/x_0 , где x_0 — координата, где пятно полностью «исчезает», приведен на рис. 2.24, на котором нанесены также экспериментальные точки, полученные различными авторами. Экспериментальные точки в целом неплохо согласуются с теоретической кривой, правда лишь на стадии роста размеров пятна, так как для фазы его уменьшения экспериментальных данных не имелось. Исследования процесса диффузии пятен красителя в Черном море с применением аэрофотосъемки были продолжены в последующие годы [150]. В опытах использовалась фотоаппаратура с разрешающей способностью в центре кадра 40 линий на 1 мм, на границе кадра — до 20. При методических съемках изучалась зависимость качества снимков от освещенности моря, состояния его поверхности, характеристик аппаратуры и методики съемки. Отклонение главной оси фотоаппарата от вертикали при съемках не превышало 1—2°, точность определения высоты полета с помощью радиоальтиметра равнялась ±1,5 м. Масштаб снимков



Рис. 2.24. Зависимость видимого безразмерного радиуса диффундирующего пятна R/x₀ от безразмерного расстояния x/x₀.

варьировал от 1:2500 до 1:7500. Для определения степени почернения негатива использовались микрофотометры и денситометры, в частности системы, переводящие видеоизображение в цифровую форму, удобную для ввода в ЭВМ. Число уровней дискретизации плотности почернения негатива равнялось при этом 10. Калибровка фотоснимков осуществлялась при помощи данных одновременных контактных измерений концентрации красителя буксируемыми флюориметрами.

По результатам аэроснимков пятен красителя в 1981—1982 гг. у берегов Крыма и в районе Сухуми исследовалась диффузия пятен в интервалах времени диффузии от 10² до 10⁵ с. Площадь пятен [при аппроксимации функции S(t) степенной зависимостью] росла со временем с показателем n, заключенным в интервале 1.11-1.60. В ряде случаев лучшая аппроксимация достигалась степенными выражениями с разными n на отдельных интервалах значений t. С течением времени также наблюдалась изменчивость анизотропии пятен. Отношение наибольшей оси пятна к его среднему диаметру а являлось функцией времени диффузии t. На начальных стадиях диффузии (до 30-60 мин после запуска) пятна были обычно по форме близки к кругу, а затем начинали деформироваться. Величина а при этом увеличивалась от 1 до 15 (рис. 2.25). Скорость диффузии и₁, наоборот, обычно убывала ростом t, будучи заключенной в пределах 0,31-2,1 см/с С (рис. 2.26).

По данным аэрофотоснимков пятен красителя удается судить о влиянии эффектов сдвигов скорости на процесс диффузии. Значения сдвигов скорости в опытах 1981—1982 гг. определялись по данным о скоростях течений, измеренных на буйковых станциях.

102

Горизонтальные перепады значений компонентов скорости оказались по этим данным лежащими в пределах (0,1—14,5) · 10⁻⁵ с⁻¹, существенно меняясь в зависимости от пространственной базы,



Рис. 2.25. Зависимость от времени параметра анизотропии пятен а по данным трех экспериментов в Черном море (по [150]).

на которой измерялись скорости (рис. 2.27). Для района Кавказского побережья такая зависимость оказалась более сильной, что может быть связано с прямолинейностью береговой черты и близостью потока здесь по своему характеру к турбулентному пограничному слою. Вертикальные сдвиги скорости в верхнем стометро-



Рис. 2.26. Зависимость от времени скорости диффузии и₁ по данным пяти днффузионных экспериментов в Черном море (по [150]).

вом слое, определенные по данным измерителей течений на буйковых станциях, оказались в среднем близкими к 10^{-2} с⁻¹, но иногда они достигали 10^{-1} с⁻¹, что выше обычно принимаемых значений для открытого океана. При отсутствии ветра или при ветре, направленном вдоль течения, пятна красителя обычно вытягивались по направлению течения. Если же направление ветра не совпадало с направлением течения, то ось пятна в большинстве случаев располагалась в ином направлении (рис. 2.28). Пример деформации пятна, обусловленной вертикальным сдвигом скорости, приведен на рис. 2.29. При масштабах пятен 1—10 км на дефор-



Рис. 2.28. Схематическое изображение двух дрейфующих пятен красителя во время диффузионного опыта у берегов Крыма. Стрелками показано направление ветра и течений (по [150]).

мацию пятен начинают влиять и горизонтальные сдвиги скорости. Вытянутость и искривление пятен красителя в ряде случаев удавалось связать с эффектом дрейфовых течений и спирали Экмана. Один из таких случаев иллюстрируется рис. 2.30. Съемки пятна в этом опыте получены при слабом ветре и незначительном волнении, когда глубина проникновения дрейфового течения (глубина Экмана) не превышала, по всей видимости, 10—20 м, в то время как краситель проник до глубины 15 м. При усилении ветра и волнения глубина Экмана увеличивается, и картины, аналогичные приведенной на рис. 2.30, не наблюдались.

На аэроснимках пятен красителя часто можно видеть «полосатую» структуру поля концентрации красителя. Такое явление можно связать с наличием в верхнем слое моря упорядоченных



Рнс. 2.29. Вытягивание пятен диффундирующего красителя в результате действия вертикального градиента скорости (по [150]).



Рис. 2.30. Вытягивание и деформация пятен диффундирующего красителя под действием дрейфового течения («голова» пятна расположена в нижней его части) (по [150]).

движений вод типа циркуляции Ленгмюра. По данным опытов в Черном море расстояния между отдельными циркуляциями (полосами) варьировали от 5—10 до 20—30 м. Эти цифры существенно меньше, чем приводит по данным наблюдений в океане Ассаф с соавторами [113]. Такое различие, по всей видимости, связано с иной гидрологической структурой Черного моря, в частности с неглубоким расположением слоя скачка плотности в море по сравнению с океаном. А глубина однородного слоя, как известно, в значительной степени определяет и размеры циркуляций Ленгмюра, развивающихся в верхнем слое водоема.

Аэрофотосъемка пятен красителя позволяет наряду с параметрами диффузии выявлять и многие другие интересные особенности кинематики и динамики гидрофизических полей. Так, во время опытов в Черном море удалось исследовать структуру гидрологического фронта в прибрежной зоне моря. Вначале два пятна красителя были выпущены в 500 м по обе стороны от фронта, заметного по различию прозрачности вод прибрежных и мористых районов моря. Выпущенные пятна стали быстро приближаться к линии фронта, вытягиваясь вдоль него. Приблизившись к фронту, пятна быстро исчезли на фронтальной линии, причем скорость приближения пятен к фронту достигала 5—10 см/с. Быстрота исчезновения пятен на линии фронта свидетельствовала, что и вертикальные скорости движения вод на линии фронта имели такой же порядок величины. Следующие пятна красителя были выпущены мористее фронта в 1,5 и 3 милях от него. Скорости приближения этих пятен к фронту были незначительны, и в продолжение 4—5 ч наблюдений они не были поглощены фронтом.

Развитие методов аэрокосмического дистанционного зондирования океана позволяет исследовать и крупномасштабные явления в океане с использованием не только искусственно вносимых индикаторов, но и естественно возникающих в океане примесей, например мутных вод, скоплений планктона, плавающих льдин. Хорошим индикатором динамических процессов в океане может быть и температура его вод, которую часто можно рассматривать как некоторую пассивную «примесь», переносимую движущимися океанскими водами. В настоящее время уже имеется обширная литература с результатами таких аэрокосмических дистанционных наблюдений, позволивших исследовать структуру отдельных течений, вихревых образований, зон подъема вод, фронтальных зон и т. п. Примером последних результатов таких исследований может служить труды 15-го Международного Льежского коллоквиума по океанской гидродинамике [141], посвященного шельфовой дистанционным методам изучения гидродинамики зоны.

Опыты с пятнами красителя позволяют не только исследовать трансформацию в процессе диффузии осредненных картин распределения примеси, но и изучать флюктуационные явления в поле концентрации индикатора. Действительно, как уже об этом говорилось в начале настоящего раздела, при каждом пересечении пятна примеси буксируемым флюориметром получается запись, которую можно рассматривать как реализацию случайной одномерной функции c(x). Однако эта функция обычно существенно нестационарна, так как в среднем концентрация примеси в пятне убывает от центра к его периферийным зонам. Поэтому удобнее из функции c(x) вычесть значения осредненной тем или иным способом функции $\bar{c}(x)$ [например, с помощью скользящего осреднения с ядром сглаживания типа (2.4)] и получить ряд пульсационных значений концентрации примеси с'(x). Если измерения флюориметром производились длительное время в фиксированной точке пятна, то аргумент x, естественно, заменяется на время t. Функцию c'(x) [или c'(t)] далее можно анализировать, исходя из общих правил действий над одномерными случайными функциями. Такой подход позволяет исследовать внутреннюю «структуру» полей концентрации примеси, дает возможность решать ряд практически важных задач, например задачу об амплитудах и продолжительности «выбросов» в значениях концентрации, часто оказывающих решающее влияние на характеристики водной массы как среды обитания живых организмов.

Впервые статистические характеристики поля концентрации красителя от мгновенных источников примеси были подсчитаны по данным диффузионных опытов 1968 г. в Балтийском море [82]. Во время опыта вблизи о. Рюген было использовано 8 кг красителя, наблюдения над пятном продолжались более 7 ч. В конце опыта горизонтальные размеры пятна превышали 1 км, в то время как в глубину краситель проник приблизительно на 10 м. Второе пятно красителя (10 кг) было запущено севернее Гданьска и наблюдалось в течение 8 ч 30 мин. Глубина проникновения в этом случае равнялась 7 м при горизонтальных размерах пятна также порядка 1 км. Дискретизация записей концентрации красителя при пересечениях пятен проводилась с шагом 3,75 м. Сглаживание записей было осуществлено косинус-фильтром с пространственным масштабом сглаживания $L_0 = 2\pi/k_0$ (k_0 – волновое число), равным 15; 22,5; 45 и 90 м. Статистические характеристики функций c'(l) (где l — координата вдоль данного направления пересечения пятна) подсчитывались по всей совокупности данных для каждого из пятен безотносительно к горизонтам и направлениям измерительных галсов, чем достигалось существенное увеличение объема исходной информации для расчета. Оправданием такого приема могла служить однородность гидрологических условий в районе опыта, а также результаты пробных расчетов, по которым не было обнаружено зависимости характеристик пульсаций концентрации красителя от направления галса и его глубины.

По значениям c'(l) прежде всего были подсчитаны дисперсии пульсаций концентрации

$$D = \overline{c'^2}, \qquad (2.11)$$

где черта означает осреднение по всему использованному в расчете массиву пульсационных данных.

Так как продолжительность пересечения судном пятна примеси (галса) мала по сравнению с характерным временем диффузии пятна (временем существенного изменения размеров пятна), то каждому галсу ставился в соответствие определенный момент времени t, равный моменту прохождения судном центра пятна. Значения дисперсии как функции времени диффузии (отсчитываемого с момента запуска пятна) для двух значений L_0 нанесены на рис. 2.31. На рисунке приведены также абсолютные значения максимальной концентрации красителя в пятнах и максимальные значения средней концентрации $\bar{c}_{\text{макс}}$ при сглаживании профилей концентрации с $L_0 = 45$ м. Из рисунка видно, что максимальная концентрация в пятнах менялась пропорционально третьей степени времени, а зависимость дисперсии от t хорошо описывалась выражением t-6. Таким образом, между D и $\bar{c}_{\text{макс}}^2$ наблюдалась линейная связь

$$D = a\bar{c}_{\text{макс}}^2, \qquad (2.12)$$

где *а* — некоторая постоянная.

Линейная зависимость *D* обнаружилась и от квадрата средней для данного разреза (галса) концентрации \bar{c}^2 , т. е.

$$D = b\bar{c}^2. \tag{2.13}$$



Рис. 2.31. Изменение дисперсии *D* и концентрации примеси в центре пятна с_{макс} в зависимости от времени диффузии *t* (по [87]).

A — опыт 1 сентября 1968 г.; Б — опыт 21 августа 1968 г. в Балтийском море. I — абсолютный максимум концентрацни; 2 — максимум при L_0 =45 м, 3 и 4 — значения дисперсии при L_0 =45 м и L_0 =22,5 м соответственно.

Корень квадратный из постоянной *b* можно назвать относительной интенсивностью пульсаций концентрации $(\sqrt{b} = \sqrt{\bar{c'}^2}/\bar{c})$.

Графики зависимостей (2.12) и (2.13) приведены на рис. 2.32 для значений дисперсий, подсчитанных при масштабах сглаживания 22,5 и 45 м. Значения постоянных при этом оказались следующими: $a = 4 \cdot 10^{-3}$, $b = 6,3 \cdot 10^{-2}$. То есть относительная интен-
сивность флюктуаций концентрации в данном случае была близка к 0,25.

• По значениям дисперсии, определенным при разных масштабах сглаживания L_0 , можно получить представление об относительной доле пульсаций данного масштаба в общей «энергии» пульса-



Рис. 2.32. Зависимость дисперсии D от средней (1) и максимальной (2) концентрации красителя при $L_0 = = 22,5$ м и $L_0 = 45$ м (крайние значения черточек) по данным опыта 21 августа 1968 г. в Балтийском море (по [87]).

ций концентрации, т. е. представление о виде спектральной плотности флюктуаций $E_c(k)$. Расчет значений функции $E_c(k)$ велся по формуле $E_c(k) = \Delta D/\Delta k$, где ΔD — приращение значения дисперсии при увеличении волнового числа сглаживания на Δk . Так как наибольший интерес представляют не абсолютные значения функции $E_c(k)$ (меняющиеся, очевидно, от опыта к опыту и в течение опыта), а скорость изменения $E_c(k)$ с увеличением k, то значения $E_c(k)$ были нормированы на величину $E_c(k)$ при k == 0,186 м⁻¹ (что соответствует среднему значению L_0 из 22,5 и 45 м). На построенных таким образом графиках рис. 2.33 видны изменения функции $E_c(k)$, а также возможные значения показателя степени *n* при аппроксимации функции $E_c(k)$ степенными выражениями. Разброс точек на графиках оказался довольно велик, и показатель степени *n* можно было сравнительно широко варьировать. Для наглядности на графиках приведены зависимости, соответствующие показателям степени $-\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{5}$ и —2. Средние значения *n*, вычисленные по всем данным рассматриваемых двух опытов, оказались соответственно следующими:



n=2,10; 2,12 в интервале значений k от 0,093 до 0,186 м⁻¹ и n=1,5; 1,30 при k=0,186...... 0,334 м⁻¹.

Для измерительных галсов длиной более 375 м Іт. е. с числом дискретных значений c'(l), больших 1001 были подсчитаны корреляционные функции случайных функций c'(l). Как и следовало ожидать, вид корреляционных функций сушественно зависел ОТ масштаба сглаживания первоначального ряда c(l). По корре-

Рис. 2.33. Оценки спектральных плотностей пульсаций концентрации примеси, вычисленные по разностям значений дисперсий (по [87]).

А — опыт 1 сентября 1968 г.; Б — опыт 21 августа 1968 г. в Балтийском море. По оси ординат отложены условные единицы.

ляционным функциям были определены с помощью преобразования Фурье функции $E_c(k)$. Пример подсчитанной таким образом функции $E_c(k)$ для одного из резервов через пятно приведен на рис. 2.34. В интервале значений k от 0,2 до 0,65 м⁻¹ функция $E_c(k)$ в этом примере могла быть аппроксимирована законом «степени —⁵/₃». Спадание значений $E_c(k)$ в левой части графика обусловлено эффектом фильтрации, а возрастание функции $E_c(k)$ в самом правом участке графика — шумовыми эффектами. Если показатель степени —⁵/₃ для функции $E_c(k)$ может быть объяснен наличием участка локальной изотропии в указанных границах изменения волнового числа k, то обратно-квадратичная зависимость $E_c(k)$ от k, которой в ряде случаев лучше аппроксимировались результаты расчетов, требовала специального рассмотрения. Для объяснения такой зависимости в [87] было предложено рассмотреть в качестве фактора, определяющего режим диффузии в верхнем слое моря, касательное напряжение трения ветра τ (или так называемую скорость трения $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$). Действительно, снабжение энергией поверхностных вод может, вообще говоря, осуществляться по всему интервалу масштабов движения, и, следовательно, поток энергии по каскаду масштабов є здесь может быть



Рис. 2.34. Примеры расчета функций спектральной плотности пульсаций концентрации примеси в диффундирующем пятне, вычисленные по корреляционным функциям (опыт 21 августа 1968 г. в Балтийском море) (по [87]).

I — при L_0 =45 м; 2 — при L_0 =90 м. Светлые точки — значения $E_c(k)$, вычисленные по разностям дисперсий.

существенно переменной величиной, зависящей от t. В качестве второго определяющего вид функции $E_c(k)$ параметра должна выступать скорость выравнивания флюктуаций концентрации примеси ε_c . При таких предположениях для $E_c(k)$ из соображений размерности получаем

$$E_c(k) \sim \varepsilon_c u_{\bullet}^{-1} k^{-2}. \qquad (2.14)$$

Выполнимость закономерности (2.14) в определенных интервалах масштабов была впоследствии подтверждена рядом опытов как с пятнами красителя, так и с непрерывными точечными источни-ками примеси.



Рис. 2.35. Спектральные плотности пульсаций концентрации примеси по дан *a* — Черное море, 16 июня 1968 г., римскими цифрами обозначены отдельные измерения. *I*, *II*, *IV* — измерения на глубине 1 м, *III* — измерение на глубине 4 м; *в* — Балтийское глубине 7,5 м; *г* — Балтийское море, 1969 г.,



ным опытов с пятнами красителя в Черном и Балтийском морях. горизонт измерений 0,5 м; б — Балтийское море, 23 августа 1968 г. море, 30 августа 1968 г., *II*, *III* — измерения на глубине 1 м, *I*, *IV* — на *I-VI* — измерения на глубине 0,5 м (по [88]). Массовые расчеты статистических характеристик полей концентрации примеси от мгновенных точечных источников были осуществлены в последующие годы по данным диффузионных опытов в Балтийском и Черном морях [9, 29, 88]. Ряды дискретных значений концентрации примеси при пересечениях пятен обычно имели около 400 членов (при шаге дискретизации 1—4 м), что позволяло рассчитывать спектральные плотности для интервала



масштабов от нескольких метров до нескольких сотен метров. Примеры полученных при графиков этом функций E_c(k) приведены на рис. 2.35. Доверительные пределы функций $E_c(k)$ в расчетах равнялись 0,6-2,1 от вычисляемой величины (при 95 %-ной доверительной вероятности). Спектральные функции, как правило, имели достаточно «гладкий» вид, и лишь некоторые пики на масштабах 10-20 м выходили за доверительные пределы. Повидимому, эти пики были обусловлены поверхностным волнением, так

Рис. 2.36. Спектральные плотности пульсаций концентрации примеси по данным опыта с пятнами красителя в Балтийском море в 1972 г. и аппроксимирующая их прямая квадратичного закона (по работе Брозина, Кремзера, Муравьева в [47]).

как часто можно было заметить уменьшение пиков с увеличением глубины погружения датчика прибора (см., например, рис. 2.35 б). На ряде спектральных функций обнаруживались и пики на больших масштабах (несколько десятков метров), которые можно было связать с ленгмюровскими циркуляциями вод, развивающимися в верхнем слое моря. Такие циркуляции обычно достаточно хорошо можно наблюдать и визуально по вытягивающимся параллельно друг другу полосам красителя, что позволяет выбирать измерительные галсы судна: либо параллельно, либо перпендикулярно к направлению циркуляций. При измерениях на галсах, параллельных полосам, пики на спектральных функциях исчезают. Пример таких «беспиковых» спектров, хорошо аппроксимируемых квадратичной зависимостью, приведен на рис. 2.36.

Аппроксимирующие прямые были проведены на логарифмических графиках для всех подсчитанных спектральных функций $E_c(k)$. В табл. 2.2 приведены зависимости тангенса угла наклона аппроксимирующих прямых [т. е. показателя степени n при аппроксимации функции $E_c(k)$ степенным выражением] от времени диффузии t. Хотя аппроксимация функции $E_c(k)$ на всем интервале ее определения одной прямой довольно груба, однако по данным таблицы четко можно отметить резкое изменение наклона



Рис. 2.37. Спектральные плотности пульсаций концентрации примеси по данным опыта 7 октября 1977 г. у болгарского побережья Черного моря (арабские цифры — отдельные измерения в пятне) (по [29]).

Таблица 2.2

Зависимость показателя степени *n* от времени диффузии *t* при аппроксимации спектральных функций $E_c(k)$ степенными выражениями

<i>t</i> мин	n	t мии	n	<i>t</i> мин	n
99 114 123 125 128 153 222	1,4 1,4 1,4 1,4 1,4 1,4 1,4	229 300 306 331 354 357 360	1,4 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2	361 374 376 390 444 503 534	2,5 2,2 1,7 2,5 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2

по истечении 4—5 ч с момента запуска красителя. Такое явление, очевидно, связано с тем, что начиная с этого времени на диффузию облака примеси начали влиять новые факторы, в частности горизонтальные градиенты скорости течений.

Пример спектральных функций пульсаций концентрации красителя в пятнах с наклонами, существенно меняющимися с ростом волнового числа, приведен на рис. 2.37. Эти спектральные функции построены по данным измерений в Черном море у болгарского побережья во время международного эксперимента «Камчия-77». Опыты проводились в мелководной прибрежной зоне моря с глубинами всего 5—7 м при маловетренной погоде [29].

Разнообразие форм спектральных функций $E_c(k)$, полученных при диффузионных опытах с пятнами красителя, объясняется, естественно, сложностью и изменчивостью динамических процессов в море, влияющих на поле концентрации примеси. В связи с этим при исследовании закономерностей процессов диффузии в море необходимо измерять не только осредненные и пульсационные значения концентрации примеси, но и большой комплекс осредненных и пульсационных характеристик естественных гидрофизических полей, в первую очередь, поля скорости и поля плотности (температуры, солености) морской воды. Необходимо также иметь сведения о волнении моря и о метеорологической ситуации в районе эксперимента. Примером таких комплексных измерений могут служить эксперименты «Камчия» [11, 12], проводимые совместными усилиями ученых стран—участниц СЭВ.

2.3. Диффузия от непрерывных точечных источников

Как уже говорилось в разделе 2.1, опыты со стационарными точечными источниками примеси весьма удобны для исследования статистических характеристик поля примеси, так как струя примеси от источника стационарна (конечно, при неизменных средних гидрометеорологических условиях во время опыта), что позволяет путем многократных пересечений струи измерительным прибором получить общирный, статистически однородный экспериментальный материал, удобный для дальнейшего анализа. Конечно, опыты со струями красителя могут быть использованы и для исследования проведения осредненных полей концентрации примеси.

Опыты с непрерывными источниками красителя были начаты в Черном море в 1964 г. [81]. Раствор красителя с плотностью, равной плотности морской воды, испускался с небольшого заякоренного судна из емкости через шланг в поверхностный слой моря. В первых опытах использовался 0,05 %-ный раствор флюоресцеина, мощность источника примеси равнялась 3,3 л/мин. Такой источник создавал струю диффундирующего индикатора, которая легко прослеживалась до расстояний 200—250 м от источника. Измерения распределения концентрации красителя в струе осуществлялись флюориметром, установленным на втором малотоннажном судне, которое делало разрезы поперек струи на разных расстояниях от источника. Всего в опытах 1964 г. было сделано по 7 пересечений струи на расстояниях 25 и 50 м от места выпуска индикатора. Пример отдельной записи распределения концентрации красителя в поперечном сечении струи (оси y) приведен на рис. 2.38. Распределение концентрации становится более «глад-ким» после осреднения всех кривых c(y), полученных при пере-



Рис. 2.38. Распределение концентрации индикатора в поперечном сечении диффундирующей струи на расстоянии 25 м от источника (опыт 1964 г. в Черном море).

сечениях струи на фиксированном расстоянии от источника (вдоль оси x). Такие осредненные кривые приведены на рис. 2.39, где нанесены также аппроксимирующие кривые нормальных распределений. Подобного рода аппроксимирующие функции могут быть получены при решении уравнения диффузии вида

$$u \,\partial \bar{c}/\partial x = K_y \,\partial^2 \bar{c}/\partial y^2 + K_z \,\partial^2 \bar{c}/\partial z^2, \qquad (2.15)$$

где u — скорость постоянного течения вдоль оси x; K_y и K_z — коэффициенты диффузии вдоль горизонтальной поперечной оси y и вертикальной оси z соответственно. Начало координат помещается на поверхности моря в точке выпуска индикатора.

Решение уравнения (2.15) с граничным условием «отражения» примеси от плоскости z = 0 и условием ограниченности функции c(x, y, z) на больших расстояниях от источника имеет вид

$$c(x, y, z) = \frac{2q}{4\pi x \sqrt{K_y K_z}} \exp\left(-\frac{uy^2}{4K_y x} - \frac{uz^2}{4K_z x}\right), \quad (2.16)$$

где *q* — мощность источника примеси.

Распределение концентрации красителя на поверхности моря (z = 0) имеет вид

$$c(x, y, 0) = \frac{2q}{4\pi x \sqrt{K_y K_z}} \exp\left(-\frac{uy^2}{4K_y x}\right).$$
 (2.17)

В опыте со струей красителя величины u, q и x были известны. Из условия наилучшего согласия теоретических кривых с экспериментальными данными можно определить и значения коэффициентов обмена K_z и K_y . Так, по данным рис. 2.39 значения коэф-



Рис. 2.39. Осредненные по 7 реализациям распределения концентрации индикатора в поперечном сечении струи (ломаные линии) и аппроксимирующие кривые. Расстояние от источника индикатора 25 (а) и 50 м (б). Опыты 1964 г. в Черном море.

фициентов обмена оказались следующими: $K_z = 42 \text{ см}^2/\text{с}$ и $K_y = -7,5 \cdot 10^2 \text{ см}^2/\text{с}$. Интересно отметить, что полученное значение коэффициента горизонтального обмена K_y оказалось очень близким со значением коэффициента, подсчитанного по формуле закона «степени 4/3» с использованием ширины струи в качестве масштаба явления.

Более представительный материал по распределению концентрации красителя в диффундирующих струях был получен в Черном море в опытах следующего 1965 г. Была увеличена мощность источника, что позволило наблюдать струю примеси на расстояниях до 1500 м от источника. В качестве примера на рис. 2.40 приведены осредненные профили концентрации красителя в этих опытах на расстояниях 20 и 50 м от источника, аппроксимируемые на этот раз кривыми решений уравнения не только с постоянными коэффициентами обмена, но и с коэффициентами, зависящими от



Рис. 2.40. Осредненные значения концентрации индикатора в поперечном сечении струи на расстояниях от источника 20 (*a*) и 50 м (б) (опыты 1965 г. в Черном море) и теоретические кривые распределения индикатора.

1 — по уравнению с коэффициентом диффузии, задаваемым законом «степени 4/3», 2 — по уравнению с постоянным коэффициентом диффузии.

масштаба явления. Осредненные значения концентрации красителя на расстояниях 30 и 75 м от источника, а также на расстояниях 150 и 250 м (при большей мощности источника) на рис. 2.41 ап-



Рис. 2.41. Осредненные значений концентрации индикатора в поперечных сечениях струи на расстояниях 30 (а), 75 (б), 150 (в) и 250 м (г) (опыты 1965 г. в Черном море) и теоретические кривые распределения примеси по уравнению с постоянным коэффициентом диффузии.

проксимированы только решениями уравнения диффузии с постоянными коэффициентами. Из рис. 2.40 и 2.41 видно, что аппроксимация осредненных кривых распределений концентрации индикатора в поперечных сечениях струи гауссовыми кривыми обычно вполне удовлетворительна, но, однако, в ряде случаев наблюдаются заметные отклонения экспериментальных значений от теоретических кривых. Так, на рис. 2.40 б экспериментальные точки в периферийных зонах струи явно отклоняются от кривой нормального распределения и лучше аппроксимируются кривой ре-



Рис. 2.42. Изменение концентрации индикатора вдоль оси струи (опыты 1965 г. в Черном море) и теоретическая зависимость, следующая из решения уравнения диффузии с задаваемым законом «степени 4/3» коэффициентом диффузии.

шения уравнения диффузии с переменным, задаваемым законом «степени ⁴/з» коэффициентом. Существенно отклоняются экспериментальные точки от кривой теоретического распределения и на рис. 2.41 б. Больший эксцесс экспериментальных значений здесь также может быть лучше описан кривыми решения уравнения с переменными коэффициентами обмена. Эти факты еще раз свидетельствуют о связи характеристик диффузии с масштабом явления, о чем уже подробно говорилось выше.

Опыты со струями красителя 1965 г. в Черном море позволили исследовать закономерности падения концентрации красителя вдоль струи (оси x) в достаточно широком диапазоне значений x. Осредненные значения максимальных концентраций красителя вдоль оси струи на расстояниях 150, 300, 750, 1100 и 1500 м от источника приведены на рис. 2.42. Падение концентрации $\bar{c}_{\text{макс}}(x)$ с ростом x можно в первом приближении считать, как видно из рисунка, пропорциональным x в степени 2/3. Такая зависимость согласуется с решением одномерного уравнения диффузии с коэффициентом, пропорциональным масштабу явления (радиусу-вектору точки наблюдения) в степени 4/3 [81].

Опыты с непрерывными точечными источниками красителя были начаты в Балтийском море в совместных экспериментах океанологов стран—членов СЭВ в 1969 г. В этом году был осуществлен запуск красителя в Гданьской бухте с заякоренного судна. Второе судно с флюориметром делало поперечные сечения через струю примеси [115]. Падение концентрации индикатора вдоль оси струи в этом опыте оказалось также подчиняющимся степенной зависимости, но с показателем степени n=0,82, что несколько больше 2/3. Близкое значение показателя степени n было получено в заливе Тверен Балтийского моря в опыте с радиоактивным изотопом [125]. Такое различие величины n в черноморских и балтийских опытах, конечно, можно было объяснить срав-



нительно малой точностью определения *n*, однако казалось вполне вероятным, что в этом различии проявляется специфика каждого из районов наблюдений, в частности мелководность балтийских заливов. Дальнейшие опыты с непрерывными источниками красителя показали, что зависимость *n* от гидрометеорологических

Рис. 2.43. Изменение концентрации иидикатора вдоль оси струи по данным опытов в прибрежной зоне Черного моря (по работе Заца, Немировского и др. в [11]).

условий района наблюдений и масштаба явления действительно существует. Так, в ряде дальнейших диффузионных опытов удалось выделить две фазы диффузии струи с различной скоростью убывания максимальной концентрации вдоль оси струи, что можно было интерпретировать как проявление зависимости характеристик диффузии от масштаба явления *L*. Причем такая зависимость от *L* может приводить уже к весьма сильным вариациям *n*.

Опыты со струями красителя в последующие годы осуществлялись в Черном и Каспийском морях [26, 27, 88], а также воз. Байкал [99]. На рис. 2.43 приведены графики зависимости максимальной концентрации красителя на оси струи по данным нескольких диффузионных экспериментов в Черном море. Показатель степени в аппроксимирующих функцию зависимостях здесь варьировал от 1,1 до 1,6 для расстояний от источника, больших 100—600 м. В более же близкой к источнику зоне струи скорость убывания $\bar{c}_{\text{макс}}(x)$ была существенно меньше. Точка, разделяющая фазы медленного и более быстрого падения концентрации красителя в струе, по данным ряда опытов располагалась на расстояниях от 50 м до 1 км от источника. Рост поперечных размеров струи краснтеля с удалением от источника также можно часто аппроксимировать степенными зависимостями. В качестве масштаба поперечного размера струи обычно принимается дисперсия распределения концентрации в поперечном сечении струи $\overline{\sigma_y^2}$. Оценка величины $\overline{\sigma_y^2}$ осуществлялась по формуле



Рис. 2.44. Зависимость поперечной дисперсии струи иидикатора от расстояния до источника по пяти опытам в Черном море (по работе Заца, Немировского и др. в [11]).

иоперечиидикао источ-Черном Неми- 10^2 10^3 $10^4 x M$

естественно, ограничиваются зонами струи с фиксируемым прибором уровнем значений c(y). При дискретных отсчетах значений функции c(y) интегрирование в (2.18) заменяется суммированием по всем точкам разреза.

Примеры графиков зависимости дисперсии σ_y^2 от расстояния *x* по данным опытов со струями красителя в Черном море приведены на рис. 2.44. Поперечный размер струй, как видно из графиков, возрастает с удалением от источника, причем, если аппроксимировать этот рост степенными зависимостями, то показатель степени, согласно рис. 2.44, в среднем варьирует от 1,1 до 1,5. В ряде случаев (кривая 1 на рис. 2.44) функцию $\overline{\sigma_y^2}(x)$ лучше аппроксимировать двумя зависимостями с показателями степени *n*, меняющимися на разных расстояниях от источника. Естественно, что при дальнейшем увеличении *x* должна наступить фаза насыщения, когда *n* будет стремиться к нулю, а затем примет отрицательные значения. Ширина струи в пределах выделенной изолинии концентрации красителя здесь будет уменьшаться, а затем струя исчезнет совсем.

Специальное исследование зависимости поперечной дисперсии струи примеси от расстояния до источника провел В. М. Журбас с соавторами [26, 27]. В этих работах были проанализированы как данные более ранних опытов, так и результаты специальных экспериментов, выполненных в Каспийском море в 1973 и 1975 гг. Работы осуществлялись на базе Морской обсерватории Каспийской научно-экспериментальной станции Института географии АН АзССР. Обсерватория расположена в 25 км на северо-восток от о. Артем на основании бывшей нефтяной вышки, где глубина моря равна 40 м. В 1973 г. струя красителя фотографировалась с 30метровой высоты, фотоснимки затем анализировались и обрабатывались с применением теории «видимости сквозь дым О. Робертса» (см. [68, § 24.3]). Рассчитанные таким образом значения поперечных дисперсий струй σ_u^2 с 95 %-ными доверительными интервалами в зависимости от времени диффузии t=x/U (Uсредняя скорость течения вдоль оси х) представлены в логарифмическом масштабе на рис. 2.45. Результаты эксперимента были проанализированы в рамках теории относительной диффузии в поле локально-изотропной турбулентности. Так как размер источника примеси l₁ превышал внутренний масштаб турбулентности Колмогорова, то в опытах должен был наблюдаться квадратичный режим расширения струи [см. формулу (1.162)], когда

$$\overline{\sigma_y^2}(t) = l_1^2/2 + c_1 \left(\varepsilon l_1 \right)^{2/3} t^2/2, \qquad (2.19)$$

а при временах диффузии $t \gg t_*$, где $t_* = [c_1/(2c_2)](l_1^2/\epsilon)^{1/3}$, величина l_1 должна выпасть из формулы и для дисперсии струи здесь получаем

$$\overline{\sigma_y^2}(t) = c_2 \varepsilon t^3, \qquad (2.20)$$

где c₁ и c₂ — универсальные постоянные, по имеющимся оценкам близкие к 1,19 и 0,28 соответственно [19].

Из рис. 2.45 видно, что экспериментальные точки хорошо согласуются с формулами (2.19)—(2.20). Границы между двумя режимами диффузии и момент времени t_* несколько смещаются от опыта к опыту в зависимости от состояния поверхности моря (высота волн в период эксперимента менялась в пределах от 0,15 до 0,79 м). Интересно, что при этом дисперсия струи для момента t_* , равная $\sigma_y^2(t_*) = c_1^3 l_1^2 / (8c_2^2) \approx 2.7 l_1^2$, практически не менялась для. всей серии экспериментов. Сопоставление экспериментальных данных с теоретическими зависимостями дало возможность подсчитать важную характеристику турбулентности — скорость диссипации турбулентной энергии ε . Значения ε при разных параметрах волнения оказались меняющимися от $1,71 \cdot 10^{-3}$ до $2,78 \cdot 10^{-2}$ см²/с³. На рис. 2.46 приведен график зависимости величины ε (умноженной на период волнения T в пятой степени) от высоты волн. Аппроксимация экспериментальных точек на графике кубической функцией согласуется с теоретической зависимостью, полученной в [7].

На рис. 2.45 приведены также экспериментальные точки зависимости $\sigma_{\mu}^2(t)$, определенные по данным опытов 1965 г. в Черном



Рис. 2.45. Зависимость поперечной дисперсии струи индикатора от времени диффузии по опытам 1973 г. в Каспийском море (точки) и по опытам 1965 г. в Черном море (кружки) и аппроксимирующие теоретические зависимости (по [27]).

море. Эти точки аппроксимированы кривой, подсчитанной по формуле (2.19). Такая аппроксимация привела к следующим значениям определяющих параметров: $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$ см²/с³, $l_1 = 6$ м. Получившееся большое значение размера источника l_1 связано, вероятно, с искажающим влиянием судна на начальный участок струи примеси. Этим же может быть объяснено и то, что экспериментальные значения σ_y^2 в данном случае не вышли на кубический режим. В последующих опытах со струями краситель выпускался не непосредственно у кормы судна, а на некотором расстоянии от корабля через шланг, что приводило к существенному уменьшению начального «эффективного» размера источника *l*₁.

Оценка є по данным опытов 1965 г. привела к значению 9× ×10⁻⁴ см²/с³. Гидрометеорологические условия во время опытов 1965 г. были приблизительно одинаковыми с условиями в период опытов на Каспийском море. Различие в значениях є в этих двух опытах можно, следовательно, отнести за счет больших масштабов струи в черноморских экспериментах. Поэтому имеется возможность оценить дополнительный приток энергии к океанской турбу-



лентности в промежуточном интервале масштабов движения. Среднее значение ε по опытам на Каспийском море (при высоте волн от 0,25 до 0,79 м) равно 1,54 · 10⁻² см²/с³. Таким образом, «добавка» энергии к морской турбулентности на движениях с временными масштабами порядка 100 с оказалась равной 1,45 · 10⁻² см²/с³.

Опыты со струями красителя в Черном море были продолжены в 1966 и 1968 гг. [88]. На рис. 2.47 приведены осредненные профили концентрации красителя на расстояниях 100, 250 и 300 м

Рис. 2.46. Связь скорости диссипации турбулентной энергии є со средней высотой волн h и средним периодом волн \overline{T} по данным опытов со струями красителя 1973 г. в Каспийском море (по [27]).

от источника по данным опытов 1966 г. Профили, как видно из рисунка, неплохо аппроксимируются гауссовыми кривыми. Точность такой аппроксимации, естественно, увеличивается при возрастании числа «мгновенных» профилей концентрации c(y), использованных для осреднения. Для исследования этого вопроса по данным опытов 1968 г. был произведен подсчет величины

$$\delta(n) = \frac{1}{c(x, 0, 0)(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (\Delta c_{n,i})^2, \qquad (2.21)$$

где $\Delta c_{n,i}$ — разность между теоретическим (аппроксимирующим) и осредненным по *n* реализациям значениям концентрации в *i*-й точке разреза (значения концентрации снимались с записей в дискретных точках); *N* — число точек в реализации на данном разрезе; $\bar{c}(x, 0, 0)$ — среднее значение концентрации на оси струи на данном разрезе (на расстоянии *x* от источника). Рассчитанные по формуле (2.21) значения погрешности аппроксимации $\delta(n)$ приведены на рис. 2.48. Как видно из рисунка, погрешность аппроксимации быстро убывает с ростом n и становится малой при n = -8...10.

Описанные выше опыты со струями красителя осуществлялись при весьма малых скоростях истечения струи и с плотностью рас-



Рис. 2.47. Осредненные профили концентрации индикатора в поперечных сечениях струи (ломаные линии) и теоретические кривые по данным измерений на расстояниях 100 (*a*), 250 (*b*) и 300 м (*b*) от источника (опыты 1966 г. в Черном море).

твора красителя, равного плотности морской воды в точке выпуска струи. В этом случае основным механизмом перемешивания индикатора будет естественная турбулентность морских вод. Процесс в значительной степени усложняется, если струя примеси имеет значительную начальную скорость истечения. Естественно, что в этом случае важным фактором первоначального перемешивания струи с окружающей жидкостью может стать и кинетическая энергия самой струи. Процесс еще более усложняется, если струя имеет плотность, отличающуюся от плотности морской воды в зоне выпуска струи. В этом случае на струю будут действовать силы плавучести, приводящие к заглублению или подъему (при глубинном выпуске) струи. При этом будет происходить дополнительное перемешивание струи с окружающими водными массами. Очевидно, что исследование струй примеси с начальными скоростями истечения и с различными плотностями имеет большой прикладной интерес, так как такие струи имитируют различного рода сбросы сточных бытовых и промышленных вод в море.

Теоретическому исследованию поведения струй примеси в устойчиво стратифицированной среде посвящено большое число ра-



Рис. 2.48. Погрешность аппроксимации поперечных распределений осредненной концентрации индикатора гауссовыми кривыми при разном числе осредняемых реализаций *n* (по данным опытов 1968 г. в Черном море).

1, 2, 3— разрезы в 100, 200 и 400 м от источника соответствению.

бот (см., например, [24, 124]). При этом обычно предполагается, что поперечные профили скорости движения жидкости в струе u, а также профили разности плотности в окружающей среде ρ_a и в струе ρ описываются гауссовыми кривыми:

$$u(s, r, \varphi) = u(s) \exp(-r^2/b^2);$$
 (2.22)

$$\frac{\rho_a(s, r, \varphi) - \rho(s, r, \varphi)}{\rho_0} = \frac{\rho_a(s) - \rho(s)}{\rho_0} \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2 b^2}\right), \quad (2.23)$$

где *s* — криволинейная координата вдоль оси струи; *r* — радиальная координата; φ — угол между вертикальной плоскостью *xz* (начало координат — в точке истечения струи) и заданным направлением; *u*(*s*) и $\rho(s)$ — скорость движения жидкости и плотность жидкости на оси струи соответственно; ρ_0 — начальная плотность; b = b(s) — характерная ширина струи; $\lambda = 1,16$ — экспериментальная константа, учитывающая, что профили разности плотности в сечениях струи оказываются несколько более «размытыми», чем профили скорости.

При теоретическом рассмотрении задачи далее обычно предполагается, что струя все время сохраняет осесимметричную форму (т. е. не учитывается явление «сплющивания» струи в стратифицированной среде), давление в среде в присутствии струи остается близким к гидростатическому, а разность плотностей в окружающей среде и в струе мала, т. е. $|(\rho_a - \rho)/\rho_0| \ll 1$. Обычно также пренебрегается диссипацией энергии в струе и центростремительными силами, возникающими из-за криволинейности струи. При дополнительном предположении о постоянстве коэффициента вовлечения окружающей жидкости в струю можно записать следующую систему уравнений, описывающую изменение расхода, горизонтального и вертикального компонентов импульса и потока плавучести струи:

$$\frac{d}{ds}(ub^2) = 2\alpha ub; \qquad (2.24)$$

$$\frac{d}{ds}\left(u^{2}b^{2}\cos\theta\right)=0;$$
(2.25)

$$\frac{d}{ds}(u^2b^2\sin\theta) = 2g\lambda^2b^2 \frac{\rho_a - \rho}{\rho_0}; \qquad (2.26)$$

$$\frac{d}{ds} \left[ub^2 \left(\rho_a - \rho \right) \right] = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} b^2 u \frac{d\rho_a}{ds}, \qquad (2.27)$$

где θ — угол наклона оси струи к горизонту; α — коэффициент вовлечения, близкий, согласно имеющимся данным к 0,057; g ускорение свободного падения, а координаты *s* и θ связываются с декартовыми координатами *x* и *z* соотношениями: $dx/ds = \cos \theta$, $dz/ds = \sin \theta$.

Система (2.24) — (2.27) решается при начальных условиях

$$u(0) = u_0; b(0) = b_0; \rho(0) = \rho_1; \theta(0) = \theta_0;$$
 (2.28)
 $x = z = 0$ при $s = 0.$

В случае постоянного вертикального градиента плотности в среде $d\rho_a/dz$ удобно ввести безразмерные значения расхода струи Q, компонентов импульса струи M_x и M_z , потока плавучести P, а также безразмерные координаты ζ , X и Z. Эти величины определяются по формулам:

$$Q = \{N^{10} / [F_0^6 \cdot 64\alpha (1 + \lambda^2)]\}^{1/8} ub^2; \qquad (2.29)$$

$$M = \{N^2 / [(1 + \lambda^2) F_0^2]\}^{1/2} \frac{(ub)^2}{2}; \qquad (2.30)$$

$$M_x = M \cos \theta; \quad M_y = M \sin \theta;$$
 (2.31)

$$P = \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} b^2 u g \frac{\rho_a - \rho}{\rho_0}\right) / F_0; \qquad (2.32)$$

$$\zeta = [N^6 \cdot 64\alpha^4 (1 + \lambda^2) / F_0^2]^{1/8} s; \qquad (2.33)$$

$$X = [N^{6} \cdot 64\alpha^{2}(1 + \lambda^{2})/F_{0}^{6}]^{1/s} x; \qquad (2.34)$$

$$Z = [N^6 \cdot 64\alpha^2 (1 + \lambda^2) / F_0^6]^{1/s} z, \qquad (2.35)$$

129

где $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_a}{dz}$ квадрат частоты Вяйсяля—Брента; $F_0 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} b_0^2 u_0 g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}$ размерная постоянная.

При использовании (2.29)—(2.35) первоначальная система уравнений запишется в виде:

$$dQ/d\zeta = M^{1/2}; \qquad (2.36)$$

$$dM_x/d\zeta = 0; \tag{2.37}$$

$$dM_z/d\zeta = PQ/(2M); \tag{2.38}$$

$$dP/d\zeta = -QM_z/M; \qquad (2.39)$$

$$dX/d\zeta = M_x/M; \tag{2.40}$$

$$dZ/d\zeta = M_z/M; \tag{2.41}$$

$$M^2 = M_x^2 + M_z^2, \qquad (2.42)$$

а начальные условия примут вид

$$Q(0) = Q_0;$$
 $M(0) = M;$ $\theta(0) = \theta_0;$ $P(0) = 1,$
 $X = Z = 0$ при $\zeta = 0.$ (2.43)

Систему (2.36)—(2.42) в общем случае решить аналитически сложно, поэтому часто прибегают к численным методам решения. Такими методами, в частности, было показано, что струя с $\rho > \rho_a$ при горизонтальном запуске ($\theta=0$) после некоторого участка подъема начинает совершать во времени вертикальные колебания переменной амплитуды. Для подсчета периода этих колебаний удобно ввести [24] среднюю по сечению струи скорость \bar{u} , заменив гауссово распределение скорости в струе на прямоугольное при сохранении прежних расхода и импульса струи. Скорость \bar{u} при этом оказывается равной половине скорости движения жидкости на оси струи u(s). Для среднего времени t=t(s) прохождения элемента струи от источника до сечения *s* можно, очевидно, записать следующее соотношение:

$$dt = ds/\bar{u} = 2 \, ds/u.$$
 (2.44)

Если ввести безразмерное время по формуле

$$T = t / \left[\frac{2\pi}{N} \frac{\sqrt{2}}{(1+\lambda^2)^{1/2}} \right], \qquad (2.45)$$

то (2.44) перепишется в виде

$$\frac{dT}{d\xi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{Q}{M}.$$
 (2.46)

Разделив далее (2.39) на (2.38), получим:

$$dP/dM_z = -2M_z/P. \tag{2.47}$$

Интегрируя (2.47) и используя начальные условия, будем иметь:

$$P = (1 - 2M_z^2)^{1/2}.$$
 (2.48)

А разделив (2.46) на (2.38) и учитывая (2.48), найдем связь между T и M_z:

$$\frac{dT}{d(M_z^2)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{2}} \frac{1}{\left[\left(1 - 2M_z^2\right)M_z^2\right]^{1/z}}.$$
 (2.49)

Решение уравнения (2.49) для случая $\theta_0 = 0$ имеет вид

$$\cos{(4\pi T)} = 1 - 4M_z^2. \tag{2.50}$$



Рис. 2.49. Примеры численного расчета траекторий всплывающих струй с учетом (11) и без учета (1) эффекта уплотнения при смешении струи с морскими водами (по [24]).

Траектория струи, как это следует из (2.50), достигает экстремальных высот при $M_z = 0$. Тогда из (2.50) получаем значения T_k , при которых это происходит:

$$T_k = k/2, k = 1, 2, 3, \dots$$
 (2.51)

В то же время в формуле (2.45) множитель $\sqrt{2/(1+\lambda^2)^4}$ близок к единице и, следовательно, безразмерное время *T* измеряется практически в единицах периода Вяйсяля—Брента. Таким образом, жидкие элементы струи в устойчиво стратифицированной среде совершают вертикальные колебания с периодом Вяйсяля—Брента. Примеры численного расчета траекторий таких колеблющихся струй приведены на рис. 2.49.

Систему уравнений (2.36)—(2.42) можно, как показано в [24], решить аналитически для случая квазигоризонтальной струи, т. е. при выполнении условия $|M_x/M_z| \gg 1$ для любого $\zeta > 0$. В этом случае величина M может быть заменена на M_x , а дифференцирование по ζ заменяется дифференцированием по X. Тогда два первых уравнения системы интегрируются и вся система сводится к дифференциальному уравнению второго порядка относительно M_z :

$$\frac{d^2 M_z}{dX^2} - \frac{1}{X + Q_0/M_0^{1/2}} \frac{dM_z}{dX} + \frac{1}{2M_0} \left(X + Q_0/M_0^{1/2}\right)^2 M_z = 0.$$
 (2.52)

Общее решение уравнения (2.52) имеет вид

$$M_{z} = c_{1} \cos \left[\frac{1}{2\sqrt{2M_{0}}} \left(X + \frac{Q_{0}}{M_{0}^{1/2}} \right)^{2} \right] + c_{2} \sin \left[\frac{1}{2\sqrt{2M_{0}}} \left(X + \frac{Q_{0}}{M_{0}^{1/2}} \right)^{2} \right], \qquad (2.53)$$

где *c*₁ и *c*₂ — постоянные интегрирования.

Если далее использовать начальные условия $M_z(0) = 0$, $dM_z/dX|_0 = Q_0/(2M_0)$, то для вертикального компонента импульса получаем

$$M_{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left\{\frac{1}{2\sqrt{2M_{0}}} \left[\left(X + \frac{Q_{0}}{M_{0}^{1/2}}\right)^{2} - \frac{Q_{0}}{M_{0}} \right] \right\}.$$
 (2.54)

Из (2.54) следует, что $|M_z| \leq 1/\sqrt{2}$, поэтому условие квазигоризонтальности струи может быть записано в виде $|M_x| \gg 1$ или в размерных переменных

$$N u_0 \rho_0 / (g | \rho_0 - \rho_1 |) \gg 1.$$
 (2.55)

Условие (2.55) означает, что квазигоризонтальной может быть струя либо с весьма большой начальной скоростью истечения, либо с плотностью, мало отличающейся от плотности окружающей среды. Квазигоризонтальность будет наблюдаться и в случае, когда частота Вяйсяля—Брента в окружающей среде очень велика.

В [24] рассмотрен вопрос о влиянии нелинейности уравнения состояния морской воды на движение турбулентной струи в водоеме. Из-за нелинейности уравнения состояния плотность смеси двух объемов воды с различными значениями солености S и температуры Т оказывается больше средневзвешенного значения плотности смеси. Например, если в пресный водоем с температурой воды ниже 4 °С (при которой вода имеет максимальную плотность) втекает струя с температурой, значительно превышающей 4 °С, то такая струя вначале будет всплывать (так как ее плотность меньше плотности окружающей воды), но затем при перемешивании с окружающей жидкостью ее температура будет приближаться к 4 °С и вода в струе станет тяжелее окружающей жидкости. То есть после участка подъема струи будет наблюдаться зона погружения, которую нельзя предсказать при использовании линейного уравнения состояния. Эффект уплотнения жидкости при смешении можно учесть, заменив в системе (2.24) — (2.27) уравнение (2,27) на два аналогичных уравнения изменения потоков температуры и солености:

$$\frac{d}{ds}\left[ub^{2}(T_{a}-T)\right] = \frac{1+\lambda^{2}}{\lambda^{2}}b^{2}u\frac{dT_{a}}{ds}; \qquad (2.56)$$

$$\frac{d}{ds}[ub^2(S_a-S)] = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}b^2u\frac{dS_a}{ds}, \qquad (2.57)$$

где T_a и S_a — температура и соленость среды; T и S — температура и соленость на оси струи.

Видоизмененная таким образом система должна быть замкнута уравнением состояния воды

$$\rho = \rho \left(T, S \right). \tag{2.58}$$

Для оценки влияния нелинейности состояния морской воды Журбасом [24] был проведен численный расчет по модернизированной вышеуказанным образом системе уравнений и по первоначальной системе (2.24)—(2.27) для следующих значений параметров: $\theta_0 = 0$; $u_0 b_0^2 = 0.24$ м³/с; $u_0^2 b_0^2 = 1.25$ м⁴/с; T(0) = 20 °C;



Рис. 2.50. Профили температуры (а) и результаты численного расчета траектории струй (б) в пресном водоеме (по [24]).

1 — зимний период с учетом нелинейности уравнения состояния воды; 1* — то же без учета нелинейности; 2 — весенний период; 3 — летний период; 4 — осенний период.

 $T_a(0) = 5$ °C; $dT_a/dz = 0,1$ °C/м = const; $S = S_a = 35$ ‰. Результаты расчета по двум системам оказались существенно различными (рис. 2.49), что свидетельствует о необходимости учета эффекта нелинейности уравнения состояния воды при описании распространения струй различной плотности в океане. Ряд расчетов траекторий струй примеси был также выполнен для пресноводного водоема с типичными для различных сезонов вертикальными распределениями температуры воды в водоеме. Источники примеси располагались на глубинах 20 и 40 м, а параметры задачи были взяты следующими: $\theta_0 = 0$; $u_0 b_0 = 0,24$ м³/с; $u_0^2 b_0^2 = 1,25$ м⁴/с²; Т (0) = 20 °С. Профили температуры, для которых производился расчет, приведены на рис. 2.50 a, а результаты расчета — на рис. 2.50 б. Из рисунка видно, что различные сочетания определяющих задачу параметров могут приводить к весьма разнообразному поведению струй. В ряде случаев они опускаются, испытывая колебания с частотой Вяйсяля-Брента, в других случаях поднимаются, либо с колебательными движениями, либо без них, достигая поверхности водоема или не достигая его. Из рисунка также видно, что использование линейного уравнения состояния может приводить к существенным ошибкам в расчете траектории струи.

Опыты с заглубленными струями красителя были осуществлены на оз. Байкал во второй половине августа 1975 г. [99]. Верхний 15-метровый слой озера в районе работ в это время был практически изотермичным с $T_a = 14...14,5$ °C. В слое от 15 до 50 м наблюдался четко выраженный термоклин с градиентом температуры 0,3... 0,4 °C/м. Ниже 50 м температура вод была 4 °C. Выпуск струй с концентрацией красителя 10⁻⁶ г/мл осуществлялся из патрубков, расположенных на глубинах 12 и 23 м в 140 м от берега. В районе экспериментов наблюдались течения восточноюго-восточного направления со скоростями на глубине 15 м 3 см/с на расстоянии 0,5 км от берега и около 5—6 см/с — в нескольких километрах от береговой черты. На значительных расстояниях от



Рис. 2.51. Вертикальный разрез распределения концентрации красителя во время опыта с заглубленными струями в оз. Байкал.

Изолинии концентрации: 1 — 10-10 г/мл; 2 — 10-9 г/мл; 3 — 10-8 г/мл; 4 — 10-7 г/мл.

берега течение усиливалось и на глубине 50 м достигало 20 см/с. На глубинах же больше 100 м течение практически отсутствовало.

Измерения распределения индикатора во время опытов осуществлялось с помощью флюориметра на ряде станций. Вертикальный разрез струй индикатора, полученный по данным зондирований на 8 станциях приведен на рис. 2.51. Струи распространялись на восток-юго-восток, испытывая вертикальные колебания. От верхней струи индикатор вышел на поверхность приблизительно в 100 м от точки запуска. Концентрация красителя здесь была 10-8 — 10-9 г/мл. На больших расстояниях от источника ось струи снова заглублялась и краситель на поверхности озера не обнаруживался. Нижняя струя, как видно из рисунка, поверхности озера не достигала (в пределах изолинии концентрации 10-10 г/мл), но испытывала значительные колебания по вертикали. Распространение струй удалось уверенно проследить до расстояний 1100 м от источника, а следы индикатора были даже обнаружены в точке, удаленной от источника на 6,1 км. Интересно отметить, что обе струи на всем протяжении практически не перемешивались друг с другом, что объясняется сильным перепадом плотностей (температур) воды в слое между источниками. Такой слой скачка плотности является своего рода экраном, затрудняющим вертикальный обмен между слоями жидкости.

На оз. Байкал в 1975 г. были также проведены запуски струй красителя на глубинах 34 и 45 м в 140 и 240 м от берега. Во время этого опыта течения значительно изменялись как по направлению, так и по значению, что привело к сложной конфигурации зоны окрашенной водной массы. В верхнем 10-метровом слое воды площадь с заметными концентрациями красителя достигала 110 тыс. м², а следы красителя обнаруживались на расстоянии до 1000 м от источников.

С 1972 по 1975 г. на озере осуществлялись также диффузионные опыты с радиоактивным индикатором — изотопом золота-198 [99]. Измерения концентрации изотопа в водах озера проводились с помощью погружного гамма-радиометра с небольшого судна в летний период и со льда зимой. По данным измерений подсчитывалась степень разбавления облака изотопа в процессе диффузии и скорость переноса изотопа течениями. Было обнаружено, что при слабых ветрах и небольших скоростях течений изотоп практически изотропно в горизонтальных нараспространялся правлениях, причем степень разбавления на расстоянии около 500 м от источника достигала 200-300. При запуске изотопа из тех же патрубков, что и краситель в опытах 1975 г., вертикальная диффузия была незначительна — изотоп распространялся в сравнительно тонком слое толщиной 10-15 м с максимумом концентрации около глубины выпуска.

Теоретическая интерпретация результатов опытов с краситерадиоактивным изотопом в оз. Байкал осуществлена лями И в [99]. Так как примесь запускалась из горизонтально расположенных патрубков с диаметром d=0,6 м и со скоростью истечения иист = 2,5 м/с, то по выходу из патрубков образовывалась активная фаза струи, где существенное влияние на поведение струи оказывала величина иист. Число Рейнольдса для струи вблизи патрубка было равно Re= $u_{\rm ист}d/v \approx 1,5 \cdot 10^5$. В то же время число Ричардсона $Ri = (g/\rho) (\partial \rho / \partial z) / (u_{ucr} / d)^2$ для начальной стадии струи оказывалось существенно меньше критического Rikout, если под $\partial \rho / \partial z$ понимать вертикальный градиент плотности воды в озере на глубине расположения патрубков. В связи с этим влиянием плотностной стратификации среды на начальной стадии развития струи можно было пренебречь и считать струю осесимметричной. В этом случае для расхода струи будет верно уравнение (2.24), а для компонента импульса вдоль горизонтальной оси х вместо (2.25) имеем

$$\frac{d}{dx}\int_{\Sigma}u^{2}(r, x)d\Sigma = \frac{d}{dx}\frac{\pi u^{2}b^{2}}{2}, \qquad (2.59)$$

где Σ — площадь сечения патрубка. Беря интеграл в (2.59), получим:

$$u^2 b^2 = (u_0 b_0)^2 = \text{const},$$
 (2.60)

135

где u_0 — средняя по сечению патрубка скорость струи, равная $2u_{\text{ист}}$; b_0 — эффективное начальное сечение струи.

Решая полученную таким образом систему для определения и и b, получим:

$$u(x) = \frac{u_0}{2\alpha x/b_0 + 1}; \qquad (2.61)$$

$$b(x) = b_0 (2\alpha x/b_0 + 1).$$
 (2.62)

При больших значениях х эти выражения переходят в простые формулы

$$u(x) \approx u_0 b_0 / (2\alpha x);$$
 (2.63)

$$b(\mathbf{x}) \approx 2\alpha \mathbf{x}.\tag{2.64}$$

Длину активной фазы струи x_a можно оценить, если предположить, что эта фаза заканчивается там, где характерная скорость струи u(x) оказывается сравнимой со среднеквадратическими значениями турбулентных пульсаций скорости в водоеме σ_u . В этом случае для x_a получаем

$$x_{a} = u_{0}b_{0}/(2\alpha\sigma_{u}).$$
 (2.65)

Если принять, согласно имеющимся оценкам, что крупномасштабные вариации горизонтальных компонентов скорости в озере имели в период опытов значения 4—6 см/с, то для x_a получаем оценку 150—250 м.

Для учета влияния плотностной стратификации вод озера на струю предположим, что в такой среде стационарная струя может существовать лишь тогда, когда в ней наблюдаются турбулентные вихри с размерами, соизмеримыми с толщиной струи. Это возможно в случае, когда локальное число Ричардсона струи Ri_c меньше критического значения Ri_{крит}, т. е. при

$$\operatorname{Ri}_{c} = N^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{2} \approx N^{2} / \left[u\left(x \right) / b\left(x \right) \right]^{2} < \operatorname{Ri}_{\mathrm{KpHT}}.$$
(2.66)

На начальном участке струи ее скорость u(x) достаточно велика, а ширина b(x) мала, поэтому $\operatorname{Ri}_c \ll \operatorname{Ri}_{\mathrm{крит}}$ и плотностная стратификация не оказывает здесь существенного влияния на струю. Когда Ri_c станет сравнимым с $\operatorname{Ri}_{\mathrm{крит}}$, рост вертикальных размеров струи замедлится, и, наконец, когда Ri_c достигнет значения $\operatorname{Ri}_{\mathrm{крит}}$, такой рост совсем прекратится, так как энергия турбулентных пульсаций в струе будет уже недостаточной для преодоления сил Архимеда. Из (2.63), используя (2.66) со знаком равенства, получим для предельной толщины струи H

$$H = 2b \approx 2 \operatorname{Ri}_{\mathrm{Kphr}}^{1/4} (u_0 b_0 / N)^{1/2}.$$
 (2.67)

После достижения толщины *H* струя будет расширяться в вертикальном направлении существенно медленнее, лишь под действием естественной вертикальной турбулентности, которая в устойчиво стратифицированном по плотности водоеме сильно подавлена.

Оценки величины Н были сделаны для оз. Байкал для типичных значений градиентов плотности в водоеме для летнего и зимнего сезонов при расположении источников струй на глубинах от 10 до 50 м. Значения Н оказались при этом варьирующими от 9.5 до 24 м. что находится в хорошем согласии с данными опытов как с красителями, так и с радиоактивным изотопом. В весенний и осенний периоды, когда градиенты плотности воды в озере ослабевают, а в отдельные периоды достигается даже полная вертикальная изотермия вод, толщины струй могут существенно возрастать. Во время экспериментов в этих ситуациях иногда индикатор можно было наблюдать в районе опытов во всей толще водоема от поверхности до дна.

В байкальских опытах наблюдалось и предсказываемое теорией всплывание струй примеси. Температура раствора индикатора в струях была около 20-22 °С, что значительно превышало температуру воды в озере. В осенний и весенний периоды верхняя граница примеси чаще располагалась на глубине 5-15 м, а вниз примесь распространялась до дна. В летний период верхняя граница наблюдалась на горизонтах 10-20 м и лишь небольшая часть примеси достигала поверхности, пробивая мощный термоклин. В зимний период, когда в озере существовала температурная инверсия (непосредственно подо льдом температура воды 0°. а с глубиной она возрастает до 4 °С), было отмечено интересное явление, о котором уже упоминалось выше. Теплая струя сначала поднималась вверх, а затем, когда ее температура становилась близкой к 4 °C, струя из верхнего слоя озера опускалась вниз, так как она оказывалась более плотной по сравнению с окружающими водами. В этом случае ось струи оказывалась ниже глубины расположения патрубков, а верхняя граница струи — на глубинах 20—35 м.

Если рост вертикальных размеров струи примеси в стратифицированном озере был ограничен 10-20 м, то в горизонтальной плоскости диффузия приводила к значительно большим размерам струи. В табл. 2.3 приведены данные о поперечной дисперсии

(10 [99])						
Зимний сезон		Летний сезон				
хм	σ_y^2 м²	х м	σ_y^2 м²			
200 300 400 500 650 750 900	$\begin{array}{c} 6,8\cdot10^{3}\\ 7,1\cdot10^{3}\\ 1,3\cdot10^{4}\\ 2,6\cdot10^{4}\\ 3,1\cdot10^{4}\\ 3,0\cdot10^{4}\\ 4,0\cdot10^{4} \end{array}$	200 450 800 1200 1700	$\begin{array}{c} 2,3\cdot 10^{3} \\ 1,5\cdot 10^{4} \\ 1,2\cdot 10^{4} \\ 5,2\cdot 10^{4} \\ 6,1\cdot 10^{4} \end{array}$			

Таблица 2.3

Поперечная дисперсия струй индикатора σ_u^2 на различных расстояниях от источника х по данным опытов с радиоактивиым ннднкатором на оз. Байкал

струй по данным опытов с радиоактивным индикатором в зимний и летний сезоны на оз. Байкал. Как видим из данных таблицы, горизонтальные характерные размеры струй достигают 200 м на расстояниях от источника около 1000 м. То есть на таких расстояниях от точки выпуска анизотропия струй в вертикальном и горизонтальном направлениях достигает 10—20.

Опыты с заглубленными струями индикатора были осуществлены также в Черном море [33]. Опыты ставили целью исследовать поведение струй примеси, создаваемых существующими или проектируемыми сбросами сточных вод. Необходимость заглубления точки сброса таких вод диктуется, во-первых, тем, что при этом достигается лучшее санитарное состояние поверхностных и прибрежных вод моря, где наиболее вероятны контакты человека с водной средой. Кроме того, сброс сточных вод в поверхностный слой моря способен привести к нарушению механизмов конвекции, а образующаяся плотностная стратификация вод в самом поверхностном слое моря может препятствовать нормальному тепло- и газообмену моря с атмосферой. Естественно, что оптимальное с экологической точки зрения расположение выпусков сточных вод должно сочетаться с наиболее полной очисткой вод на береговых станциях и с возможно большим развитием безотходных или малоотходных производств.

Опыты с диффундирующими красителями у действующих выпусков сточных вод в Черном море были начаты в 1969 г. [31]. Раствор индикатора с постоянным расходом подавался в трубопровод сбросного устройства, а в зоне выпуска судно с флюориметром производило измерения. В районе выпуска осуществлялся также комплекс гидрометеорологических и гидрохимических наблюдений. В период 1969—1972 гг. было проведено 7 экспериментов в зоне выпуска сточных вод у г. Симеиза. Глубина выпуска равнялась 16 м, причем вся эта толща воды почти во все сезоны года бывает практически однородна по плотности. Лишь во время весеннего прогрева (май-июнь) возникает кратковременная стратификация на глубинах 10-15 м. В отсутствии стратификации поле сточных вод выходило на поверхность моря и лишь во время эксперимента 26 июня 1970 г. при наличии стратификации индикатор распространялся в придонном слое, не поднимаясь выше горизонта 10 м. В 1971-1973 гг. было осуществлено 12 диффузионных экспериментов у временного выпуска сточных вод г. Ялты, расположенного на глубине 37-39 м. Плотностная стратификация вод в этот районе отсутствует в период с октября ПО апрель. В летние месяцы наблюдается слой скачка плотности, постепенно заглубляющийся до горизонта 20 м и более. Во время штормов и сгонных ветров глубина слоя скачка увеличивается, а в ряде случаев и вся прибрежная водная масса может стать однородной по плотности. Такое разнообразие и изменчивость гидрологических условий проявлялись и в различиях форм поведения факела сточных вод. В ряде случаев при квазиоднородной водной массе факел выходил на поверхность, а при наличии слоя скачка плотности он обычно был заглублен. Высота подъема факела ΔH_0 также менялась от случая к случаю в зависимости от гидрометеорологических условий. Величина ΔH_0 для точечного источника примеси в среде с постоянным вертикальным градиентом плотности $d\rho/dz$ может быть оценена по формуле (см. [31])

$$\Delta H_0^4 = 6340 \ \frac{Q_0 (\sigma_1 - \sigma_a)}{\sqrt{g} (d\rho/dz)^{3/2}}, \qquad (2.68)$$

где Q_0 — расход источника примеси; σ_a и σ_1 — условные плотности сточных вод и морской воды на глубине выпуска, соответственно; g — ускорение свободного падения.

Для линейного источника примеси аналогичная формула может быть записана в виде (см. [31])

$$\Delta H_0^3 = 10.8 \frac{q_0 \left(\sigma_1 - \sigma_a\right)}{\alpha \sqrt{g} \left(d\rho/dz\right)^{s/2}}, \qquad (2.69)$$

где q_0 — удельный расход примеси на единицу длины источника; α — параметр вовлечения окружающей жидкости в поднимающийся факел.

Формулы (2.68)—(2.69) предложены для расчета подъема струи в стратифицированном море при отсутствии в нем постоянных течений. Если такие течения существуют, то высота подъема струи обычно уменьшается, так как течение убыстряет перемешивание струи с окружающей жидкостью, редуцируя тем самым различия в плотности струи и вод моря. Для учета влияния течений на высоту подъема струй Зацем [31] было предложено в формулы (2.68)—(2.69) ввести дополнительные эмпирические множители, записав выражение для ΔH в виде

$$\Delta H = K_U \Delta H_0, \qquad (2.70)$$

где коэффициент K_U зависит от скорости течения U по формулам

$$K_U = 1 - 0.67 U^{0.6} \tag{2.71}$$

для случая, когда разность плотностей струи и вод моря невелика, и

$$K_U = 1 - 0.93U^{0.4} \tag{2.72}$$

для случая существенного различия σ_a и σ₁.

Результаты экспериментов с затопленными струями красителя в Черном море дали неплохое согласие с расчетами высоты подъема струй примеси по формулам (2.70)—(2.72). Для предотвращения выхода факела сточных вод на поверхности моря, согласно этим формулам, весьма важно усилить первоначальное разбавление струй примеси, чего можно достигнуть специальными диффузорами на оголовках сбросов. Целесообразно также рассредоточение выпуска с превращением его из «точечного» в «линейный» или даже в «распределенный» по некоторой площади.

В опытах с затопленными струями в Черном море Зацу [32] удалось также наблюдать интересное явление расщепления подни-

мающейся струи примеси на ряд квазигоризонтальных слоев, протягивающихся вдоль изопикнических поверхностей на большие расстояния от места выпуска струи. Такое явление связано с «сепарацией» вещества струи по ее плотности в стратифицированном море. Более тяжелая часть примеси, достигнув определенного уровня, теряет способность подниматься выше и начинает распространяться вдоль горизонтальной плоскости. В то же время более легкие фракции струи еще имеют направленную вверх скорость и поэтому способны подняться на более высокий уровень, где плотность морской воды меньше.

Как уже упоминалось выше, диффузионные эксперименты с квазистационарными источниками позволяют собирать материал, удобный для определения статистических характеристик полей концентрации примеси. Попытку определить спектральную структуру поля примеси в диффундирующей струе предпринял впервые, по-видимому, Ичие [128]. С аэрофотоснимков струи были сняты два денсиметрических профиля в поперечных сечениях струи на расстояниях 1900 и 2300 м от источника. Профили осреднялись, и пульсационные характеристики получались вычитанием осредненных значений концентрации из «мгновенных» значений. Пространственный спектр для расстояния 1900 м имел четко выраженный максимум при значении волнового числа $k = 1.7 \cdot 10^{-3}$ см⁻¹, а для второго сечения максимум стал значительно слабее и сместился в сторону меньших значений k (7 · 10⁻⁴ см⁻¹).

Комплекс статистических характеристик поля примеси в диффундирующей струе был подсчитан по данным эксперимента с «непрерывным» точечным источником индикатора в прибрежной зоне Балтийского моря у поселка Цингст [87]. Источник примеси располагался на эстакаде в 90 м от береговой черты, а на расстоянии 150 м от источника на таком же расстоянии от берега на специальной треноге был установлен флюориметр. Регистрирующая аппаратура и источники питания располагались на берегу. Мощность источника в течение первых 3 ч опыта равнялась 0,12 г красителя за секунду, а затем мощность была увеличена до 0,54 г/с. Скорость вдольберегового течения во время эксперимента была 11 см/с, а скорость ветра достигала 6-6,5 м/с. Регистрация концентрации красителя продолжалась непрерывно в течение 3,5 ч. Интервал дискретизации при обработке записей 3 с, что привело к ряду № 1 в 3790 значений концентрации для основной части опыта и к ряду № 2 в 361 член для части опыта с повышенной концентрацией красителя. Расчеты первых четырех моментов распределений пульсаций концентрации были осуществлены по отдельности для двух половин первого ряда (ряды № 3 и № 4), а также для всего ряда № 1, но с удвоенным шагом дискретизации (ряд № 5). Полученные в результате расчетов оценки статистических моментов приведены в табл. 2.4. Оценки величин č, дисперсии D, а также асимметрии А оказались для рядов № 3, 4 и 5, как следует из данных таблицы, весьма близкими, что свидетельствует о стационарности основного ряда № 1. Несколько больший разброс имеют значения эксцесса *E*, для более точной оценки которого необходимы, по всей видимости, ряды большей продолжительности.

По рядам значений пульсаций концентрации были построены кривые распределений величины *c*' (рис. 2.52). Для ряда № 2 эмпирическое распределение неплохо аппроксимируется нормальным законом, для рядов же при меньшей мощности источника примеси аппроксимация этим законом удовлетворительна лишь для пульсаций концентрации, превышающих среднее значение \bar{c} .



Рис. 2.52. Плотности распределения вероятностей значений концентрации индикатора в струе по рядам № 2, 3, 4 и 5 и соответствующие кривые нормальных распределений 1 и 6 (по [87]).

При малых же значениях с' нормальное распределение дает заниженные значения вероятности по сравнению с экспериментом. Плотности распределений вероятности пульсаций концентрации, построенные по данным аналогичного опыта со струей красителя в Черном море [47], показали удовлетворительно согласие с нор-

Таблица 2.4

Оценки значений математического ожидания $ar{c}$ (10 ⁻⁹ г/см ³), дисперсии D
$(10^{-18} r^2/cm^6)$, коэффициента асимметрии A и эксцесса E, а также доверительных
интервалов Ј (при уровне значимости 0,9) значений концентрации примеси
в диффундирующей струе по данным опыта в Балтийском море (по [87])

Номер ряда	Ĉ	J _ĉ	D	J _D	A	Е
2	92,7	1,8	421	52	0,15	0,17
3	36,9	1,0	695	22	0,61	0,69
4	34,4	1,0	750	24	0,69	0,34
5	35,6	1,0	722	23	0,64	0,51

мальным законом распределения, а также с распределением Эджворта.

Сведения о статистических характеристиках поля концентрации позволяют рассчитывать ряд других практически важных параметров такого поля. Например, часто бывает необходимо знать, сколько раз n (за единицу времени) концентрация примеси в рассматриваемой точке превысит некоторое значение c_0 . Функция $n(c_0)$ может быть определена, если известны значение дисперсии



Рис. 2.53. Среднее число выбросов в зависимости от уровня концентрации индикатора для рядов наблюдений № 2, 3, 4, 5 и теоретическая кривая 6, подсчитанная по формуле (2.73) для ряда № 3.

концентрации примеси и спектральная функция пульсаций c'(t). Если предположить, что в интервале частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ спектральная функция подчиняется закону «степени -5/3», а дисперсия может быть определена как интеграл от спектральной функции в пределах от ω_1 до ω_2 , то для $n(c_0)$ можно получить (см. [87])

$$n(c_0) = \frac{1}{4} \pi^{-3/2} \frac{\omega_2^{4/3} - \omega_1^{4/3}}{\omega_1^{-2/3} - \omega_2^{-2/3}} \exp\left(-\frac{c_0^2}{2D}\right).$$
(2.73)

Для рассматриваемых рядов значений концентрации примеси \mathbb{N}_{2} 2, 3, 4 ω_{1} можно определить по соотношению $\omega_{1}=2\pi/\tau_{\text{мин}}$, где $\tau_{\text{мин}}=3$ с, а для ω_{2} имеем $\omega_{2}=2\pi/\tau_{\text{макс}}$, где $\tau_{\text{макс}}$ будем считать равным l/\bar{u} . Здесь l — масштаб явления, который в свою очередь может быть оценен по формуле $l=\sqrt{\alpha \varepsilon t^{3}}$, где α — универсальная константа, $t=x/\bar{u}$ — время «добегания» примеси от источника до точки x. Экспериментальные кривые функции $n(c_{0})$ для рядов \mathbb{N}_{2} 2, 3, 4 и 5 приведены на рис. 2.53, на котором нанесена также теоретическая зависимость $n(c_{0})$, построенная по формуле (2.73)

по параметрам ряда \mathbb{N} 3. На рис. 2.54 приведены распределения вероятностей продолжительности выбросов $p(\tau)$ над уровнями концентрации $\bar{c}_1 = 55, 4 \cdot 10^{-9}$ г/см³ и $\bar{c}_2 = 42, 4 \cdot 10^{-9}$ г/см³ для ряда \mathbb{N}_{\circ} 5. Теоретические кривые на рисунке построены по зависимости для нормального распределения

$$p(\tau) = \frac{\bar{c}R\tau}{4D} \exp\left(-\frac{\bar{c}^2R\tau^2}{8D}\right), \qquad (2.74)$$



Рис. 2.54. Экспериментальные значения плотности распределения продолжительности выбросов значений концентрации индикатора для ряда № 5 при двух уровнях средней концентрации (кривые 3 и 4) и соответствующие теоретические кривые 1 и 2, построенные по формуле (2.74).

где

$$R = -\frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{2\pi D} \int_0^{\infty} \omega^2 E_c(\omega) d\omega; \qquad (2.75)$$

 $r(\tau)$ — автокорреляционная функция флюктуаций концентрации примеси; $E_c(\omega)$ — спектральная функция. Если $E_c(\omega)$ в интервале частот от ω_1 до ω_2 подчиняется закону «степени — ⁵/₃», то выражение для *R* принимает вид

$$R = \frac{3}{8\pi D} B\varepsilon_c \varepsilon^{-1/s} \bar{u}^{-2/s} (\omega_2^{4/s} - \omega_1^{4/s}), \qquad (2.76)$$

где B — универсальная постоянная; ε — скорость диссипации турбулентной энергии; ε_c — скорость «диссипации» неоднородностей концентрации; \overline{u} — средняя переносная скорость течения.

Спектральные функции пульсационных значений концентрации примеси *E*_c были построены для всех рассматриваемых рядов. Переход от временны́х к пространственным аргументам при этом осуществлялся по гипотезе «замороженной» турбулентности с использованием известного значения переносной скорости течения \bar{u} . На рис. 2.55 в качестве примера приведены значения спектральных плотностей пульсаций концентрации, подсчитанных для рядов



Рис. 2.55. Спектральные плотности пульсаций концентрации индикатора в струе, подсчитанные по рядам № 5 (а) и № 2 (б).

1 и 2 — зависимости с показателями степени -5/3 и -2 соответственно.

наблюдений № 5 и 2. Приблизительно до частоты $f=\omega/(2\pi) = -0.03$ Гц (что соответствует волновому числу $k \sim 0.02$ см⁻¹) экспериментальные точки хорошо согласуются с зависимостью закона «степени — 5/3». Для частот же f < 0.03 Гц и вплоть до минимальных значений f=0.001 Гц ($k=6 \cdot 10^{-4}$ см⁻¹) тангенс угла наклона спектральной функции увеличивается до — 2. Такой вид
спектральной функции был обнаружен, как указывалось в предыдущем разделе, и по данным измерений полей концентрации красителя в диффундирующих пятнах и связывался с влиянием притока энергии к водам океана от ветра [формула (2.14)]. В опытах с непрерывным точечным источником вид спектральной функции Ес может определяться и меандрированием всей струи красителя под действием крупномасштабных турбулентных вихрей в поле скорости. В этом случае неподвижно установленный датчик флюориметра будет в различные моменты времени попадать в зоны струи с меняющейся средней концентрацией индикатора. Если временной спектр смещений струи в направлении, перпендикулярном направлению осредненного потока, обозначить через $E_y(\omega)$, то под действием смещений оси струи прибор будет фиксировать вариации концентрации, спектр которых $E_{c}(\omega)$ свяжется со средней концентрацией примеси соотношением

$$E_c(\omega) = (\partial \bar{c} / \partial y)^2 E_u(\omega). \tag{2.77}$$

Так как градиент $\partial \bar{c}/\partial y$ является функцией y, то спектр $E_c(\omega)$ будет зависеть и от амплитуды меандрирования струи. Для четкого разделения вкладов в $E_c(\omega)$ колебаний оси струи и пульсаций концентрации красителя в самой струе (под действием мелкомасштабной турбулентности) необходимо, очевидно, одновременно с измерением концентрации в неподвижной точке пространства регистрировать и смещения всей струи красителя под действием крупномасштабной морской турбулентности.

При многократных пересечениях диффундирующей струи индикатора на фиксированном расстоянии от источника х проблема исключения влияния меандрирования струи на статистические характеристики поля концентрации не возникает. Действительно, в этом случае поперечная координата у может отсчитываться от точки максимума осредненной [путем сглаживания индивидуальной реализации с(y)] концентрации индикатора. При таком выборе системы координат все последующие профили с(и) могут быть совмещены по точкам с максимумом концентрации и таким образом составить ансамбль, пригодный для статистического осреднения. Пульсационные значения концентрации получаются тогда вычитанием осредненного профиля $\bar{c}(y)$ из каждого «мгновенного» профиля, т. е. $c'(y) = c(y) - \bar{c}(y)$. Если сделано достаточное число пересечений струи, то можно подсчитать дисперсию или среднеквадратическое отклонение о флюктуаций концентрации как функцию поперечной координаты у. Для удобства дальнейшего анализа σ(y) целесообразно нормировать на значение осредненной концентрации $\bar{c}(y)$, а в качестве аргумента такой нормированной функции взять безразмерное расстояние $\zeta = u/L$, где L — типичная ширина струи. Зависимость $\varphi = \sigma(y)/\bar{c}(y)$ от ζ была определена по данным диффузионных опытов со струями красителя в Черном море 1968 г. Расчеты проведены для измерений на трех разрезах через струю на расстояниях 100, 200 и 400 м от источника красителя [88]. Аналогичные расчеты были

осуществлены поздиее по данным измерений со струями красителя в Каспийском море [26]. Здесь расстояние измерительных галсов от источника примеси достигало 2100 м. Оказалось, что зависимости φ от безразмерного расстояния от ζ близки для всех галсов, что дало возможность все данные о $\varphi(\zeta)$ представить в виде единого графика (рис. 2.56). Типичные значения функции $\varphi(\zeta)$ в центральной части струи оказались близкими к 0,3—0,6, а на пери-



Рис. 2.56. Зависимость относительной интенсивности пульсаций концентрации индикатора от безразмерного расстояння до оси струи. Экспериментальные точки и теоретические кривые (по [26]).

ферии струи они возрастали до 4—6. Теоретические кривые функции $\varphi(\zeta)$, приведенные на рисунке, получены путем численного интегрирования дифференциального уравнения второго порядка для $\varphi(\zeta)$, выведенного при предположении об автомодельности решения полуэмпирического уравнения для среднего квадрата пульсаций концентрации примеси в струе [121]. Интегрирование проведено для трех значений $\varphi(0)$. Согласие экспериментальных точек с теоретическими кривыми следует признать в первом приближении удовлетворительным, однако заметен более медленный рост экспериментальных значений $\varphi(\zeta)$ с увеличением ζ по сравнению с зависимостью, предсказываемой моделью.

Более сложную модель зависимости относительной интенсивности пульсаций концентрации индикатора от безразмерного расстояния до источника предложил, как об этом говорилось в разделе 1.8, Тоомпу ([102], см. также работу М. С. Немировского в [12]). В его модели величина φ зависит не только от ζ , но и от расстояния до источника индикатора *x*. На рис. 2.57 приведены зависимости $\varphi(\zeta, x)$, полученные по измерениям в струях красителя во время опытов в Балтийском море на расстояниях от источника 25, 75, 150, 250 и 350 м [102]. Теоретические кривые, построенные с использованием формулы (1.173) при определенных предположениях о поле средней концентрации красителя, неплохо согласуются с экспериментом, обнаруживая явную зависимость величины φ и от расстояния *x*. Следовательно, автомодельность



Рнс. 2.57. Зависимость относительной интенснвности пульсаций концентрации индикатора от безразмерного расстояния до оси струи и от расстояния до источника (1 — 25 м, 2 — 75 м, 3 — 150 м, 4 — 250 м, 5 — 350 м) (по [102]).

решения уравнения для φ , вообще говоря, не выполняется, так как зависимость от x ее нарушает. Однако, как указывает Тоомпу, для больших расстояний от источника такая зависимость ослабевает и предположение об автомодельности здесь становится более обоснованным. Этим, по-видимому, и объясняется, почему в ранних исследованиях Чанади [121], а также в приведенных выше результатах опытов в Черном и Каспийском морях четкого отклонения от автомодельности не обнаруживалось.

На зависимость статистических характеристик поля концентрации примеси в струях от расстояния до источника имеются указания и в работе Заца, Немировского и др. [11]. В этой работе были проанализированы данные диффузионных опытов, осуществленных во время международного эксперимента «Камчия-77», в частности результаты подсчетов спектральных функций $E_c(\omega)$. В работе приведены значения функций $E_c(\omega)$, подсчитанные по данным измерений в струе красителя на расстояниях 200 и 500 м от источника. Было обнаружено, что тангенс угла наклона спектральной функции увеличивается с ростом x от —1,5 до —2,0. В [11] были также проанализированы значения функции $E_c(\omega)$, полученные в другом опыте на расстоянии 100 м от источника индикатора. Здесь наклон спектра существенно менялся с изменением аргумента. Максимальные наклоны спектральных кривых (в логарифмических координатах) наблюдались в эксперименте «Камчия-77» в штормовую погоду. Такое разнообразие спектральных форм и их изменчивость связаны, естественно, с большим числом факторов, влияющих на поле концентрации примеси, о чем уже говорилось



Рис. 2.58. Зависимость коэффициента горнзонтальной турбулентной диффузин F от масштаба явления l по данным опытов в искусственном водоеме и в Тихом океане.

при анализе спектральных функций пульсаций концентрации, построенных по данным опытов с пятнами красителя.

2.4. Диффузия дискретных частиц в океане

Первые опыты с диффузией дискретных частиц в океане были проведены Ричардсоном и Стоммелом [153], которые использовали для этой цели поплавки из корней пастернака. Опыты осуществлялись с пирса при глубине моря всего 2 м. Было замерено по 45 пар расстояний между отдельными частицами в начальный момент времени t_0 и в момент $t_1 = t_0 + \tau$, где $\tau = 30$ с. По этим данным рассчитывался коэффициент диффузии F(l) из уравнения (1.164) по формуле

$$\overline{F}(l) = \overline{(l_1 - l_0)^2} / (2\tau) = \overline{\Delta l^2} / (2\tau), \qquad (2.78)$$

где Δl — изменение расстояния между частицами за время т, а черта означает осреднение по парам частиц с близкими начальными разделениями l_0 . В эксперименте Ричардсона и Стоммела осреднение было осуществлено по двум классам расстояний между частицами, в результате чего получены два значения коэффициента F(l), где $l = (l_0 + l_1)/2$. Также по два значения коэффициента F(l) были получены Стоммелом [156] по данным опытов с дискретными частицами у берегов Северной Америки и вблизи Бермудских островов. В качестве дискретных индикаторов в этих опытах были использованы листки бумаги.

Большой цикл опытов с диффузией дискретных частии был проведен в 1955—1958 гг. Озмидовым [81]. Опыты проводились в искусственных водоемах, с нефтяных эстакад в Каспийском море и в Тихом океане, причем в двух первых случаях в качестве индикаторов использовались листки бумаги, а в океанских опытах — притопленные буйки с радиолокационными отражателями. Положение листков бумаги в процессе диффузии фиксировалось с помощью фотосъемки, а буйков — радиолокатором. Интервал расстояний между парами диффундирующих частиц варьировал от десятков сантиметров до нескольких километров. Осреднение при подсчете значений коэффициента F(l) осуществлялось по сравнительно узким интервалам значений І. В результате таких подсчетов было обнаружено существенное возрастание значений F(l) с ростом масштаба l. В большинстве случаев зависимость F от 1 достаточно хорошо аппроксимировалась степенной функцией с показателем степени 4/3 (рис. 2.58). Такая зависимость (закон «степени ⁴/₃») для коэффициента диффузии может быть получена, как было указано в главе 1, из соображений размерности в случае локально-изотропной турбулентности [формула (1.68)], а эмпирически была установлена по данным о диффузии в атмосфере Ричардсоном [формула (1.165)]. В случае диффузии пар дискретных частиц закон «степени 4/3» должен, вообще говоря, выполняться лишь в определенном интервале времен диффузии т. Действительно, если считать, что за малый промежуток времени т коэффициент F(l) можно считать постоянным, то решение уравнения (1.164) будет иметь вид

$$q(l_1) = \frac{\text{const}}{\sqrt{\tau}} \exp\left[-\frac{(l_1 - l_0)^2}{4\tau F(l_0)}\right],$$
 (2.79)

где *l*₁ — расстояние между частицами по истечении времени диффузии т.

Так как выражение (2.79) представляет собой гауссовское распределение вероятностей значений величины *l*₁, то стандартное от-

клонение величины l_1 от l_0 будет равно $\sqrt{2\tau F(l_0)}$, откуда для коэффициента F(l) и получается формула (2.78). Однако при относительно малых промежутках времени τ для дисперсии частиц, вообще говоря, должно выполняться соотношение (1.161), отличное от закона «степени 4/3». Выполнимость же этого закона в опытах по диффузии в океане и атмосфере, как указывается в [68], связана, по-видимому, с соответствующим выбором величины τ при разных характерных значениях масштаба l.

Опыты с дискретными частицами в океане были продолжены в последующие годы еще целым рядом исследователей (см. [68, 81], а также работы Тушинского в [99], Розмана, Гольдберга и Маркова в [11], Озмидова и Заца в [141]). В большинстве этих работ зависимость коэффициента диффузии от масштаба явления⁴ аппроксимировалась степенными выражениями вида $F = kl^n$ с показателями степени *n*, в ряде случаев отличающихся от ⁴/з. Так, еще в опытах Озмидова 1955 г. было подмечено, что величина *n* закономерно меняется с увеличением толщины слоя воды в водоеме, где проводились опыты. Изменялись при этом и значения коэффициента пропорциональности *k*. Иногда экспериментальные данные лучше аппроксимировались степенными зависимостями с разными значениями *n* и *k* на отдельных интервалах значений



Рис. 2.59. Зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии F от масштаба явления l по данным опытов в Каспийском море (по работе Журбаса, Мамедова, Татараева в [47]).

величины *l*. Так, Зац с соавторами [34] указывали, что в прибрежной зоне Черного моря (по данным опытов с диффундирующими плавающими частицами у м. Ай-Тодор) показатель степени *n* не превышал 0,50—0,73, т. е. был в 2—2,5 раза меньше, чем в законе «степени ⁴/₃». Такое отличие авторы объясняют гидрологической ситуацией приглубого района проведения эксперимента. Сложная топография дна и береговой черты, как считают авторы, налагают определенные ограничения на горизонтальные размеры и интенсивность турбулентных вихрей. Может меняться и соотношение между вкладами горизонтальных и вертикальных составляющих в процесс обмена. В частности, вертикальная диффузия может усиливаться из-за сгонно-нагонных явлений, ярко выраженных в рассматриваемой зоне, а также из-за конвективных движений и внутренних волн.

Летом 1974 г. опыты с дискретными частицами были проведены Журбасом, Мамедовым и Татараевым (см. их работу в [47]) в Каспийском море. В качестве индикаторов использовались небольшие буи с радиолокационными индикаторами и с подводными парашютами. В каждом опыте выпускалось по 4 буя. Расстояния до буев и их азимуты определялись с дискретностью 600—900 с с помощью радиолокационной станции, установленной на бывшем нефтяном основании. Осреднение в формуле (2.78) при подсчете коэффициента диффузии F(l) осуществлялось по группам значений l=0-50; 50—100; 100—150; 150—200; 200—250; 250—300 м. Результаты расчета функции F(l) для всех серий опытов приведены на рис. 2.59. Как видно из рисунка, в данном случае все экспериментальные точки хорошо легли в логарифмическом масштабе на одну прямую с тангенсом угла наклона (т. е. с показателем степени *n*), равным 1,14. Значение коэффициента пропорциональности оказалось при этом близким к 0,14. Такое отклонение результатов опытов от закона «степени ⁴/₃» авторы связывают с особенностями энергоснабжения вод мелководной части моря в районе проведения эксперимента.

Опыты с диффундирующими по поверхности воды дискретными индикаторами были проведены на оз. Байкал Тушинским (см. [99]). Индикаторами служили специальные вехи длиной 2,5 м с крестообразными водными парусами сечением около 2 м². Положение поплавков в процессе диффузии определялось с помощью фотосъемки с судна. Запуски поплавков были проведены в районе г. Байкальска на расстояниях 0,5 и 12 км от берега, а также на участке озера на разных расстояниях от берега. Селенгинском Масштаб явления *l* в опытах у г. Байкальска менялся от 6 до 103 м. а соответствующие значения коэффициентов диффузии Fот 84 до 5983 см²/с. Зависимость F(l) по данным этих опытов аппроксимировалась двумя степенными выражениями с показателем n = 0.98 для малых масштабов и со значением *n*, близким к $\frac{4}{3}$, для *l*, превышающих 30-60 м. Такое явление автор работы связывает с влиянием на процесс диффузии слоя скачка плотности, расположенного в период опытов на глубине 30-60 м. Масштабы явления l во время первых опытов в Селенгинском районе варьировали от 14 до 123 м. В этом случае для всех масштабов зависимость F(l) аппроксимировалась одним степенным выражением с показателем степени 1.08. Опыты проводились на мелководье при штилевой погоде. В последующих опытах масштаб *l* был увеличен до 550 м. Для интервалов масштабов 100-500 м в этих опытах были получены значения показателя степени n, очень близкие к 4/3. Эти результаты в основном согласуются с данными по диффузии, полученными канадскими исследователями на озерах Гурон и Онтарио (см. ссылки в [99]), а также Верболовым и Шерстянкиным (см. [100]) по данным о диффузии пятен красителя и о пульсациях скорости течений в оз. Байкал. Изменчивость же значений параметров n и k в зависимости от вариаций l, а также скорости течений в озерах связывается этими авторами с влиянием морфологии дна и береговой черты озер, наличием плотностной стратификации вод и их динамической активностью в период наблюдений.

К аналогичным выводам пришли и авторы исследования диффузии дискретных частиц у побережья Болгарии в 1978 г. (Розман, Гольдберг, Марков в [12]). По данным этих опытов в диапазоне масштабов l до 1,5 км значение n оказалось не превосходящим 0,46. Такое малое значение n авторы объясняют близостью района наблюдений от береговой черты (не более 2 км) и предлагают связывать n с безразмерным отношением l/d, где d расстояние района наблюдения от берега. Экспериментальные точки зависимости n(l/d) имеют весьма большой разброс, но в первом приближении ее удалось аппроксимировать линейной зависимостью. По данным опытов у берегов Болгарии, а также вблизи берегов Крыма была исследована и анизотропия процесса диффузии дискретных частиц [48]. Рассчитывались отдельно компоненты дисперсии расстояний между парами частиц в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а также смешанный компонент. Это давало возможность построить эллипсы дисперсий и проследить их эволюцию в процессе диффузии. На рис. 2.60 приведен результат расчета таких эллипсов по данным опытов 1980 г. у берегов Болгарии. Как видно из рисунка, эллипсы в процессе



Рнс. 2.60. Эволюция эллипса дисперсий днффундирующих частиц во времени по данным опыта на болгарском шельфе в Черном море. Цифры у эллипсов часы с момента запуска индикаторов (по работе Розмана, Гольдберга и др. в [48]).

диффузии поворачивались и увеличивали свою анизотропию α, определяемую по формуле $\alpha = 1 - \min(\sigma_{\tau}, \sigma_n) / \max(\sigma_{\tau}, \sigma_n)$, где σ_{τ}^2 и σ_m^2 — дисперсии вдоль главных осей эллипсов (индекс т относился к главной оси, имеющей в начале эксперимента направление, более близкое к направлению среднего переноса центра тяжести «пятна» индикаторов). В большинстве случаев за время 4-5 ч диффузии поворот осей эллипсов не превышал 45°, причем иногда поворот происходил быстро в начальный период процесса, а затем замедлялся, а иногда, наоборот, поворот убыстрялся к концу периода наблюдений. В ряде случаев происходила смена знака поворота в процессе диффузии. Последний режим наблюдался при опытах вблизи мысов, где, очевидно, существовали сложные циркуляционные системы движений вод. При преобладании переноса индикаторов в сторону берега ускорение вращения осей эллипса дисперсии обычно наблюдалось при достижении индикаторами зоны, удаленной от берега на 1-2 км. Анизотропия эллипсов а, как правило, достигала максимальных значений через 4-5 ч после запуска индикаторов. При вдольбереговом переносе индикаторов максимальные значения а равнялись 0,9, в то время как при переносе к берегу а обычно не превышала 0,7.

По значениям дисперсий σ_{τ}^2 и σ_n^2 вычислялась также суммарная дисперсия $\sigma^2 = \sigma_{\tau}^2 + \sigma_{\pi}^2$, а по данным о σ^2 в свою очередь исследовалась зависимость σ^2 от времени диффузии t. Зависимость искалась в степенной форме: $\sigma^2(t) \sim t^m$. Опыты проводились вплоть до периодов диффузии 9 ч с вариацией масштабов явления OT 100 м до 1,5 км. Значения показателя степени т при этом оказались заключенными в интервале 1 < m < 2. Было замечено, что в случаях вдольберегового и перпендикулярного к берегу переноса частиц значения т статистически значимо различаются. В первом случае значение т оказалось близким к 2, а во втором значение т было заключено в интервале 1-1,4. Для малых масштабов явления (от 10 до 400 м) обнаружилась также зависимость т от глубины места наблюдений: для приглубого шельфа значение т значительно превосходило значения *m*, полученные по данным опытов в мелководных районах.

Показатель степени т определенным образом связан с показателем п в степенной зависимости коэффициента обмена от масштаба явления. При m = 1 коэффициент диффузии постоянен, что соответствует значению n=0. Для инерционного интервала масштабов должно соответственно выполняться m=3, n=4/3. По мнению Гольдберга с соавторами (см. их работу в [48]), значения т, по имеющимся в их распоряжении данным по прибрежной зоне моря, заключены в основном в интервале 1,7-2,2, а значения п соответственно в интервале 1-1,5. Причем для вдольбереговой диффузии более характерны значения *m*, близкие к 2, а *n* — близкие к 1. Этот результат может быть объяснен аналогией между прибрежной зоной моря и турбулентным пограничным слоем с логарифмическим профилем продольной скорости в этой зоне и линейным профилем в непосредственной близости от береговой черты. В таком пограничном слое коэффициент диффузии, действительно, можно считать линейной функцией от масштаба явления (расстояния до берега). В береговой зоне моря закон «степени 4/3» для коэффициента диффузии выполняется, по-видимому, сравнительно редко, причем чаще он наблюдается для процессов с масштабами 200-800 м. Важную роль в формировании зависимости F(l) в прибрежной зоне моря должны иметь также эффекты вертикального сдвига поля скорости, которые, как ΜЫ видели в разделе 1.6, могут приводить к различным видам зависимости эффективных коэффициентов горизонтального обмена от глубины водоема, скорости течения и других факторов.

Примером применения аэрофотометодов для исследования диффузии дискретных частиц по поверхности моря могут служить измерения, описанные Озмидовым и Зацем (см. их статью в [141]). Опыты проводились вблизи берегов Кавказа и Крыма в Черном море. Для лучшей видимости диффундирующих буйков они снабжались пакетиками с красителем, который, растворяясь в морской воде, создавал около буйков четко видимое с самолетаоблачко подкрашенной жидкости. Аэрофотоснимки поплавков осуществлялись с интервалами 4—5 мин в течение нескольких часов. Расстояние между парами буйков варьировало во время опытов от 10 до 474 м, а значения коэффициентов диффузии F— от 10² до 10⁵ см²/с. График зависимости F(l) по данным этих опытов приведен на рис. 2.61. Как следует из графика, опыты у приглубых берегов Кавказа привели к зависимости, очень близкой к «закону 4/3», в то время как у берегов Крыма показатель степени *n* оказался несколько меньшим.



Рис. 2.61. Зависимость коэффициента горизонтальной турбулеитной диффузии F от масщтаба явления l, по данным аэрофотосъемки диффундирующих дискретных индикаторов в Черном море (по [150]).

1 — опыт у Кавказского побережья; 2 — опыт у берегов Крыма.

Зависимость коэффициента диффузии F не только от масштаба явления, но и от других факторов, в частности от скорости течений V, исследовалась в цитированной выше работе [34]. При этом, естественно, необходимо иметь в виду, что величина F зависит не от самой скорости течения V, a, как справедливо отмечают авторы исследования, от градиента скорости V/L, где Lопределенным образом выбранный масштаб (например, глубина моря, толщина однородного слоя, глубина проникновения дрейфового течения и т. п.). Если в период проведения эксперимента значение L фиксировано, то в этом случае можно говорить о зависимости F или других параметров диффузии от самой величины V. Такая зависимость искалась в работе [34] в степенной форме. Было обнаружено, что при увеличении скорости течения с 5-10 до 50-70 см/с значение коэффициента диффузии возрастало также приблизительно на порядок. В первом приближении, следовательно, согласно этим данным, зависимость F от V можно было считать линейной. К такому же результату пришел Тушинский [99] по данным диффузионных опытов на оз. Байкал.

Зависимость коэффициента F не только от масштаба явления, а и от других факторов удобнее описывать не степенной функцией

с меняющимися значениями степени *n*, а путем введения некоторой «корректирующей» функции *f*, зависящей, например, от безразмерной относительной глубины водоема *l/H*, где *l* — масштаб диффузионного процесса (расстояние между частицами), а *H* — глубина водоема [81]. В этом случае для коэффициента диффузии в инерционном интервале получаем

$$F = k l^{1/s} f(l/H),$$
 (2.80)

где $k = c_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

При небольших скоростях ветра (4—5 м/с) и скоростях течений 8—10 см/с, при которых производились опыты, описанные



Рис. 2.62. Функция f (l/H), «корректирующая» закон «степени ⁴/₃» при малых значениях l/H, по данным опытов в бассейнах (точки) и Каспийском море (квадратики).

в [81], значение величины k оказалось близким к 0,01 см^{2/3}/с. Значение же функции f(l/H) было близко к единице при больших значениях параметра *l/H* и увеличивалось до нескольких единиц при *I/H* < 1. Полученные по опытам в экспериментальных бассейнах и в прибрежной части Каспийского моря значения функции f(l/H) приведены на рис. 2.62. Для построения графика использовано 1449 отдельных определений значений коэффициента **F**, осредненных по нескольким интервалам значений аргумента 1/Н. Для объяснения вида функции f(l/H) была выдвинута гипотеза о возможности изменения наклона осей турбулентных вихрей при увеличении толщины слоя жидкости в водоеме и о влиянии этогоявления на горизонтальную диффузию частиц на поверхности водоема [72]. Суть гипотезы заключается в том, что на горизонтальную диффузию влияют только горизонтальные составляющие вихревых движений жидкости, в связи с чем при наклоне оси вихря его вклад в диффузию плавающих частиц должен уменьшаться. Основанный на простых геометрических построениях расчет такой «редукции» интенсивности горизонтального обмена приводит к аналитическому выражению для подсчета функции f(l/H) [75].

График найденной таким образом функции f(l/H) приведен на рис. 2.63. Общий вид теоретической функции f(l/H) соответствует виду экспериментальной кривой, полного же количественного согласия обеих кривых не наблюдается, что может быть объяснено влиянием других, не учитываемых в теории, факторов на диффузию.

Интересным является вопрос о зависимости скорости взаимной диффузии дискретных частиц от их размера. Экспериментально было показано [73], что мелкие индикаторы диффундируют быст-



Рис. 2.63. Теоретически полученная функция f (l/H), «корректирующая» закон «стелени 4/3».

рее по сравнению с более крупными частицами при равенстве всех остальных параметров. Это явление может быть объяснено тем, что в диффузии меньших индикаторов принимают участие и мелкие турбулентные вихри, которые целиком «покрываются» крупными индикаторами. Если для простоты предположить, что энергии по турбулентным вихрям в потоке, где распределение диффундируют индикаторы, описывается закономерностями локально-изотропной турбулентности, то для отношения энергий турбулентных вихрей, имеющих отношение к диффузии пары частиц с размерами h и пары частиц точечного размера, получим

$$\frac{\overline{u_{h,l}^{2}}}{u_{0,l}^{2}} = \frac{\int_{1/l}^{1/h} c \varepsilon^{1/3} k^{-5/3} dk}{\int_{1/l}^{\infty} c \varepsilon^{1/3} k^{-5/3} dk} = 1 - \left(\frac{h}{l}\right)^{2/3}, \qquad (2.81)$$

где *l*—расстояние между парами рассматриваемых частиц. Но, как показано в разделе 1.7 [формула (1.159)], при больших временах диффузии взаимная дисперсия пар частиц становится про-

порциональной среднему квадрату пульсационных скоростей $\overline{u'^2}$, в связи с чем (2.81) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta I_{h,l}^2}{\Delta I_{0,l}^2} = 1 - \left(\frac{h}{l}\right)^{2/3}.$$
 (2.82)

Формула (2.82) была сопоставлена с результатами опытов по горизонтальной диффузии индикаторов трех размеров: 4,6; 8,6 и 17,3 см [73]. Опыты проводились в бассейне, интервал времени

Рис. 2.64. Отношение дисперсий индикаторов размера *h* и точечных индикаторов как функция отношения *h/l* (*l* — расстояние между диффундирующими индикаторами). Теоретическая кривая и экспериментальные точки.

между последовательными определениями положения индикаторов Δt равнялся 10 с. Полученные в опыте значения $\Delta l_{h,l}^2$ осреднялись по пяти интервалам отношения h/l: 0,00—0,05; 0,05—0,10; 0,10—0,20; 0,20—0,30. Величина $\overline{\Delta l_{0,l}}$ подсчитывалась по формуле $\overline{\Delta l_{0,l}^2} = 2k \Delta t l^{4/3}$, где k — коэффициент пропорциональности в законе «степени 4/3». Определенные таким образом пять значений отношения $\overline{\Delta l_{h,l}^2}/\overline{\Delta l_{0,l}^2}$ приведены на рис. 2.64, на котором нанесена также теоретическая кривая, следующая из формулы (2.82). Как видно из рисунка, совпадение экспериментальных точек с теоретической кривой вполне удовлетворительное, что свидетельствует об оправданности сделанных при выводе формулы (2.82) предположений.





ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСЕЙ В ОКЕАНЕ ОТ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ

3.1. Диффузия примесей, выпадающих из атмосферы

При взаимодействии океана с атмосферой происходит обмен между этими сферами не только энергией, теплом и влагой, но и различного рода веществами как естественного, так и антропогенного происхождения. Обмен кислородом и углекислым газом между атмосферой и океаном является важнейшим регулятором газового состава атмосферы. Из атмосферы в океан поступают и биогенные элементы, и различного рода примеси, существующие в воздухе. Особое внимание в послевоенные годы было привлечено к возможности загрязнения океана радиоактивными элементами, образовавшимися в результате проводимых испытаний ядерных устройств. Естественно, что не менее важно знать закономерности распространения в водах океана и других, могущих быть опасными для человека и обитателей океана веществ. А такие вещества и примеси все в большем и большем объеме образуются в результате развития промышленности во многих странах мира.

Поступление в атмосферу больших количеств радиоактивных элементов (радионуклидов) было обусловлено в конце 50-х — начале 60-х годов испытаниями ядерных устройств. Радионуклиды стали накапливаться в океанах, почве, биологических объектах, что заставило ведущие ядерные державы в 1963 г. заключить соглашение о запрещении испытаний ядерного оружия в атмосфере, космосе и под водой. Однако бурное развитие в последующие годы атомной энергетики, а также продолжающиеся испытания ядерных устройств Китаем и Францией не позволяют ослаблять внимание к проблеме загрязнения окружающей среды радионуклидами. Разработка методов определения концентраций радионуклидов в различных средах и объектах, развитие способов интерпретации полученных данных и методов расчета распространения и трансформации изотопов в атмосфере и океане привели к появлению новых научных направлений — ядерной метеорологии [98] и ядерной гидрофизики [70]. Многочисленные исследования содержания различных искусственно образовавшихся радиоактивных изотопов в океане позволили сделать вывод, что радионуклиды

могут служить хорошими трассерами для исследования закономерностей циркуляции вод и характеристик диффузии в океане. выпадении какой-либо примеси из атмодолговременном При сферы в океан между содержаниями примеси в обеих средах наопределенное равновесие, что приводит к образованию ступает концентрации примеси в океане. Однако некоторой «фоновой» уровень такого «фона» существенно зависит от характеристик данного водоема -- его размеров, динамической активности, солевого состава вод, интенсивности биологических процессов, географического положения водоема и т. п.

Глобальные выпадения продуктов ядерного деления, образовавшихся в результате ядерных взрывов, являлись основным источником загрязнения открытых частей океанов искусственными радиоактивными элементами. Среди этих элементов наиболее опасчеловека и биоты океана являются изотопы ¹³⁷Cs и для ными ⁹⁰Sr с периодами полураспада около 30 лет, а также ¹⁴⁴Ce с периодом полураспада около года. Локальные повышения концентрации этих элементов могут быть обусловлены сбросами радиоактивных отходов ядерной промышленности и атомных станций, а также выносов продуктов деления реками, на берегах которых расположены ядерные предприятия. Фоновый уровень радиоактивной загрязненности открытых частей Мирового океана менялся во времени и был неодинаков для отдельных его частей. Так как одним из основных полигонов испытаний ядерных устройств был Тихий океан, то радиоактивная загрязненность его вод в конце 50-хначале 60-х годов возрастала. При этом ряд исследователей отмечал, что содержание радионуклидов в северных частях как Тихого, так и Атлантического океана значительно превосходило загрязненность их южных частей. Так как испытаний ядерного оружия в Атлантическом и Индийском океанах не проводилось, то главным источником их фонового загрязнения явились глобальные выпадения радионуклидов из атмосферы.

Первые сведения о переносе в Тихом океане продуктов локальных выпадений от американских ядерных испытаний были получены японскими океанологами еще в конце 50-х годов. Ими было установлено, что радионуклиды от районов взрывов у атоллов Бикини и Эниветок уже через 4 мес были перенесены на расстояния до 2000 км, а через 8 мес - до 7000 км от места взрывов. Распространение в водах океана радионуклидов не от локальных выбросов ядерных взрывов, а от глобальных выпадений их из высоких слоев атмосферы стало исследоваться позднее. Это было связано, во-первых, с методическими трудностями определения малых концентраций изотопов в морской воде и, во-вторых, с необходимостью большого числа измерений для «картирования» распределения радионуклидов по большим акваториям океана.

Наибольшее количество радиоактивных продуктов заносилось в верхние слои атмосферы при мощных термоядерных взрывах. Здесь радионуклиды распределялись по высоте в стратосфере, а затем быстро распространялись практически над всем земным шаром, образуя стратосферный резервуар радиоактивных продуктов. Выпадение на поверхность Земли радионуклидов из этого резервуара происходит в форме аэрозолей («сухое выпадение») или с атмосферными осадками («мокрое выпадение»). Интенсивность выпадения зависит не только от количества заброшенного в стратосферу осколочного материала, но и от особенностей механизмов очистки стратосферы, зависящих, в свою очередь от географического фактора. В связи с этим наблюдалась заметная зависимость количества радиоактивных глобальных выпадений от географической широты места наблюдений. Существовали и временные, в первую очередь годовые колебания в мощности выпадений (конечно, наряду с общим трендом, связанным с интенсификацией испытаний ядерных устройств или с их запрещением).

Попадающие из атмосферы в океан радионуклиды могут вступать в сложные химические связи с другими элементами. Образующиеся соединения меняются затем за счет химических, физических и биологических процессов. Многообразие форм существования изотопов в водах океана, естественно, затрудняет изучение их распространения и трансформации. Однако для изотопов ⁹⁰Sr и ¹³⁷Cs установлено, что они находятся в океанской воде практически полностью в растворенном состоянии. В связи с этим указанные изотопы оказываются наиболее удобными трассерами для исследования процессов обмена в океане. Попадая из атмосферы в поверхностные слои океана, изотопов в более глубокие слои можно судить об интенсивности и характеристиках процесса вертикального обмена в океане.

Для математической формулировки задачи о диффузии выпадающих из атмосферы радионуклидов необходимо было проанализировать сведения об интенсивности их выпадений и данные о содержании изотопов в верхних слоях океана. Анализ таких данных, имеющихся к 1965 г., показал, что на больших площадях океана выпадение стратосферного стронция-90 в среднем за год можно было считать постоянным. На этих площадях, следовательно, горизонтальным обменом стронция-90 в водах океана можно было пренебречь по сравнению с вертикальным. Наиболее удобным для расчета диффузии стратосферного стронция-90 явился Атлантический океан, который, как уже об этом упоминалось, был свободен от влияния локальных тропосферных выпадений изотопов от ядерных взрывов. Начиная с 1956 г. в водах этого океана (главным образом в поверхностных слоях) стали производиться измерения содержания изотопа. Результаты таких измерений за 1960-1961 гг. нанесены на график рис. 3.1. Все имеющиеся данные на рисунке совмещены на один меридиональный разрез, чтобы выявить зависимость концентрации изотопа от географической широты. Сравнительно большой разброс экспериментальных данных на рисунке может быть обусловлен, кроме неизбежных погрешностей измерений, также флюктуациями процессов обмена и короткопериодными вариациями интенсивности выпадения изотопа. Одиако осредненные по большим широтным поясам значения концентрации в первом приближении действительно можно было считать постоянными (прямые линии на рисунке). При этом четко



Рис. 3.1. Широтное распределение содержания стронция-90 в поверхностиых водах Атлантического океана в 1961—1962 гг. по данным измерений различных авторов.

прослеживается лишь меньшая загрязненность вод южного полушария по сравнению с северным. На рис. 3.2 просуммированы данные об изменении во времени средней концентрации ⁹⁰Sr в поверхностных водах Северной Атлантики за 1954—1962 гг. Как видно из рисунка, концентрация изотопа здесь изменялась в сред-



Рис. 3.2. Теоретическая кривая изменения со временем концентрации стронция-90 в поверхностном слое и результаты наблюдений в северной части Атлантического океана по данным различных авторов.

нем весьма медленно, увеличившись с 1955 по 1961 г. не более чем в 2 раза.

Попадающий из атмосферы в верхний слой океана радионуклид распространяется в глубинные слои под действием не только диффузии, но и вертикальными осредненными движениями вод. Какая-то доля ⁹⁰Sr переносится гидробионтами, усваивающими изотоп, и их остатками в процессе седиментации. Однако последними эффектами можно, по всей видимости, пренебречь, так как в океанских водах содержится относительно большое количество стабильного изотопа стронция, который в основном и усваивается организмами. При рассмотрении процессов диффузии с характерным временем порядка года (или даже нескольких лет) можно пренебречь и радиоактивным распадом ⁹⁰Sr, так как в год распадается лишь около 2,5 % общего содержания изотопа. При таких предположениях, а также с пренебрежением горизонтальными эффектами (при однородности выпадения изотопа на больших площадях) уравнение диффузии примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(z, t) \frac{\partial c}{\partial z} \right] - w(z, t) \frac{\partial c}{\partial z}, \qquad (3.1)$$

где *с* — концентрация изотопа; *K*_z — коэффициент вертикального турбулентного обмена; *w* — вертикальный компонент осредненной скорости движения воды.

Впервые уравнение (3.1) было использовано для расчета вертикального переноса ⁹⁰Sr в океане Беляевым, Колесниковым и Нелепо в 1964 г. [3]. Функции $K_z(z, t)$ и w(z, t) определялись при этом косвенными методами по данным измерений скорости течений, температуры и солености в некоторых точках Атлантического океана. Точность таких расчетов, как мы видели выше, обычно невелика, кроме того, получаемые результаты должны, конечно, применяться лишь к данному району и к данным средним гидрометеорологическим условиям. Однако сопоставление результатов расчета диффузии выпадающего из стратосферы ⁹⁰Sr с натурными измерениями могло быть осуществлено лишь по данным, осредненным по большим отрезкам времени и по большим площадям. В связи с этим для поставленной задачи естественнее предположить постоянство коэффициента диффузии Kz. Это' значение К должно характеризовать интенсивность вертикального обмена в слоях океана, расположенных под слоем скачка плотности, так как выше этого слоя перемешивание более интенсивно и выпадающий из атмосферы изотоп достигает слоя скачка плотности практически «мгновенно» (по сравнению с характерными временами диффузии примеси на большие глубины). Для больших промежутков времени, рассматриваемых в поставленной задаче, для средних широт океана можно считать и среднюю вертикальную скорость движения вод w равной нулю. При таких предположениях уравнение диффузии сводится к простому виду

$$\partial c/\partial t = K_z \,\partial^2 c/\partial z^2. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) использовалось для расчета распространения ⁹⁰Sr в океане Мияке с соавторами и Середой в 1962 г. (см. ссылки в [91]). В первой работе решалась задача о диффузии изотопа от точечного источника (взрыва). Во второй работе исследовалась вертикальная диффузия атмосферных глобальных выпадений ⁹⁰Sr в Тихом и Атлантическом океанах. Сравнение результата расчета с имеющимися данными о вертикальном распределении изотопа позволило Середе оценить средние значения коэффициента вертикальной диффузии для Атлантического (17,2 см²/с) и Тихого океанов (6 см²/с). Уравнение диффузии (3.2) решалось как Середой, так и Беляевым с соавторами при задании на поверхности океана значения концентрации изотопа. Такое граничное условие обеспечивает, естественно, согласие расчетных и экспериментальных данных по верхнему слою океана, где была проведена основная масса измерений концентрации изотопа. Такое граничное условие не позволяет и осуществлять прогноз поведения концентрации изотопа в поверхностных водах.

Решение уравнения (3.2) с наиболее естественным для поставленной задачи граничным условием — заданием потока примеси через поверхность океана было осуществлено впервые Озмидовым и Поповым [90]. Граничные условия ими были записаны в виде

$$K_{z} \frac{\partial c}{\partial z}\Big|_{z=0} = \begin{cases} 0 \text{ при } t < t_{0} = 0; \\ q \text{ при } t \ge t_{0} = 0; \end{cases}$$
(3.3)

$$c(z, t)|_{z \to \infty} = 0,$$
 (3.4)

где t_0 — момент возникновения глобальных выпадений ⁹⁰Sr (с 1954 г.); q — поток изотопа через 1 см² поверхности океана за 1 с. Начальные условия задачи при этом естественно записывались в виде

$$c(z, 0) = 0.$$
 (3.5)

Решение уравнения (3.2) с условиями (3.3)-(3.5) имеет вид

$$c(z, t) = \frac{2q\sqrt{t}}{\sqrt{K_z}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\zeta^2) - \zeta [1 - \operatorname{erf} \zeta] \right\}, \quad (3.6)$$

где

$$\operatorname{erf} \zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\zeta} \exp(-\zeta^2) d\zeta, \quad \zeta = \frac{z}{\sqrt{K_z t}}.$$

Концентрация изотопа в поверхностном слое океана (z=0), согласно (3.6) описывается выражением

$$c(0, t) = 2q \sqrt{t} / \sqrt{\pi K_z}, \qquad (3.7)$$

т. е. величина c(0, t) возрастает прямо пропорционально корню квадратному из времени, прошедшему с начала выпадения изотопа.

Теоретическая зависимость концентрации 90 Sr в поверхностных водах океана от t нанесена сплошной линией на рис. 3.2. Совпадение расчетной кривой с имеющимися для северной части Атлантического океана данными за 1954—1962 гг. достаточно хорошее. Теоретические кривые вертикального распределения изотопа и осредненные по горизонталям наблюдений данные за 1957— 1958 гг. приведены на рис. 3.3. Теоретические кривые построены для начала 1955, 1958, 1961 и 1964 гг. Лучшее согласие теоретической кривой с экспериментальными значениями c(z, t) достигается при значении коэффициента вертикальной турбулентной диффузии 30 см²/с. Поток изотопа из атмосферы в океан по имею-



из атмосферы в океан по имеющимся данным был в рассматриваемые годы близок к 7,4× ×10⁻¹⁰ Бк/(см² · с). Из рис. 3.3 видно, что в первые годы после начала поступления изотопа происходило быстрое загрязнение поверхностных слоев океана, затем этот процесс замедлился, но увеличился прирост концентрации изотопа в нижележащих слоях океана.

Рис. 3.3. Теоретические кривые вертикального распределения концентрации стронция-90 в водах Атлантического океана на начало 1955 г. (1), 1958 г. (2), 1961 г. (3), 1964 г. (4) и осредненные данные измерений за 1957—1958 гг.

Приведенный сейчас расчет диффузии примеси, выпадающей из атмосферы, естественно, весьма идеализирован. Предположение о постоянстве потока q и коэффициента K_z , а также пренебрежение горизонтальными эффектами являются довольно сильными



Рис. 3.4. Теоретические кривые концентрации радиоактивных изотопов в поверхностных водах океана при учете временной неравномерности выпадений раднонуклидов из атмосферы (по работе Нелепо в [91]).

допущениями. Поэтому в последующие годы были сделаны уточнения и детализации в схеме расчета. Так, Нелепо [91] учел реальные колебания потока за 1954—1970 гг. для различных широт и получил теоретические зависимости для величины c(0, t), изображенные на рис. 3.4. Отдельные максимумы и минимумы на кривых c(0, t) обусловлены в годы испытаний оружия частотой

повторения и мощностью отдельных взрывов. Общее снижение загрязненности поверхностных вод океана после 1963—1964 гг. обусловлено мораторием на испытания 1963 г.

В 1967 г. Беляевым, Колесниковым и Нелепо [4] была сделана попытка учесть в расчетах изменчивость по глубине значений Ка и w. Значения Kz и w рассчитывались по системе уравнений баланса тепла и солей для различных сезонов. При этом для каждого сезона задавалась глубина слоя скачка плотности Н, меняющаяся от 60 м в весенний сезон до 200 м в зимний. Оказалось, что сезонные колебания глубины залегания слоя скачка могут стать причиной увеличения скорости проникновения изотопа в глубинные слои из-за так называемого «шлюзового» эффекта. Действительно, при глубоком однородном слое примесь быстро перемешивается в нем, проникая до глубин 200 м. При уменьшении Н радионуклид из нижней части бывшего однородного слоя будет диффундировать вниз, а в следующий цикл заглубления слоя скачка на эти глубины будет быстро доставлена следующая «порция» изотопа. Учет этого механизма переноса примеси позволил объяснить часто наблюдающиеся пониженные - значения концентрации изотопа в самом верхнем слое океана. Результаты расчета функций $K_z(z, t)$ и w(z, t), а также вертикальные профили распределения изотопа, полученные по уравнению диффузии с такими значениями $K_z(z, t)$ и w(z, t), приведены на рис. 3.5. На рис. 3,5 в нанесены также имеющиеся к моменту расчета экспериментальные данные о концентрации изотопа в водах Атлантического океана.

Если для долгоживущих изотопов их распад в диффузионных задачах в большинстве случаев можно не учитывать, то для короткоживущих радионуклидов это явление необходимо принимать во внимание. Так как масса распадающегося за единицу времени изотопа пропорциональна его общему количеству, то нестабильность элемента в уравнении диффузии можно учесть добавлением к его правой части члена вида — λc , т. е.

$$\partial c/\partial t = K_z \, \partial^2 c/\partial z^2 - \lambda c, \qquad (3.8)$$

где постоянная λ связана с периодом полураспада элемента τ соотношением $\lambda = \ln 2/\tau$.

Решение уравнения (3.8) с начальным и граничными условиями (3.3)—(3.5) будет иметь вид [13]

$$c(z, t) = \frac{q}{\sqrt{\lambda K_z}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{K_z}}z\right) - \frac{q}{2\sqrt{\lambda K_z}} \times \left\{ \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{K_z}}z\right)\right] \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\lambda t} - \frac{z}{2\sqrt{K_z t}}\right)\right] \right\} + \left[\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{K_z}}z\right)\right] \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\lambda t} + \frac{z}{2\sqrt{K_z t}}\right)\right] \right\}, \quad (3.9)$$

а концентрация примеси на поверхности океана

$$c(0, t) = \frac{q}{\sqrt{\lambda K_z}} \operatorname{erf} \sqrt{\lambda K_z}.$$
 (3.10)

165

Распад радиоактивной примеси приводит к интересному явлению стационирования распределения концентрации изотопа, несмотря на принятое в задаче предположение о постоянном его поступлении в воды океана из атмосферы. В таком стационарном состоянии распределение концентрация радионуклида описывается формулой

$$c(z) = \frac{q}{\sqrt{\lambda K_z}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{K_z}} z\right), \qquad (3.11)$$



Рис. 3.5. Пространственно-временная изменчивость коэффициента вертикальной турбулентной диффузии K_z (а) и осредненной вертикальной скорости движения вод w (б) по данным определений косвенными методами в Атлантическом океане, а также вертикальное распределение концентрации строиция-90 (в), рассчитанное по уравнению диффузии с учетом зависимости K_z и w от вертикальной координаты и времени (по [70]).

Римские цифры — кварталы года; 1 — расчет с эффектом «шлюза», 2 — расчет без учета этого эффекта. Точки — экспериментальные даиные.

а на поверхности океана соответственно

$$c(0) = q/\sqrt{\lambda K_z}.$$
(3.12)

Оценки проведенные в [13], показывают, что стационарное состояние (с отклонением от него не более чем на 2 %) достигается на поверхности океана за время t_c , равное $4/\lambda$, на глубине $z = \sqrt{K_z/\lambda}$ за время $5/\lambda$, на глубине $z=6\sqrt{K_z/\lambda}$ за время $9/\lambda$. Поток изотопа через поверхность океана в стационарном состоянии оказывается на разных горизонтах z редуцированным на величину ехр ($\lambda z/K_z$). Такое явление легко объяснимо, так как до горизонта **г** в процессе вертикальной диффузии «доходит» не все количество изотопа — часть его успевает распасться. Естественно при этом, что характерным масштабом вертикального распределения радионуклида при состоянии, близком к стационарному (т. е. при боль-

ших временах диффузии t), следует считать величину $h = \sqrt{K_z/\lambda}$. Для изотопов с различными временами полураспада эта глубина сильно варьирует. Оценки h для некоторых изотопов при двух значениях коэффициента K_z приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Значения характерного масштаба глубины $h = \sqrt{K_z/\lambda}$ для некоторых нестабильных изотопов (по [13])

Изотоп	Период полураспада	h (см) при K _z =1 см ² /с	h (см) при K _z =10 см ² /с
⁷ Be	53 сут	2,57 · 10 ³	8, 13 · 10 ⁸
²² Na	2,6 года	1,09 · 10 ⁴	3, 44 · 10 ⁴
³ H	12,26 лет	2,36 · 10 ⁴	7, 48 · 10 ⁴
²¹⁰ Pb	21,4 года	3,12 · 10 ⁴	9, 86 · 10 ⁴
¹³⁷ Cs	29,68 лет	3,68 · 10 ⁴	1, 16 · 10 ⁵

Как видно из таблицы, для короткоживущих изотопов океан (при средней его глубине 4000—5000 м) оказывается достаточно «глубоким» по сравнению с масштабом глубины h. Если за глубину проникновения изотопа H при стационарном его распределении принять горизонт, на котором концентрация изотопа на два порядка меньше концентрации в поверхностных водах, то из (3.11) получаем для H

$$H \approx 4.6 \sqrt{K_z/\lambda} = 4.6 h. \tag{3.13}$$

Из приведенных оценок различных параметров диффузии нестабильных примесей, а также из вида решения (3.9) следует, что в подобного рода задачах удобнее перейти к безразмерным величинам. Безразмерную концентрацию *с*^{*}, безразмерную вертикальную координату ζ и безразмерное время θ можно определить следующим образом [13]:

$$c^* = c \sqrt{\lambda K_z}/q; \quad \zeta = z \sqrt{\lambda/K_z}; \quad \theta = \lambda t.$$
 (3.14)

При использовании таких безразмерных величин решение (3.9) может быть записано в универсальной форме:

$$e^{\xi}(\zeta, \theta) = e^{-\zeta} - \frac{1}{2} \left\{ e^{-\zeta} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\theta} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\theta}}\right) \right] + e^{\zeta} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\theta} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\theta}}\right) \right] \right\}.$$
(3.15)

Графики универсальных кривых, подсчитанных по формуле (3.15) для нескольких значений безразмерного времени θ , приведены

в [13]. Стационарный режим процесса на логарифмическом графике изображается прямой линией, к которой асимптотически приближаются кривые распределения концентрации при увеличении времени диффузии.

Уравнение диффузии для нестабильной примеси решалось с граничным условием равенства нулю концентрации изотопа при $z \rightarrow \infty$. При конечности глубины океана на его дне необходимо, вообще говоря, задавать условия либо непроникновения изотопа через поверхность дна, либо условия его сорбции веществом дна,



а в ряде случаев учитывать и возможность вступления paдионуклида в химическую реэтим веществом. акцию С Однако для глубин океана порядка нескольких тысяч мет-DOB. как ΜЫ видели выше. океан даже для долгоживущих изотопов можно с большой степенью точности рассматривать как бесконечно глубокую среду

Рис. 3.6. Вертикальное распределение безразмерной концентрации космогенного изотопа ⁷Ве в океане, рассчитанное при учете годовых вариаций интенсивности выпадений (по [15]).

I — средиегодовое распределение; 2 — минимум концентрации; 3 — максимум концентрации; 4 — распределение иа 1 января; 5 — на 1 марта; 6 — на 1 июля; 7 — на 1 сентября.

и не учитывать взаимодействие изотопа с веществом дна. Для мелководных же бассейнов такое взаимодействие может играть весьма большую роль в балансе поступающего в бассейн радионуклида и такое взаимодействие необходимо учитывать в соответствующих диффузионных задачах.

В океане существуют радиоактивные изотопы трех типов, различающихся по происхождению: терригенные изотопы, входящие в состав вещества Земли, космогенные изотопы, возникающие под излучений в основном в земной атмодействием космических сфере, и, наконец, изотопы искусственного происхождения, появившиеся на Земле в результате деятельности человека. Космогенные изотопы (³H, ⁷Be, ¹⁰Be, ¹⁴C, ²²N и др.), в отличие от искусственных, поступают из атмосферы на поверхность океана постоянно, поэтому при расчете их диффузии в глубинные слои океана начальное условие (3.5) не выполняется. Кроме того, для космогенных изотопов характерен четко выраженный сезонный ход интенсивности их выпадений. Максимум выпадений имеет место в весенне-летний период и минимум — в осенне-зимний. Причем изменение интенсивности выпадений, по имеющимся оценкам, может достигать в течение года 2—3-кратного значения. Учет такой особенности выпадений космогенных изотопов в задаче об их вертикальной диффузии в водах океана осуществил Виноградов [15]. Уравнение диффузии (3.8) решалось им без начальных условий, а граничное условие на поверхности океана записывалось в виде

$$K_{z} \frac{\partial c}{\partial z}\Big|_{z=0} = -q + q_{1}e^{i\omega t}, \qquad (3.16)$$

где q — «постоянная» составляющая потока изотопа; q_1 — «амплитуда» его переменной части; $\omega = 2\pi/T$; T — годовой период изменчивости. Если рассматривать времена диффузии, при которых распределение изотопа в водах океана от постоянной части потока уже стационировалось, то решение задачи в безразмерных переменных c^* , ζ , θ будет иметь вид [15]

$$c^{*}(\zeta, \theta) = e^{-\zeta} - \frac{a}{\sqrt[4]{1+\mu^{2}}} e^{-r\zeta} \cos(2\pi\theta - s\zeta - \beta),$$
 (3.17)

где $\mu = \omega/\lambda$ — безразмерная частота; $a = q_1/q$ — безразмерный поток изотопа; $r = \sqrt{(\sqrt{1 + \mu^2} + 1)/2}$; $s = \sqrt{(\sqrt{1 + \mu^2} - 1)/2}$; $tg \beta = s/r = \mu/(\sqrt{1 + \mu^2} + 1)$.

Для долгоживущих изотопов, когда µ≫1, стационарная часть решения становится преобладающей, а для короткоживущих радионуклидов амплитуда нестационарной части решения будет приближаться к ae-t, т. е. станет соизмеримой с амплитудой стационарной составляющей. Наступление максимумов концентрации изотопа в водах океана происходит со сдвигом относительно моментов выпадений радионуклида, причем сдвиг на поверхности океана равен В, а с глубиной он увеличивается как линейная функция z. Как и в случае распространения в океане тепловых волн, сдвиг фаз относительно максимумов (минимумов) концентрации на поверхности обратно пропорционален корню квадратному из коэффициента вертикального турбулентного обмена. На рис. 3.6, заимствованном из [15], приведены в безразмерных координатах рассчитанные по формуле (3.17) кривые вертикального распределения космогенного изотопа ⁷Ве. Величина а принята для этого радионуклида равной 0,55, а за начало годового цикла выпадений изотопа (минимум) взято 1 декабря. Из рисунка видно запаздывание по фазе максимальных значений концентрации на разных глубинах, а также уменьшение вклада периодической составляющей концентрации с увеличением глубины.

Задача о вертикальной диффузии изотопов, интенсивность выпадения которых из атмосферы экспоненциально убывает со временем, была рассмотрена Виноградовым [16]. Задача имитировала уменьшение глобальных выпадений искусственных изотопов после маратория на испытания ядерного оружия. Решалось уравнение диффузии (3.8) с нулевым начальным условием, граничным условием (3.4) на бесконечности и условием на поверхности океана вида

$$K_{z} \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z} = -\sum_{i=1}^{n} q_{i} \exp\left[-\left(\lambda + \lambda_{c}\right)\left(t - t_{i}\right)\right], \qquad (3.18)$$

где q_i — начальный поток выпадения изотопа в результате *i*-й серии ядерных испытаний (или отдельного взрыва); t_i — время проведения испытаний данной серии (взрыва); λ — постоянная распада изотопа; λ_c — постоянная очистки стратосферы от загрязнения изотопом.



Рис. 3.7. Вертикальные распределения безразмерной концентрации *с*^{*} цезня-137, рассчитанные с учетом уменьшения выпаденни изотопа со временем (по [16]).

I — распределение при безразмерном времени $\theta = 0.25$; 2 — $\theta = 1.00$; 3 — $\theta = 2.36$; 4 — $\theta = 4.84$; 5 — $\theta = 9.00$; 6 — $\theta = 16.00$; 7 — $\theta = 25.00$; 8 — стационарное распределение при постоянной интенсивности выпадений изотопа.

Анализ решения поставленной задачи показал, что концентрация изотопа в верхнем слое океана вначале быстро возрастает, достигая максимума в момент времени $\theta = \lambda t \approx 1$. Наступление максимума концентрации в глубине океана запаздывает по отношению к максимуму в поверхностных водах. При $\theta > 10$ формируется верхний слой с приблизительно постоянной концентрацией изотопа, что обусловлено уменьшением интенсивности выпадений со временем. Теоретические кривые вертикального распределения концентрации цезия-137 в водах океана, рассчитанные с использованием граничного условия (3.18) при i=1, приведены на рис. 3.7. Учет эффекта нескольких серий испытаний позволяет по вертикальным профилям распределения концентрации изотопа судить

о вкладе каждой из серий в формирование общего поля загрязнения. Так, анализируя имеющиеся данные наблюдений за распределением стронция-90 в восточной части Тихого океана в широтном поясе 30—40° и цезия-137 в экваториальной части Индийского океана, Виноградов [16] делает вывод, что концентрация изотопов в верхнем слое океана в 1966 и 1975 гг. определялась главным образом сериями взрывов 1961—1962 гг. В то же время содержание изотопов в глубинных слоях океана в 1966 г. почти целиком, а в 1975 г. в значительной степени было обусловлено сериями испытаний 1952—1958 гг.

Влияние верхнего однородного по плотности слоя океана на вертикальную диффузию выпадающей из атмосферы примеси также было рассмотрено Виноградовым [17]. Из-за большой интенсивности турбулентного обмена в этом слое его роль в вертикальной диффузии обычно не учитывалась, так как предполагалось, что примесь практически «мгновенно» проникает через слой, в связи с чем граничное условие для потока примеси с поверхности океана можно «перенести» на нижнюю границу однородного слоя, не допуская при этом большой погрешности в расчете, так как толщина однородного слоя h обычно на много меньше общей глубины океана. Однако Виноградов справедливо отмечает, что верхний однородный слой океана может служить резервуаром, в котором будет накапливаться и сохраняться определенная доля выпавшей примеси, что должно оказывать соответствующее влияние на процесс дальнейшего вертикального распространения примеси. Если в верхнем однородном слое концентрацию примеси считать постоянной и равной c(ho, t), то граничное условие для нижележащего слоя океана можно записать в виде -

$$h \partial c(h, t)/\partial t - K_z \partial c(h+0, t)/\partial z + \lambda h c(h, t) = q(0, t),$$
 (3.19)

где первый член описывает изменение интегрального содержания изотопа в верхнем слое, второй член — турбулентный поток примеси из верхнего слоя в нижний (производная берется в положительном направлении оси z), третий член — распад примеси в верхнем однородном слое. В правой части соотношения (3.19) величиной q(0, t) обозначен удельный поток примеси из атмосферы к поверхности океана.

В диффузионной задаче с граничным условием (3.19) появля-

ется еще один безразмерный параметр $\chi = \sqrt{\lambda/K_z} h$, характеризующий отношение глубины h к диффузионно-распадному масштабу $\sqrt{K_z/\lambda}$. Для значений h=25...200 м параметр χ , например, для изотопов ⁷Be и ³H оказывается заключенным в пределах от 0,3 до 24,5 и от 0,03 до 2,6 при вариациях коэффициента вертикального обмена от 0,1 до 10 см²/с. Следовательно, для этих изотопов глубину верхнего однородного слоя, вообще говоря, нельзя считать малой, и она должна учитываться в расчетах. Существование верхнего однородного по плотности слоя воды в океане приводит в этом случае к некоторому снижению поверхностной концентра-

ции изотопов, что связано с равномерным распределением радионуклидов в слое и с их распадом. В то же время существование верхнего однородного слоя в океане способствует более быстрому переносу примесей в глубину, а также демпфированию годичных колебаний концентрации космогенных изотопов. При анализе поведения в океане радиоактивных изотопов от ядерных взрывов существенную роль может играть еще один масштаб длины $\delta =$

 $=\sqrt{K_z/\lambda_c}$, где по имеющимся оценкам величина λ_c может быть принята равной 0,063 мес⁻¹ [17]. Масштаб δ при значениях K_z =



Рис. 3.8. Изменение со временем концентрации цезия-137 в поверхностном слое океана с учетом н без учета влняння верхнего однородного слоя воды прн $\delta=0$ (1), $\delta=1$ (2), $\delta=2$ (3), $\delta=5$ (4) (по [17]). τ – безразмерное время $\tau=\lambda t$, где λ – постоянная распада наотопа.

=0,1; 1,0 и 10 см²/с меняется в пределах 20 до 200 м. Следовательно, и для искусственных радионуклидов влияние верхнего однородного слоя океана как своеобразного «депо» изотопов может оказаться существенным в механизме их распространения в глубь океана. На рис. 3.8 приведены значения безразмерной концентрации изотопа цезия-137 в поверхностном слое моря как функции безразмерного времени 0. Кривые построены для разных значений безразмерного параметра δ . Как видно из рисунка, при больших значениях δ концентрация, рассчитанная с учетом влияния однородного слоя, может существенно отличаться от оценок c^* без учета этого влияния.

Интегральный метод оценки содержания изотопов в отдельных частях океана, использованный Виноградовым для верхнего однородного слоя, часто употребляется для исследования крупномасштабных особенностей переноса примесей в Мировом океане. Вся водная масса океана или его отдельных частей разбивается при этом на несколько «резервуаров», в каждом из которых распределение изотопа или какой-либо другой примеси считается однородным. Отдельные резервуары обмениваются друг с другом примесью через разделяющие их граничные поверхности. Если объем каждого из n рассматриваемых резервуаров обозначить через V_i , а концентрацию примеси в резервуаре через c_i , то баланс распадающейся примеси для каждого из резервуаров запишется в виде

$$V_i \frac{dc_i}{dt} = \sum_{j \neq 1} R_{ij} (c_j - c_i) - \lambda c_i V_i, \qquad (3.20)$$

где R_{ij} — поток воды из *j*-го резервуара в *i*-й, *i*, *j*=1, 2, ..., *n*. На внешних поверхностях резервуаров, не граничащих с поверхно-

стями соседних резервуаров, необходимо, естественно, задать дополнительные граничные условия. В случае, когда все резервуары имеют общие поверхности, число неизвестных величин R_{ij} в уравнениях (3.20) будет равно числу сочетаний из количества резервуаров по два, т. е. n(n-1)/2. В реальных условиях океана число неизвестных может оказаться значительно меньше, однако все превышать число независимых уравнений баланса примеси же (3.20). В связи с этим в методе резервуаров обычно используют в качестве трассеров несколько различных веществ или субстанций: стабильные и радиоактивные изотопы, температуру, соленость и т. д. Так как для каждого трассера при выбранной схеме выделения резервуаров величины R_{ii} остаются теми же, то число независимых уравнений для их определения увеличивается. Однако часто потоки R_{ij} представляют в виде суммы адвективных и турбулентных R_{ii}^a и R_{ii}^T . При этом, естественно, число искомых неизвестных величин увеличивается вдвое и для их определения требуется большее число независимых уравнений баланса примесей. В методе резервуаров вводится понятие времени обновления воды в данном резервуаре, определяемое по формуле

$$T_i = \frac{V_i}{\sum\limits_{i \neq j} R_{ij}},$$
(3.21)

где под R_{ij} можно понимать как суммарный поток воды из *i*-го резервуара, так и его адвективную или турбулентную составляющие. При знании величин R_{ij}^{T} можно определить и некоторый эффективный коэффициент турбулентной диффузии K_{ij} между соседними резервуарами *i* и *j*:

$$K_{ij} = R_{ij}^T L_{ij} / (c_j - c_i),$$
 (3.22)

где L_{ij} — некоторая характерная величина с размерностью длины, например толщина термоклина, ширина фронтальной зоны и т. п.

Метод резервуаров позволил сделать оценки величин T_i и K_{ij} для различных водных масс и районов океана. В качестве трассеров использовались как стабильные изотопы, так и радиоактивные радионуклиды терригенного, космогенного и искусственного происхождения, а также температура и соленость океанских вод, растворенный кислород. Особенно многочисленная информация о распределении различных элементов — трассеров в океане была получена во время исследований по крупной международной программе ГЕОСЕКС (Geochemical Ocean Section Stady).

Данные, собранные во время работ по программе, позволили получить уточненные характеристики отдельных резервуаров, а также усовершенствовать саму схему разбиения океана на такие резервуары. Время обновления вод в резервуарах при расчетах этим методом обычно получалось равным сотне или нескольким сотням лет, значения коэффициентов вертикального обмена порядка нескольких единиц или даже долей квадратного сантиметра в секунду, значения коэффициентов горизонтального турбулентного обмена — 10^6 — 10^8 см²/с, горизонтальные скорости глубинных течений — единицы или доли сантиметров в секунду, вертикальные скорости движения вод — порядка 10^{-5} см/с. Конечно, эти цифры следует рассматривать как осредненные и достаточно грубые оценки, могущие сильно варьировать и во времени, и в пространстве. Дополнительные сведения о методе резервуаров, о полученных с его помощью результатах, а также подробную библиографию по этому вопросу можно найти в работе Нелепо из [91] и в [14].

3.2. Диффузия в океане биогенных элементов, кислорода и углекислого газа

Сложность расчета распространения в водах океана биогенных элементов, кислорода и углекислого газа заключается в большой роли химических и биологических процессов трансформации в и переносе этих субстанций.* Поэтому в математических моделях, описывающих распределение субстанций в водах океана, необходимо иметь слагаемые, учитывающие такие процессы. Биогенные элементы находятся в водах океана в растворенной форме, а также в составе взвешенного органического и неорганического вещества. Наиболее важным фактором изменчивости концентрации биогенных элементов являются процессы продукции и деструкции оргавещества. Поступление биогенных элементов в воды нического океана из атмосферы происходит благодаря осаждению терригенречным ной и вулканогенной взреси, а также с И подземным стоком.

Биогенные элементы потребляются в водах океана в первую фитопланктоном, причем интенсивность этого процесса очередь существенно зависит как от концентрации биогена с, так и от освещенности І и температуры водной среды Т. Существует ряд эмпирических и полуэмпирических формул, связывающих скорость потребления биогена фитопланктоном с с, І и Т. Так как освещенность меняется с глубиной, то зависимость скорости потребления биогенных элементов фитопланктоном от глубины обычно задается в виде экспоненциальной функции с показателем — kz, где k — коэффициент экстинкции морской воды. Часто предполагают, что все упомянутые выше факторы действуют на скорость потребления независимо друг от друга и их суммарный эффект может быть выражен в виде произведения функций влияния отдельных факторов.

Потребленный фитопланктоном биогенный элемент может выделяться им обратно в окружающую среду в виде органических и неорганических растворенных соединений. При отмирании фито-

^{*} Подробности о распределенин, формах существования н трансформации химнческих элементов н соединений в океане см. в [105].

планктона какая-то доля биогенного элемента будет возвращаться среду, а какая-то доля — осаждаться в виде взвеси. в водную Скорость выделения биогена живыми организмами и скорость отмирания организмов обычно считаются пропорциональными биомассе или продукции фитопланктона. Из мертвого органического вещества биогенный элемент может регенерироваться под действием бактерий и простейших организмов. Скорость минерализации органики этими процессами можно считать, по-видимому, прямо пропорциональной концентрации органики, однако коэффициент пропорциональности оказывается функцией температуры среды. Фитопланктонные организмы выедаются далее зоопланктоном и другими животными. Потребленная ими пища тратится на рост, размножение, а частично не усваивается. Интенсивность питания зависит в свою очередь от концентрации пищи, а скорость отмирания организмов и скорость выделения растворенной фракции биогена при дыхании можно считать пропорциональными биомассе организмов.

Концентрацию биогенного элемента c(x, y, z, t) в водах океана будем описывать обычным уравнением диффузии с членом R, учитывающим источники (стоки) элемента химико-биологического происхождения:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = K_L \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \right) + R, \qquad (3.23)$$

где w₀ — скорость гравитационного оседания биогена, если он находится в воде в форме взвеси; остальные обозначения — прежние.

Естественно, что для решения уравнения (3.23) необходимо задать значения компонентов скорости, значения коэффициентов вертикальной и горизонтальной турбулентной диффузии, функцию R, а также начальные и граничные условия для концентрации биогена в рассматриваемой области океана. Но задать один функциональный вид функции R для всех форм существования биогена в океане обычно не удается из-за сложности биолого-химических процессов, в связи с чем часто строятся блоковые схемы расчета для каждой из форм пребывания биогена в водах океана. Так, Якушев [111] для расчета распределения в океане фосфатов предложил рассматривать пятиблочную схему: 1-й блок — растворенный неорганический фосфор, 2-й блок — растворенный органический фосфор, 3-й блок — фосфор фитопланктона, 4-й блок фосфор зоопланктона, 5-й блок — фосфор детрита. Из первой формы существования фосфор может переходить в третью, из второй — в первую, из третьей — во все остальные, из четвертой в первую, вторую и пятую, из пятой — в первую, вторую и четвертую. Для концентрации биогена каждого блока (каждой формы существования) c_i записывается уравнение диффузии (3.23), но со своим видом члена R_i и своими начальными и граничными условиями. Но так как в выражения для R_i входят значения концентрации биогена в других формах существования (из других блоков), то отдельные уравнения для c_i превращаются в связанную систему из *i* уравнений. Конкретный вид членов R_i в этой системе определяется на основе эмпирических и полуэмпирических соотношений, о которых говорилось выше.

В качестве примера приведем выражения для R_i , предложенные Якушевым [111] для пятиблочной системы баланса фосфора в океане:

$$R_1 = P_3(k_{31} - 1) + k_{41}c_4 + k_{51}c_5 + k_{21}c_2; \qquad (3.24)$$

$$R_2 = k_{32}c_3 + P_4(1 - u_4)H_4 + k_{52}c_5 - k_{21}c_2; \qquad (3.25)$$

$$R_{3} = P_{3}(1 - k_{31}) = k_{32}c_{3} - k_{35}c_{3} - k_{34} \frac{c_{4}}{1 + c_{4}k_{3}/(c_{3} - c_{3}^{\text{nop}})}; \quad (3.26)$$

$$R_4 = P_4 u_4 - k_{41} c_4 - k_{45} c_4; \qquad (3.27)$$

$$R_{5} = k_{35}c_{3} + k_{45}c_{4} + P_{4}(1 - u_{4})(1 - H_{4}) - k_{54} \frac{c_{4}}{1 + c_{4}k_{5}/(c_{5} - c_{5}^{\text{nop}})} - k_{52}c_{5} - k_{51}c_{5}, \qquad (3.28)$$

где $P_3 = k_{13} c_3 / [1 + (c_3/c_1) k_1]$ — потребление неорганического фосфора фитопланктоном; k₁₃ — максимальная скорость потребления неорганического фосфора фитопланктоном; k1-константа, характеризующая потребление фосфатов фитопланктоном; k₃₁ — удельная скорость дыхания фитопланктона; k₃₂ — удельная скорость выделения фитопланктоном растворенного органического фосфора; k_{35} — удельная скорость отмирания фитопланктона; $P_4 = \{k_{34}/[1+$ $+c_4k_3/(c^3-c_{10}^{\text{пор}})]+k_{54}/[1+c_4k_5/(c_5-c_3^{\text{пор}})]\}c_4$ — потребление 300планктоном фитопланктона и детрита; k_{34} — максимальная CKOрость потребления фитопланктона зоопланктоном; k_3 — константа, характеризующая потребление фитопланктона зоопланктоном; *с*^{пор} — пороговая концентрация фитопланктона; k54 — максимальная скорость потребления детрита зоопланктоном; k5 — константа, характеризующая потребления детрита зоопланктоном; $c_5^{\text{пор}}$ — пороговая концентрация детрита; и4 — эффективность усвоения пищи зоопланктоном; Н₄ — отношение жидких экскретов зоопланктона к суммарным; k41 — удельная скорость дыхания зоопланктона; k45 — удельная скорость отмирания зоопланктона; k52 — коэффициент автолиза детрита; k₅₁ — коэффициент фосфатофикации детрита; k₁₂ — коэффициент фосфатофикации растворенного органического фосфора.

Значения многочисленных коэффициентов, входящих в выражения для R_i , оценивались Якушевым по имеющимся экспериментальным данным, а в ряде случаев подбирались из соображений лучщего согласия расчетных и наблюденных распределений биогена. До начала решения системы уравнений для c_i необходимо, вообще говоря, проверить устойчивость системы относительно вариаций значений коэффициентов. Необходимость этого диктуется сравнительно малой точностью имеющихся оценок коэффициентов и трудностью их определения в натурных условиях. При проверке устойчивости часто обнаруживается, что даже малые вариации одних коэффициентов могут привести к существенным изменениям в получаемых решениях, по отношению же к другим параметрам решения оказываются более устойчивыми. Так, например, Якушев показал, что рассматриваемая им система весьма чувствительна к вариация коэффициента k_{13} и константы k_1 , а также коэффициентов и констант не так сильно влияет на решение системы.

Решения сложных систем уравнений, описывающих перенос и трансформацию биогенов в водах океана, в большинстве случаев не удается получить аналитическими методами, и для этой цели обычно приходится использовать численные приемы. Конечно. в ряде случаев систему можно упрощать, пренебрегая рядом явлений и процессов. Такое упрощение удается обычно сделать при анализе переноса и трансформации биогена в определенных районах или слоях океана, где преобладают отдельные процессы, а другие не играют существенной роли. Так, например, Якушевым [112] рассматривалась модельная задача о сезонной изменчивости концентрации фосфора в слое фотосинтеза в морях умеренных широт. В задаче учитывались лишь вынос фосфора из зоны осаждающимися взвесями и компенсирующее поступление в зону растворенных фосфатов. При этом интенсивность потребления растворенных фосфатов фитопланктоном (коэффициент k13) считалась меняющейся во времени с годовым периодом. Эффекты адвекции и турбулентного обмена в этой задаче не рассматривались, а влияние начальных условий не учитывалось (чисто периодический тип решения). В другой модельной задаче о вертикальном распределения фосфора в фотосинтезирующем слое океана Якушевым [112] учитывался вертикальный турбулентный обмен и осаждение фосфоросодержащих взвесей, но задача считалась стационарной. Интенсивность потребления фосфатов фитопланктоном здесь задавалась функцией глубины в зависимости от освещенности вод на различных горизонтах. Значения коэффициента вертикальной турбулентной диффузии в задаче аппроксимировались ступенчатой функцией от вертикальной координаты z. На рис. 3.9 приведены полученные Якушевым в этой задаче результаты расчета вертикального распределения концентрации растворенного фосфора и данные наблюдений, осуществленных в водах центральной Атлантики к югу от Азорских островов.

Стационарная задача о распределении фосфора с учетом адвективных и диффузионных членов в уравнении (3.23) была также рассмотрена Якушевым [111]. Задача решалась для меридиональной плоскости океанов, в связи с чем члены уравнения с производными вдоль широты (оси x)отбрасывались. Коэффициент горизонтальной диффузии K_L считался величиной постоянной (10⁸ см²/с), а коэффициент K_z предполагался зависящим от числа наблюдениям. Результаты расчета хорошо отражают широтные изменения характерных особенностей вертикального распределения фосфатов. Так, концентрация c_1 в поверхностных водах убывает от 1,7—1,8 мкг атомарного фосфора в литре воды на широтах 60—70° до 0,010 мкг/л в тропиках. Заметен также слой максимума содержания фосфатов в тропических и экваториальных



Рис. 3.10. Вертикальные распределения растворенного фосфора на различных широтах южного полушария по данным наблюдений в Атлантическом (1), Индийском (2), Тихом (3) океанах и теоретические крнвые (4) (по [111]).

водах с характерным подъемом этого слоя вблизи экватора. По рассчитанным меридиональным распределениям концентраций сз. с4 и с5 можно судить и о распределении в меридиональной плоскости океанов фитопланктона, зоопланктона и детрита. Максимум концентрации фитопланктона наблюдается, согласно расчету, на широте около 55°, в районе экватора его концентрация вдвое меньше, а на широтах 10-25° концентрация уменьшается еще в два раза. Для зоопланктона аналогичное уменьшение концентрации еще более резко - соответственно в 4 и 8 раз. Лучшее совпадение расчетных и наблюденных распределений концентрации фосфора наблюдается для Тихого и Индийского океанов и хулшее — для Атлантического. Такое явление можно объяснить пре-

небрежением в принятой модели переносом водных масс через экватор, наиболее сильно выраженным в Атлантическом океане. В этом океане в районе Гренландии формируются обедненные фосфатами глубинные воды, которые затем распространяются далеко на юг, образуя язык вод с пониженным содержанием биогена. За исключением этого явления, другие основные механизмы образования, трансформации и переноса фосфора в водах океана учитываются моделью достаточно хорошо. Коротко их можно охарактеризовать следующим образом. В поверхностных водах высоких широт южного полушария концентрация фосфатов увеличивается вследствие интенсивного вертикального водообмена и сниженной среднегодовой продукции фитопланктона. Воды с повышенным содержанием фосфатов в районе 52,5-57,5° под действием вертикального обмена опускаются вниз, а в результате горизонтальной диффузии затем образуют слой воды с повышенным содержанием биогена. Этот слой еще более усиливается в тропических и экваториальных районах за счет поступления фосфатов при окислении органического вещества. На эти процессы, естественно, накладываются сезонные вариации всех форм существования фосфора в водах океана. Учет такой сезонной изменчивости полей концентрации биогена может быть осуществлен заданием зависимости некоторых коэффициентов модели от температуры воды. Так, Якушев [112] при предположении, что коэффициент k₁₃ является функцией географической широты и температуры, получил близкие к реальным сезонные вариации концентрации фитопланктона и зоопланктона в океане.

Аналогично приведенным примерам расчета концентрации в водах океана фосфора должны осуществляться расчеты трансформации и переноса других биогенных элементов, в первую очередь азота и кремния. Естественно, что в моделях переноса этих биогенов должна быть учтена специфика их форм пребывания в морской воде, особенности взаимодействия данного биогена с другими химическими соединениями, а также особенности усвоения и выделения биогена живыми организмами. Значения констант и коэффициентов в выражениях для функций R_i также, естественно, для каждого биогенного элемента могут быть специфичными.

Кроме задач о распределении биогенных элементов в Мировом океане или в отдельных его больших частях, исследователей могут интересовать и более локальные задачи диффузионного типа о концентрации различных форм существования биогенов. Так, например, в океане часто наблюдаются пятна фитопланктона, размер которых, а также концентрация фитопланктонных организмов в них (т. е. и концентрация биогенов) каким-то образом связаны с гидрофизическими процессами в рассматриваемой водной массе. Простая задача о возможных формах такой связи была рассмотрена Озмидовым еще в 1968 г. [81]. Фитопланктон практически неспособен к активным горизонтальным перемещениям, т. е. его с достаточной степенью приближения можно рассматривать как пассивный трассер. Весной в период «цветения» моря фитопланктон может размножаться весьма интенсивно, увеличивая своюбиомассу иногда до 50 % за сутки. В период же осеннего размножения скорость увеличения биомассы обычно существенно меньше. Скорость изменения численности (или концентрации) фитопланктона с₃ в период весеннего «цветения» может быть описана следующим выражением:

$$dc_3/dt = (k_1 - k_2 - k_3) c_3, \qquad (3.29)$$

где k_1 — удельная скорость фотосинтеза; k_2 — скорость дыхания организмов; k_3 — скорость их поедания животными.

При анализе трансформации скоплений фитопланктона в течение небольших промежутков времени (порядка нескольких суток) в период весеннего «цветения», когда многие факторы, ограничивающие размножение фитопланктона, несущественны, величину $(k_1 - k_2 - k_3) \approx \gamma$ можно считать постоянной. Тогда уравнение диффузии для скопления фитопланктона будет отличаться от уравнения для стабильной примеси дополнительным членом вида усз. Так как фитопланктон развивается лишь в верхнем освещенном океана и слабо диффундирует по вертикали, то в задаче слое о размерах «цветущих» пятен фитопланктона можно пренебречь вертикальными процессами, а в горизонтальной плоскости процесс считать изотропным. Беря систему координат, движущуюся вместе с осредненным течением, тогда приходим к следующему уравнению диффузии для пятна фитопланктона:

$$\frac{\partial c_3}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(K_L(r) r^2 \frac{\partial c_3}{\partial r} \right) \right] + \gamma c_3, \qquad (3.30)$$

где r — радиус-вектор точки наблюдения; $K_L(r)$ — коэффициент горизонтальной диффузии, являющийся, вообще говоря, функцией r.

Чтобы учесть зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии от масштаба явления (размера пятна фитоплантона), можно записать $K_L(r)$ в виде степенной функции. Озмидовым [81] было предложено в рассматриваемой задаче использовать выражение для $K_L(r)$, следующее из закона «степени $4/_3$ », т. е. положить, что $K_L(r) = kr^{4/_3}$, где k — коэффициент пропорциональности. Решение уравнения (3.30) для мгновенного точечного источника фитопланктона, помещенного в момент t=0 в начале координат, имеет вид

$$c_{3}(r, t) = \frac{Q}{6\pi (4k/9)^{3}t^{3}} \exp\left(-\frac{r^{2}/3}{4kt/9} + \gamma t\right), \qquad (3.31)$$

где Q — количество диффундирующего фитопланктона.

Из выражения (3.31) следует, что в круге радиусом, меньшим $(4k\gamma/9)^{3/2}t^3$, будет происходить нарастание концентрации фитопланктона, в то время как вне этого круга концентрация c_3 будет падать. Радиус такого «цветущего» пятна фитопланктона со временем увеличивается и по истечении 10 сут будет достигать 20 или 30 км при значениях коэффициента γ , близких к 0,4 и 0,55 соо1-
ветственно. Такие размеры пятен фитопланктона по порядку величины согласуются с данными наблюдений. По истечению же бо́льшего срока с начала диффузии значение коэффициента у должно уменьшиться, так как увеличение концентрации фитопланктона должно приводить к ухудшению условий его существования и тем самым к редуцированию величины у, что в свою очередь приведет к замедлению или даже к прекращению дальнейшего увеличения размеров пятна «цветущего» моря.

Фениел и Ласс [122], анализируя условия, при которых пятна фитопланктона могут развиваться в океане, предложили рассматривать следующий критерий. Если первоначальный размер пятна планктона L превосходит значение дисперсии пятна под действием горизонтальной диффузии σ , то пятно будет существовать и развиваться. Если же $L < \sigma$, то пятно достаточно быстро исчезнет под действием диффузии. При описании процесса горизонтальной диффузии пятна уравнением с постоянным коэффициентом горизонтального обмена K_L дисперсия пятна оказывается равной

 $2\sqrt{K_L}/\gamma$. Если первоначально на большой акватории океана будут разбросаны пятна, богатые биогенами, с размерами, большими и меньшими о, то в первых из них будут развиваться и расти пятна «цветущего» моря, а вторые будут быстро рассеяны диффузией и не дадут вспышек роста концентрации фитопланктона. Таким образом, в океане может существовать своего рода «естественный отбор» зон с повышенной и пониженной продуктивностью фитопланктона, а следовательно, и зон концентрации организмов более высоких трофических уровней. Первоначальная же «пятнистость» поля концентрации биогенов может быть обусловлена перемежаемостью океанической турбулентности (см. раздел 3.4) или, по мнению Феннела и Ласса [122], может образоваться в результате модуляции поля скорости в океане волнами Россби.

При расчетах диффузии в океане кислорода и углекислого газа наиболее сложным является задание граничного условия для концентрации газов на поверхности океана. Океан весьма активно обменивается с атмосферой этими газами, поэтому пренебрегать их потоками через поверхность раздела, конечно, нельзя. В то же время задание в качестве граничного условия самой концентрации растворенных газов в поверхностном слое океана в значительной степени предопределяет их распределение и в глубинных слоях океана. Задача о распределении кислорода в водах океана при таких граничных условиях решалась рядом авторов (см. ссылки в [96]). Более интересную диффузионную задачу с заданием потока кислорода в качестве граничного условия на поверхности океана рассмотрел Рябченко [96]. Уравнение диффузии кислорода им было проинтегрировано по вертикальной координате от уровня океана $z = \zeta$ до дна z = H и записано в виде

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{v}\hat{c}\right) = K_L \Delta \hat{c} - K_z \frac{\partial \hat{c}}{\partial z}\Big|_{z=\xi} + \int_{\xi}^{H} R_1 dz + \int_{\xi}^{H} R_2 dz, \quad (3.32)$$

где $\hat{c} = \int_{t}^{H} c dz; c$ — концентрация растворенного кислорода в водах

океана; \mathbf{v} — средняя по глубине океана горизонтальная составляющая вектора скорости течений; K_L и K_z — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; z — вертикальная координата, отсчитываемая вниз от невозмущенной поверхности океана; Δ и div — операторы Лапласа и дивергенции в сферической системе координат; ζ — уровень океана; $H = H(\lambda, \theta)$ — глубина океана; λ — долгота; θ — дополнение широты до 90°; t время. Функция R_1 определяет скорость производства кислорода в процессе фотосинтеза, функция R_2 — скорость биохимического потребления кислорода в водах океана.

Граничное условие на поверхности раздела океан-атмосфера записывается в виде

$$-K_{z} \frac{\partial c}{\partial z}\Big|_{z=\zeta} = \alpha [c_{p} - c(z)]_{z=\zeta}], \qquad (3.33)$$

где c_p — растворимость (равновесная концентрация) кислорода в приповерхностных водах; α — коэффициент обмена. Величина α является функцией целого ряда факторов: в первую очередь α зависит от скорости приводного ветра, а также от температуры и солености воды.

Для возможности перехода от осредненных по глубине H значений концентрации растворенного кислорода к значениям $c(z)_{z=\zeta}$ Рябченко предположил, что величина c(z) может быть представлена в виде произведения

$$c(z) = c(z)|_{z=\zeta} f_i(z),$$
 (3.34)

где $f_i(z)$ — безразмерные универсальные, но разные для каждого из океанов функции (i=1 — Тихий, i=2 — Индийский, i=3 — Атлантический океан). При таком предположении для осредненной концентрации получаем

$$\hat{c} = c(z)|_{z=\zeta} \int_{\zeta}^{H} f_{i}(z) dz. \qquad (3.35)$$

На дне океана в первом приближении можно предположить отсутствие потока растворенного кислорода, т. е. считать, что

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \qquad (3.36)$$

где *n* — нормаль к твердой граничной поверхности океана Г. На этой границе обращается в нуль и нормальная составляющая скорости течений.

Для численного расчета задачи удобнее предположить, что в момент времени, принятый за начальный, растворенный кислород в водах океана отсутствует, т. е.

$$\hat{c}(\lambda, \theta, t=0) = 0.$$
 (3.37)

183.

Для некоторого упрощения задачи далее было предположено, что интегралы от R_1 и R_2 в правой части уравнения (3.32) в сумме равны, что означает равенство продукции и потребления кислорода на любой вертикали в океане.

Диффузионная задача (3.32) — (3.37) решалась Рябченко численным методом. Поле скорости течений было заимствовано из работ других авторов, определивших функцию тока океанских вод по среднегодовому полю атмосферного давления на уровне моря и по средним годовым зональным распределениям радиационного баланса и температуры приповерхностного слоя воды. Данные об атмосферном давлении давали также возможность подсчитать скорости ветра над океаном, необходимые для оценки значений параметра α в граничном условии (3.33). Зависимость α от скорости ветра, температуры и солености приповерхностных вод определялась по имеющимся в литературе (см. ссылки в [96]) данным. Шаг по времени при численных расчетах брался равным 5 сут, пространственный шаг — пять градусов по широте и долготе. Расчет продолжался до установления стационарного режима, ЧТО было достигнуто (с 1 %-ной точностью) по истечений 43 лет с момента, принятого за начальный. Значение коэффициента горизонтального турбулентного обмена при этом бралось равным 10⁸ см²/с (задание значения коэффициента K_z в рассматриваемой задаче не требуется).

Полученная Рябченко в результате расчета карта распределения осредненной по вертикали концентрации кислорода в водах Мирового океана в основном согласовывалась с данными наблюдений. В частности, обнаруживался максимум O_2 в холодных водах Северной Атлантики и в высоких широтах южного полушария, а минимум концентрации O_2 наблюдался в северо-западной части Тихого океана. К недостаткам расчета следует отнести завышенные значения \hat{c} в зонах резких перепадов глубин океана, что

можно было объяснить большим пространственным шагом расчетной сетки. Следует отметить хорошее совпадение расчетных и наблюденных осредненных по каждому из океанов значений концентраций растворенного кислорода. Максимальное его содержание наблюдается в Атлантическом, минимальное — в Тихом океане.

Приведенный пример решения диффузионной задачи для концентрации растворенного в водах океана кислорода, конечно, еще весьма упрощен. Требуется перейти к трехмерной задаче, в которой будет необходимо задать источники и стоки кислорода в толще океана. Эти величины в свою очередь могут быть определены из решения диффузионных задач о распределении в океане фитопланктона, зоопланктона, биогенных элементов и т. п. В конечном итоге полная задача о распределении в водах океана O₂ должна включать в себя систему блоков, описывающих распределения и трансформацию всех органических и неорганических субстанций, ответственных за генерацию и потребление кислорода. Естественно, что построение такой адекватной модели и ее решеиие — еще дело будущего, хотя продвижения в этом направлении происходят практически ежегодно.

Аналогичные проблемы и трудности возникают и при расчетах содержания в водах океана углекислого газа (углерода). Океан активно обменивается углекислым газом с атмосферой, причем интенсивность этого обмена, так же как и обмена кислородом, существенно зависит от разности растворимости газа и его концентрации в морской воде. Растворимость же в свою очередь зависит от концентрации СО₂ в атмосфере, температуры и солености воды. В верхнем слое океана CO_2 расходуется фитопланктоном в процессе его жизнедеятельности, что приводит к увеличению биомассы фото-синтезирующих организмов. Часть углерода, усвоенного фитопланктоном, далее переходит к зоопланктону и к другим организмам, а часть вместе с умершими организмами в виде взвеси осаждается на дно или снова переходит в водный раствор. Углекислый газ выделяется в морскую воду и при дыхании гидробионтов.

Первые попытки расчета содержания и трансформации углерода в водах океана строились, естественно, на очень упрощенных моделях явления. В частности, обычно задавались постоянными потоки углерода на поверхности океана и на нижней границе фотосинтезирующей зоны, считались постоянными толщина этой зоны и температуры воды и т. д. Более близкая к реальности модель углеродного цикла была предложена Каганом и Рябченко-[41]. В океане, согласно их модели, выделяются две области, в одной из которых образуются холодные глубинные воды, а в другой поступление этих вод компенсируется подъемом вод (апвеллингом). Естественно при этом, что скорость подъема вод в зонах апвеллинга w должна иметь величину w = W/S, где W — мощность источника холодных глубинных вод, а S — площадь области апвеллинга. В этой области в свою очередь выделяются два слоя верхний квазиоднородный слой (ВКС) и глубинный слой. Вместе с областью образования глубинных вод эти слои образуют систему из трех взаимосвязанных резервуаров — боксов. Для этих. боксов можно написать две аналогичные системы из трех уравнений, описывающих эволюцию температуры воды Т и концентрацию углерода с. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}X_0H = q_{S0}^X + \frac{S_1}{S_0}w(X_1 - X_0) + (Q_1^X + Q_2^X) + B_0, \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt}X_{1}h - X_{1}\left(\frac{dh}{dt} + w\right) = q_{S1}^{X} - q_{h=0}^{X} - wX_{1} - Q_{1}^{X} + B_{1}, \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt}X_2(H-h) + X_2\left(\frac{dh}{dt} + w\right) = q_{h+0}^X + wX_0 - Q_2^X + B_2, \quad (3.40)$$

где под X подразумевается или T, или c; q_S^X — турбулентный поток субстанции через поверхность океана; $q_{h=0}^X$ — поток на нижней границе ВКС; $q_{h=0}^X$ — поток на верхней границе глубинного. слоя; Q^{X} — турбулентный обмен между областью образования холодных глубинных вод и областью апвеллинга (в дальнейшем пренебрегаемый); В — источники и стоки неорганического углерода; *Н*—глубина океана; *h*—толщина ВКС; *t*—время; индексы 0, 1 и 2 относятся последовательно к области образования холодных глубинных вод, ВКС и глубинному слою зоны апвеллинга.

Турбулентные потоки тепла на границе раздела воздух-вода являются функциями времени (в годовом цикле) и в рассматриваемой задаче считались заданными. Потоки углекислого газа на поверхности океана можно записать, аналогично выражению для потока кислорода (3.33), в виде

$$q_{s}^{c} = k[c_{p} - c(z)|_{z=\zeta}], \qquad (3.41)$$

где cp — растворимость (равновесная концентрация) газа в приповерхностном слое воды, зависящая от парциального давления CO_2 в атмосфере, а также от температуры T и солености воды S; $c(z)|_{z=t}$ — концентрация CO₂ в том же слое, зависящая не только от Т и S, но и от общего содержания неорганического углерода в воде: k — коэффициент газообмена, зависящий в первую очередь от скорости приводного ветра.

Углекислый газ, растворяясь в воде, вступает с ней в химическую реакцию, образуя угольную кислоту, которая затем диссоциирует. В результате этого общая концентрация неорганического углерода в морской воде представляет собой сумму концентраций растворенного углекислого газа, бикарбонатных и карбонатных ионов.

Обмен теплом и углеродом через нижнюю границу ВКС в описываемой модели считался обусловленным только углублением ВКС. При подъеме же нижней границы ВКС в глубинный слой будут передаваться тепло и углерод, содержащиеся ранее в нижней части ВКС. При таких предположениях выражения для потоков $q_{h=0}^{X}$ и $q_{h=0}^{X}$ принимают вид

$$q_{h=0}^{\chi} = \begin{cases} (X_1 - X_2) \left(\frac{dh}{dt} + w\right) & \text{при } \left(\frac{dh}{dt} + w\right) > 0; \quad (3.42) \\ 0 & \text{при } \left(\frac{dh}{dt} + w\right) \leqslant 0; \quad (3.43) \end{cases}$$

при
$$\left(\frac{dh}{dt}+w\right) \leq 0;$$
 (3.43)

$$q_{h+0}^{X} = \begin{cases} 0 & \text{при } \left(\frac{dh}{dt} + w\right) > 0; \quad (3.44) \end{cases}$$

$$+ 0 =$$
 $\left(-(X_1 - X_2) \left(\frac{dh}{dt} + w \right)$ при $\left(\frac{dh}{dt} + w \right) \le 0.$ (3.45)

Для определения толщины ВКС Каган и Рябченко предложили дополнить соотношения (3.42) — (3.45) проинтегрированным в пределах ВКС уравнением баланса турбулентной энергии в слое. Благодаря такому приему величина (dh/dt+w) оказывается выраженной через поток q_{S1}^{T} , число Ричардсона и разность температуры воды выше и ниже границы ВКС.

В апвеллинговой зоне основным источником неорганического углерода являются нестойкая фракция органического вещества и растворяющаяся часть гумуса. Из этих источников необходимовычесть количество углерода, используемого фитопланктоном для увеличения своей биомассы. Согласно имеющимся оценкам этих составляющих баланса углерода, для величин B_i можно принять следующие значения: $B_1 = -34$ гС/($M^2 \cdot \text{год}$), $B_2 = 28$ гС/($M^2 \cdot \text{год}$) и. $B_0 = 0$. Равенство нулю B_0 означает, что продуцируемая в холодных глубинных водах органика здесь же полностью и разлагается.

Для решения поставленной задачи о переносе и трансформации углерода в качестве входных данных необходимо задать сведения о потоке тепла на поверхности океана, сведения о парциальном давлении СО₂ в атмосфере, скорости ветра, мощности источника холодных глубинных вод и данные об отношении площадей области апвеллинга и области образования глубинных вод.. Искомыми же величинами при решении системы являются температура и концентрация углерода в каждом из трех рассматриваемых резервуаров, толщина верхнего слоя области апвеллинга. концентрация растворенного СО2, бикарбонатных и карбонатных. ионов водорода, интенсивность газообмена с атмосферой, а также. интенсивность обмена теплом и углеродом между BKC и глубинным слоем океана. Если хотя бы один из входящих параметров (например, поток тепла через поверхность океана) задан как функция времени с сезонным ходом, то и искомые величины, естественно, оказываются меняющимися во времени функциями с сезонным периодом изменчивости.

Поставленная задача решалась Каганом и Рябченко численно. Система вышла на периодический режим (с 0,01 %-ной точностью, совпадения температуры воды в два последующих годовых цикла) по истечении 560 лет с момента, принятого за начальный. Результаты расчета воспроизвели основные особенности сезонной измен-чивости термического режима и углеродного цикла в океане. На-пример, были получены эффекты, хорошо известные по данным наблюдений: увеличение газообмена океана с атмосферой в осенне-зимний период, изменение направления газообмена в течение. года в умеренных и низких широтах (в области апвеллинга), постоянство поглощения СО₂ в области образования глубинных вод, практическое отсутствие сезонных колебаний температуры и концентрации углерода в глубинном слое. Хорошо согласуются с данными наблюдений термические характеристики верхнего слоя океана, а также сезонный ход толщины ВКС. Расчет показал также, что характеристики углеродного цикла в океане наиболее чувствительны к вариациям продукции фитопланктона и скорости выпадения органики в осадок.

Резервуарная модель переноса и трансформации СО₂ в океане, использованная Каганом и Рябченко, конечно, не могла дать подробных сведений о вертикальной или горизонтальной структуре полей различных форм существования углерода в океане. В то же время трехмерная дифференциальная задача о диффузии углерода в океане представляется в настоящее время еще трудноразрешимой, хотя бы из-за сложности задания пространственного распределения источников и стоков углерода в океане. Естественно, что наиболее радикальное решение проблемы может быть найдено при рассмотрении совместных систем переноса и трансформации биогенных элементов, кислорода и CO₂ с учетом всех форм существования и трансформации этих веществ химическими и биологическими процессами. В таком генеральном направлении будут, несомненно, развиваться дальнейшие исследования в этой области океанологии.

Примером решения задачи о переносе CO₂ в океане с использованием не резервуарных моделей, а уравнения турбулентной диффузии может служить работа Маккавеева и Якушева [60]. Ими рассматривалась стационарная задача с пренебрежением горизонтальной диффузией и адвекцией. При таких предположениях уравнение диффузии для концентрации углекислого газа с редуцировалось к простому виду

$$K_z \partial^2 c / \partial z^2 = R, \qquad (3.46)$$

где функция источников (стоков) углекислого газа *R* должна описывать биохимические процессы синтеза и распада органического вещества.

Потребление углерода фитопланктоном определяется его массой и интенсивностью фотосинтеза *P*, который в свою очередь зависит от освещенности воды солнечным светом *I*. Такая зависимость *P* от *I* может быть выражена формулой

$$P(z) = k_1 I(z) \exp[1 - I(z)/k_2], \qquad (3.47)$$

где I(z) — освещенность на горизонте z; k_1 и k_2 — некоторые коэффициенты. Величина I(z) в свою очередь экспоненциально зависит от глубины:

$$I(z) = I_0 \exp(-k_3 z), \qquad (3.48)$$

где *I*₀ — освещенность на поверхности океана; *k*₃ — коэффициент экстинции.

Таким образом, для потребления CO₂ при фотосинтезе получаем

$$R_{1} = k_{1}I_{0} \exp\left[1 - \frac{I_{0}}{k_{2}} \exp\left(-k_{3}z\right) - k_{3}z\right]B(z), \qquad (3.49)$$

где B(z) — распределение по глубине биомассы фитопланктона.

Неорганический углерод в толще воды образуется главным образом при окислении мертвого органического вещества. Этот процесс может быть описан также экспоненциальной функцией от глубины вида

$$R_2 = -k_4 \exp\left(-k_5 z\right), \tag{3.50}$$

где k₄ и k₅ — коэффициенты, не зависящие от z.

Таким образом, суммарная функция *R* в уравнении (3.46) имеет вид

$$R = k_1 I_0 \exp\left[1 - \frac{I_0}{k_2} \exp\left(-k_3 z\right) - k_3 z\right] B(z) - k_4 \exp\left(-k_5 z\right). \quad (3.51)$$

Коэффициенты k₁, k₂, k₃, k₄, k₅, входящие в (3.51), определяются целым рядом физических и биологических явлений, в частности ассимиляционной способностью организмов, содержанием фотосинтезирующего хлорофилла в них, оптимальными условиями освещенности для фотосинтеза, особенностями биологического по-



Рис. 3.11. Вертикальное распределение концентрации суммарного углекислого газа c(z), наблюденное (точки) и рассчитанное по диффузионной модели (сплощные линии) и распределение биомассыфитопланктона B(z) (пунктирные линии) на двух станциях к югу от Азорских островов (a, b). Данные на рис. 3.11 e — средние значения по нескольким станциям (по [60]).

требления кислорода в толще воды и т. п. Поскольку теоретическое описание этих явлений весьма затруднено, то все указанные коэффициенты рассматриваются как эмпирические константы, значения которых заключены в некоторых пределах.

Расчет распределения концентрации суммарного СО₂ (суммарного содержания неорганического углерода) по уравнению (3.46) с выражением для R вида (3.51) был осуществлен Маккавеевым и Якушевым методом конечных разностей. В качестве граничных условий использовались значения концентрации СО₂ на горизонтах 0 и 100 м. Эти концентрации были измерены летом 1980 г. в Атлантическом океане к югу от Азорских островов. В этом же районе были осуществлены наблюдения за вертикальным распределением элементов карбонатной системы, а также определения биомассы фитопланктона в водах океана. Результаты сопоставления данных наблюдений с рассчитанными кривыми вертикального распределения суммарного CO₂ приведены на рис. 3.11. Совпадение теоретических и экспериментальных точек, как видно из рисунка, весьма хорошее (не надо при этом, конечно, забывать, что совпадение крайних экспериментальных точек с теоретическими кривыми обеспечено использованными граничными условиями).

189

Вид полученных вертикальных распределений суммарного CO_2 хорошо согласуется с наблюденными распределениями биомассы фитопланктона. В зависимости от глубины нахождения и значения максимума концентрации фитопланктона меняется положение и значение максимума содержания в воде суммарного CO_2 . Вариации других параметров модели позволили исследовать влияние этих параметров на содержание CO_2 и на форму его вертикального распределения в районах океана, для которых модель (3.46)—(3.50) можно считать достаточно адекватной происходящим там процессам.

3.3. Особенности диффузии пятен нефти в океане

Возрастающая загрязненность Мирового океана нефтью вызывает повышенный интерес не только к методам борьбы с причинами такого загрязнения, но и к методам расчета распространения в океане попавшей в него по той или иной причине нефти. Наибольшая загрязненность нефтью наблюдается вблизи побережий промышленно развитых стран, вдоль оживленных морских коммуникаций и в районах морских нефтяных промыслов. Выбросы нефти и нефтепродуктов в результате аварий нефтеналивных судов также могут вызвать загрязнение больших акваторий океана. Некоторые сведения о загрязненности Мирового океана нефтепродуктами можно найти в публикациях ЮНЕСКО (см., например, [136]), а данные о количестве попадающей океан В нефти — в обзорной работе [25] и в статье [97].

Попадающая в океан нефть распространяется в нем по сложным законам, часть которых еще не выяснена с достаточной полнотой. Схематично этот процесс можно представить следующим образом. При попадании на поверхность воды значительных количеств нефти (например, при аварии танкера) она вначале растекается под действием силы тяжести. Когда слой нефти **vмень**шится, важными в балансе сил становятся силы вязкости и поверхностного натяжения. Эти силы зависят от свойств нефти, которые в процессе растекания могут существенно меняться, так как вследствие испарения и растворения в воде плотность нефти и ее вязкость обычно возрастают. В результате этого может наступить момент, когда поверхностное натяжение изменит знак и растекание нефтяного пятна под действием силы поверхностного натяжения прекратится. В дальнейшем пятно может увеличиваться в размерах под действием механических сил движущейся водной массы, т. е. вести себя подобно пятну обычной пассивной примеси. Предел росту пятна достигается при стремлении толщины нефтяной пленки к мономолекулярной. Одновременно с процессами растекания пятна продолжаются и физико-химические трансформации нефтяного загрязнения — могут образовываться водонефтяные эмульсии, конгломераты с плотностью, большей плотности морской воды и поэтому тонущие, или, наоборот, более легкие, долгое время плавающие по поверхности океана.*

В растекании нефти по поверхности океана обычно выделяют три фазы [25]: инерционную, гравитационно-вязкую и фазу поверхностного натяжения. В первой фазе для круглого нефтяного пятна с радиусом *R* и толщиной *h* градиент давления уравновешивается силой инерции, т. е.

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = u \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad (3.52)$$

где ρ_0 — плотность нефти; *г* — радиус-вектор с началом в центре пятна; *и* — радиальный компонент скорости; *р* — давление.

Правую часть уравнения (3.52) можно записать приближенно в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{R}{t} \frac{R}{Rt} = \frac{R}{t^2}, \qquad (3.53)$$

а левую часть соответственно в виде

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial r} = g \frac{\rho_{\rm B} - \rho_0}{\rho_{\rm B}} \frac{\partial h}{\partial r} \approx g \frac{\rho_{\rm B} - \rho_0}{\rho_{\rm B}} \frac{V}{R^3}, \qquad (3.54)$$

где $\rho_{\rm B}$ — плотность воды.

Приравняв теперь выражения (3.53) и (3.54) друг другу, найдем для R

$$R = k_{2u} \left(\frac{\rho_{\rm B} - \rho_0}{\rho_0} gV \right)^{1/4} t^{1/2}, \qquad (3.55)$$

где $V = hR^2$ — характерный объем нефтяного пятна; k_{2u} — константа порядка единицы.

Если нефтяное загрязнение имеет форму не круга, а вытянутой полосы, то аналогичные построения приводят к следующему выражению для увеличения ширины загрязненной полосы *l* в инерционной фазе ее развития:

$$l = k_{1\mu} \left(\frac{\rho_{\rm B} - \rho_0}{\rho_0} g A \right)^{1/3} t^{2/3}, \qquad (3.56)$$

где A — объем нефти, содержащейся в единице длины загрязненной полосы; k_{1u} — константа порядка единицы.

Зависимость ширины нефтяной полосы от времени, следующая из формулы (3.56), была подтверждена лабораторными опытами. График изменчивости во времени безразмерной величины $l/A^{1/2}$ как функции безразмерного времени {[$(\rho^{B} - \rho_{0})/\rho_{B}]gA^{-1/2}$ } $t^{1/2}$, а также экспериментальные точки приведены на рис. 3.12.

В гравитационно-вязкой фазе растекания пятна нефтяного загрязнения необходимо учитывать силы вязкого трения в пленке.

^{*} Подробности о трансформациях нефти и других загрязняющих веществ в водах океана, а также о методах борьбы с ними см. в главе «Химическое загрязнение океана и методы борьбы с ним» монографии [105].

Выражение для силы трения *F*, отнесенной к единице массе пленки, может быть записано в виде

$$F_{1} = \rho_{\rm B} v \frac{\partial u}{\partial z} \Big/ (\rho_{\rm 0} h), \qquad (3.57)$$

где *z* — вертикальная координата; *v* — кинематический коэффициент молекулярной вязкости воды.

Далее, заменяя в (3.57) производную $\partial u/\partial z$ приближенным выражением $R/(t\delta)$, где δ — толщина вязкого пограничного слоя в воде [которая, как известно, равна (vt)^{1/2}], получим (при предположении, что $\rho_{\rm B} \approx \rho_0$):

$$F_{1} \approx v \frac{R}{t\delta} \frac{1}{h} = v^{1/2} R^{3} V^{-1} t^{-3/2}.$$
 (3.58)



Рис. 3.12. Зависимость безразмерной ширины полосы нефти от безразмерного времени в инерционной фазе растекания (по [25]).

Приравнивая теперь градиент давления силе трения, для зависимости R от t в гравитационно-вязкой фазе растекания пятна будем иметь

$$R = k_{2B} \left[\left(\frac{\rho_{\rm B} - \rho_0}{\rho_{\rm B}} \right) g V v^{-1/2} \right]^{1/6} t^{1/4}, \qquad (3.59)$$

а для одномерного случая соответственно

$$l = k_{1B} \left[\left(\frac{\rho_{\rm B} - \rho_0}{\rho_{\rm B}} \right) g A^2 v^{-1/2} \right]^{1/4} t^{3/8}, \qquad (3.60)$$

где k_{2в} и k_{1в} — константы порядка единицы.

График теоретической зависимости безразмерной ширины полосы нефтяного загрязнения от безразмерного времени для гравитационной фазы ее развития, а также экспериментальные точки, подтверждающие эту зависимость, приведены на рис. 3.13. Переход от инерционной фазы растекания нефтяного загрязнения к гравитационно-вязкой происходит тогда, когда увеличивающаяся толщина вязкого пограничного слоя сравнивается по порядку величины с уменьшающейся в процессе растекания толщиной слоя нефти, т. е. когда $\delta \approx h$.

В третьей фазе растекания нефтяного загрязнения преобладающими становятся силы поверхностного натяжения. Сила поверхностного натяжения F₂, действующая на единицу массы нефти, может быть выражена формулой

$$T_{2} = \sigma R/(\rho V), \qquad (3.61)$$

$$\frac{1/A^{1/2}}{10^{2}}$$

$$IO^{7}$$

$$IO$$

Рис. 3.13. Зависимость безразмерной ширины полосы нефти от безразмерного времени в гравитационно-вязкой фазе растекания (по [25]).

где σ — суммарное поверхностное натяжение, равное $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$, а σ_1 , σ_2 и σ_3 — поверхностное натяжение на границах раздела вода — воздух, вода — нефть и воздух — нефть соответственно; ρ — типичное значение плотности (величины $\rho_{\rm B}$ и ρ_0 обычно отличаются друг от друга не более чем на 10 %).

Сила поверхностного натяжения становится существенной, когда она по порядку величины сравнивается с градиентом давления. Приравнивая выражение (3.61) к правой части формулы (3.54), найдем, что такое условие наступает, когда толщина слоя нефти *h* в процессе растекания пятна достигает величины

$$h_{k} = \left[\sigma\left(\frac{\rho_{\rm B}-\rho_{0}}{\rho_{0}}\right)^{-1}g^{-1}\rho^{-1}\right]^{1/2}.$$
(3.62)

Типичное значение σ , по имеющимся сведениям, близко к 0,025 H/м, а ($\rho_{\rm B} - \rho_0$)/ ρ_0 , как уже упоминалось, имеет характерное значение 0,1. При таких значениях параметров типичная толщина нефтяной пленки h_h , при достижении которой наступает третья фаза растекания, оказывается близкой к 0,5 см.

Если далее приравнять правые части формул (3.58) и (3.61), то для растекания пятна в фазе поверхностного натяжения получим

$$R = k_{2t} \left(\frac{\sigma^2 t^3}{\rho^2 v} \right)^{1/4}, \qquad (3.63)$$

где k_{2t} — коэффициент порядка единицы.

13 Заказ № 422

В одномерном случае растекания полосы нефти для зависимости l(t) в фазе поверхностного натяжения получается формула, аналогичная (3.63), но с другим коэффициентом пропорциональ-



ности. Результаты сравнения теоретической зависимости с лабораторными данными по растеканию пленки нефти в фазе поверхностного натяжения приведены на рис. 3.14, а обобщенный график всех фаз расширения пятна нефти от точечного источника мощностью 10⁴ т (имитация разлива нефти при катастрофе танкера «Тоггу Canyon» у берегов Англии) — на рис. 3.15.

Расширение пятна нефтяного загрязнения в фазе поверхностного натяжения в какой-то момент времени замедляется. Как показывают наблюдения, это происходит, когда толщина пленки нефтн уменьшается до $(2-3) \cdot 10^{-3}$ см. По-видимому, такое явление в значительной степени связано с процессом испарения наиболее летучих фракций нефти. Но так как испарение легких фракций происходит с поверхности нефтяной пленки, то характерное время этого процесса должно совпадать с характерным временем молекулярной диффузии фракций нефти по толщине пленки h. А это время, как следует из решения одномерного уравиения молекулярной диффузии, равно $t = h^2/D$, где D — коэффициент молекулярной диффузии. Если теперь

это выражение для *t* подставить в формулу (3.63), то получим для максимального радиуса пятна

$$R_{\text{макс}} \sim \left(\frac{\sigma^2 h^6}{D^3 \rho^2 v}\right)^{1/4},$$

(3.64)

а для максимальной площади пятна соответственно

$$S_{\text{makc}} \sim \left(\frac{\sigma^2 V^6}{\rho^2 \nu D^3} \right)^{1/a}.$$

(3.65)



Рис. 3.16. Днаграмма длительности различных фаз растекания пятиа нефти в зависимости от его объема (по [25]).

1-	инерцис	ниая ф	аза; 2 —	гравитацио	нно	-вязкост	
ная	фаза;	3 — фа	за пове	рхностного	иаз	гяжения;	
4	диффуз:	ионный	режим	увеличен	ия	размера	
			пятна				

На рис. 3.16 представлена общая диаграмма различных фаз растекания пятна нефти объемом V с границами между фазами, проведенными в соответствии с приведенными выше оценками составляющих баланса сил, действующих на нефтяное пятно.

Как уже упоминалось выше, нефтяная пленка, прекратившая расширение под действием сил поверхностного натяжения, может далее увеличивать свою площадь из-за течений и касательного наветра. Под действием ветра и течений пятно пражения трения нефти дрейфует, обычно отклоняясь от направления ветра до 20° по часовой стрелке в северном полушарии против часовой И стрелки — в южном. Скорость ветрового дрейфа нефтяного пятна в среднем составляет 2-4 % скорости ветра. Если ветер быстро меняется во времени и в пространстве, то расчет ветрового дрейфа пятна осложняется и в этом случае могут быть использованы различного рода статистические подходы к решению задачи (см. обзор [25]).

При ветровом дрейфе нефтяной пленки наблюдается ее вытягивание вдоль направления дрейфа или под некоторым углом к этому направлению. Интенсивность вытягивания, как показано в [38], можно считать пропорциональной напряжению трения ветра и толщине пленки и обратно пропорциональной коэффициенту молекулярной вязкости нефти v. Для нефтяных пленок толщиной 1 мм — 1 см скорость вытягивания при ветрах 5—10 м/с может достигать нескольких километров в сутки [38].

На дрейф нефтяного пятна могут оказывать влияние и ветровые волны. Как известно, волны конечной амплитуды могут обусловливать перенос жидкости или пассивных индикаторов в направлении движения волн. Этот перенос, получивший название стоксова, обычно невелик, и в большинстве морских диффузионных задач им пренебрегают. Однако, как показали лабораторные, опыты (см. [25]), дрейф нефтяных пленок поверхностными волперенос, предсказываемый может превышать теорией нами Стокса. Это превышение, по-видимому, пропорционально произведению крутизны волн на их фазовую скорость с коэффициентом пропорциональности, близким к 0,445. Интересно, что при совместном действии на пятно ветра и волн их эффекты не просто складываются, а взаимодействуют более сложным образом. Так, в лабораторных экспериментах (см. [25]) было обнаружено, что при слабом ветре (до 80 см/с) рост крутизны волн приводит к увеличению скорости дрейфа пятна вследствие усиления волнового переноса. Но при более сильном ветре волнение может служить причиной ослабления дрейфа, причем при малой крутизне волн скорость дрейфа убывает с ростом крутизны, но для больших крутизн эффект может стать обратным. Зависимость скорости дрейфа нефтяного пятна от крутизны волн можно объяснить либо просто увеличением водной поверхности, по которой дрейфует нефть в взволнованном море, либо более сложными эффектами взаимодействия ветра с поверхностью моря за крутыми гребнями обтекаемых ветром волн.

Следует, однако, отметить, что вклад волнения в дрейф пятна обычно не превышает 20 % ветрового дрейфа, в связи с чем этим эффектом часто можно пренебрегать.

На заключительных стадиях растекания нефтяных пятен, особенно после окончания фазы поверхностного натяжения, существенную роль в увеличении площади нефтяного загрязнения начинают играть эффекты турбулентной диффузии. Параметры этого процесса, естественно, зависят от формы существования нефтяного пятна. Нефтяная пленка может существовать в океане в виде единого пятна, быть разбитой на отдельные более мелкие слики, либо представлять собой скопление взвешенных частичек эмульсии, твердых конгломератов и т. п. Важной особенностью нефтяного загрязнения в океане является также достаточно четкая граница области загрязнения, в связи с чем аппроксимация распределений концентрации нефтяного загрязнения в периферийных зонах пятен решениями параболических уравнений диффузии может привести к ошибкам. Все эти вопросы в настоящее время еще практически не исследованы, и учет специфики поведения нефтяного загрязнения осуществляется обычно лишь при расчетах первых фаз растекания нефти, а диффузионная стадия рассматривается в рамках обычных диффузионных моделей.

Опыты по диффузии нефтяных пленок были осуществлены в Каспийском море Р. М. Мамедовым и В. М. Шириновым (см. ссылку в [25]). В море выпускалось по 12—15 л нефти и велись наблюдения над ростом площади загрязнения S со временем t. На рис. 3.17 приведена полученная в этих опытах зависимость S(t) на заключительной диффузионной фазе роста пятна загрязнения. Как видно из рисунка, начиная приблизительно с 10³ с после запуска пятна зависимость S(t) хорошо аппроксимирова-

лась кубическим законом, который, как мы помним, наблюдается и в инерциониом интервале турбулентности. Интересно, что значение $t_0 = 10^3$ с, до которого на рис. 3.17 наблюдается отклонение экспериментальных точек от кубической зависимости, практически точно соотвегствует моменту окончания фазы роста размеров нефтяного пятна под действием поверхностного натяжения (оценка t_0 по графику рис. 3.16).

Если пятно нефтяного загрязнения состоит в значительной степени из взве-

Рис. 3.17. Изменение во времени площади нефтяной пленки под действием турбулентной диффузии, по данным опытов Мамедова и Широнова в Каспийском море (по [25]).

шенных нефтяных частичек, то в диффузии такого пятна существенную роль могут играть и вертикальные процессы. Причем интенсивность и другие характеристики этих процессов будут, естественно, зависеть от размера частичек или, в общем случае, от закона распределения количества частичек разного размера *l*. При предположении о компенсации направленного вниз турбулентного потока частичек их всплыванием из-за разницы с плотностью воды имеем

$$K_{z} - \frac{\partial c_{0}(l, z)}{\partial z} = -\boldsymbol{w}(l) c_{0}(l, z), \qquad (3.66)$$

где $c_0(l, z)$ — объемная концентрация нефтяных частичек размером l на глубине z; w(l) — скорость всплывания частичек, зависящая от l.

Для скорости всплывания частичек w(l) естественно принять закон Стокса, согласно которому шаровая частица размера lвсплывает в более тяжелой среде со скоростью $w(l) = 0,086 \times$ $\times [(\rho_B - \rho_0)/\rho_B] (g/v) l^2$ см/с. Далее можно предположить, что



функция $c_0(l, z)$ приближенно выражается через суммарную объемную концентрацию нефтяных включений $c_c(z) = [c_c(z) = c_c(z)]$

 $=\int_{l_{\text{MBH}}}^{l_{\text{MAKC}}} c_0(l, z) dl \bigg],$

, через максимальный размер поступающих в

толщу воды частичек $l_{\text{макс}}$ и размер минимальных существующих в морской воде вкраплений нефти $l_{\text{мин}}$ (еще более мелкие частицы быстро растворяются в воде). При таких предположениях можно записать: $c_0(l, z) = c_c(z)/(l_{\text{макс}} - l_{\text{мин}})$. В этом случае уравнение (3.66) приводится к виду

$$K_z \partial c_c(z) / \partial z = A c_c(z), \qquad (3.67)$$

где А — некоторая константа с размерностью скорости.

Решение уравнения (3.67) имеет вид

$$c_c(z) = c_c(0) \exp(-z/z_0),$$
 (3.68)

где $c_c(0)$ — значение концентрации $c_c(z)$ на поверхности океана; $z_0 = K_z/A$ — характерный масштаб изменения концентрации нефтяных включений с глубиной. По имеющимся оценкам (см. [25]), этот масштаб имеет значение 15—20 м. До таких глубин могут проникать в океан взвешенные нефтяные включения. Растворенные же в воде нефтяные фракции, по всей видимости, способны диффундировать в толщу океанских вод на значительно бо́льшие глубины.

3.4. Диффузия примеси от распределенных источников в тонкопереслоенном по вертикали океане

При вертикальной диффузии выпадающей на поверхность океана примеси могут наблюдаться интересные эффекты, связанные с тонкой вертикальной переслоенностью поля плотности и поля скорости в океане. Такая переслоенность, открытая сравнительно недавно, как показывают наблюдения, широко распространена в океане и оказывает существенное влияние на многие гидрофизические, химические и биологические процессы в океане. При вертикальном зондировании малоинерционным прибором в переслоенном океане на записи прибора будут наблюдаться «ступеньки» с вертикальными размерами, варьирующими от сантиметров до десятков метров. В настоящее время накоплен большой экспериментальный материал об основных параметрах таких ступенчатых структур [67]. Исследованы также основные механизмы генерации ступенчатых структур, среди которых главными являются: кинематический эффект внутренних волн, локальные эффекты турбулентного перемешивания, эффекты молекулярной диффузии солей и молекулярной теплопроводности (эффекты «двойной» диффузии). Между формами ступенчатых структур и указанными механизмами их генерации существует определенная связь. В частности, при локальных актах генерации турбулентности в толще океана в результате турбулентного перемешивания будут образовываться «ступеньки», размеры которых связаны с энергией турбулентности, выделившейся при акте ее генерации [85].

Так как в толще океана в подавляющем большинстве случаев существует устойчивая плотностная стратификация вод, то для образования «ступеньки» необходимо затратить определенную энергию на перемешивание водной массы. Из-за сравнительной малости толщины «ступеньки» первоначальный вертикальный градиент плотности воды $\partial \rho/\partial z$ на шаге ступеньки можно считать постоянным и равным γ . Энергия, затрачиваемая на перемешивание, очевидно, будет равна изменению потенциальной энергии слоя воды до перемешивания и после него. Расчет затраты энергии на перемешивание единичного столбца жидкости высотой h дает

$$E = g\gamma h^3/12.$$
 (3.69)

Затрата же энергии на перемешивание единичного объема жидкости массой 1 г будет равна

$$E_0 = g\gamma h^2 / (12\rho) = h^2 N^2 / 12, \qquad (3.70)$$

где $N = (g\gamma/\rho)^{\frac{1}{2}}$ — частота Вяйсяля — Брента; ρ — средняя плотность жидкости в перемешиваемом объеме; g — ускорение свободного падения.

Таким образом, для того чтобы породить в стратифицированной среде перемешанный слой толщиной h механизм генерации турбулентности должен высвободить в каждом грамме жидкости не менее $g\gamma h^2/(12\rho)$ единиц энергии. В действительности освобождается, вообще говоря, большая энергия, часть которой тратится на преодоление сил Архимеда, а часть переходит в кинетическую энергию турбулентности. Естественно при этом предположить, что в актах генерации энергия в среднем распределяется на два этих процесса поровну. Тогда удельная кинетическая энергия турбулентности в только что создавшемся турбулизированном слое может быть подсчитана по формуле (3.70). Скорость диссипации турбулентной энергии в этом слое є определится из следующих соображений. Как показано в [81], максимальные вертикальные размеры вихрей в турбулизированном слое стратифицированной жидкости определяются из выражения

$$h = c^{s/2} \mathrm{Ri}_{\mathrm{kp}}^{s/4} \varepsilon^{1/2} N^{-s/2}, \qquad (3.71)$$

где Ri_{kp} — критическое число Ричардсона, при достижении которого турбулентные движения получают возможность преодолеть силы Архимеда в слое толщиной h; c — универсальная постоянная в законе «степени — 2/3» для структурных функций в локально-изотропной турбулентности.

Их (3.71) для є получаем

$$\varepsilon = c^{-3} \mathrm{Ri}_{\mathrm{\kappa p}}^{-3/2} h^2 N^3. \tag{3.72}$$

199

В то же время для є по определению справедливо соотноше-

ние $\varepsilon = a \overline{v (\partial u/\partial z)^2}$, где v — кинематический коэффициент молекулярной вязкости воды, a — некоторый числовой коэффициент, а черта означает осреднение. Если в последнем выражении заменить производную $\partial u/\partial z$ производной от осредненной по масштабу h скорости $\partial \overline{u}/\partial z = \Gamma$, то получим для нижней оценки ε выражение

$$\varepsilon = a v \Gamma^2. \tag{3.73}$$

Если далее в (3.73) заменить Γ^2 на $\operatorname{Ri}_{\operatorname{HD}}^{-1} N$, то получим

$$\varepsilon = a v N^2 \mathrm{Ri}_{\mathrm{Kp}}^{-1}. \tag{3.74}$$

Разделив теперь выражение для E_0 (3.70) на скорость диссипации турбулентной энергии є [формулы (3.72)—(3.74)], получим три соотношения для характерного времени существования турбулентности в слое:

$$\tau = c^{3} \mathrm{Ri}_{\mathrm{kp}}^{*/2} / (12N); \qquad (3.75)$$

$$\tau = h^2 N^2 / (12\varepsilon) = h^2 N^2 / (12av\Gamma); \qquad (3.76)$$

$$\tau = Ri_{\rm KD} h^2 / (12av). \tag{3.77}$$

Используя формулы для є (3.73) и (3.74), можно получить из (3.71) еще два выражения для характерного вертикального масштаба турбулизированных слоев:

$$h = \sqrt{a}c^{3/2} \mathrm{Ri}_{\mathrm{kp}}^{3/4} \nabla^{1/2} \Gamma N^{-3/2}; \qquad (3.78)$$

$$h = \sqrt{ac^{3/2}} \operatorname{Ri}_{\mathrm{Kp}}^{1/4} v^{1/2} N^{-1/2}.$$
 (3.79)

Для определения характерных значений коэффициента вертикального турбулентного обмена K_z в турбулизированных слоях воспользуемся формулой закона «степени ⁴/₃» локально-изотропной турбулентности:

$$K_{z} = c_{1} \varepsilon^{1/3} h^{4/3}, \qquad (3.80)$$

где c_1 — универсальная постоянная.

Используя для h выражение (3.71), преобразуем (3.80) к виду

$$K_z = c^2 c_1 \operatorname{Ri}_{\mathrm{kp}} \varepsilon N^{-2}. \tag{3.81}$$

Если же в (3.80) заменить величину є на ее значения по формулам (3.74) и (3.72), то получим еще два выражения для K_z :

$$K_{z} = \sqrt[3]{a} c_{1} v^{1/s} \mathrm{Ri}_{\mathrm{\kappa p}}^{-1/s} h^{4/s} N^{2/s}; \qquad (3.82)$$

$$K_z = c^{-1} c_1 \mathrm{Ri}_{\mathrm{Kp}}^{-1/2} h^2 N.$$
 (3.83)

Так как по измерениям в океане обычно бывают известны ρ , γ (или N), а тонкоструктурный градиент скорости Γ измеряется реже, то для подсчетов величины ε удобнее пользоваться формулами (3.72) и (3.74), для подсчета τ — формулами (3.75) и (3.77),

200

а для определения K_z — формулами (3.83) и (3.82). Первые из этих формул не содержат молекулярных параметров, а во вторые они входят. Следовательно, первые выражения описывают начальные стадии развития турбулизированных слоев, когда главной в балансе сил является сила плавучести. Вторые формулы соответствуют вязкой стадии развития турбулизированных образований в океане, когда существенное значение имеют молекулярные силы.

В табл. 3.2, заимствованной из [85], приведены значения є, т и K_z , подсчитанные для нескольких значений N и h по формулам без молекулярных коэффициентов (первые цифры в каждой

Таблица 3.2

Значения параметров турбулентности в турбулизированных слоях разной толщины h в стратифицированной жидкости при разных значениях частоты Вяйсяля—Бреита N

_	<i>№</i> см—1	ћ см			
Параметр		10	102	102	
$\varepsilon \ \mathrm{CM}^2/\mathrm{C}^3$	10-4	$8 \cdot 10^{-10}$	8·10 ⁻⁸	8.10-6	
	10- ³	9,0-10 ° 8-10-7	9,0.10 ⁻⁸	$9,0.10^{-8}$ 8.10^{-8}	
	10-2	9,0·10 ⁻⁴ 9,0·10 ⁻⁵	$9,0.10^{-2}$ $8\cdot 10^{-2}$ $9,0\cdot 10^{-5}$	9,0.10 ⁻⁵	
тс	10-4	10 ²	10^2	10^2	
	10 ^{- 3}	9,3 10 9,3	9,3.10 ⁻ 10 9,3.10 ²	9,3.10 ⁴	
	10-2	1 9,3	1 9,3⋅10 ²	1 9,3-10 ⁴	
<i>K_z</i> см ² /с	10-4	$2,0.10^{-3}$	$2,0.10^{-1}$	2,0.10	
	10 ⁻³	$2,0.10^{-2}$	2,0	$2,0.10^2$	
	10-2	$2, 1 \cdot 10^{-2}$ $2, 0 \cdot 10^{-1}$ $9, 6 \cdot 10^{-2}$	2,0·10 2,1	$2,0.10^{3}$ 4,5.10	

строке) и с учетом сил вязкости (вторые цифры). При расчетах физические константы и универсальные постоянные взяты следующими: $\rho = 1 \text{ г/c}^3$, $g = 980 \text{ см}^2/\text{с}$, $v = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{c}$, $\text{Ri}_{\text{кp}} = 0,25$, a = 15, c = 1, $c_1 = 0,1$. Значения параметров турбулентности, приведенные в таблице, находятся в согласии с имеющимися экспериментальными данными [67]. Как и следовало ожидать, значения є и K_z для вязкой стадии «жизни» турбулизированных слоев оказались, как правило, меньше, а параметр т — больше их соответствующих значений для начальной фазы существования слоев. Это правило нарушается только для т и K_z при очень малом значении частоты Вяйсяля—Брента (10^{-4} c^{-1}) в тонких турбулизированных слоях (h = 10 см). При $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ и h = 10 см значения K_z практически сравниваются для обоих режимов турбулизированных слоев. При $N = 10^{-4}$ с⁻¹ и h = 10 см величина K_z оказывается меньше молекулярного значения коэффициента, что, по всей видимости, свидетельствует о неприменимости полученных формул в таких экстремальных условиях.

Исследование особенностей диффузии примесей в переслоенном по вертикали океане аналитическими методами осуществил Коро-



Рис. 3.18. Схематическое изображение слоистой структуры вод океана с различными скоростями течений *u_j* и значениями коэффициентов диффузии K_{i}^{j} и K_{j}^{i} в каждом слое (по [49]).

j — иомер слоя; *h_j* — толщина *j*-го слоя; *z_j* — текущая вертикальная координата в *j*-м слое.

тенко [49]. Им было предположено, что толщу океана можно представить состоящей из n квазиоднородных слоев толщиной h_j , в каждом из которых турбулентность различна и характеризуется коэффициентами K_z^i и K_x^j . В каждом слое, безгранично протяженном вдоль оси x (рис. 3.18), существует и своя горизонтальная скорость течения u_j . При этом предполагается, что значения скорости на границах слоев терпят разрыв, а на самой границе раздела слоев скорость равна полусумме значений скорости в соседних слоях. Уравнение диффузии примеси в каждом слое (с пренебрежением эффектов переноса примеси вдоль второй горизонтальной оси y) записывается в виде

$$\partial c_i/\partial t + u_i \partial c_i/\partial x = K_x \partial^2 c_i/\partial x^2 + K_x^i \partial^2 c_i/\partial z_i^2,$$
 (3.84)
j=1, 2, ...; n— номер слоя; остальные обозначения — преж-

Предполагается далее, что начальное распределение концентрации примеси в слоях $c_j(x, z_j, 0)$ можно представить в виде

$$c_i(x, z_i, 0) = \Phi(x, z_i),$$
 (3.85)

где $\Phi(x, z_j)$ — известная функция.

где ние. Граничные условия для каждого слоя записываются в виде

$$K_{z}^{\prime} \left. \frac{\partial c_{l}}{\partial z_{l}} \right|_{z_{j}=0} = -\mu_{l}(x, 0, t); \qquad (3.86)$$

$$K_{z}^{j} \left. \frac{\partial c_{i}}{\partial z_{j}} \right|_{z_{j}=h_{j}} = -\mu_{j} (x, h_{j}, t), \qquad (3.87)$$

где μ_j — потоки примеси через границы слоев. При этом потоки примеси через внешние границы первого и последнего из рассматриваемых слоев предполагаются отсутствующими, т. е. $\mu_1(x, 0, t) = \mu_n(x, 0, t) = 0$.

Для решения задачи (3.84)—(3.87) Коротенко использует метод интегрального преобразования Фурье, который при определенных условиях, налагаемых на ядро преобразования, позволяет избавиться в уравнении от производных по вертикальной координате. Окончательный вид общего решения, описывающего концентрацию вещества в *j*-м слое, получен в следующем виде:

$$c_{I}(x, z_{I}, t) = \frac{2}{h_{I}} \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left[-K_{z}^{i} \left(\frac{\pi l}{h_{i}}\right)^{2} t\right] \cos\frac{\pi l}{h_{I}} z_{I} \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{h_{I}} \frac{\exp\left[-(x-u_{I}t-\xi)^{2}/(4K_{x}^{i}t)\right]}{(4\pi K_{x}^{I}t)^{1/2}} \cos\frac{\pi l}{h_{I}} \xi_{I} \Phi\left(\xi, \xi_{I}\right) d\xi d\xi_{I} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{t} \left[(-1)^{l} \mu_{I}(x, h_{I}, \tau) - \mu_{I}(x, 0, \tau)\right] \exp\left[K_{z}^{i} \left(\frac{\pi l}{h_{I}}\right)^{2} \tau\right] \times \frac{\exp\left\{-(x-x^{'}-u_{I}(t-\tau))^{2}/[4K_{x}^{I}(t-\tau)]\right\}}{[4\pi K_{x}^{i}(t-\tau)]^{1/2}} dx^{\prime} d\tau \right\}, \quad (3.88)$$

где ξ, ξ_j, x' и т — переменные интегрирования.

В выражении для концентрации вещества в *j*-м слое (3.88) первый двойной интеграл характеризует влияние начальных условий на формирование поля концентрации, а второй двойной интеграл — влияние процессов обмена веществом между слоями. От вклада каждого из этих членов в общий баланс вещества в слое зависит форма профилей концентрации примеси во всей системе слоев. При определенных значениях входящих в выражение (3.88) параметров могут возникать профили «инверсионного» типа с максимумами и минимумами значений концентрации вдоль оси *z*. Для иллюстрации влияния отдельных факторов на формирование профилей концентрации примеси Коротенко [49] рассмотрел задачу с мгновенным линейным (вдоль оси *z*) источником примеси удельной мощностью Q₀, т. е. с начальными условиями вида

$$c_i(x, z_i, 0) = Q_0 \delta(x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$
 (3.89)

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

При начальных условиях (3.89) решение (3.88) упрощается и принимает вид

$$c_{I}(x, z_{I}, t) = Q_{0} \frac{\exp\left[-(x - u_{I}t)^{2}/(4K_{x}^{I}t)\right]}{(4\pi K_{x}^{I}t)^{1/2}} + \frac{2}{h_{I}} \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left[-K_{z}^{I}\left(\frac{\pi l}{h_{I}}\right)^{2}t\right] \cos\frac{\pi l}{h_{I}} z_{I} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\tau} \left[(-1)^{l} \mu_{I}(x, h_{I}, \tau) - \mu_{I}(x, 0, \tau)\right] \exp\left[K_{z}^{I}\left(\frac{\pi l}{h_{I}}\right)^{2}\tau\right] \times \frac{\exp\left\{-(x - x^{\prime} - u_{I}(t - \tau))^{2}/[4K_{x}^{I}(t - \tau)]\right\}}{\left[4\pi K_{x}^{I}(t - \tau)\right]^{1/2}} dx^{\prime} d\tau. \quad (3.90)$$

Первый член этого выражения представляет собой, как не трудно видеть, фундаментальное решение одномерного уравнения диффузии в движущейся со скоростью u_j системе координат. Из-за различий скоростей u_j в каждом. слое примесь от источника будет переноситься в слоях вдоль оси x за единицу времени на разные расстояния, что должно приводить к изрезанности вертикальных профилей концентрации. В то же время второй член выражения (3.90), характеризующий обмен примесью между слоями, обеспечит определенную степень «сглаживания» вертикальных профилей.

Для количественного расчета значений концентрации примеси по формуле (3.90) или по (3.88) необходимо ввести дополнительные гипотезы о вертикальных потоках примеси через границы слоев µ_j. Наиболее естественно предположить, что такие потоки пропорциональны разности концентраций примеси вблизи границы раздела слоев, т. е.

$$\mu_{i}(x, 0, t) = \alpha_{i-1, i}[c_{i-1}(x, h_{i-1}, t) - c_{i}(x, 0, t)];$$

 $\mu_{I}(x, h_{I}, t) = \alpha_{I, I+1}[c_{I}(x, h_{I}, t) - c_{I+1}(x, 0, t)],$ (3.91) где параметры а характеризуют проницаемость границ слоев.

Если использовать выражения (3.91), то решение (3.90) при-

нимает вид

$$c_{I}(x, z_{I}, t) = Q_{0} \frac{\exp\left[-(x - u_{I}t)^{2}/(4K_{x}^{I}t)\right]}{(4\pi K_{x}^{I}t)^{1/2}} + \frac{2}{h_{I}} \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left[-K_{z}^{I}\left(\frac{\pi l}{h_{I}}\right)^{2}t\right] \cos\frac{\pi l}{h_{I}} z_{I} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{t} \left\{(-1)^{l} \alpha_{I, I+1} \times \exp\left[K_{z}^{I}\left(\frac{\pi l}{h_{I}}\right)^{2}\tau\right] \left[c_{I}(x, h_{I}, \tau) - c_{I+1}(x, 0, \tau)\right] - \alpha_{I-1, I} \left[c_{I-1}(x, h_{I-1}, \tau) - c_{I}(x, 0, \tau)\right] \times \left\{\frac{\exp\left\{-(x - x^{'} - u_{I}(t - \tau)^{2}/[4K_{x}^{I}(t - \tau)]\right\}}{\left[4\pi K_{x}^{I}(t - \tau)\right]^{1/2}} dx^{\prime} d\tau.$$
(3.92)

204

По системе уравнений (3.92) можно рассчитывать распределение концентрации примеси в плоскости (x, z), если задать значения коэффициентов диффузии K_z^i и K_x^j , а также значения коэффициентов проницаемости α .

Когда перепады скоростей Δu в слоях достаточно велики, то вертикальная диффузия примеси не «успевает» существенно сгла-



Рис. 3.19. Вертикальное распределение концентрации примеси от линейного мгновенного источника в тонкопереслоенном океане (по [49]).

а — расчетный профиль концентрации примеси инверсионного типа на расстоянии x=180 м от источника по истечении l=l ч с начала диффузии; б — расчетный профиль ступенчатого типа при тех же значениях х и t. Отклонения скорости течения в слоях от среднего значения 5 см/с представлены пунктирными линнями; в — наблюденный в море профиль концентрации красителя инверсионного типа; г — наблюденный в море профиль концентрации красителя ступенчатого типа.

дить вертикальные профили концентрации примеси. В этом случае для качественного представления о форме таких профилей можно пренебречь вертикальным обменом вещества через границы слоев, т. е. положить, что $\alpha_{j-1, j}=0$. На рис. 3.19 *а*, б приведены рассчитанные по (3.92) при таком предположении вертикальные профили концентрации примеси на расстоянии 180 м от линейного источника при вертикальных профилях горизонтального компонента скорости, измеренных Кулленбергом (см. ссылки в [49]) во время диффузионных опытов в Балтийском море. В первом случае

(рис. 3.19 *а*) профиль концентрации имеет инверсионный характер, во втором (рис. 3.19 б) — ступенчатый. Очень близкие по форме к теоретическим оказались и измеренные в море вертикальные профили концентрации красителя, запуск которого осуществлялся с имитацией линейного (вдоль оси *z*) источника (рис. 3.19 *в*). Реальные профили, как видно из рисунка, также имеют либо инверсионную, либо ступенчатую форму, правда, с несколько более «сглаженными» границами между слоями. Такое расхождение расчетных и экспериментальных результатов естественно объясняется пренебрежением эффектом вертикального обмена примесью в формуле (3.92).

Для определения вертикальных потоков примеси в тонкопереслоенном океане Коротенко [50] рассмотрел задачу о диффузии примеси в двух полубесконечных по вертикали (оси z) слоях с горизонтальной границей раздела при z=0. Каждый слой характеризуется своей горизонтальной скоростью движения воды (вдоль оси x) u_1 и u_2 и своими значениями вертикального коэффициента турбулентного обмена K_z^1 и K_z^2 . Задача считается стационарной, горизонтальной диффузией пренебрегается. При таких предположениях уравнения диффузии для каждого из слоев (индексы 1 и 2) запишутся в виде

$$u_1 \partial c_1 / \partial x = K_z^1 \partial^2 c / \partial z^2, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0;$$

$$u_2 \partial c_2 / \partial x = K_z^2 \partial^2 c / \partial z^2, \quad x \ge 0, \quad z \le 0.$$
 (3.93)

Граничные условия для уравнений (3.93) задаются в виде

$$c_1(0, z) = f_1(z); c_2(0, z) = f_2(z)$$
 при $x = 0;$ (3.94)

$$c_1(x, +0) = c_2(x, -0);$$
 (3.95)

$$K_z^1 \partial c_1(x, +0)/\partial z = K_z^2 \partial c_2(x, -0)/\partial z = \mu(x)$$
 при $z = 0;$ (3.96)

$$c_1(x, z) = c_2(x, z) = 0$$
 при $x \to \infty;$ (3.97)

$$\partial c_1(x, z)/\partial z = \partial c_2(x, -z)/\partial z = 0$$
 при $z \to \infty$. (3.98)

Условия (3.95)—(3.96) означают непрерывность концентрации вдоль оси z и непрерывность потока примеси через границу между слоями, условия (3.97)—(3.98) — стремление к нулю концентраций и потоков примеси при увеличении расстояния x и z от точки наблюдения до начала координат. Через $\mu(x)$ обозначен искомый поток примеси через границу раздела между слоями. Общее решение задачи (3.93) — (3.98) имеет вид [50]

$$c_{1}(x, z) = \left(4\pi \frac{K_{z}^{1}}{u_{1}}\right)^{-1/2} \int_{0}^{\infty} f_{1}(\zeta) \left\{\exp\left[-\frac{u_{1}(z+\zeta)^{2}}{4K_{z}^{1}x}\right] + \exp\left[-\frac{u_{1}(z-\zeta)^{2}}{4K_{z}^{1}x}\right]\right\} d\zeta - (K_{z}^{1}u_{1})^{-1/2} \int_{0}^{x} [\pi(x-\xi)]^{-1/2} \mu(\xi) \times \\ \times \exp\left[-\frac{z^{2}u_{1}}{4K_{z}^{1}(x-\xi)}\right] d\xi \quad \text{при } x \ge 0, \ z \ge 0; \\ c_{2}(x, z) = \left(4\pi \frac{K_{z}^{2}}{u^{2}}\right)^{-1/2} \int_{0}^{\infty} f_{2}(\zeta) \left\{\exp\left[-\frac{u_{2}(z+\zeta)^{2}}{4K_{z}^{2}x}\right] + \\ + \exp\left[-\frac{u_{2}(z-\zeta)^{2}}{4K_{z}^{2}x}\right]\right\} d\zeta + (K_{z}^{2}u_{2})^{-1/2} \int_{0}^{x} [\pi(x-\xi)]^{-1/2} \mu(\xi) \times \\ \times \exp\left[-\frac{z^{2}u_{2}}{4K_{z}^{2}(x-\zeta)}\right] d\xi \quad \text{при } x \ge 0, \ z \le 0,$$
(3.99)

где ζ и § — переменные интегрирования.

Если теперь воспользоваться граничным условием (3.95), то для искомой функции μ(ξ) получаем интегральное уравнение типа Вольтерра 1-го рода:

$$F(x) = \int_{0}^{x} \left[\pi \left(x - \xi\right)\right]^{-1/2} \mu(\xi) d\xi, \qquad (3.100)$$

где введено обозначение

$$F(x) = \frac{\int_{0}^{\infty} \left\{ \left[f_{1}\left(\xi\right) \exp\left(-\frac{\xi^{2}u_{1}}{4K_{z}^{1}x}\right) \right] \left| \left(\pi \frac{K_{z}^{1}}{u_{1}}x\right)^{1/2} \right\} d\zeta - \left(K_{z}^{1}v_{1}\right)^{-1/2} + \left(K_{z}^{2}u_{2}\right)^{-1/2} - \frac{\int_{0}^{\infty} \left\{ \left[f_{2}\left(\xi\right) \exp\left(-\frac{\zeta^{2}u_{2}}{4K_{z}^{2}x}\right) \right] \left| \left(\pi \frac{K_{z}^{2}}{u_{2}}x\right)^{1/2} \right\} d\zeta - \left(K_{z}^{1}u_{1}\right)^{-1/2} + \left(K_{z}^{2}u_{2}\right)^{-1/2} - \frac{\left(K_{z}^{1}u_{1}\right)^{-1/2} + \left(K_{z}^{2}u_{2}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \frac{\left(K_{z}^{1}u_{1}\right)^{-1/2} + \left(K_{z}^{2}u_{2}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \frac{\left(K_{z}^{1}u_{1}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \frac{\left(K_{z}^{1}u_{1}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \frac{\left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right)^{-1/2} - \left(K_{z}^{1}u_{2}\right$$

В качестве примера в [50] был рассмотрен случай точечного непрерывного источника мощностью Q_0 , помещенного в верхнем слое в точке (0, z_0). В этом случае (3.100) конкретизируется и записывается в виде

$$Q_{0}(\pi x)^{-1/2} \exp\left(-\frac{z_{0}^{2}u_{1}}{4K_{z}^{1}x}\right) = \frac{\left[u_{1}^{2}(K_{z}^{2}u_{2})\right]^{-1/2}}{\left[\left(K_{z}^{1}u_{1}\right)^{1/2} + \left(K_{z}^{2}u_{2}\right)^{1/2}\right]^{-1}} \times \\ \times \int_{0}^{x} \left[\pi (x-\zeta)\right]^{-1/2} \mu \left(\xi\right) d\xi.$$
(3.102)

207

Уравнение (3.102) решалось в [50] операционным методом. В результате для $\mu(x)$ получено выражение

$$\mu(x) = \frac{Q_0 \left[\left(K_z^1 u_1 \right)^{1/2} + \left(K_z^2 u_2 \right)^{1/2} \right]^{-1} z_0 u_1^{8/2}}{2 \left(K_z^1 \right)^{1/2} \left(K_z^2 u_2 \pi \right)^{-1/2} x^{3/2}} \exp\left(-\frac{z_0^2 u_1}{4 K_z^1 x} \right). \quad (3.103)$$

Как видно из этого выражения, различия в скорости течений в отдельных слоях океана могут существенно влиять на вертикальные потоки примесей. Следует отметить, что при расположении источника примеси в верхнем слое на значение потока примеси большее влияние оказывают параметры K_z^1 и u_1 , чем характеристики нижнего слоя K_z^2 и u_2 . Весьма важно, естественно, и расстояние источника примеси от поверхности раздела, через которую проходит поток примеси. При существовании в океане большого числа слоев с различными гидрофизическими характеристиками выражение для вертикального потока примеси усложнится, но общие закономерности трансформации потоков на границах раздела слоев останутся близкими к рассмотренному случаю двухслойного океана.

Задача существенно осложняется, если между рассматриваемыми однородными полупространствами, существует не резкая граница раздела, а некоторая прослойка толщиной h, в которой существуют значительные градиенты скорости течения и плотности воды. Коэффициент вертикальной диффузии K_z в такой прослойке, очевидно, будет существенно зависеть от значений этих градиентов, и здесь его естественно считать некоторой функцией числа Ричардсона Ri. Коротенко [50] предлагает в рассматриваемой задаче использовать следующее выражение для K_z :

$$K_{z} = [(K_{0} - v)(1 + a \operatorname{Ri})^{b} + v], \qquad (3.104)$$

где K₀— значение вертикального турбулентного коэффициента диффузии при Ri=0; v — молекулярный коэффициент диффузии; *a* и *b* — некоторые постоянные.

При предположении о постоянстве концентрации примеси на верхней границе прослойки (z=0) для описания диффузии примеси в прослойке и нижней полуплоскости используем систему из двух нестационарных уравнений вида

$$\partial c_1(z, t)/\partial t = K_z \partial^2 c_1(z, t)/\partial z^2$$
 при $t > 0, 0 \le z \le h$; (3.105)
 $\partial c_2(z, t)/\partial t = K_0 \partial^2 c_2(z, t)/\partial z^2$ при $t > 0, h \le z < \infty$ (3.106)
альными условиями

$$c_1(z, 0) = c_2(z, 0) = 0 \tag{3.107}$$

и граничными условиями

$$c_1(h, t) = c_2(h, t); \quad K_z \partial c_1(h, t) / \partial z = K_0 \partial c_2(h, t) / \partial z; \quad (3.108)$$

$$c_1(0, t) = c_0 = \text{const}; \quad c_2(\infty, t) = 0, \quad (3.109)$$

где индекс «1» относится к прослойке, а «2» — к нижней полуплоскости.

с нач

Решение задачи (3.105)—(3.109) получено Коротенко операционным методом в виде

$$c_{1}(z, t) = c_{0} \sum_{n=1}^{\infty} d^{n-1} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{2(n-1)h+z}{2\sqrt{K_{z}t}} \right) - d \operatorname{erf} \left(\frac{2nh-z}{2\sqrt{K_{z}t}} \right) \right];$$
(3.110)

$$c_{2}(z, t) = c_{0}(1-d)\sum_{n=1}^{\infty} d^{n-1} \operatorname{erf}\left[\left(\frac{z-h}{\sqrt{K_{0}}} + \frac{(2n-1)h}{\sqrt{K_{z}}}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}\right],$$
(3.111)

где введено обозначение

$$d = (1 - \sqrt{K_z/K_0})/(1 + \sqrt{K_z/K_0}).$$

Из решений (3.110)—(3.111) можно найти выражение и для потока примеси через нижнюю границу прослойки:

$$q(h, t) = c_0 \left(\frac{K_0}{\pi t}\right)^{1/2} \frac{\left[(K_0 - v)\left(1 + a \operatorname{Ri}\right)^b + v\right]^{1/2}}{K_0^{1/2} + \left[(K_0 - v)\left(1 + a \operatorname{Ri}\right)^b + v\right]^{1/2}} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{K_0^{1/2} - \left[(K_0 - v)\left(1 + a \operatorname{Ri}\right)^b + v\right]^{1/2}}{K_0^{1/2} + \left[(K_0 - v)\left(1 + a \operatorname{Ri}\right)^b + v\right]^{1/2}} \right\}^{n-1} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 h^2}{4t \left[(K_0 - v)\left(1 + a \operatorname{Ri}\right)^b + v\right]}\right].$$
(3.112)

При Ri→0 выражения (3.110)—(3.112) переходят в простые формулы для концентрации и потока примеси при ее диффузии в однородной полуплоскости:

$$c(z, t) = c_0 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{K_0 t}}\right); \quad q(h, t) = c_0 \left(\frac{K_0}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h^2}{4K_0 t}\right).$$
(3.113)

В случае же $Ri \rightarrow \infty$ перенос примеси через нижнюю границу прослойки снижается до молекулярного уровня. Наиболее интересен случай, когда $aRi \gg 1$, но $K_0(aRi)^b \gg v$. Тогда для потока примеси приближенно получаем

$$q(h, t) \approx c_0 \left(\frac{K_0 a^b \operatorname{Ri}^b}{\pi t} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{h^2}{4K_0 t (a \operatorname{Ri})^b} \right] = c_0 \left(\frac{K_0 a^b \operatorname{Ri}^b}{\pi t} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{h^{2-b}}{4K_0 t \left(\frac{\rho a \, \Delta \rho}{\rho_0 (\Delta u)^2} \right)^b} \right], \quad (3.114)$$

где число Ri выражено через перепады скорости Δu и плотности воды $\Delta \rho$ в прослойке. Из последнего выражения для q(t) следует, что характерное время диффузии примеси через прослойку t_0 =

 $=\frac{h^{2-b}}{4K_0}\left[\frac{-\rho_0 (\Delta u)^2}{ga\Delta\rho}\right]^b$ растет с увеличением $\Delta \rho$ и *h*, но уменьшается

с увеличением Δu . Поток примеси через нижнюю границу прослойки возрастает в 2^{-b} exp 2^{-2b} раз при росте Δu в два раза, а уменьшение перепада плотности $\Delta \rho$ в два раза приводит к усилению потока в 2^{-b/2} exp (1 — 2^b) раз. Соответствующее уменьшение толщины прослойки *h* обусловливает увеличение потока в [2^{-b/2} exp (2^{2-b}+1) раз. Эти примеры свидетельствуют о большом влиянии переслоенности вод океана на перераспределение примеси. Изменение параметров переслоенности может привести к существенным вариациям как в распределениях концентраций примеси, так и в значениях ее потоков.

При практическом использовании приведенных выше выражений для концентрации примеси и ее потоков в переслоенном океане возникает трудность в выборе значений коэффициентов диффузии для каждого из рассматриваемых слоев. При существенных перепадах скорости и плотности в слоях для определения Kz можно воспользоваться формулой (3.104). Однако если значения Δu в слоях невелики или, что бывает часто, сведения о Δu отсутствуют, то для оценок K_z можно применить формулы (3.82)—(3.83), в которых входными параметрами являются лишь значения толщины прослойки и градиент плотности в ней. Правда, формулы (3.82)—(3.83) выведены при предположении, что турбулентность в каждом из слоев стационарна и ее характеристики не меняются во времени. В действительности же акты генерации турбулентности в толще океана происходят в отдельных точках пространства и в отдельные моменты времени, в промежутках между которыми турбулентность затухает. Поэтому в каждый фиксированный момент времени в океане могут существовать слои (или пятна) жиди с развитой, и с затухающей турбулентностью, а также кости слои, в которых режим движения жидкости близок к ламинарному. Естественно, что в такой ситуации для оценки параметров турбулентности в каждом из слоев использование формул (3.82) ---(3.83) или (3.104) будет не совсем корректно. Кроме того, информация о параметрах h и $\partial \rho/\partial z$ в каждом из слоев не всегда бывает доступна. В связи с этим возникает задача определить некоторый эффективный коэффициент вертикальной диффузии, обеспечивающий средний перенос примеси через всю систему слоев с разными гидрофизическими характеристиками и уровнями турбулентности в слоях.

Механизм вертикальной диффузии примеси в океане с перемежающимися слоями турбулизированной жидкости оказывается весьма специфичным. При наличии стационарных прослоек с малым уровнем турбулентности может возникать, как мы только что видели, эффект «запирания», так как в таких прослойках вертикальная диффузия снижается до чрезвычайно малого молекулярного уровня. В океане же, однако, существует в среднем более интенсивный вертикальный обмен. Это можно объяснить только тем, что турбулизированные слои возникают хаотически на разных глубинах. Турбулентность в каждом из таких слоев обеспечит достаточно быстрый перенос примеси на расстояние *h* по вертикали. Затем турбулентность в этом слое затухает, но в другой момент времени возникает другой турбулизированный слой, который может частично перекрыть участок оси *z*, ранее занимаемый предыдущим турбулизированным слоем. В результате этого примесь будет перемещена по вертикали еще на некоторое расстояние Δz . В конечном итоге возникающие спонтанно турбулизированные слои, хотя и разделенные в каждый момент времени псевдоламинарными прослойками, обеспечат в среднем за определенный промежуток времени достаточно интенсивный вертикальный поток примеси.

В описанной схеме вертикальной диффузии при перемежающейся турбулентности горизонт расположения отдельного турбулизированного слоя z_i, толщину слоя h_i и среднеквадратичный уровень турбулентных пульсаций скорости в слое о, естественно считать величинами случайными [5]. Значение коэффициента вертикальной диффузии в турбулизированном слое і должно зависеть как от толщины слоя h_j, так и от интенсивности турбулентности в слое σ_j , т. е. $K_{j}^{j} = f(h_j, \sigma_j)$. Турбулизированные слои жидкости с коэффициентами диффузии Кⁱ, в каждый отдельный момент времени чередуются с зонами, где движение воды близко к ламинарному, и, следовательно, коэффициент диффузии там близок к молекулярному. Схематичная картина такого переслоенного по характеристикам турбулентности океана приведена на рис. 3.20 б. На рисунке 3.20 а изображена схема изменения коэффициента диффузии с глубиной при «классическом» представлении о непрерывно турбулизированном океане.

Распределение значений коэффициента вертикальной турбулентной диффузии вдоль вертикали согласно схеме рис. 3.20 б может быть описано импульсной случайной функцией вида

$$K_{z}(z) = \sum_{j=1}^{h} f(\sigma_{j}, h_{j}) F\left(\frac{z-z_{j}}{h_{j}}\right), \qquad (3.115)$$

где

 $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$

Если далее сделать предположение, что величины σ_j и h_j статистически не зависят от z_j , а плотность распределений рассматриваемых величин не зависит от номера j, то условное среднее значение функции $K_z(z)$ при n турбулизированных слоях в океане глубиной H будет иметь вид

$$\langle K_{z} |_{n} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma_{j}} \int_{h_{j}} \left[f(\sigma_{l}, h_{j}) P_{\sigma h}(\sigma_{l}, h_{l}) d\sigma_{j} dh_{l} \times \int_{z_{j}} F\left(\frac{z-z_{l}}{h_{j}}\right) P_{z}(z_{j}) dz_{j} \right], \qquad (3.116)$$

где P_z — плотность распределения значений z_j ; $P_{\sigma h}$ — совместная плотность распределения величин σ_j и h_j , а угловые скобки означают статистическое осреднение.



Рис. 3.20. Схематические вертикальные профили значений вертикального коэффициента диффузии K_z в случае полностью турбулизированного океана (а) и в случае перемежающейся турбулентностн (б).

Прямая 1 - модель с постоянным по глубине коэффициентом диффузии; кривая <math>2 - модель с переменным по глубинекоэффициентом днффузии; <math>v - коэффициент молекулярной $диффузии; <math>h_j$ - толщины турбулизированных слоев жидкости в океане.

При равномерной плотности распределения местоположения отдельных турбулизированных слоев в интервале глубин H, т. е. при $P_z(z_j) dz_j = dz_j/H$, имеем

$$I = \int_{z_j} F\left(\frac{z - z_j}{h_j}\right) P_z(z_j) dz_j = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} F\left(\frac{z - z_j}{h_j}\right) dz_j. \quad (3.117)$$

Если толщины турбулизированных слоев значительно меньше всей рассматриваемой толщи океана, то $I \approx h_j/H$ и

$$\langle K_z |_n \rangle = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} \int_{h_j} \frac{h_j}{H} f(\sigma_j, h_j) P_{\sigma h}(\sigma_j, h_j) d\sigma_j dh_j = \frac{n}{H} \langle h_j \rangle. \quad (3.118)$$

Осредняя (3.118) по *n*, получим безусловное среднее значение $\langle K_z \rangle = (\langle n \rangle / H) \langle h f \rangle$. При естественном предположении, что распределение числа турбулизированных слоев в интервале *H* подчи-

няется закону Пуассона $P_H(n) = [(n_1H)^n/n!] \exp(-n_1H)$, где $n_1 = = \langle n \rangle / H$ — среднее число турбулизированных слоев в единичном интервале глубин, получим:

$$\langle K_z \rangle = n_1 \langle hf \rangle.$$
 (3.119)

Вид функции $K_z^i = f(\sigma_i, h_i)$ конкретизируем из соображений размерности, положив $K_z^i = c\sigma_i h_i$, где *с* — некоторая безразмерная универсальная постоянная. Тогда

$$\langle K_z \rangle = c n_i \int_0^\infty \int_0^\infty h^2 \sigma P_{\sigma h}(\sigma, h) \, d\sigma \, dh, \qquad (3.120)$$

а при статистической независимости о и h

$$\langle K_z \rangle = c n_1 \int_0^\infty \sigma P_\sigma(\sigma) \, d\sigma \int_0^\infty h^2 P_h(h) \, dh.$$
 (3.121)

Эмпирических оценок функций распределений в формулах (3.120)—(3.121) сделано в настоящее время немного (см. ссылки в [5]). Распределение $P_h(h)$ по измерениям в Тунисском проливе было аппроксимировано логарифмически-нормальным законом. По данным измерений в главном термоклине в северной части Тихого океана функция $P_h(h)$ лучше аппроксимировалась экспоненциальным законом $P_h(h) = \mu_1 \exp(-\mu_1 h)$ с $\mu_1 = 0.46$ м⁻¹, так что $\langle h^2 \rangle = 2/\mu_1^2 = 9.4$ м², а значение n_1 оказалось равным 0.21 м⁻¹ для слоя 200—400 м и 0.14 м⁻¹—для слоя 800—1200 м. По измерениям в Индийском океане к югу от о. Суматра значение n_1 для верхнего 250-метрового слоя оказалось равным 0.021 м⁻¹, $\langle \sigma \rangle = 1.0$ см/с и $\langle h^2 \rangle = 21$ м². При указанных значениях параметров и при c = 0.1 оценки $\langle K_2 \rangle$ по формуле (3.121) варьируют от 1.6 до 16 см²/с.

Эмпирические двумерные распределения $P_{\sigma h}(\sigma, h)$ были получены по измерениям в Тунисском проливе. Оценки $\langle K_z \rangle$ по формуле (3.120) оказались равными 16 и 40 см²/с соответственно по измерениям в восточной и западной частях пролива. Расчет $\langle K_z \rangle$ по данным о $P_{\sigma h}(\sigma, h)$ по измерениям в Индийском океане привел к значению $\langle K_z \rangle = 6,8 \text{ см}^2/\text{с}$. Такой разброс значений $\langle K_z \rangle$ может быть обусловлен различиями средних гидрометеорологических условий в отдельных районах Мирового океана, где проводились измерения.

Оценим теперь возможный статистический разброс значений эффективного коэффициента вертикального турбулентного обмена K_z . Подсчитаем дисперсию K_z по формуле $D(K_z) = \langle K_z^2 \rangle - \langle K_z \rangle^2$. При сделанных выше предположениях о статистической независимости параметров σ_i и h_i от z_i в (3.115), а также о независимости законов распределения этих параметров от номера j для условного (при *n* турбулизированных слоях в интервале глубин *H*) среднего значения квадрата коэффициента вертикального турбулентного обмена получим

$$\langle K_z^2 |_n \rangle = \frac{n}{H} \langle h f^2 \rangle + \frac{n^2 - n}{H^2} \langle h f \rangle^2.$$
 (3.122)

В случае пуассоновского распределения турбулизированных слоев с глубиной дисперсия коэффициента вертикального турбулентного обмена равна

$$D(K_z) = n_1^2 \langle nf \rangle^2. \qquad (3.123)$$

Полагая в (3.123), как и выше, $K_z^i = c\sigma_i h_i$, получим в общем случае

$$D(K_z) = c^2 n_1 \int_0^\infty \int_0^\infty h^3 \sigma^2 P_{\sigma h}(\sigma, h) \, d\sigma \, dh, \qquad (3.124)$$

а при статистической независимости о и h

$$D(K_z) = c^2 n_i \int_0^\infty \sigma^2 P_\sigma(\sigma) \, d\sigma \int_0^\infty h^3 P_h(h) \, dh. \qquad (3.125).$$

Оценки среднеквадратичного разброса $\sqrt{D(K_z)}$ значений K_z по формулам (3.124) и (3.125) с использованием перечисленных выше экспериментальных данных имеют порядок величины $\langle K_z \rangle$.

Рассмотрим, как могут проявиться в поле концентрации примеси, выпадающей из атмосферы, вариации коэффициента вертикальной турбулентной диффузии K_z . Для этого воспользуемся простейшей моделью вертикальной диффузии, рассмотренной в разделе 3.1 [формулы (3.2)—(3.7)]. На рис. 3.21 приведены построенные по формуле (3.7) кривые зависимости концентрации примеси на поверхности океана от времени, прошедшего с момента, принятого за начальный. Кривые построены для нескольких значений коэффициента диффузии и при значениях потоков примеси на поверхность океана 10⁻¹³ и 10⁻¹⁴ г/(см²·с) (соответственно левая и правая шкала по оси ординат на рисунке). С течением времени диапазон изменения концентрации примеси на поверхности океана при различных значениях K_z , как видно из рисунка, расширяется, например при t=1 ч он составляет (0,02— 1,81)·10⁻¹⁰, а при t=10 ч уже (0,07—5,72)·10⁻¹⁰ г/см³.

Итак, разброс значений вертикальной турбулентной диффузии, обусловленный перемежаемостью океанической турбулентности, может привести к существенным вариациям концентрации примеси на поверхности океана. А так как в различных областях океана вблизи его поверхности могут находиться попеременно то более, то менее турбулизированные слои жидкости, то и поле примеси на поверхности океана приобретет «мозаичную» структуру. Перепады концентрации между соседними пятнами в такой структуре будут зависеть от различий в уровнях турбулентности в приповерхностных слоях океана и от времени существования турбулизированных слоев. По-видимому, за характерное (по порядку величины) время существования приблизительно постоянного уровня турбулентности в отдельных слоях океана можно принять 1 ч. Тогда при молекулярной вертикальной диффузии в одной из зон океана и при значении $K_z = 10 \text{ см}^2/\text{с}$ в соседней зоне отношение поверхностных концентраций между этими зо-



Рис. 3.21. Концентрация примеси с на поверхности океана при различных значениях потоков примеси q, коэффициентов диффузии K_z и времени диффузии t (по [6]).

нами достигнет 1:100. Естественно, что подобного рода особенности распространения примесей необходимо учитывать при расчетах их концентраций в различных районах Мирового океана.



ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДИФФУЗИИ ПРИМЕСЕЙ В ОКЕАНЕ

4.1. Численные расчеты концентрации примеси по полуэмпирическому уравнению диффузии

В предыдущих главах были приведены многочисленные примеры аналитических решений различных задач по диффузии примеси с использованием уравнения диффузии вида (1.22), упрощаемого в ряде случаев в соответствии с особенностями задачи. По аналитическим решениям легко проследить влияние различных факторов на распределение концентрации примеси, можно оценить роль граничных и начальных условий задачи на пространственно-временную изменчивость поля концентрации. Естественно поэтому, что по возможности всегда целесообразно стремиться получать аналитическое решение диффузионной задачи с функциональной зависимостью искомых характеристик поля диффундирующей примеси от координат, времени и определяющих процесс параметров. Однако сделать это удается далеко не всегда. Аналитические решения затруднительно найти уже при сколь-нибудь сложной форме области, в которой наблюдается диффузия примеси, а также при сложной структуре поля скорости течений в рассматриваемом районе океана. Часто делает невозможным поиск аналитического решения и задание коэффициентов обмена сложными функциями координат и времени. В этих случаях, однако, бывает часто целесообразно проанализировать возможность некоторых упрощений в постановке задачи, позволяющих привести ее к виду, удобному для поиска аналитического решения. Например, область интегрирования со сложной границей часто бывает возможным заменить более простой областью — прямоугольной, круглой и т. п. Часто область конечного размера можно заменить на бесконечную плоскость или полуплоскость, что тоже облегчает поиск аналитического решения задачи. Естественно, что при таких упрощениях и допущениях необходимо оценивать, какие погрешности они могут внести в результаты расчета.

Рассмотрим в качестве примера оценку погрешности, вносимой предположением о бесконечной глубине океана в задачу о вертикальной диффузии примеси, выпадающей из атмосферы. Аналитическое выражение для распределения концентрации примеси по глубине, полученное при решении этой задачи, приведено в разделе 3.1 [формула (3.6)]. Теперь зададимся необходимой относительной точностью определения концентрации c(z, t) на некоторой глубине z_0 в виде отношения значения концентрации на этой глубине к концентрации примеси на поверхности океана, т. е.

$$c(z_0, t)/c(0, t) = a,$$
 (4.1)

где *а* — задаваемая точность решения.

Отношение же концентраций на глубинах z_0 и z=0, согласно аналитическим решениям (3.6) и (3.7), оказывается равным

$$c(z_0, t)/c(0, t) = \exp(-\xi_0^2) - \sqrt{\pi} \xi_0 (1 - \operatorname{erf} \xi_0),$$
 (4.2)

где_ $\xi_0 = z_0/(2\sqrt{K_z t}).$

Если далее приравнять правые части формул (4.1) и (4.2), то можно найти глубину z_0 , на которой достигается искомая точность решения и при превышении которой океан в данном случае можно считать «бесконечно» глубоким. Естественно, что глубина z_0 зависит от значения коэффициента K_z , а также от времени диффузии t. Например, при a = 0,01 значение z_0 приближенно выражается формулой

$$z_0 \approx 3.21 \sqrt{K_z t}. \tag{4.3}$$

При молекулярном коэффициенте диффузии по истечении 10 ч с начала диффузии глубина z_0 оказывается не превышающей 23 см, но при значении K_z 10 см²/с z_0 возрастает до 19 м. При увеличении времени диффузии до 10 сут z_0 оказывается при $K_z =$ =10 см²/с уже близкой к 100 м. При больших же временах диффузии обычно необходимо учитывать неконсервативность примеси и оценки глубины проникновения примеси в этом случае, как показано в разделе 3.1, следует осуществлять по другим формулам. При этом с большинстве случаев океан также оказывается возможным считать бесконечно глубоким, что значительно облегчает аналитическое решение задачи.

Если же привести задачу к удобному для аналитического решения виду все же не удается, то приходится применять численные методы ее решения. Возможности современных вычислительных машин позволяют осуществлять расчеты таких задач в большом объеме и в достаточно короткие сроки. Для численного решения дифференциальное уравнение диффузии необходимо заменить его конечно-разностным аналогом. С этой целью область интегрирования заменяется сеточной областью обычно с прямоугольной системой разграничивающих плоскостей или линий сетки. При этом и внешняя криволинейная граница рассматриваемой области заменяется системой ломаных отрезков поверхностей или линий, на которые сносятся граничные условия с перво-
начального контура области. При нестационарных задачах диффузии и время диффузии t при численных методах решения задается в виде дискретных отсчетов, отстоящих друг от друга на отрезки времени Δt . В ряде случаев, однако, могут использоваться сетки и с неравномерными шагами по пространственным координатам и времени.

Если индексами *i*, *j*, *k* обозначить номера узла сетки соответственно по осям *x*, *y* и *z*, то, например, адвективный член уравнения диффузии u dc/dx в разностной аппроксимации может быть записан в виде

$$u \,\partial c/\partial x \approx u_{i,j,k} \left(c_{i,j,k} - c_{i-1,j,k} \right) / \Delta x, \qquad (4.4)$$

где $u_{i, j, k}$ — значение компонента скорости u(x, y, z) в узле сетки с индексами *i*, *j*, *k*; $c_{i, j, k}$ и $c_{i-1, j, k}$ — значения концентрации примеси в соответствующих узлах сетки; Δx — шаг сетки вдоль оси *x*.

В нестацинарном случае уравнение диффузии может быть записано в общем виде:

$$\partial c/\partial t + Ac = f, \tag{4.5}$$

где А — некоторый оператор, а f — функция источников примеси.

В конечно-разностной по времени аппроксимации уравнение (4.5) может быть записано либо в виде

$$(c_{l+1} - c_l)/\Delta t + Ac_l = f_l,$$
 (4.6)

либо в виде

$$(c_{l+1} - c_l)/\Delta t + Ac_{l+1} = f_l, \qquad (4.7)$$

тде индексы l и l+1 означают номера дискретного отсчета моментов времени, начиная с момента, принятого за начальный.

Конечно-разностная аппроксимация в форме (4.6) носит название явной аппроксимации, в форме (4.7)— неявной. Если уравнение (4.5) решается при начальном условии $c = \varphi$ при t = 0, где φ — заданная функция, то при обеих формах аппроксимации начальным условием будет $c_0 = \varphi$. Если решение начальной задачи для дифференциального уравнения (4.5) обладает достаточной гладкостью, то точность аппроксимации дифференциального уравнения его конечно-разностным аналогом может быть оценена разложением искомой функции в ряд Тейлора и последующей подстановкой ряда в формулы (4.6) и (4.7). С помощью такого приема нетрудно убедиться, что аппроксимации (4.4), (4.6) и (4.7) имеют первый порядок точности. Если же конечно-разностную аппроксимацию уравнения (4.5) по времени, записать в виде

$$(c_{l+1} - c_l)/\Delta t + A(c_{l+1} + c_l)/2 = f_l, \qquad (4.8)$$

где

$$f_l = f_l(t_{l+1/2})$$
 или $f_l = [f(t_l) + f(t_{l+1})]/2,$ (4.9)

то такая аппроксимация имеет уже второй порядок точности по t.

Если некоторые из параметров уравнения диффузии, например коэффициент диффузии, в определенной пространственно-временной зоне изменяются очень быстро, то в этой зоне приходится применять более дробные шаги сетки или использовать другие методы сохранения точности аппроксимации. В частности, при численном методе решения диффузионных задач с мгновенными точечными источниками примеси, когда концентрация примеси в начальный момент времени в точке источника описывается дельта-функцией, необходимо, вообще говоря, неограниченное измельчение шагов сетки. В этом случае можно для малых расстояний от источника и малых времен диффузии использовать аналитическое решение задачи, предполагая, что диффузия происходит в неограниченном пространстве. «Размазанный» таким образом по некоторой области источник примеси уже можно использовать далее в качестве начального поля концентрации при решении задачи численными методами.

При численном решении диффузионных задач важным является проверка разностных схем на устойчивость и сходимость. Такими свойствами обладают разностные схемы, в которых выполнены определенные соотношения между шагами сетки и параметрами задачи. Так, например, для явной разностной схемы нестационарного уравнения диффузии с одним членом вертикальной диффузии должно выполняться соотношение

$$\Delta t < (\Delta z)^2 / (2K_z), \tag{4.10}$$

где K_z — постоянный вертикальный коэффициент диффузии.

В случае стационарного уравнения диффузии с членами адвекции вдоль осей x и z, а также с членом вертикальной диффузии условие устойчивости и сходимости записывается в виде (см. [8])

$$\Delta x < \frac{u \, (\Delta z)^2}{2K_z} \, \frac{1}{1 + w \, \Delta z / (2K_z)} \,, \tag{4.11}$$

где *и* и *w* — постоянные компоненты скорости вдоль осей *x* и *z*.

Более подробный разбор критериев устойчивости и сходимости разностных схем, а также методов решения конечно-разностных уравнений не входит в задачи настоящей монографии. По этим вопросам имеется обширная литература, и читатель, желающий ознакомиться с указанными проблемами более подробно, может быть отослан, например, к монографии Г. И. Марчука [61] и сборнику [39]. Здесь же мы остановимся лишь на некоторых результатах применения численных методов к решению задач о диффузии примесей в океане.

Впервые численный метод расчета диффузии примеси в море был, по-видимому, применен в [76]. В этой работе последовательно были рассчитаны задачи о горизонтальной диффузии примеси с постоянными значениями коэффициентов диффузии, с коэффициентами, задаваемыми законом «степени ⁴/₃», а также с коэффициентами, зависящими от относительной глубины водоема. В уравнении диффузии учитывалась также возможность распада

примеси. В последнем параграфе работы [76] численным методом по явной схеме рассчитывалась диффузия примеси от мгновенного распределенного источника примеси в прибрежной зоне моря со сложной конфигурацией береговой черты и неравномерной глубиной при наличии стационарного, но меняющегося по пространству поля горизонтальных компонентов скорости течения. На береговой черте задавалось условие непроникновения примеси через границу раздела вода-суша. Пространственный шаг расчетной сетки в этой задаче был взят равным 100 м, а шаг по времени — 1000 с. Расчет был осуществлен для 17 последовательных положений диффундирующего пятна примеси. На рис. 4.1 приведены: план прибрежного участка моря, начальное распределение пятна примеси с круговыми распределениями изолиний концентрации и вид пятна примеси через 16000 с с начала диффузии. При анализе последовательных картин диффузии выяснилось, что пятно диффундировало вначале практически симметрично и переносилось течением справа налево. По приближении к далеко выдающемуся в море мысу конфигурация пятна усложнялась, оно поджималось идущим вдоль мыса течением и вытягивалось вдоль течения. Центр пятна (точка с максимальной концентрацией примеси) перемещалась по плавной кривой, огибающей мыс, а изолиния с единичным значением концентрации «касалась» береговой черты у мыса, создавая зону загрязнения прибрежного участка моря. После прохождения мыса пятно начинало распространяться в расположенный за мысом залив, где могла возникнуть застойная зона загрязнения из-за наличия там замкнутой циркуляции вод.

Последовательное усложнение в [76] решаемой численным методом диффузионной задачи позволило оценить роль различных факторов в формировании поля концентрации примеси. Так, учет зависимости коэффициента горизонтальной диффузии от масштаба явления уже с первых шагов расчета привел к заметным отличиям в распределениях концентрации в диффундирующем пятне по сравнению с решением задачи с постоянным К_L. Для распределенного мгновенного источника примеси, изображенного на рис. 4.1 а, численный расчет с постоянным коэффициентом диффузии, равным 104 см2/с, дал более быстрое падение концентрации примеси в центральной 100-150-метровой зоне пятна no сравнению с расчетом при предположении о зависимости K_L от масштаба явления (радиуса-вектора точки наблюдения). В более же удаленных от центра зонах пятна концентрация, полученная во втором случае, оказывалась меньше рассчитанной по уравнению диффузии с постоянным коэффициентом. Неконсервативность диффундирующей примеси могла влиять на распределение концентрации при временах диффузии порядка нескольких часов, естественно, лишь в случае примеси с соизмеримым временем полураспада. Влияние же рельефа дна при учете его формулой вида (2.80) оказалось в ряде случаев существенным. Так, при диффузии рассматриваемого пятна примеси в водоеме глубиной 100 м скорость падения концентрации примеси в центре пятна была зна-



1

0 200 400 M



Рис. 4.1. Численный расчет распространения пятиа примеси в прибрежной зоие моря.

а — план прибрежного участка моря со схемой течений и изолиниями глубин; б аппроксимация береговой черты ломаной линией и начальное распределение концентрации примесн в диффундирующем пятне; в — положение пятна примеси по истечеиии 8000 с с начала диффузии; г — то же через 16000 с с иачала диффузии. чительно более быстрой, чем при диффузии в глубоком море. Умножение значения коэффициента горизонтальной диффузии на множитель f(l/H) приводит, естественно, к более быстрому росту самого диффундирующего пятна примеси. Так, по истечении 10 000 с с начала диффузии пятно имело радиус (в пределах единичной изолинии концентрации) 600 м при f(l/H) = 1 и 700 м при f(l/H), задаваемой графиком рис. 2.62.

Численный расчет диффузии примеси в море вблизи прямолинейного берега был осуществлен в [2]. Особенностью расчета являлось то, что поле скорости течения не задавалось, а рассчитывалось по полю ветра над морем. Как ветер, так и течения считались установившимися, не меняющимися во времени. Так как предполагалось, что диффундирующая примесь не оказывает влияния на динамику вод, то уравнение диффузии решалось отдельно с использованием полученных в динамической задаче значений компонентов горизонтальной и (перпендикулярной к береговой черте—оси х) и вертикальной скорости w. Диффузией примеси в направлении, параллельном береговой черте, при этом пренебрегалось. Процесс диффузии примеси считался существенно нестационарным, в качестве начального условия принималось равенство нулю концентрации с во всей рассматриваемой области. Поток примеси через свободную поверхность водоема и через дно отсутствовал, на береговой черте концентрация считалась известной функцией вертикальной координаты и времени, а на расстоянии 50 км от берега c (x, z, t) полагалась равной нулю. Для имитации источника примеси в виде, близком к мгновенному точечному или, наоборот, близком к линейному и «работающему» продолжительное время, функция c(0, z, t) задавалась в виде

$$c(0, z, t) = c_0 \exp\left[-k(k_1 - z)^2 - k_2(k_3 - t)^2\right], \quad (4.12)$$

где k, k₁, k₂ и k₃ — коэффициенты, варьируя которые можно менять характеристики источника примеси.

При численном расчете уравнение диффузии заменялось конечно-разностным аналогом, которое решалось методом прогонки. Граничные условия аппроксимировались со вторым порядком точности. Шаг сетки вдоль оси x был взят неравномерным: $\Delta x =$ =25 м до расстояния 100 м от береговой черты; $\Delta x = 100$ м для полосы 100 м $< x \le 5$ км, и, наконец, $\Delta x = 5$ км для зоны $5 < x \le 5$ ≤50 км. При глубине моря 40 м шаг по вертикали равнялся 1 м, а шаг по времени $\Delta t = 12$ ч. Значения коэффициентов диффузии выбирались в пределах $K_z = (0, 1... 1) \text{ см}^2/\text{с}$ и $K_x = (10^3...$ 104) см²/с. Рассматривался ряд ветровых ситуаций в прибрежной полосе моря, вызывающих различные типы циркуляции вод в зоне. Естественно, что и картины распределения концентрации примеси в плоскости (x, z) при этом существенно менялись, образуя «факелы» загрязнения той или иной формы (рис. 4.2). Так, при сгонном ветре весьма существенным оказалось расположение источника примеси. При сбросе примеси в поверхностный слой моря она достаточно быстро распространялась на большие расстояния от берега. Так, по истечении 24 ч с начала действия источника примесь (изолиния с 1/1000 долей от концентрации сбрасываемой примеси) обнаруживалась уже на расстоянии до 40 км от береговой черты. В то же время, если источник был заглублен на 10 м, то примесь практически не распространялась по горизонтали, а «прижималась» к берегу, образуя здесь зону сильного загрязнения вод. При нагонных ветрах картина, естественно, меня-



Рис. 4.2. Результаты численного расчета распределения концентрации примеси в вертикальной плоскости при сгонном (*a*, *б*) и нагонном (*b*, *c*) ветре при поверхностном (*a*, *b*) и глубинном (*b*, *c*) расположении источника (по [2]).

лась. При расположенном у поверхности источнике примесь за сутки распространялась вдоль оси *х* всего на несколько километров, а при глубинном выпуске, наоборот, заметные концентрации примеси могли быть обнаружены на больших расстояниях от источника, правда не в поверхностном, а в промежуточных слоях воды. Картины распределения концентрации примеси, естественно, менялись при вариациях значений коэффициентов диффузии в указанных выше пределах, однако эти изменения имели количественный, а не качественный характер, так как основная конфигурация зон загрязнения формировалась под действием сильно вависящего от ветровой ситуации поля скоростей течений в рассматриваемой прибрежной зоне моря.

Результаты ряда численных расчетов диффузии примеси в Каспийском и Балтийском морях приведены в сборнике [39]. Расчеты основывались на конечно-разностном аналоге нестационарного уравнения диффузии с двумя членами горизонтальной адвекции и членом горизонтальной диффузии примеси, а также с членом, учитывающим возможную неконсервативность примеси. Поле скорости находилось в свою очередь из решения упрощенной системы уравнений динамики вод с членами вертикальной вязкости, силой Кориолиса и градиентов давления. Для этой системы в качестве граничного условия на поверхности моря зада-



Рис. 4.3. Результат числеиного расчета положения 0,1 %ной изолинии концентрации примеси, диффундирующей от устьевых участков рек Волги и Урала через различные промежутки времени после начала действия источников примеси при северо-западиом ветре (по работе Шкудовой в [39]).

1 — направление ветра; 2 — изолинии скорости ветра; 3 — направление течений; 4 — 0,1 %-ная изолиния концентрации примеси.

валось касательное трение ветра, на дне — отсутствие скоростей течения. Учитывался также сток рек в море. Для уравнения диффузии начальным условием служило отсутствие концентрации примеси в водах моря. На отдельных участках береговой черты задавался расход примеси, а на остальном протяжении берега отсутствие потока либо определенное значение концентрации. Коэффициент горизонтальной диффузии в расчетах для Каспийского моря был взят равным 1,5.106 см²/с. Уравнение диффузии аппроксимировалось конечно-разностными формулами с первым порядком точности по времени и вторым порядком точности по пространству. Расчеты были проведены для Северного Каспия при северо-восточных ветрах, господствующих над акваторией, и источниках примеси непрерывного и мгновенного действия. Результаты расчетов для времени диффузии от 1 ч до 18 сут приведены на рис. 4.3. Анализ результатов расчетов показал, что перенос загрязняющих примесей в море происходит в основном под действием адвективных факторов. Однако если точечный источник примеси расположен в зоне горизонтальных вихревых структур поля скорости течений, то в таких случаях вклады диффузионных и адвективных членов в распространение загрязнения могут иметь один порядок величины.

Поле концентрации примеси, естественно, сильно зависит от длительности действия источника. Из рис. 4.3 видно, что при имитации стоков рек Волги и Урала источниками примеси, имеющими некоторую протяженность вдоль береговой черты, изолинии концентрации «продвигаются» со временем в сторону открытого моря. По прошествии 1 сут с начала «включения» источников изолиния с 0,1 %-ной (по отношению к первоначальной) концентрацией загрязнения удаляется от береговой черты на расстояние до 70 км. При дальнейшем увеличении времени диффузии t скорость продвижения фронта загрязнения замедляется и картина стационирует при значениях t = 15...20 сут. Естественно, что вид такого стационарного распределения поля загрязнения зависит от схемы циркуляции вод, т. е. в конечном счете от принятого в расчете поля ветра над морем. При перестройке поля ветра с определенным запаздыванием будет перестраиваться и поле концентрации примеси. Для мелководной части моря характерное время такой перестройки, по всей видимости, должно иметь порядок времени стационирования поля концентрации, так как поле скорости течений имеет меньшее время релаксации.

Для Балтийского моря численными методами было рассчитано распространение примеси от стационарных точечных источников. расположенных в Гданьском заливе и в районе г. Клайпеды [39]. Поле скорости течений считалось заданным и стационарным, коэффициент горизонтального турбулентного обмена брался равным 5.105 см²/с. Расчет осуществлялся методом «прогонки», а также методом «установления», когда искомое стационарное поле концентрации примеси ищется как предел эволюции решения соответствующей нестационарной задачи при стремлении времени диффузии к бесконечности. В результате численного решения задачи обнаружено, что при преобладающих северо-восточных течениях загрязнение из Гданьской бухты переносится в том же направлении, достигая Куршской косы с еще заметными значениями концентрации. Примесь из района Клайпеды при преобладающих там течениях переносится к северу, не удаляясь далеко от береговой черты. В сборнике [39] приведены также результаты численного расчета циркуляции вод и распространения примеси в Черном море, чему была посвящена и более ранняя работа [106].

Численный расчет распространения примеси в глобальном масштабе был осуществлен в уже цитируемой статье [96]. Задача о распределении кислорода в водах Мирового океана решалась с использованием аппроксимирующей океан широтно-долготной сетки с пятиградусным разрешением. Разностная схема имела первый порядок точности по времени и по горизонтальным координатам. Шаг по времени при этом принимался равным 5 сут, коэффициент горизонтальной диффузии считался имеющим порядок 10⁸ см²/с. Задача решалась методом установления, причем критерием стационирования решения служило условие совпадения с точностью до 1 % значений концентрации в два последовательных момента времени. При таком критерии время стационирования для рассматриваемой глобальной задачи оказалось близким к 43 годам.

Если численный расчет глобального распространения кислорода в водах океана был осуществлен для распределенного источника, то в работе [40] глобальная задача решалась численно



Рис. 4.4. Результат численного расчета положения нзолиний концентрации стронция-90, равной 0,3 \bar{c}_0 по истечении 1; 3; 5; 10; 20; 35 и 70 лет после ядерного взрыва (по [40]).

Область с концентрацией изотопа, большей 0,3 с0 через 70 лет после взрыва, заштрихована.

для мгновенного точечного источника примеси. Задача моделировала диффузию радиоактивного загрязнения от гипотетического ядерного взрыва в Тихом океане. Решение осуществлялось в рамках двумерного приближения, т. е. вертикальные процессы в задаче не учитывались. Потоки радиоактивной примеси (стронция-90) через береговую черту, естественно, полагались равными нулю, а в качестве начального условия принималось отсутствие изотопа в водах океана. В нестационарном уравнении диффузии учитывались члены с горизонтальной адвекцией, горизонтальной диффузией и член, описывающий распад изотопа. Значение коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в океане бралось равным 10⁷ см²/с. Поле скорости течений в океане заимствовалось из другой работы, в которой был осуществлен расчет интегральной функции тока в бароклинном Мировом океане.

Для устранения трудности численного расчета диффузионной задачи с мгновенным точечным источником примеси в [40] был использован следующий прием. Для бесконечной плоскости записывалось фундаментальное решение двумерного уравнения диффузии, которое далее аппроксимировалось ломаной функцией: постоянным значением концентрации примеси от точки взрыва до расстояния r = 900 км от него, далее на расстояниях от 900 до 1800 км зависимость концентрации от r задавалось полиномом 5-й степени, а при r > 1800 км полагалось, что c = 0. Таким образом, радиус «размазывания» начального распределения примеси принимался равным 1800 км, что при пятиградусном шаге пространственной сетки численной схемы давало уже малую погрешность аппроксимации для начальных этапов расчета с шагов по времени $\Delta t = 5$ сут.

Численная разностная схема решения глобальной диффузионной задачи в [40] имела первый порядок точности по времени и по горизонтальным координатам. На рис. 4.4 приведены результаты расчета распространения примеси для нескольких моментов времени, прошедших с начала отсчета (момента взрыва). Источник изотопа помещался в Тихом океане на пересечении экватора с меридианом 175° з. д. На рисунке показано положение изолинии концентрации изотопа $c = 0, 3\bar{c}_0$ через 1, 3, 5, 10, 20, 35 и 70 лет после взрыва, где \bar{c}_0 — концентрация изотопа при условии равномерного распределения всего выделившегося при взрыве количества радионуклида в водах Мирового океана. Как видно ИЗ рисунка, распределение концентрации примеси в океане обусловливается в основном характером глобальной циркуляции вод океана. Пятно примеси вытягивается Экваториальным противотечением в зональном направлении и лишь через 25-30 лет после взрыва достигает берегов Североамериканского континента. С течением времени область с заметными концентрациями изотопа принимает более сложную форму. Примесь из района взрыва диффундирует в Южное Пассатное течение и с ним переносится в субтропический круговорот вод, попадая и в южную часть Тихого океана. Антарктическим циркумполярным течением примесь далее транспортируется в Атлантический и Индийский океаны. Через 70 лет после взрыва изотоп можно обнаружить в виде отдельных пятен на очень больших расстояниях от места взрыва. Локализация этих пятен обусловлена совместным эффектом адвекции и диффузии, а также распадом изотопа, приводящим к уменьшению общего уровня загрязнения океана.

Естественно, что осуществленный в [40] расчет глобального переноса примеси носит весьма приближенный характер и может рассматриваться лишь как пример возможных оценок осредненных картин распределения примеси в Мировом океане при точечном ее источнике. Скорость распространения осредненных по вертикали значений концентрации примеси, полученную в расчете, также необходимо рассматривать как грубо ориентировочную и осредненную, так как известны факты, когда радиоактивные продукты от американских ядерных испытаний в Тихом океане распространялись в отдельных горизонтальных слоях воды на большие расстояния от мест взрывов за короткие промежутки

времени. Так, через 4 мес после ядерных взрывов у атоллов Эниветок и Бикини радиоактивное загрязнение было обнаружено в 2000 км от места взрывов, а через 8 мес — на расстоянии даже 7000 км (см. работу Б. А. Нелепо в [91]). Такое расхождение скоростей переноса изотопов по данным наблюдений и по данным расчетов объясняется в первую очередь пренебрежением зависимостями параметров уравнения переноса (скоростей течений и коэффициентов обмена) от вертикальной координаты. Осреднение этих параметров по всей толще океана приводит к сильному занижению их значений и существенному отличию от значений и, v и K_L в поверхностных слоях океана. Поэтому для оценок реальных скоростей переноса примесей в океане необходимо иметь сведения о трехмерных полях скоростей течений и значений коэффициентов обмена, а также об их изменчивости во времени.

Численный расчет распространения примеси в прибрежной зоне океана с учетом трехмерности поля скорости течений и изкоэффициентов диффузии осуществили Кочергин менчивости и Боковиков [52]. Поле горизонтальных компонентов скорости течений описывалось ими уравнениями динамики с учетом силы Кориолиса и вертикального турбулентного трения. Нестационарное поле температуры воды в свою очередь описывалось уравнением теплопроводности с членом вертикальной теплопроводности. К уравнениям динамики и теплопроводности добавлялись уравнения баланса турбулентной энергии b и ее диссипации є, а получившаяся система уравнений замыкалась соотношением, связывающим коэффициент турбулентной вязкости с величинами b и є. В нестационарном уравнении диффузии примеси учитывались все три адвективных члена и три диффузионных члена с коэффициентами диффузии K_x, K_y и K_z соответственно вдоль осей координат x, y и z, причем коэффициент Kz считался функцией вертикальной координаты г. Учитывался также возможный распад диффундирующей примеси. На поверхности моря задавались касательное трение ветра, температура воды, а потоки турбулентной энергии, диссипации и диффундирующей примеси через свободную поверхность моря полагались равными нулю. На дне моря [с глубиной H(x, y)] считались нулевыми скорости течений, энергия турбулентности, диссипации энергии турбулентности и вертикальный поток примеси, а температура воды задавалась. На твердой боковой границе области (считающейся вертикальной) обращались в нуль нормальный к границе компонент скорости и нормальный компонент потока примеси. На жидкой боковой границе рассматриваемой области задавались значения горизонтальных компонентов скорости течений, а концентрация примеси там считалась нулевой. В начальный момент времени течения в море отсутствовали, температура воды распределялась по известной линейной функции, а концентрация примеси описывалась гладкой функцией, локализованной в окрестности источника примеси (точки с координатами x*, y* и z*). Поскольку коэффициенты

турбулентного обмена в задаче сами являлись искомыми функциями, то в начальный момент времени задавалось некоторое значение коэффициента вертикальной турбулентной вязкости. Коэффициенты вязкости K, температуропроводности K^T и диффузии K^c предполагались при этом пропорциональными друг другу, что выражалось соотношениями $K^T = \alpha_1 K$, $K^c = \alpha_2 K$, где α_1 и α_2 — константы.

Так как считалось, что диффундирующая примесь не оказывает влияния на гидродинамику водоема, то поставленная задача (как и в ранее рассмотренных в настоящем разделе работах) распадалась на две части. Вначале искалось решение для гидротермодинамических характеристик водоема, а затем найденные в ней значения компонентов скоростей течений и коэффициента вертикальной диффузии (как функции координат и времени) подставлялись в уравнение диффузии, которое оставалось при этом линейным относительно концентрации примеси c(x, y, z, t). При численном решении перечисленных задач уравнения и граничные условия приводились к безразмерному виду и гидротермодинамические уравнения решались методом установления, так как все внешние факторы задачи были стационарными. Критерием стационирования решения считалась малость изменения коэффициента вертикальной турбулентной вязкости K_z при последовательных итерациях.

При решении уравнения диффузии вертикальная скорость течения вычислялась в [52] по уравнению неразрывности по данным о горизонтальных компонентах скорости, а значения коэффициентов горизонтальной диффузии выбирались, исходя из масштаба рассматриваемой задачи ($K_{xr}=10^3 \text{ см}^2/\text{с}$, $K_y=10^2 \text{ см}^2/\text{с}$, ось x — вдоль береговой черты, ось y — перпендикулярной к ней). Для лучшей аппроксимации поля концентрации примеси вблизи источника использовался метод «вложенных» сеток, когда наряду с основной сеточной областью рассматривается и сетка с двойным шагом по координатам. Причем в этом случае при первом порядке аппроксимации на второй сетке. Так как источник примеси в диффузионной задаче был взят постоянно действующим (начиная с момента t=0), то и диффузионная задача решалась методом установления.

Численные расчеты уравнения диффузии были проведены в [52] для прибрежного участка гипотетического моря со сложным рельефом дна и береговой черты. Рассматриваемая область имела протяженность 9,35 км вдоль оси x и 5,1 км вдоль перпендикулярной к берегу оси y. Шаг основной сетки по горизонтали равнялся 425 м, шаг по времени — 1,8 · 10³ с, а по глубине море делилось при численном счете на 21 слой. Источник примеси располагался на глубине 27 м. Расчеты были произведены при различных полях ветра, температурной стратификации, рельефе дна и береговой черты. Увеличение скорости ветра (т. е. и скорости течений) приводило к уменьшению концентрации примеси в связи с более быстрым адвективным переносом примеси из района ее сброса. Ведущим фактором, определяющим концентрацию примеси у берега, являлись трехмерные сгонно-нагонные циркуляции вод в береговой зоне моря. Изрезанность береговой линии могла при этом вызывать появление локальных циркуляций и локальных зон повышенных концентраций загрязнения. Пример рассчитанного распределения концентрации примеси в вертикальной плоскости (x, z), проходящей через источник примеси (y=2,55 км), приведен на рис. 4.5. Течение направлено на рисунке слева на-



Рис. 4.5. Результат численного расчета распределения концентрации примеси в вертикальной плоскости (x, z), проходящей через источник (по [52]).

Значение концентрации примеси на изолнниях (в процентах к концентрации примеси в источнике): 1 - 0,1 %; 2 - 0,5 %; 3 - 1 %; 4 - 2 %; 5 - 5 %; 6 - 10 %.

право, чем и обусловлена вытянутость в этом направлении пятна примеси. В результате анализа полученных картин распределения концентрации примеси авторы работы [52] пришли к обоснованному выводу, что при численных расчетах диффузионных задач в зонах океана с резкими перепадами поля скорости или значений коэффициентов диффузии (например, в прибрежной зоне) необходимо использовать схемы повышенного порядка точности. В районах же с плавно меняющимися гидродинамическими характеристиками удовлетворительные результаты дают и счетные схемы первого порядка точности.

Кочергиным и Боковиковым были также проведены численные расчеты по еще более сложной системе уравнений гидротермодинамики и уравнения диффузии [53]. В уравнениях динамики для горизонтальных компонентов скорости наряду с членами вертикальной турбулентной вязкости учитывались и члены с горизонтальной вязкостью. В уравнении теплопроводности были дополнительно учтены члены адвекции и горизонтальной турбулентной теплопроводности. Кроме того, система дополнялась уравнением диффузии соли с членами, аналогичными членам уравнения теплопроводности, а плотность морской воды считалась функцией как температуры, так и солености. Уравнения баланса турбулентной энергии и диссипации турбулентной энергии были аналогичны принятым в работе [52]. Система уравнений гидротермодинамики дополнялась соответствующими граничными условиями для искомых функций. В уравнении диффузии сохранялись все члены, а в граничном условии на дне водоема учитывалась возможность гравитационного оседания примеси. Уравнение диффузии опятьтаки решалось независимо от системы уравнений гидротермодинамики, поскольку примесь, по предположению, не оказывала влияния на гидродинамические и термодинамические характеристики водоема. В этом случае получаемые при решении гидротермодинамических уравнений значения скоростей течений и коэффициента вертикальной диффузии являлись входными параметрами диффузионной задачи. Численное решение уравнений снова проводилось на вложенных сетках методом установления. Решение искалось для той же области, что и в работе [52] при учащенном вертикальном шаге сетки в верхнем слое моря. Анализ полученных картин распределений концентрации примеси при различных значениях входящих параметров показал, что, кроме скорости течения и значений коэффициентов диффузии, важными факторами являются рельеф дна и форма береговой черты. Гравитационное оседание примеси становится существенным, лишь когда скорость оседания по порядку величины сравнивается с типичными вертикальными скоростями течений в рассматриваемом районе. В связи с этими выводами делается заключение, что для адекватного расчета поведения примеси в океане необходимы предварительные сведения о ветре, рельефе дна, свойствах примеси и характеристиках источников загрязнения. Пример рассчитанного в [53] горизонтального распределения концентрации примеси от локализованного постоянно действующего источника, расположенного на глубине 27 м, приведен на рис. 4.6.

Совместная система уравнений гидротермодинамики и диффузии примеси с более обоснованными условиями замыкания системы была предложена и проанализирована в работах [57] и [86]. Уравнения динамики для горизонтальных компонентов скорости и и v, переноса тепла и соли записывались в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Omega v = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right); \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega u = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right); \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^T \frac{\partial T}{\partial z} \right) - u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y}; \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^S \frac{\partial S}{\partial z} \right) - u \frac{\partial S}{\partial x} - v \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad (4.16)$$

а плотность воды ρ предполагалась линейной функцией T и S: $\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - 27) + \beta (S - 36)].$ (4.17) В этих выражениях T — температура воды в градусах Цельсия, S — соленость в промилле, Ω — параметр Кориолиса, ρ — плотность воды, ρ_0 — стандартная плотность, K_z — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости, K_z^T и K_z^S — турбулентные коэффициенты вертикальной температуропроводности и диффузии соли соответственно, α и β — коэффициенты термического и соленостного расширения морской воды.



Рис. 4.6. Результат численного расчета распределения концентрации примеси в горизонтальной плоскости (*x*, *y*) на глубине 27 м, где расположен постоянно действующий точечный источник примеси (по [53]).

Цифры на нзолинин концентрации примеси — в процентах к концентрации примеси в источнике.

Уравнения (4.13)—(4.17) дополнялись уравнениями баланса энергии турбулентности *b* и меры температурных неоднородностей θ:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = K_z \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^b \frac{\partial b}{\partial z} \right) - \varepsilon - B; \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K_z^T \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \varepsilon_T, \qquad (4.19)$$

где K_z^b и K_z^θ турбулентные коэффициенты вертикального переноса энергии турбулентности и меры температурных неоднородностей; ε — скорость диссипации турбулентной энергии; ε_T — скорость диссипации температурных неоднородностей; B — поток плавучести.

Далее для замыкания уравнений (4.13)—(4.19) использовались следующие выражения:

$$K_z = l\sqrt{b}; \tag{4.20}$$

$$\varepsilon = a_{\varepsilon} b^{3/2} / l; \qquad (4.21)$$

$$\varepsilon_T = \lambda (\text{Ri}) \cdot 6\chi (\partial T/\partial z)^2;$$
 (4.22)

$$B = g \alpha K_z^T \partial T / \partial z + g \beta K_z^S \partial S / \partial z; \qquad (4.23)$$

$$l^{2} = b/[\varphi(\text{Ri}) N^{2}];$$
 (4.24)

$$Ri = N^2 / [(\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2]; \qquad (4.25)$$

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \qquad (4.26)$$

где l — масштаб турбулентности; Ri — число Ричардсона; N — частота Вяйсяля — Брента; χ — коэффициент молекулярной температуропроводности; λ (Ri), φ (Ri) и коэффициент α_{ε} — некоторые функции числа Ri. Предполагалось также, что и отношения турбулентных коэффициентов обмена разными субстанциями являются функциями числа Ричардсона:

$$K_z^T/K_z = a_T (\text{Ri}); \quad K_z^S/K_z = a_S (\text{Ri}); \quad K_z^b/K_z = a_b (\text{Ri});$$

$$K_z^\theta/K_z = a_\theta (\text{Ri}); \quad K_z^c/K_z = a_c (\text{Ri}), \quad (4.27)$$

где K_z^c — коэффициент вертикальной турбулентной диффузии примеси.

По-видимому, с достаточной степенью общности все введенные в системе (4.13)—(4.27) функции от Ri могут считаться степенными, но, вообще говоря, с различными показателями степени для каждой из функций. При задании в системе (4.13)—(4.27) функций от Ri, а также физических констант она становится замкнутой относительно 19 неизвестных: $u, v, T, S, \rho, b, \theta, K_z$, $K_z^T, K_z^S, K_z^b, K_z^\theta, K_z^c \varepsilon, \varepsilon_T, B, l, Ri и N. При соответствующих$ граничных и начальных условиях система может быть решена темили иным способом.

Если считать снова, что вносимая в океан примесь не оказывает заметного влияния на его гидротермодинамические характеристики, то уравнение диффузии примеси вида (1.26) будет дополнительным к системе (4.13) — (4.27), в связи с чем оно может решаться независимо после решения системы (4.13)-(4.27) с использованием полученных в ней значений компонентов скорости и коэффициента вертикальной турбулентной диффузии. Естественно, что система уравнений гидротермодинамики (4.13) — (4.27) может быть обобщена и на трехмерный случай с учетом членов вертикальной адвекции и горизонтального переноса рассматриваемых в системе субстанций. Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена, однако, в этой системе не определяются, а задаются априорно из побочных соображений. Аналогичным образом необходимо и задать значения коэффициентов горизонтальной диффузии в диффузионном уравнении. Чаще всего для этого используются масштабные соображения, когда значения коэффициентов K_x^c и K_y^c выбираются, исходя из характерного масштаба рассматриваемого диффузионного явления. Функциональный вид зависимости коэффициентов диффузии от масштаба явления L следует при этом определять в соответствии с изложенными в разделе 1.4 рекомендациями. Если значения коэффициентов K_x^c и K_y^c оценивать по формуле закона «степени —4/3», то для скорости диссипации турбулентной энергии є естественно принимать получаемые при решении системы (4.13)—(4.27) значения.

При любом способе оценки значений коэффициентов турбулентной диффузии при численном решении уравнения диффузии необходимо иметь в виду, что конечно-разностная аппроксимация дифференциального уравнения обусловливает появление некоторых фиктивных потоков примеси, связанных с вариациями полей скорости течений и концентрации примеси с масштабами, меньшими шага сетки. Эти фиктивные («счетные») потоки примеси вдоль каждой из осей координат могут быть записаны

в форме $\overline{u'c'}$, $\overline{v'c'}$ и $\overline{w'c'}$, где штрихи означают временные вариации соответствующего поля, а черта — осреднение по пространственно-временному интервалу расчетной сетки. При обычном полуэмпирическом выражении потоков через градиент поля

и коэффициенты обмена получим $\overline{u'c'} = -a_x \Delta c / \Delta x$, $\overline{v'c'} =$

 $=-a_y \Delta c/\Delta y$ и $w'c' = -a_z \Delta c/\Delta z$, где величины a_x , a_y и a_z носят название счетных коэффициентов диффузии. В ряде случаев эти коэффициенты могут обусловливать при численном расчете достаточно интенсивные диффузионные потоки, поэтому при решении диффузионных задач численными методами всегда желательно предварительно оценивать значения счетных коэффициентов диффузии и сравнивать их со значениями коэффициентов диффузии, задаваемых в исходном дифференциальном уравнении. Значения последних должны, вообще говоря, превышать значения величин a_i , так как в противном случае перенос примеси при численном решении будет обусловливаться в основном подсеточными эффектами, зависящими от параметров сетки, а не от физических свойств моделируемого процесса.

В ряде диффузионных задач концентрация примеси может оказаться (особенно вблизи ее источника) достаточно больщой и пренебрегать влиянием примеси на плотность жидкости vже окажется невозможным. В этом случае в уравнение состояния морской воды (4.17) следует добавить член вида ус, где у --- коэффициент, характеризующий изменение плотности воды при соответствующем изменении концентрации примеси. С таким добавлением к соотношению (4.17) вся система уравнений (4.13)-(4.27), (1.26) становится взаимосвязанной и должна решаться одновременно, причем уравнение диффузии в этом случае может стать существенно нелинейным, поскольку коэффициент вертикальной турбулентной диффузии K_z^c теперь будет функцией концентрации с (из-за зависимости K_z от вертикальной плотностной стратификации воды). Подобного рода нелинейность может обусловить ряд интересных эффектов в процессе распространения примеси — в частности, появление четких фронтов на границах диффундирующих пятен или струй примеси. Естественно, что исследование таких эффектов может представить большой интерес для океанологии, однако до настоящего времени нелинейные уравнения диффузии для решения задач о распространении вносимых в океан примесей еще не использовались.

Рассмотренные в предыдущем разделе примеры численных расчетов распространения примеси в океане показывают их широкие возможности для решения различных диффузионных задач в реальных морских условиях. Однако эти методы имеют и некоторые слабые стороны. Трудной задачей при использовании полуэмпирического уравнения диффузии остается определение или выбор значений коэффициентов турбулентной диффузии. Даже при использовании для расчетов сложных совместных систем уравнений типа (4.13) --- (4.27), в которых скорости течений и коэффициенты диффузии определяются, необходимо задать большое число эмпирических функциональных зависимостей и констант, известных далеко не полно. Неявные схемы численного расчета полуэмпирического уравнения диффузии, так же как и аналитические методы его решения, дают отличные от нуля значения концентрации примеси по всей расчетной области сразу же после начала действия источника, что, конечно, нереально. Явная аппроксимация позволяет получать четкую границу диффундирующего пятна примеси, однако положенние этой границы и скорость её перемещения в пространстве определяются в основном выбором пространственных и временных шагов счетной схемы. а не реальными механизмами процесса диффузии. В связи с этими недостатками численных методов, основанных на решении полуэмпирического уравнения диффузии, получили распространение приемы прямого численного анализа движения дискретных частичек (маркеров) в турбулентных потоках. Траектория движения маркера, скорость движения которого не отличается от скорости окружающей его жидкости, определяется, очевидно, системой следующих уравнений:

 $dX/dt = U(X, Y, Z, t) = \bar{u}(X, Y, Z, t) + u'(X, Y, Z, t); (4.28)$ $dY/dt = V(X, Y, Z, t) = \bar{u}(X, Y, Z, t) + v'(X, Y, Z, t); (4.29)$ $dZ/dt = W(X, Y, Z, t) = \bar{w}(X, Y, Z, t) + w'(X, Y, Z, t), (4.30)$

где X, Y и Z — текущие координаты маркера вдоль осей x, y и z; U, V и W — мгновенные значения компонентов скорости движения воды (маркера) вдоль соответствующих осей координат в точке X, Y, Z; \bar{u}, \bar{v} и \bar{w} — осредненные компоненты скорости; u', v' и w' — пульсационные (турбулентные) «добавки» к осредненным скоростям.

При численном решении уравнений (4.28) - (4.30) могут быть использованы схемы различного типа. Например, при схеме 2-го порядка аппроксимации по времени и линейной интерполяции скорости течений между узлами сетки решение уравнения (4.28) [и аналогично уравнений (4.29) и (4.30)] ищется для каждого временного шага n+1 по формуле [39]

$$X^{n+1} = X^n + U^{n+1} \Delta t / \Delta x, \qquad (4.31)$$

235

где
$$U^{n+1} = (U_1 + U_2)/2$$
 и далее:
 $U_1 = U^n [L, M] (1 - S) (1 - S_1) + U^n [L + 1, M] S (1 - S_1) + U^n [L, M + 1] (1 - S) S_1 + U^n [L + 1, M + 1] SS_1;$
 $U_2 = U^{n+1} [P, M] (1 - Q) (1 - S_1) + U^{n+1} [P + 1, M] Q [1 - S_1] + U^{n+1} [P, M + 1] (1 - Q) S_1 + U^{n+1} [P + 1, M + 1] QS_1;$
 $L = \text{ent} (X^n)$: $M = \text{ent} (Y^n);$
 $S = X^n - L; S_1 = Y^n - M;$
 $P_1 = X^n - U^n [L, M] \Delta t / \Delta x, P = \text{ent} (P_1);$

верхний индекс означает номер шага по времени; Δt — значение этого шага; Δx — пространственный шаг сетки, в узлах которой заданы компоненты скорости течения; ent означает целую часть числа.

Осредненные компоненты скорости \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} в (4.28)—(4.30), которые считаются заданными в узлах расчетной сетки, ответственны за адвективный перенос маркера течением. Что же касается пульсационных составляющих u', v' и w', благодаря которым происходит диффузионное «блуждание» маркера, то с их заданием дело обстоит сложнее. Поскольку, по определению. пульсационные скорости являются величинами случайными, то они могут быть описаны не детерминированными выражениями, а какими-либо законами распределений. Наиболее употребительным для этой цели является нормальный закон, которым распрекомпонентов пульсационных скоростей описываются леления в большинстве случаев с достаточной степенью точности. Поскольку для пульсационных компонентов скорости математическое ожидание равно нулю, то нормальные законы их распределений задаются лишь значениями дисперсий распределений (вообще говоря, разных для каждого из компонентов скорости). При предположении о нормальности распределений значений пульсационных компонентов скорости и при заданных значениях дисперсий распределений численный расчет траекторий маркера может осуществляться с помощью датчика случайных чисел. Получаемые с помощью такого датчика для момента времени t=0значения u'. v' и w' прибавляются к величинам \bar{u} , \bar{v} и \bar{w} , после чего по формуле (4.31) (и по аналогичным формулам для координат Y и Z) можно осуществить расчет положения маркера в момент времени **Δt**. Далее с новым набором значений случайных пульсационных скоростей рассчитывается следующий «шаг» траектории маркера и т. д. Естественно, что для имитации действия мгновенного или непрерывного точечного, а также распределенного по пространству источника примеси необходимо предположить, что источник мгновенно или за единицу времени испускает большое число маркеров. В этом случае количество маркеров в единице объема жидкости в некоторый момент времени считается пропорциональным концентрации непрерывно распределенной примеси, которая диффундировала бы в то же время, в том же поле скорости от аналогичного по мощности и по пространственно-временным характеристикам источника. При стационарности осредненного поля скорости расчет для мгновенного точечного источника примеси можно осуществить и другим способом. Предположим, что источник испускает в какой-то момент времени один маркер. Далее осуществим расчет его траектории до интересующего нас момента времени t. После этого повторим расчет для того же маркера, но уже с другими случайными значениями компонентов скорости и', v' и w' для каждого узла расчетной сетки и расчетных моментов времени. После многократного повторения подобного рода расчетов получим картину повторяемости попадания маркера в каждый элементарный расчетный объем пространства. Эта повторяемость при неограниченном возрастании числа испытаний будет стремиться к вероятности попаданий, которую опять-таки можно отождествить с концентрацией примеси при решении обычной диффузионной задачи, о чем более подробно уже говорилось в разделе 1.7.

Если область блужданий маркеров ограничена, то, естественно, возникает необходимость задать граничные условия для движения маркеров на границах области. Если граница является непроницаемой для примеси, диффузия которой моделируется движением маркеров, то граничными условиями будут условия зеркального отражения маркеров от границы. Если траектория движения маркера при очередном расчетном шаге пересекает границу области, то в этом случае маркеру в последующий момент времени следует приписать координаты, зеркально отображенной точки, в которой бы находился маркер в этот момент времени в отсутствие границы. Случай поглощения маркеров границей области соответствует краевому условию нулевой концентрации непрерывно распределенной примеси в обычных диффузионных задачах. При таком краевом условии каждый маркер, пересекший границу области на определенном шаге вычислений, считается «погибшим» и в дальнейших расчетах уже не участвует. Условие постоянства концентрации примеси на границе области может быть смоделировано помещением на границе некоторых источников маркеров, создающих вблизи границы требуемую концентрацию. Приходящие же из внешней области маркеры должны при этом «гибнуть» на границе. Более сложное граничное условие возникает в случае «полупроницаемого» берега водоема. Такое условие, например, может возникнуть в задачах о диффузии пятна нефти, которая частично поглощается берегом, а частично «отражается» от него и снова распространяется в сторону открытого моря. При таком граничном условии должен быть, очевидно, задан коэффициент «отражения» λ, показывающий, какая доля маркеров отражается от берега, а какая поглощается берегом. При численном расчете в программе расчета в этом случае должен существовать алгоритм, «убивающий» каждую λ-ю часть маркеров из попадающих

237

на единичный отрезок береговой черты водоема или на единичную поверхность его дна.

В описанном выше алгоритме численного расчета блужданий маркеров на каждом временном шаге пульсационные скорости задаются датчиком случайных чисел независимо от того, какие значения имели скорости на предыдущем шаге. Такие случайные блуждания частиц, которые не «помнят» своего предыдущего шага, носят название марковских. В турбулентном потоке марковость блужданий может, очевидно, наблюдаться тогда, когда лагранжев масштаб (1.157) меньше временного шага расчетной схемы Δt . Физически это означает, что время жизни турбулентных вихрей в потоке должно быть меньше отрезка Δt . Для крупных вихревых образований в океане такое условие, естественно, может оказаться весьма жестким, однако не надо забывать, что при численном расчете блужданий маркеров пространственный масштаб турбулентных «добавок» в поле скорости задается пространственным шагом расчетной сетки. При малом пространственном масштабе пульсационных скоростей естественно ожидать малые значения времени их «жизни». Поэтому при использовании для решения диффузионных задач методов блуждающих маркеров гипотеза марковости может быть использована при условии весьма детального задания поля осредненных компонентов скорости течений. Если же такое поле известно лишь с большим масштабом осреднения, то для сохранения марковости процесса необходимо увеличивать расчетные шаги Δt , понижая тем самым точность и разрешающую способность счета. Если марковость по той или иной причине все же предположить не удается, то можно использовать более сложные методы зависимых случайных блужданий частиц.

Дисперсия положения маркера в направлении оси x для времен диффузии, меньших лагранжева масштаба, описывается, как показано в разделе 1.7, формулой (1.153) или соответственно формулами (1.154) и (1.155). В эти выражения входит лагранжева корреляционная функция скорости движения маркеров, которую необходимо знать при расчете движения маркеров при их зависимых блужданиях. Приращения координат маркеров ΔX , ΔY и ΔZ за N временных шагов, согласно формулам (4.28)—(4.30), могут быть определены выражениями

$$\Delta_N X = \sum_{i=1}^N \bar{u}_i \,\Delta t + \sum_{i=1}^N u'_i \,\Delta t = \sum_{i=1}^N \Delta \overline{X}_i + \sum_{i=1}^N \Delta x'_i;$$

$$\Delta_N Y = \sum_{i=1}^N \bar{v}_i \,\Delta t + \sum_{i=1}^N v'_i \,\Delta t = \sum_{i=1}^N \Delta \overline{Y}_i + \sum_{i=1}^N \Delta y'_i;$$

$$\Delta_N Z = \sum_{i=1}^N \bar{w}_i \,\Delta t + \sum_{i=1}^N w'_i \,\Delta t = \sum_{i=1}^N \Delta \overline{Z}_i + \sum_{i=1}^N \Delta z'_i \qquad (4.32)$$

или, возводя в квадрат и осредняя:

$$\overline{\Delta_N X^2} = \overline{\left(\sum_{i=1}^N \Delta \overline{X}_i\right)^2} + \overline{\left(\sum_{i=1}^N \Delta x'_i\right)^2};$$

$$\overline{\Delta_N Y^2} = \overline{\left(\sum_{i=1}^N \Delta \overline{Y}_i\right)^2} + \overline{\left(\sum_{i=1}^N \Delta y'_i\right)^2};$$

$$\overline{\Delta_N Z^2} = \overline{\left(\sum_{i=1}^N \Delta Z_i\right)^2} + \overline{\left(\sum_{i=1}^N \Delta z'_i\right)^2},$$
(4.33)

где черта означает статистическое осреднение, а $\Delta \overline{X}_i$ и $\Delta x'_i$ (а также $\Delta \overline{Y}_i$ и $\Delta y'_i$, $\Delta \overline{Z}_i$ и $\Delta z'_i$) считаются некоррелированными между собой.

При независимых блужданиях частиц последние члены в формулах (4.33) превращаются в простые выражения типа (1.159), а при зависимых блужданиях эти члены должны вычисляться по формулам вида (1.153)—(1.155). Не надо забывать, что при этом делаются упрощающие предположения об отсутствии взаимодействия частиц между собой, а также о том, что статистические характеристики среды не зависят от координат. Кроме того, считается, что размеры маркеров не велики и их плотность близка к плотности жидкости, в связи с чем характеристики движения частиц практически не отличаются от характеристик движения жидких молей в соответствующих точках пространства. Очевидно, что последнее предположение оправдывается при моделировании блуждающими частицами диффузии в океане распределенных пассивных индикаторов (например, красителей). Закономерности же движения крупных твердых маркеров (например, льдин), естественно, будут другими, о чем уже более подробно говорилось в разлеле 2.4.

Метод блуждающих частиц позволяет учесть при численных расчетах возможный распад (или «размножение») диффундирующей примеси. Это явление может моделироваться «гибелью» частиц в процессе диффузии. Обычно предполагается, что число «гибнущих» частиц пропорционально их количеству. В этом случае закон распределения вероятности «выживания» частиц *р* будет иметь вид

$$p = e^{-\alpha t}, \tag{4.34}$$

где величина α характеризует время жизни частиц.

Величина а, вообще говоря, может быть в свою очередь функцией времени и координат. В таком случае вероятность выживания маркера зависит от значений а во всех точках траектории маркера, в связи с чем для двух частиц, вышедших из одной точки, но движущихся затем по разным траекториям, вероятность выжить за определенный промежуток времени будет различна. Поэтому в этом случае для каждой частицы необходимо рассчитывать вероятность выживания отдельно по формуле

$$p = \exp\left\{-\int_{0}^{t} \alpha(x, y, z, \tau) d\tau\right\}, \qquad (4.35)$$

где интегрирование при численном счете заменяется на суммирование по формуле

$$\int_{0}^{t} \alpha(x, y, z, \tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} \alpha(x_{i}, y_{i}, z_{i}, i \Delta t) \Delta t. \quad (4.36)$$

При достижении некоторого порогового значения вероятности *р* частица при численном расчете считается погибшей, и она исключается из дальнейшего рассмотрения.

При постоянстве параметра α вероятность выживания частиц не зависит от их траектории, а определяется лишь общим временем пребывания частиц в океане. Поэтому для частиц, одновременно покинувших источник, вероятность выжить будет одинаково меняться со временем, независимо от траекторий частиц. В связи с этим в случае постоянного (или зависящего только от времени, но не от координат) значения α нет необходимости рассчитывать вероятность выживания каждой частицы, а достаточно знать функциональную зависимость вероятности от времени диффузии. Так, если в начальный момент времени в океан выпущено n_0 маркеров, то по истечении времени t их в океане должно остаться

$$n = n_0 \exp\left\{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau\right\}.$$
 (4.37)

Если источник примеси работает непрерывно, то под n_0 в формуле (4.37) следует понимать число частиц, покидающих источник за расчетный интервал времени Δt . Для маркеров, покинувших источник в последующие отрезки времени, число выживших частиц также можно рассчитать по формуле (4.37), но интегрирование, естественно, следует при этом проводить с другого начального момента времени. Все погибшие маркеры в дальнейших расчетах не принимаются во внимание.

Расчет диффузии примесей методом блуждающих частиц был осуществлен для оз. Байкал в 1970 г. Гадибировой и Галкиным [99]. Моделировалось поведение примеси, сбрасываемой промышленным объектом в прибрежную зону озера. Задача решалась в декартовой системе координат с осью x, направленной вдоль береговой черты, осью y, перпендикулярной берегу, и осью z, направленной вниз от поверхности воды. Так как сведений о скорости течений во всем исследуемом районе озера в распоряжении не имелось, то авторами работы было предложено представить поле скорости в виде $u_i = f(t)\varphi_i(x, y, z)$, где f(t) — случайная функция времени, а $\varphi_i(x, y, z)$ — неслучайная функция координат, i=1, 2, 3.

Вид функций $\varphi_i(x, y, z)$ был конкретизирован с использованием предположения о независимости скорости течения от координаты и о равенстве нулю полного потока жидкости через плоскости, параллельные плоскости (zx). Для определения вида реализаций случайной функции f (t) были использованы данные наблюдений за скоростями течений при помощи гидрологической вертушки, установленной на глубине 10 м вблизи источника примеси. Дискретность наблюдений скорости течений равнялась 10 мин, а общая продолжительность измерений достигала 5 сут. В связи с такой дискретностью наблюдений за скоростью течений временной шаг при численном расчете диффузии примеси был также выбран равным 10 мин. Горизонтальное распределение концентрации примеси (в процентах к концентрации сбрасываемой примеси) по истечении 5 сут с начала действия источника приведено на рис. 4.7. Из рисунка видно, что струя сбрасываемых вод вытягивается вдоль берега под действием направленного в эту сторону осредненного течения. В то же время, поскольку амплитуда компонента скорости течения вдоль оси испытывала вариации, то и в струе заметны псевдопериодические структуры. Интересно, что диффузия примеси в струе имела анизотропный характер. Подсчет эффективных коэффициентов диффузии по конечным значениям координат частиц, например, дал следующие числа: К_x= $=2,75\cdot10^6$ см²/с, $K_v=3,7\cdot10^3$ см²/с, $K_z=46$ см²/с. Более интенсивный горизонтальный обмен в направлении оси х может быть обусловлен, как уже об этом подробно говорилось в разделе 2.2, как анизотропией крупномасштабной турбулентности в береговой зоне моря, так и влиянием вертикальных сдвигов скорости на эффективный коэффициент горизонтального обмена.

Результаты расчета еще нескольких диффузионных задач методом блуждающих частиц для оз. Байкал приведены в монографии [18]. Одна из задач посвящена сезонной изменчивости распределения примеси, сбрасываемой в озеро. Средние скорости течений и дисперсии пульсационных скоростей задавались в этой функциями с максимумом задаче синусоидальными в ноябре и минимумом в июне. Учитывался также распад примеси в процессе диффузии. Во второй задаче исследовалось формирование облака медленно распадающейся примеси. Оказалось, что в этом случае стационирование загрязненной области происходит лишь по истечении двух лет с начала работы источника примеси. В обеих задачах диффузия оказалась анизотропной, в результате чего облако примеси прижималось к берегу, загрязняя прибрежные районы озера.

Метод блуждающих частиц был применен для расчета диффузии примесей в Каспийском море Журбасом, Мамедовым и Татараевым [47]. Исследовалось поведение примеси, испускаемой непрерывным точечным источником у уреза воды в юго-западном районе Среднего Каспия. Поле осредненных скоростей течений



Рис. 4.7. Распределение концентрации примеси в горизонтальной плоскости после 5 сут действия непрерывного точечного источника (в процентах к первоначальной концентрации). Расчет осуществлен для прибрежного района оз. Байкал методом блуждающих частиц (по работе Гадибировой и Галкина в [100]).

Изолинни последовательно оконтуривают зоны со значениями концентрации: >50, 10-50, 5-10, 1-5, 0,5-1, 0,1-0,5, 0,01-0,1 %.

в рассматриваемой области моря считалось известным, береговая черта аппроксимировалась ломаной линией. Составляющие турбулентных скоростей течений задавались датчиком случайных чисел, распределенных по нормальным законам с известными дисперсиями. Для учета анизотропии турбулентного обмена в приморя среднее квадратическое отклонение брежной зоне для пульсационной скорости вдоль береговой черты σ_x было взято равным 5 см/с, а для пульсаций, перпендикулярных береговой черте, $\sigma_{y} = 10$ см/с. Выбор этих значений для средних квадратических отклонений основывался на имеющихся данных о значениях коэффициентов горизонтальной диффузии в этом районе моря K_x и K_y , которые в свою очередь связывались с величинами σ_x и σ_y соотношениями $K_x = l\sigma_x$ и $K_y = l\sigma_y$, где l — характерный масштаб явления. За величину l при численном расчете принимался пространственный шаг сетки, который был равен 2 милям. На рис. 4.8 приведены картины расположения маркеров через 60 и 240 ч после начала действия источника. Два первых рисунка получены при условии, что на берегу теряется 1/400 часть маркеров, касающихся в процессе диффузии береговой черты. Последняя картина представляет результат расчета при граничном условии «гибели» всех маркеров, достигших берега за 240 ч диффузии. Из рисунков следует, что при расположении источника примеси у уреза воды сильно загрязняются прибрежные воды моря, причем зона загрязнения и его интенсивность существенно зависят от граничного условия задачи. При «гибели» маркеров на береговой черте концентрация примеси в море уменьшается, но, конечно, при этом сильно загрязняются пляжные зоны берега, так как примесь здесь, естественно, накапливается.

Расчет диффузии примеси методом блуждающих частиц для западной части Черного моря был осуществлен Ивановым и Филипповым [36]. Расчет производился по схеме 2-го порядка аппроксимации по времени с линейной интерполяцией скоростей течений между узлами сетки. В схеме учитывался также возможный распад примеси в процессе диффузии. Поле осредненных компонентов скорости в рассматриваемом районе довольно формируется под действием нескольких сложно, так как оно течений и стока р. Дуная. Пульсационные скорости опять-таки предполагались распределенными по нормальным законам с известными дисперсиями. Последние определялись по данным измерений скорости течений с помощью гидрологических вертушек. Ряды наблюдений сглаживались фильтром с временным масштабом 30 мин, что находилось в согласии с пространственным шагом расчетной сетки, равным 5 км. В результате такого анализа значения среднеквадратичных пульсационных скоростей были приняты равными $\sigma_x = 2,4$ см/с и $\sigma_y = 3,3$ см/с для прибрежных зон моря и $\sigma_x = 15$ см/с и $\sigma_y = 15,1$ см/с для мористых районов. Численные расчеты движения маркеров были осуществлены для четырех непрерывно действующих (начиная с момента t=0) источников примеси, три из которых располагались в прибрежной части моря и один — в мористой. Расчет для каждого источника велся по времени до 6 сут, по истечении которых формировались квазистационарные картины распределения примеси. Мощность



Рис. 4.8. Результаты расчета движения маркеров, испускаемых в прибрежной части моря точечным источником, после 60 (а) и 240 (б, в) часов после начала его действия при «гибели» на берегу 1/400 части (а, б) и всех (в) попадающих на берег индикаторов (по работе Журбаса, Мамедова, Татараева в [47]).

каждого источника равнялась 1 маркеру за 30 мин. На береговой черте принимались условия скольжения маркеров вдоль берега.

На рис. 4.9 приведены результаты расчета диффузии примесей от двух источников при временах диффузии 1, 3 и 6 сут. Первый источник располагался в 10 км от береговой черты в зоне вдольберегового течения, второй источник — вблизи береговой черты. От первого источника примесь распространялась в основном вдольтечения, а от второго источника, в районе которого скорость постоянного течения была невелика, пятно примеси формировалось главным образом под действием турбулентных флюктуаций скорости. От этого источника примесь достигала береговой черты, загрязняя прибрежные воды моря. Анализ результатов расчетов по всем четырем источникам примеси показал, что значимые концентрации примеси достигают берега при расположении источников примеси не далее 5 км от береговой черты. При более мористом расположении источников примесь переносится течением, быстро разбавляясь, и берега обычно не достигает. Конечно, эти

выводы относятся, строго говоря, только к рассмотренному району моря, однако они, по всей видимости, остаются справедливыми и для других прибрежных участков морей с гидрологической ситуацией, не сильно отличающейся от рассмотренной.

Приведенные выше примеры расчета диффузии примесей методом блуждающих частиц основывались поля турбулентных на моделях скоростей течений, задаваемых гауссовым законом распределения с известным вторым моментом. Однако такое поле может быть

Рис. 4.9. Рассчитанные методом блуждающих частиц области распространения примеси от двух точечных источников по истечении 1 сут (1), 3 сут (2) и 6 сут (3) после начала их действия (по [36]).

задано и спектральными характеристиками. Такой подход к численному моделированию диффузии примеси в случайном турбулентном поле скорости предложен в работах [65, 132]. Поле скорости предполагалось при этом имеющим спектральное разложение. Все рассматриваемое пространство разбивалось на N частей, и реализация поля скорости в предположении его изотропности, однородности и стационарности записывалась в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N} P_k^{1/2} \left[\boldsymbol{\xi}_k \sin(\boldsymbol{\lambda}_k \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}_k t) + \boldsymbol{\eta}_k \cos(\boldsymbol{\lambda}_k \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}_k t) \right], \quad (4.38)$$

где ξ_k и η_k — векторы, компоненты которых являются независимыми гауссовыми случайными величинами; х и λ_k — точки трех мерного пространства; ω_k — случайные величины, выбираемые независимо от λ_k в заданных интервалах разбиения временной



оси t; P_k — суммарная плотность распределения случайных точек в пространстве; k — номер подпространства; t — время.

Для каждой реализации поля скорости далее по формуле (4.38) рассчитывается траектория движения частицы примеси. Если смоделированы траектории двух независимых частиц, то по ним имеется возможность построить корреляционные функции поля. Если же корреляционная функция или спектр поля заданы, то по ним могут быть определены методом случайных блужданий статистические характеристики поля концентрации примеси и значения коэффициентов турбулентной диффузии.

Знание корреляционной функции поля скорости требуется для расчета диффузии примеси и по методу, использованному Демышевым, Еремеевым, Ивановым и Кнышем [22], а также ранее Саффманом и Тхиебахом (см. ссылки в [22]). В этом методе предполагается, что в выражении для турбулентного потока примеси $\overline{u'_i c'}$ величина c' есть функционал от пульсационной скорости $u'_i (x, t)$. В общем случае при этом поток примеси определяется моментами случайного поля скорости всех порядков. Однако при предположении о квазигауссовости поля ситуация упрощается и выражение для $\overline{u'_i c'}$ принимает вид

$$\overline{u_i'(\mathbf{x}, t)c^4[u_i'(\mathbf{x}, t)]} = -\int_0^t \overline{u_i'(\mathbf{x}, t)u_j'(\mathbf{x}, t')} \frac{\partial \overline{c(\mathbf{x}, t')}}{\partial x_i} dt'. \quad (4.39)$$

В случае $t \gg T_u$, где T_u — лагранжев временной масштаб скорости, соотношение (4.39) переходит в обычное полуэмпирическое выражение для потока примеси с коэффициентом турбулентной диффузии, определяемым формулой (1.156) или (1.160). Расчет горизонтальной диффузии примеси с использованием формулы (4.39) был осуществлен в [22] для районов океана с синоптическими вихревыми образованиями в поле скорости. Шаги по пространству при расчетах брались равными 6,8 мили, а шаг по времени был равен 12 ч. При различных первоначальных положениях пятен примеси относительно синоптических вихрей движение и характер диффузии пятен были неодинаковыми. Находящиеся на периферии вихря пятна часто вовлекались в центральную часть вихря, причем пятно вытягивалось в направлении движения жидкости в вихре. При помещении источника примеси в центральную часть вихря диффузия примеси замедлялась и она долго оставалась в ядре вихря. Если же пятно примеси первоначально располагалось на границе двух вихревых образований, то оно могло быть разорвано на две части, которые затем двигались и диффундировали самостоятельно.

Расчет трехмерной диффузии примеси методом блуждающих частиц в поле синоптических вихрей в океане был осуществлен Демышевым, Еремеевым, Ивановым и Кнышем в работе [23]. Расчет велся по формулам, аналогичным (4.28)—(4.30), но записанным в несколько иной форме:

$$\frac{dX_i}{dt} = \eta_i (\mathbf{x}, t) + g_{ij} (\mathbf{x}, t) f_j (t); \quad X_i |_{t=t_0} = X_i^0, \qquad (4.40)$$
$$i, j = 1, 2, 3,$$

где X_i — координаты случайной траектории частицы примеси; $\eta_i(\mathbf{x}, t)$ и $g_{ij}(\mathbf{x}, t)$ — некоторые детерминированные функции; f(t) — δ -коррелированный гауссов процесс с нулевым средним; X_i^0 — начальные координаты частиц.

Если предположить, что функции η_i и g_{ij} связаны с полем осредненных скоростей \bar{u}_i и коэффициентами турбулентной диффузии K_{ij} соотношениями

$$\eta_{i}(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} g_{il}(\mathbf{x}, t) \partial g_{kl}(\mathbf{x}, t) / \partial x_{k}; \qquad (4.41)$$

$$g_{il}(\mathbf{x}, t) g_{l,j}(\mathbf{x}, t) = K_{ij}(\mathbf{x}, t),$$
 (4.42)

то формула (4.40) будет соответствовать уравнению турбулентной диффузии вида

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} .$$
(4.43)

Для решения уравнений (4.40)—(4.42) необходимо знать поле осредненных скоростей и элементы матрицы g_{ij}. Если же известны значения матрицы коэффициентов диффузии K_{ij}, то значения g могут быть найдены из соотношения

$$g = \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{\lambda_k} \prod_{i \neq k} (K - \lambda_k E)}{\prod_{i=k} (\lambda_i - \lambda_k)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.44)$$

где E — единичная матрица; λ — характеристические числа матрицы K.

Для квазигауссова поля пульсационных скоростей течений и при малых значениях масштаба корреляции коэффициенты диффузии можно оценить по формулам

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \overline{u_i'(\mathbf{x}, t) u_j'(\mathbf{x}, t)} \Delta t.$$
(4.45)

Численный расчет с использованием приведенных выше соотношений был проведен в [23] с шагом по времени 1 сут при числе диффундирующих частиц в ансамбле, равном 5000. Скорости частиц, находящихся между узлами сетки (с шагом по горизонтальным осям 4,25 мили и по вертикали 10 м), рассчитывались с помощью параболической интерполяции. Частицы, попадающие на границу рассматриваемой области, из дальнейшего расчета исключались. Для определения поля концентрации примеси масса каждой частицы с помощью трилинейной интерполяции распределялась между восьмью ближайшими узлами сетки. Далее сумма вкладов всех частиц в данный узел сетки делилась на объем пространственной ячейки сетки. Получаемая величина и принималась



за концентрацию примеси в рассматриваемой ячейке.

Численные расчеты диффузии пятен примеси в [23] снова были осуществлены при различных начальных пятен положениях относительно синоптических вихревых образований в океане. Оказалось, что пятно захватывается вихрем при определенном соотношении между расстоянием пятна от интенсивноцентра вихря, стью горизонтальной диффузии и гидродинамическими параметрами вихря. В большинстве случаев при значении эффективного коэффициента горизонтальной диффузии 105 см²/с захват пятна происходил при примеси центра удалении его OT вихря не более чем на 65-70 миль. При больших расстояниях от центра вихря

Рис. 4.10. Результаты численного расчета трансформации пятна примеси, расположенного на периферии синоптического вихря, по истечении 10 (а), 20 (б) и 30 (е) суток с начала диффузии (по [23]).

или при меньших значениях коэффициента диффузии пятно примеси не захватывалось вихрем, а начинало удаляться от него. На начальных стадиях захвата пятно примеси, как правило, изгибается, охватывая центральную часть вихря. В дальнейшем примесь может заполнить центр вихревого образования и сравнительно долго оставаться там, слабо диффундируя. Пример начальных стадий вовлечения пятна примеси в синоптический вихрь приведен на рис. 4.10. Начальное распределение примеси задавалось

в этом примере в форме диска, расположенного на глубине 400 м, эффективный коэффициент горизонтальной диффузии брался равным 10⁴ см²/с, а коэффициент вертикальной диффузии 1 см²/с. По истечении 10 сут с начала диффузии у пятна уже обнаруживался характерный изгиб в направлении движения воды в синоптическом вихре. На последующих стадиях диффузии из-за неоднородности поля скорости течений в пятне появлялось несколько локализованных максимумов концентрации примеси, которые начинали втягиваться в центральную часть вихря. При первоначальном положении пятна примеси между двумя синоптическими вихревыми образованиями в трехмерном случае, так же как в двумерном, может наблюдаться либо полный разрыв И пятна, либо образование двух максимумов концентрации примеси в пятне, которое остается все же единым и не делится на две части.

При использовании для решения диффузионных задач метода блуждающих частиц часто возникают вопросы, на которые необходимо получить ответы до начала численных расчетов. В частности, исходя из необходимой точности определения концентрации примеси в том или ином районе моря, следует оценить количество выпускаемых источником за единицу времени маркеров. С этим же вопросом связан и выбор пространственно-временных шагов расчетной сетки. Действительно, если в каждом элементарном элементе сетки будет находиться небольшое число маркеров, то точность определения концентрации примеси с будет также невелика. В первом приближении можно считать, что относительная точность оценки с равна отношению корня квадратного из числа маркеров в ячейке к самому этому числу. Поэтому при 10 %-ной точности оценки с в ячейке должно находиться около 100 маркеров, а при 1 %-ной точности — уже до 10000 маркеров. Весьма важно также перед началом расчета убедиться, что выполняются используемые гипотезы, например гипотеза о независимости статистических характеристик движения частиц (моментов распределений скоростей их движения) от пространственных координат в рассматриваемой области пространства, а также от времени диффузии. Неообходимо также сопоставить временной масштаб Лагранжа анализируемого течения с выбранным пространственновременным шагом расчетной сетки. Без такого сопоставления будет сложно судить о зависимости или независимости последовательных блужданий маркеров в потоке.

В методе блуждающих частиц обычно предполагается, что турбулентные «добавки» к приращению координат частиц в формулах (4.32) носят случайный характер и задаются своими статистическими характеристиками. Однако недавно было показано (см. [147]), что хаотическое блуждание частиц может быть смоделировано и специальным образом подобранными детерминированными функциями, например можно положить

$$X_{t+1} = X_t + \mu \sin X_t, \qquad (4.46).$$

где X_t — координата частицы в момент времени t; X_{t+1} — координата в последующий момент времени t+1; t принимает значения 0, 1, 2, ...

При значении параметра μ , близкого к 4,6, модель (4.46) обеспечивает движение частицы хаотического типа, причем дисперсия координаты частицы линейно возрастает с увеличением времени диффузии t. Оказывается, что для X_{t+1} могут быть подобраны выражения, которые обеспечивают и степенной рост дисперсии вида t^m с $1 < m < \infty$. Так, в [147] для X_{t+1} предложено более общее выражение вида

$$X_{t+1} = X_t + a |X_t|^p \sin X_t, \qquad (4.47)$$

где а и p — определяющие параметры, причем $0 \le p \le 1$. При p = 0формула (4.47) переходит в (4.46), а при p > 0 множитель перед сииусом увеличивает «шаги» частицы при ее блужданиях. Это приводит к тому, что в зависимости от значения p дисперсия координаты частицы возрастает по степенному закону вида t^m , где показатель степени m может принимать значения от единицы при p=0 и до бесконечности при приближении p к 1. Значения параметра a при этом должны быть заключены в определенном интервале, вне которого диффузионный характер движения частицы нарушается.

Метод блуждающих частиц, как мы видели, основан на лагранжевом подходе к исследованию движения диффундирующих частиц. В этом методе, как известно, изучаются характеристики движущихся частичек жидкости, в то время как в методе Эйлера исследуются характеристики жидкой среды в фиксированных точках пространства. В методе Лагранжа каждая жидкая частица должна быть некоторым образом «помечена», что и дает возможность прослеживать эволюцию ее движения с течением времени. Обычно в качестве таких «меток» используются декартовы координаты частицы $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c$ в некоторый начальный момент времени t_0 . В этом случае координаты последующих положений частицы x, y, z в произвольный момент времени t будут функциями a, b, c и t:

$$x = f_1(a, b, c, t); y = f_2(a, b, c, t); z = f_3(a, b, c, t), (4.48)$$

причем функции f_1 , f_2 , f_3 при $t = t_0$, очевидно, тождественно обращаются в a, b, c.

Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера может быть осуществлен путем решения уравнений (4.48) относительно *a*, *b*, *c*. Такое решение должно быть однозначным и может быть записано в виде

$$a = \varphi_1(x, y, z, t); \quad b = \varphi_2(x, y, z, t); \quad c = \varphi_3(x, y, z, t), \quad (4.49)$$

где ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 — некоторые функции.

Из взаимной разрешимости уравнений (4.48) и (4.49) должно следовать, что функциональные определители

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$
(4.50)

И

$$J_{1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial b}{\partial z} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix}$$
(4.51)

не обращаются тождественно в нуль или бесконечность.

В переменных Лагранжа могут быть записаны основные соотношения гидродинамики, в частности уравнение неразрывности и уравнения движения. Например, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа имеет вид

$$J = 1.$$
 (4.52)

Имеется возможность записать в переменных Лагранжа и уравнение диффузии примеси в движущейся жидкости. При этом адвективные члены в эйлеровском уравнении диффузии исчезают в уравнении, записанном в форме Лагранжа, что вполне естественно, так как в последнем случае система отсчета как бы движется вместе с перемещающимися частицами. Однако в качестве платы за такое упрощение уравнения диффузии в нем появляются диффузионные члены, значительно более сложные, чем в уравнении диффузии Эйлера. Уравнение диффузии в форме Лагранжа для мгновенных значений концентраций и скорости движений жидкости в двумерном потоке было предложено Корсином [120]. Более общий вывод уравнения диффузии в форме Лагранжа для двумерного течения был осуществлен Окубо с соавторами [149]. Исходными являлось двумерное уравнение молекулярной диффузии в обычной эйлеровской форме:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i c) = D_{ij} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}; \quad i, j = 1, 2,$$
(4.53)

где c — концентрация примеси, зависящая от двух координат и времени; u_i — компоненты мгновенной скорости течения; D_{ij} тензор коэффициентов молекулярной диффузии; по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Так как рассматривается лишь двумерное течение, то поле скорости в (4.53) может быть и дивергентно, и конвергентно, по-

этому в общем случае $\partial u_i / \partial x_i \neq 0$. Уравнение (4.53), очевидно, может быть переписано в форме

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)c = D_{ij} \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j}.$$
 (4.54)

Для преобразования (4.54) в лагранжеву форму запишем тождественное соотношение для выражений концентрации примеси в форме Эйлера с и в форме Лагранжа Г:

$$c(\mathbf{x}, t) \equiv \Gamma(\mathbf{x}_0, t), \qquad (4.55)$$

где х — двумерный вектор переменных Эйлера (с компонентами x и y), а x_0 — двумерный вектор переменных Лагранжа (с компонентами x_0 и y_0 , в дальнейшем для удобства обозначаемых через a и b), t — время.

Так как координатная система Лагранжа следует за движущимися жидкими частицами (частицами примеси), то

$$\partial \mathbf{x} (\mathbf{x}_0, t) / \partial t = \mathbf{u} (\mathbf{x} (\mathbf{x}_0, t), t)$$
(4.56)

при начальном условии

$$\mathbf{x} (\mathbf{x}_0, \ 0) = \mathbf{x}_0. \tag{4.57}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right)_{nar} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i}\right)_{sin}.$$
(4.58)

Используем далее формулы преобразования координат

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial}{\partial y};$$
(4.59)

$$\frac{\partial}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial}{\partial y}$$

или, решая (4.59) относительно $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a}\right)^{-1} \left(\frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a}\right)^{-1} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a}\right), \quad (4.60)$$

где для удобства написания в дальнейшем будут использованы обозначения

$$J = \left(\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial a}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} = [x, y]; \quad (4.61)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, -\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial a}\right) = [x, \bullet]; \qquad (4.62)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}\right)=[y, \bullet].$$
(4.63)

252

В этих обозначениях формулы (4.60) запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} = -J^{-1}[y, \bullet];$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = J^{-1}[x, \bullet]. \tag{4.64}$$

Так как

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right), \qquad (4.65)$$

то, используя выражения (4.64), получим:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = J^{-1} \left[\frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] + J^{-1} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] = J^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a} \right) = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial t}$$
(4.66)
^{HJIH}

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} (\ln J). \tag{4.67}$$

Повторное применение операции, приведшей к формулам (4.64), позволяет получить выражения и для вторых производных вида

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} = J^{-1}[y, \bullet] \{J^{-1}[y, \bullet]\} = J^{-1}\{y, J^{-1}[y, \bullet]\};$$

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x \partial y} = -J^{-1}[x, \bullet] \{J^{-1}[y, \bullet]\} = -J^{-1}\{x, J^{-1}[y, \bullet]\};$$

$$\frac{\partial^{2}}{\partial y \partial x} = -J^{-1}[y, \bullet] \{J^{-1}[x, \bullet]\} = -J^{-1}\{y, J^{-1}[x, \bullet]\};$$

$$\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} = J^{-1}[x, \bullet] \{J^{-1}[x, \bullet]\} = J^{-1}\{x, J^{-1}[x, \bullet]\}, \quad (4.68)$$

где квадратные скобки имеют смысл, определенный выражениями (4.61)—(4.63).

Е́сли тепе́рь подставить соотношения (4.55), (4.58), (4.66) и (4.68) в эйлеровское уравнение диффузии (4.54), то получим уравнение диффузии в форме Лагранжа:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + J^{-1} \frac{\partial J}{\partial t} \Gamma = J^{-1} \{ D_{11}[y, J^{-1}[y, \bullet]] - D_{12}[x, J^{-1}[y, \bullet]] - D_{21}[y, J^{-1}[x, \bullet]] + D_{22}[x, J^{-1}[x, \bullet]] \} \Gamma.$$
(4.69)

Если умножить (4.69) на *J*, то уравнение (4.69) примет более компактный вид:

$$\partial (J \cdot \Gamma) / \partial t = \{ D_{11} [y, J^{-1} [y, \bullet]] - D_{12} [x, J^{-1} [y, \bullet]] - D_{21} [y, J^{-1} [x, \bullet]] + D_{22} [x, J^{-1} [x, \bullet]] \} \Gamma.$$
(4.70)

Уравнение (4.70) описывает эволюцию распределения концентрации примеси в переменных Лагранжа для случаев молекулярной диффузии. Для учета турбулентного характера движения
океанских вод следует, вообще говоря, осреднить уравнение (4.70) и принять те или иные гипотезы для замыкания полученного при этом выражения. Однако в связи с большой сложностью такой процедуры можно применить не совсем строгий; но более простой прием, а именно предположить, что все приведенные выше преобразования относятся к уже осредненному уравнению переноса типа (4.54), где под значениями с и u_i должны пониматься осредненные величины, а под тензором коэффициентов обмена D_{ij} тензор коэффициентов турбулентной диффузии K_{ij} . В таком случае весь вывод уравнения (4.70) остается в силе, но

под Γ и *J* в нем следует понимать среднюю концентрацию $\overline{\Gamma}$ и средний функциональный определитель *J*, т. е. уравнение диффузии (4.70) в этом случае будет иметь вид [149]

$$\frac{\partial \left(\overline{J} \cdot \overline{\Gamma}\right)}{\partial t} = \left\{ K_{11}\left[\overline{y}, \ \overline{J}^{-1}\left[\overline{y}, \ \bullet\right]\right] - K_{12}\left[\overline{x}, \ \overline{J}^{-1}\left[\overline{y}, \ \bullet\right]\right] - K_{21}\left[\overline{y}, \ \overline{J}^{-1}\left[\overline{x}, \ \bullet\right]\right] + K_{22}\left[\overline{x}, \ \overline{J}^{-1}\left[\overline{x}, \ \bullet\right]\right] \right\} \Gamma.$$
(4.71)

Для рещения уравнения (4.71) к нему, естественно, необходимо добавить начальные и граничные условия для функции $\overline{\Gamma}$.

В случае отсутствия диффузии ($K_{ij}=0$) уравнение (4.71) имеет, как нетрудно видеть, простое решение:

$$\overline{\Gamma}(\overline{a}, \overline{b}, t) = \overline{J}^{-1}(\overline{a}, \overline{b}, t) \overline{\Gamma}(\overline{a}, \overline{b}, 0).$$
(4.72)

Хотя уравнение диффузии (4.71) линейно относительно функции $\overline{\Gamma}$, однако в случае произвольной формы деформации поля скоростей аналитического решения уравнения, по-видимому, не существует. Однако при некоторых упрощающих предположениях о поле скорости такое решение может быть получено. В частности, если предположить, как это и было сделано в [149], что передвижение маркеров в потоке слагается из крупномасштабных движений и мелкомасштабных флюктуаций, не коррелирующих между собой, то деформации поля скорости dx/da, dx/db, dy/daи dy/db можно считать функциями только времени, но не зависящими от a и b. Не зависящими от a и b будут в этом случае и коэффициенты диффузии K_{ij} . При таких предположениях уравнение (4.71) перепишется в виде (черточку над J и Γ в дальнейщем опускаем)

$$\frac{\partial (I\Gamma)}{\partial t} = J^{-2} \Big[\{K_{11}e_{22}^2 - (K_{12} + K_{21})e_{12}e_{22} + K_{22}e_{12}^2\} \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a^2} +$$

$$+ \{-2K_{11}e_{21}e_{22} + (K_{12} + K_{21})(e_{11}e_{22} + e_{21}e_{21}) - 2K_{22}e_{11}e_{12}\} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a \, \partial b} +$$

+ {
$$K_{11}e_{21}^2 - (K_{12} + K_{21})e_{11}e_{21} + K_{22}e_{11}^2$$
} $\frac{\partial^2\Gamma}{\partial b^2}$], (4.73)

где введены обозначения $\partial x/\partial a = e_{11}$, $\partial x/\partial b = e_{12}$, $\partial y/\partial a = e_{21}$, $\partial y/\partial b = e_{22}$.

Если далее сделать преобразование Фурье, от функции $\Gamma(a, b, t)$ по формуле

$$\widetilde{\Gamma}(\lambda, \mu, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(a, b, t) \exp[i(a\lambda + b\mu)] da db \qquad (4.74)$$

и применить это преобразование к (4.73), то решение преобразованного таким образом уравнения (при условии равенства нулю концентрации примеси на бесконечности) будет иметь вид

$$\widetilde{\Gamma}(\lambda, \mu, t) = \widetilde{\Gamma}(\lambda, \mu, 0) J^{-1}(t) \exp\left[-\{B_1(t)\lambda^2 + B_2(t)\lambda\mu + B_3(t)\mu^2\}\right],$$
(4.75)

где

$$B_{1}(t) = \int_{0}^{t} \{K_{11}e_{22}^{2} - (K_{12} + K_{21})e_{12}e_{22} + K_{22}e_{12}^{2}\} J^{-2} dt';$$

$$B_{2}(t) = -\int_{0}^{t} \{2K_{11}e_{21}e_{22} - (K_{12} + K_{21})(e_{11}e_{22} + e_{12}e_{21}) + 2K_{22}e_{11}e_{12}\} J^{-2} dt';$$

$$B_{3}(t) = \int_{0}^{t} \{K_{11}e_{21}^{2} - (K_{12} + K_{21})e_{11}e_{21} + K_{22}e_{11}^{2}\} J^{-2} dt'$$

В формуле (4.75) величина $J^{-1} \exp \left[-\{B_1\lambda^2 + B_2\lambda\mu + B_3\mu^2\}\right]$ представляет собой преобразование Фурье от функции Грина $\Gamma_g(a, b, t)$, т. е. от решения уравнения (4.73) для мгновенного точечного источника примеси. Обратное преобразование Фурье от функции $\widetilde{\Gamma}(\lambda, \mu, t)$ можно осуществить по формуле

$$\Gamma(a, b, t) \equiv (4\pi^2)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(\lambda, \mu, t) \exp\left[-i(a\lambda + b\mu)\right] d\lambda d\mu.$$
 (4.76)

Если применить обратное преобразование Фурье к функции Грина $\Gamma_g(\lambda, \mu, t)$, то получим:

$$\Gamma_g(a, b, t) = \frac{1}{4\pi J \left(B_1 B_3 - B_2^2 / 4 \right)} \exp\left\{ -\frac{B_3 a^2 - B_2 a b + B_1 b^2}{4 \left(B_1 B_3 - B_2^2 / 4 \right)} \right\}.$$
 (4.77)

При произвольном виде начального распределения концентрации примеси $\Gamma(a, b, 0)$ решение уравнения (4.73) запишется в форме

$$\Gamma(a, b, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(a', b', 0) \Gamma_g(a - a', b - b', t) da' db'.$$
(4.78)

Конкретизировать выражение (4.78) можно, например, в случае, когда начальное распределение концентрации имеет гауссовый вид

$$\Gamma(a, b, 0) = \frac{N}{2\pi\sigma_a\sigma_b(1-\rho_0^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\left\{\frac{a^2}{\sigma_a^2}-\frac{2\rho_0\frac{ab}{\sigma_a\sigma_b}+\frac{b^2}{\sigma_b^2}}\right\}\right],$$
(4.79)

где N — общее число диффундирующих маркеров; σ_a и σ_b — начальные дисперсии положения маркеров в направлениях a и b соответственно; ρ_0 — коэффициент корреляции первоначального распределения маркеров.

Подставляя теперь (4.79) в (4.78), получим решение в виде $\Gamma(a, b, t) = \frac{N}{4\pi J \left(R_1 R_3 - R_2^2 / 4 \right)} \exp \left\{ -\frac{R_3 a^2 - R_2 a b + R_1 b^2}{4 \left(R_1 R_3 - R_4^2 / 4 \right)} \right\}, \quad (4.80)$

$$R_1(t) = \sigma_a^2/2 + B_1(t); \quad R_2(t) = \rho_0 \sigma_a \sigma_b + B_2(t); \quad R_3(t) = \sigma_b^2/2 + B_3(t).$$
(4.81)

Величины $2R_1$ и $2R_3$ представляют собой полные дисперсии смещений маркеров в направлениях a и b, $2R_2$ — суммарную дисперсию, а $2B_i$ (i=1, 2, 3) — вклады в дисперсии, обусловленные совместным действием деформации поля скорости и турбулентной диффузии.

Решение (4.80) нз лагранжевой формы может быть преобразовано в эйлерову форму с помощью обратных преобразований координат вида

$$x = e_{11}a + e_{12}b; \quad y = e_{21}a + e_{22}b$$
 (4.82)

или

$$a = e_{11}^{-1}x + e_{12}^{-1}y; \quad b = e_{21}^{-1}x + e_{22}^{-1}y.$$
 (4.83)

Применяя эти преобразования к (4.80), получим выражение для концентрации примеси в эйлеровом представлении:

$$(x, y, t) = \frac{N}{4\pi J(t) \left(R_1 R_3 - R_2^2/4\right)} \exp\left\{-\frac{Q_1 x^2 - Q_2 x y + Q_3 y^2}{4 J^2 \left(R_1 R_3 - R_2^2/4\right)}\right\}, (4.84)$$

где

$$Q_{1} = e_{21}^{2}R_{1} + e_{21}e_{22}R_{2} + e_{22}^{2}R_{3};$$

$$Q_{2} = 2e_{11}e_{21}R_{1} + (e_{11}e_{22} + e_{12}e_{21})R_{2} + 2e_{12}e_{22}R_{3};$$

$$Q_{3} = e_{11}^{2}R_{1} + e_{11}e_{12}R_{2} + e_{12}^{2}R_{3},$$
(4.85)

а функции $R_{l}(t)$ задаются выражениями (4.81).

Анализ решения (4.85) показывает, что если начальное распределение концентрации примеси было гауссовым, то в рассматриваемом случае оно при любых значениях коэффициентов диффузии и величин $e_{il}(t)$ остается гауссовым и в последующие моменты времени. Изолинии концентрации примеси имеют вид эллипсов, оси которых могут поворачиваться с течением времени.

Решение уравнения диффузии в форме Лагранжа для более сложных полей скорости и начальных распределений концентрации диффундирующих маркеров получить в аналитической форме более затруднительно. Однако исследования диффузионных процессов в переменных Лагранжа, несмотря на их сложность, безусловно, будут усиленно развиваться, так как они позволяют получать многие интересные и важные закономерности поведения примесей в движущихся жидкостях.

4.3. Расчеты полей концентрации примеси от сбросных устройств

Изложенные в предыдущих разделах закономерности поведения примесей в океане, а также методы расчета диффузии пятен и струй примеси, естественно, могут найти непосредственное применение для определения концентрации примесей от сбросов промышленных и бытовых отходов в прибрежные районы морей и океанов. Однако расчеты концентраций примесей от сбросных устройств имеют ряд специфических особенностей, некоторые из которых и будут обсуждены в настоящем разделе.

Прежде чем приступать к расчету концентраций загрязняющих веществ, сбрасываемых в морскую среду, следует установить, какое количество данного вещества и какие его концентрации можно считать безопасными для водопользователей и обитателей моря. При ответе на этот вопрос целесообразно использовать понятие ассимиляционной емкости океана или его частей A_{mi}. Под этим понятием, введенным в работе [37], подразумевается такое количество загрязняющего вещества і (во всем рассматриваемом районе или в единице объема морской воды), которое за единицу времени может быть накоплено, разрушено, трансформировано (под влиянием биологических и химических факторов) и выведено за счет седиментации, диффузии или другого процесса за пределы рассматриваемого объема моря без нарушения нормального функционирования существующей в этом объеме экосистемы т. Ассимиляционная емкость зависит от многих факторов: динамического состояния водной массы, структуры особенностей функционирования биологической И системы. свойств загрязняющих веществ. Из факторов, обеспечивающих «самоочищение» водной массы, в [37] указываются: гидродинамический перенос примеси, ее микробиологическое окисление. биологическая трансформация, биохимическое окисление, химические и физические превращения, седиментация абиогенных частиц, биоседиментация. Основными из этих процессов являются,

по-видимому, гидродинамические явления, микробиологическое окисление и биоседиментация.

При оценке ассимиляционной емкости водной массы A_{mi} важно знать виды организмов в экосистеме, наиболее чувствительные к загрязнению среды данным веществом. По этим наиболее уязвимым звеньям экосистемы должны и определяться предельно допустимые концентрации c_{0i} данного вещества i (или суммы веществ) в среде, а также коэффициент кратности k_i количества вещества (в единице объема), которое может быть переработано данной экосистемой m или выведено из объема различными процессами за принятое время осреднения, т. е.

$$A_{mi} = c_{oi}k_i V, \qquad (4.86)$$

где V — объем рассматриваемой водной массы.

Может существовать два подхода к выработке требований к охране водоема от загрязнений. При первом подходе в водоеме не разрешается образования даже ограниченных зон с концентрациями загрязнений, превышающими допустимые нормы. При втором подходе допускается существование ограниченных загрязненных зон вблизи мест выпуска сточных вод, где качество воды может не удовлетворять всем эксплуатационным требованиям. Естественно, что в первом случае требуется сооружение очистных сооружений, доводящих характеристики сточных вод до безопасных для обитателей водоема и водопользователей норм. Во втором случае очистка вод может быть не столь глубокой, что, естественно, приводит к существенному удешевлению строительства и эксплуатации очистных сооружений.

Выбор допустимых концентраций вредных веществ в водах водоема представляет собой весьма сложную задачу. Как уже указывалось выше, определение таких концентраций должно базироваться на наиболее чувствительных к данному веществу организмах существующего в водоеме биоценоза. Причем следует учитывать, что вредное воздействие данного вещества может проявиться через длительный период после его контакта с оргаиизмом. Вещество может воздействовать и на генетический аппарат организма, последствия чего обнаружатся лишь в последующих поколениях организмов. Обитатели морской среды иногда могут без серьезных последствий переносить кратковременные воздействия вредных веществ, но при длительных контактах даже с малыми концентрациями примеси в организмах возможны патологические изменения. Воздействие одного из вредных веществ может сенсибилизировать организм к воздействию другого вещества, поэтому в общем случае реакции организма на сумму вредных инградиентов нельзя считать независимыми. Все эти явления приводят к необходимости учитывать при разработке допустимых норм сброса не только допустимую концентрацию каждого из входящих в сточные воды вредных веществ (как это и делается в большинстве случаев), но и времена существования в водной массе тех или иных концентраций этого вещества. Если

величиной ΔB_i обозначить количественную характеристику сдвига физиологических процессов в организме под действием вещества *i*, то критерий качества воды можно записать в виде (см. работу Айтсама, Вельнера и Пааля в [62])

$$\Delta B_i < \Delta B_i^0 = f_1(c_i, t_i), \qquad (4.87)$$

где c_i — концентрация вещества i; t_i — время влияния данной концентрации вещества на организм; ΔB_i^0 — допустимый уровень физиологического сдвига в организме; f_1 — некоторая функция.

При одновременном зависимом действии на организм двух вредных веществ формула (4.87) должна быть записана в виде

$$\Delta B_{ij} < \Delta B_{ij}^0 = f_2(c_i, t_i), \qquad (4.88)$$

где *i*, *j*=1, 2, 3, ..., *k*, а *k* — количество вредных инградиентов в сточных водах; ΔB_{ij}^0 — допустимые уровни физиологических сдвигов под одновременным действием двух вредных веществ; *f*₂ — некоторая функция. Формула (4.88) легко обобщается и на случай одновременного зависимого действия на организм и большего числа вредных веществ.

При использовании формул вида (4.87) или (4.88) следует иметь в виду, что каждый организм реагирует на вредное вещество индивидуально, в связи с чем для большого числа организмов одного вида (и одного возраста и пола) эти формулы естественно считать не детерминированными, а стохастическими. В этом случае следует использовать понятие вероятности соответствующих физиологических сдвигов в организмах F, а для критерия качества воды тогда необходимо задавать допустимые вероятности неблагоприятных сдвигов F_0 , т. е. полагать, что [62]

$$F_0 < F\{\Delta B_{ij} < \Delta B_{ij}^0\}, i, j = 1, 2, \dots, k.$$
 (4.89)

Этот вероятностный критерий допустимого качества воды в районе водопользования можно, очевидно, переписать в форме

$$F_0 > F\left\{\Delta B_{ij} > \Delta B_{ij}^0\right\},\tag{4.90}$$

а так как величины ΔB_{ij} являются функциями c_i и t_i , то (4.90) приводится к виду

$$F_{0} > F\{c_{i} > c_{0i}; t_{i} > t_{0i}\} = \int_{c_{0i}}^{\infty} \int_{t_{0i}}^{\infty} p(c_{i}, t_{i}) dc_{i} dt_{i}, \quad (4.91)$$

где $p(c_i, t_i)$ — двумерное распределение значений концентрации и продолжительностей существования этих концентраций в рассматриваемой точке с координатами (x_0, y_0, z_0).

Если точка (x_0, y_0, z_0) расположена на некотором удалении от точки сброса сточных вод, то концентрация примеси в (x_0, y_0, z_0) существенным образом зависит от направления и скорости течения в рассматриваемом районе моря. Если течение направлено от точки сброса к точке водопользования, то концентрация загрязняющих веществ, очевидно, будет в (x_0, y_0, z_0) максимальна, при обратном же направлении течения водная среда в зоне водопользования окажется практически не загрязненной от рассматриваемого источника сточных вод. Область загрязнения может не распространиться до точки (x_0, y_0, z_0) и при малых значениях модуля скорости течения |u|. Таким образом, в функции $p(c_i, t_i)$ аргумент c_i можно заменить на величину |u| и φ — направление модуля скорости течения (относительно географических координат или относительно направления от точки сброса вод на точку водопользования). В этом случае условие (4.91) принимает вид

$$F_0 > \int p(|\boldsymbol{u}|, \boldsymbol{\varphi}, t_i) d|\boldsymbol{u}| d\boldsymbol{\varphi} dt_i.$$
(4.92)

Интегрирование в (4.92) должно проводиться по части трехмерного пространства (|u|, φ , t_i), где концентрации примеси, рассчитанные по значениям |u|, φ и t_i , превосходят допустимые нормы. Ввиду сложности области интегрирования и сложного вида функции распределения $p(|u|, \varphi, t_i)$ такое интегрирование в большинстве случаев может быть осуществлено лишь численными методами. Определение самой функции распределения может быть осуществлено в результате обработки большого массива наблюдений за скоростями и направлениями течений в районе предполагаемого сброса сточных вод. Если такая «роза течений» имеется в распоряжении исследователя, то для каждой из выбранной градации направлений и скоростей течений далее следует тем или иным методом подсчитать концентрации примеси в точке водопользования и определить значения t_i .

Время существования в данном элементе водной массы определенной концентрации примеси зависит как от режима работы сбросного устройства и от поля течений, так и от временной изменчивости перечисленных выше факторов самоочищения воды. Кроме закономерных изменений интенсивности этих факторов во времени и в пространстве, в океане (а также и в пресноводных водоемах) будут существовать и случайные, хаотические вариацни концентрации примеси, обусловленные турбулентным характером движения вод. При длительном воздействии вредного вещества на организм он может сенсибилизироваться либо, наоборот, адаптироваться к веществу, в связи с чем величины coi и toi в формуле (4.91) могут быть, вообще говоря, функциями времени. Расход вредного вещества Q_i в источнике сточных вод также не всегда может быть задан детерминированной функцией. Так, например, Айтсам [1] показал, что концентрация ряда примесей в сточных водах коллекторов Москвы и Таллина описывается случайными функциями времени с гауссовыми распределениями.

Реакции разных групп организмов на вредные вещества, естественно, не одинаковы. И допустимые физиологические сдвиги для планктонных, нейстонных, нектонных и бентосных организмов также могут быть разными. Вредные вещества, усвоенные организмами низших трофических уровней, способны затем передаваться по кормовой цепи к высшим организмам. Таким образом отдельные виды организмов могут быть поражены загрязняющими веществами даже без непосредственного контакта со сточными водами, а лишь в результате использования ими в пищу организмов, ранее (или в другом месте) аккумулировавших вредное вещество.

Таким образом, для обоснованного выбора допустимых концентраций вредных примесей и периодов существования зон загрязнения необходимо не только знать реакцию данного организма на полютанты, но и учитывать все возможные трофические связи между отдельными составляющими биоценоза. Очевидно, что дляобоснованного ответа на эти вопросы следует провести обширные исследования по физиологии организмов, составляющих биоценоз, по механизмам усвоения и вывода полютантов организмами, по количественным характеристикам переноса загрязняющих веществ по трофическим цепям, по химическим и биохимическим превращениям этих веществ как в окружающей среде, так и в организмах.

Не менее сложна и проблема самоочищения вод от вредных примесей. Здесь необходимо знать механизм поступления полютантов в воды океана (в том числе и непосредственно из атмосферы), механизмы переноса полютантов движениями вод, зависимость скоростей химических и физических процессов трансформации полютантов от температуры и солености вод, их кислотности, кислорода и других факторов, содержания механизмы выпадения примесей в осадок, процессы биохимического разложения полютантов в водной массе и в донных отложениях и т. п. Решение этих вопросов потребует, естественно, больших совместных усилий специалистов разных отраслей знаний в области методик исследований, в проведении лабораторных и натурных наблюдений, в построении моделей явлений. По всем этим направлениям в настоящее время имеются значительные успехи (см., например, сборники [28, 33, 34, 62]), однако впереди еще очень большой объем работ.

Несмотря на еще недостаточную обоснованность ряда принятых в настоящее время нормативов качества воды по различным видам загрязнителей, их соблюдение все же в значительной степени может предотвратить нежелательные сдвиги в состоянии водной среды океанов и их биоценозов. Поэтому при проектировании сбросных устройств основным требованием должна быть гарантия непревышения концентрации в водах моря сбрасываемых полютантов в сколь-нибудь большом объеме водной массы. Для этого проектировщику необходимо учесть все формы трансформации полютанта в морской среде, а также спроектировать очистные сооружения с характеристиками, обеспечивающими необходимую степень очистки сточных вод. Береговые очистные сооружения можно рассматривать [1] как некоторый фильтр-выпрямитель, действие которого на меняющуюся во времени концентрацию примеси описывается зависимостью вида

$$\bar{c}_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') c_i(t') dt', \qquad (4.93)$$

где $c_i(t)$ — концентрация вещества *i* в водах, поступающих на очистное сооружение; $\bar{c}_i(t)$ — концентрация этого же вешества в водах, прошедших очистное сооружение: h(t-t') — весовая функция очистного сооружения; t' - переменная интегрирования. Вид весовой функции зависит от типа очистного устройства и от режима его работы. В результате работы очистного сооружения должно существенно понижаться среднее значение концентрации примеси, а также сглаживаться высокочастотные вариации величины $c_i(t)$. В частности, фильтрующая роль очистного устройства должна проявляться в резком снижении уровней кратковременных, но резких усилений («залповых сбросов») концентраций полютанта, особенно опасных для обитателей водоема и водопользователей. Определить вид весовой функции очистного сооружения расчетным путем часто оказывается достаточно сложно, в связи с чем могут быть использованы непосредственные измерения функции $c_i(t)$ и $\bar{c}_i(t)$ при различных режимах работы сооружения. При известном виде весовой функции h(t) можно прогнозировать качество сбрасываемой воды при меняющихся нагрузках на очистное устройство. Теоретически вид весовой функции легко оценивается лишь для устройств очистных сооружений, носящих название усреднителей. Действие таких устройств аналогично воздействию скользящего осреднения на случайную функцию, т. е. весовая функция в этом случае может быть записана в виле

$$h(t) = \begin{cases} a/T_0, & -T_0/2 \leqslant t \leqslant \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > T_0/2 \end{cases}$$
(4.94)

где T_0 — время осреднения; a — некоторая константа, зависящая от конструктивных особенностей усреднителя.

Если от выражения (4.93) взять преобразование Фурье, то получим спектральный вариант математической модели действия очистного сооружения:

$$\overline{E}_{i}(\omega) = H(\omega) E_{i}(\omega), \qquad (4.95)$$

где $E_i(\omega)$ — спектральная плотность вариаций концентрации вещества *i* в водах, поступающих на очистное сооружение; $\bar{E}_i(\omega)$ спектральная плотность вариаций того же вещества в водах, прошедших очистку; $H(\omega)$ — спектральная плотность весовой функции или передаточная функция очистных сооружений, показывающая, как трансформируется спектр $E_i(\omega)$ в результате действия сооружения.

Для весовой функции вида (4.94), например, передаточная функция H (ω) имеет вид

$$H(\omega) = a^2 \frac{\sin^2 \omega t/2}{(\omega t/2)^2}.$$
 (4.96)

В более сложных случаях передаточную функцию очистного сооружения приходится определять экспериментально. Так, Айтсам [62] провел анализ работы Курьяновской станции аэрации г. Москвы и показал, что значения дисперсий флюктуаций концентрации загрязняющих веществ в очищенных водах $\overline{\sigma_i^2}$ по сравнению с дисперсиями σ_i^2 в поступающих на станцию водах резко уменьшаются. В то же время формы спектральных функций $E_i(\omega)$ мало меняются в результате действия станции. Если нормировать функции $E_i(\omega)$ и $\bar{E}_i(\omega)$ на дисперсии, то они приводятся практически к одинаковому виду. Следовательно, в этом случае передаточная функции $E_i(\omega)$, не меняя ее формы, в связи с чем функция H может быть записана в виде

$$H = \sigma_i^2 / \overline{\sigma_i^2} = \text{const} , \qquad (4.97)$$

а весовая функция h(t) — в виде

$$h(t) = \sigma_i / \overline{\sigma_i} = \text{const.}$$
 (4.98)

Значение H по данным Айтсама для разных серий наблюдений оказалось близким к 10 ²—10⁻³. Естественно, что формулы (4.97)—(4.98) не могут считаться универсальными, так как при других конструктивных решениях очистных сооружений или при других режимах их работы передаточные функции могут быть другими.

Спектральные функции $E_i(\omega)$ поступающих на очистное сооружение вод, так же как и сами функции $c_i(t)$, в большинстве случаев априорно бывают не известны. В связи в этим можно использовать различного рода модельные представления для $E_i(\omega)$ или $c_i(t)$. Так, например, Айтсам [62] предложил задавать функции $c_i(t)$ в виде

$$c_{i}(t) = \bar{c}_{i} + \sum_{n=1}^{N} A_{n, i} \sin\left(n \frac{2\pi}{T_{i}} t + \varphi_{n, i}\right) + c_{i}'(t), \qquad (4.99)$$

где \bar{c}_i — постоянная составляющая концентрации примеси; $c'_i(t)$ —

случайные флюктуации концентрации, а член $\sum_{n=1}^{N} A_{n,i} \sin\left(n \frac{2\pi}{T_i}t + \right)$

 $+\varphi_{n,i}$) описывает периодические вариации концентрации, обусловленные цикличностью функционирования водопотребляющих объектов (с амплитудами A_{ni} и сдвигами фаз $\varphi_{n,i}$).

Для случайной составляющей $c'_i(t)$ также можно сделать некоторые предположения, в частности считать, что $c'_i(t)$ является стационарной и эргодичной случайной функцией с нормальным распределением и корреляционной функцией вида

$$R_i(\tau) = \sigma_i^2 \exp\left(-\alpha\tau^2\right), \qquad (4.100)$$

где σ_i^2 — дисперсия нормального распределения; α — постоянная.

Спектральная плотность случайного процесса с корреляционной функцией (4.100) имеет вид

$$E_i(\omega) = \sigma_i^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right). \tag{4.101}$$

Если известна передаточная функция рассматриваемого очистного сооружения $H(\omega)$, то по известному виду $E_i(\omega)$ далее по формуле (4.95) рассчитывается и спектральная плотность флюктуаций концентрации примеси в условно очищенной воде, сбрасываемой в море. Дальнейшую трансформацию поля концентрации загрязнений в море можно анализировать, либо используя спектральные методы анализа (см. раздел 1.8) с $\overline{E}_i(\omega)$ в качестве начального условия, либо, как это в большинстве случаев и делается, применяя полуэмпирические модели переноса примеси океанскими водами.

Поведение загрязнений в близкой от сбросного устройства зоне во многом зависит от конструкции устройства и характера истечения из него загрязненных вод. На практике обычно используются оголовки сбросных устройств с одним или несколькими отверстиями или оголовки, заканчивающиеся насадками с конфузорами или без них. При использовании устройств с большим числом разнесенных друг от друга насадок (или отверстий) достигается большая степень первоначального разбавления загрязненных вод, но при этом, естественно, увеличивается начальная зона загрязнения. Для усиления первоначального разбавления стоков можно также увеличивать скорость истечения струй загрязненных вод из насадок. Некоторые рекомендации к конструкции конфузоров для сбросных устройств приведены, например, в работах Лапшева, Шилова и Грабовского [62]. В частности, там предлагается использовать насадки форсуночного типа, сильно турбулизирующие истекающую струю жидкости. Такая искусственная турбулизация, естественно, увеличивает скорость перемешивания струи с окружающей жидкостью, что приводит к более быстрому падению концентраций примеси с удалением от места сброса. От скорости истечения жидкости из насадки зависит и степень начального разбавления сточных вод в струях. На степень разбавления влияет также перепад плотности между струями и окружающей жидкостью. Указанные выше авторы рассмотрели также вопрос о роли неравномерности испускания струй сточных вод из насадок, расположенных на конечном участке сбросного

коллектора. Неравномерность расходов жидкости из такой системы насадок приводит к неравномерности начального разбавления струй и тем самым к снижению эффективности суммарного первоначального перемешивания загрязненных вод с окружающей водной массой. Для исключения этого нежелательного эффекта неравномерность расходов жидкости из насадков не должна, повидимому, превышать 10—20 %.

При глубоководном расположении сбросного устройства в результате первоначального и диффузионного разбавления концентрация примесей на расстояниях 100-1000 м от места сброса может понижаться в 10³—10⁴ раз, что в большинстве случаев оказывается уже достаточным для удовлетворения имеющихся санитарных требований к качеству морской воды. Зону загрязнения у сбросного устройства можно, естественно, уменьшить за счет более высокой степени очистки сточных вод на береговых станциях аэрации. Необходимо также учитывать основные океанологические факторы, способствующие или, наоборот, препятствующие разбавлению загрязненных вод и их самоочищению. К таким факторам можно отнести: плотностную стратификацию морских вод, скорости и направления течений, интенсивность турбулентного перемешивания, содержание кислорода в водной толще, развитие фито- и зоопланктона. При обоснованном выборе глубины расположения сбросного устройства и его удаления от береговой черты облако загрязненных вод может оставаться всегда затопленным и не достигающим прибрежной зоны моря. Опыт строительства глубоководного сброса в районе г. Ялты, а также ряда зарубежных сбросных устройств (см. обзор в [34]) подтверждает такое заключение.

Используемые в настоящее время методы расчета поведения выбрасываемых в морскую среду струй примеси уже достаточно подробно рассматривались в разделе 2.3. Эти методы, как нетрудно видеть, являются по существу интегральными, так как в них рассматриваются лишь осредненные (или типичные) параметры струй. При этом обычно для поперечных сечений струй вводятся эмпирические профили распределений скоростей и температуры или концентраций примеси, что позволяет от дифференциальных уравнений гидротермодинамики в частных производных перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Турбулентность струй и окружающей среды при таком подходе учитывается введением тех или иных эмпирических зависимостей, описывающих, например, эффект вовлечения. Интегральные методы дают удовлетворительные результаты при описании развития затопленных свободных струй как в однородной, так и в стратифицированной жидкости. Неплохо учитывается этими методами и наличие поперечного, постоянного по глубине течения окружающей жидкости в районе сбросного устройства. Однако наличие в таком течении градиента скорости уже сложно учесть в рамках интегральных подходов к проблеме. Интегральные методы не позволяют исследовать эффекты нестационарности источника примеси, а также процессы взаимодействия струй со свободной поверхностью водоема и с его дном.

В связи с указанными недостатками интегральных методов в последние годы для расчета поведения струй примеси в океане стали применяться более сложные приемы, основанные на решении уравнений гидротермодинамики в частных производных. Естественно, что члены турбулентного переноса в этих уравнениях должны быть каким-то образом выражены через величины, находимые из решения уравнений. Наиболее простой метод замыкания уравнений путем введения коэффициентов турбулентного обмена, как правило, не дает больших преимуществ по сравнению с интегральными методами в связи со сложностями адекватного выбора значений коэффициентов обмена. В то же время очень сложные модели замыкания (например, на уровне высших моментов распределений пульсационных характеристик) также себя не оправдывают из-за неопределенностей в задании граничных условий для искомых характеристик потока и из-за больших погрешностей при численных расчетах (аналитические решения в сложных моделях обычно получить не удается). В связи с этим в настоящее время наряду с интегральными методами наиболее подходящими для решения задач о распространении струй примеси считаются модели, основанные на совместном решении уравнений движения, уравнения баланса турбулентной энергии b и уравнения баланса диссипации турбулентной энергии є. В общей форме такая сиуравнений приведена в разделе 4.1 [формулы стема (4.13) -(4.27)]. Естественно, что система может записываться в несколько иных формах или упрощаться в той или иной степени, но с обязательным сохранением уравнений баланса величин b и є. Подробный анализ возможных методов построения таких b, є-систем, используемых для расчета поведения струй примеси, можно найти в обзорной статье Роди в [63]. С помощью b, є-моделей в последние годы численными методами был рассчитан ряд задач о поведении струй, не взаимодействующих и взаимодействующих со свободными и жесткими границами основного водного объекта. В первом случае рассматривались струи с плоскими и округлыми сечениями как не отличающиеся по плотности от окружающей среды, так и имеющие дополнительную плавучесть. Во втором классе задач анализировались случаи истечения струй на поверхность водоема, случаи заглубленного истечения в водоемы, причем жидкость в водоеме могла находиться как в покое, так и в движении. В неподвижной жидкости поведение струи в значительной степени определяется турбулентностью самой струи. В движущейся же жидкости турбулентность струи и среды взаимодействуют друг с другом, причем в дальней зоне турбулентность окружающей среды становится определяющей в процессах трансформации струи.

Анализ полученных по *b*, є-моделям решений задач о струях примеси показал, что эти модели дают удовлетворительные ре-

зультаты при расчетах поведения струй в средах со сдвигами скорости течений, причем эмпирические константы в системе уравнений в этом случае остаются теми же, что и для случая распространения струй в среде с однородным полем скорости. Хорошо описывается *b*, *ε*-моделями взаимодействие струй с основными течениями, а также со свободными и жесткими границами водоема.

Модели воспроизводят также рециркуляционные течения, возникающие на перифериях струй при их сбросе вблизи границ водоема.

На рис. 4.11 приведен пример численного расчета по b, є-модели поведения струи примеси в нестратифицированной жидкости, движущейся со скоростью U_c . Плотность при-

Рис. 4.11. Результаты расчета по b, є-модели поведения струи примеси, втекающей в нестратифицированную жидкость (по работе Роди в [63]). $I \rightarrow$ зависимость безразмерного отношения $U_c/\Delta U$ от безразмерного расстояния x/θ , где ΔU — превышение скорости на оси струи над скоростью окружающей жидкости U_c . x — расстояние до точки выброса струк, θ — толщина избытка импульса; 2 зависимость безразмерной полуширины струи $y_{1/2}$ / θ от безразмерного расстояния

*х/*θ.



меси не отличается от плотности окружающей среды, а ось струи направлена вдоль вектора скорости течения среды. Кривая 1 на графике рис. 4.12 показывает изменение с расстоянием значений величины $U_c/\Delta U$, где ΔU — превышение скорости движения жидкости на оси струп над значением U_c . Расстояние x от точки истечения струи нормируется на так называемую «толщину избытка импульса» θ , определяемую для круглой струи по формуле θ

 $= \left[2\pi \int_{0}^{\infty} \frac{U(U-U_{c})}{U_{c}^{2}} \times r dr\right]^{\frac{1}{2}}$, где r — радиус-вектор с началом на

оси струи. U — скорость течения жидкости на расстоянии t от оси струи. Кривая 2 на рисунке показывает изменение нормированной полуширины струи $y_{1/2}$ в зависимости от нормированного расстояния x/θ . Полуширина струи $y_{1/2}$ определяется при этом как расстояние от оси струи до точки, где $U - U_c = \Delta U/2$. Использование безразмерных величин позволяет представить универсальными кривыми результаты расчетов для различных отношений

скорости струи к скорости внешнего потока. Например, случай истечения струи в неподвижную жидкость (когда $\theta = \infty$) соответствует началу координат на графиках. Приведенные на рисунке экспериментальные точки показывают неплохое согласие результатов расчета с данными наблюдений в широком диапазоне значений x/θ .

Результаты расчета по b, ε -модели характеристик нагретой прямоугольной струи примеси, сбрасываемой на поверхность водоема, приведены на рис. 4.12. График рис. 4.13 a показывает убывание значений температуры на оси струи, нормированной на перепад между температурой струи в точке выпуска и температурой окружающей среды T_0 . Скорость истечения струи при этом принимается равной U_0 , а окружающая жидкость предполагается неподвижной. Расстояние вдоль оси струи x нормируется на ве-

личину $\sqrt{2h_0b_0}$, где $2b_0$ и h_0 — первоначальные ширина и глубина струи соответственно. На графике рис. 4.12 б приведена зависимость полуширины струи $b_{1/2}$ от безразмерного расстояния

 $x/\sqrt{2h_0b_0}$, а на рис. 4.12 e — зависимость «полуглубины» h_{y_2}

струи от $x/\sqrt{2h_0b_0}$. Полуширина и полуглубина струи здесь определяются как расстояния от оси струи (расположенной в данном случае на поверхности водоема) до точек, где превышение температуры жидкости в струе над температурой окружающей жидкости равно половине его максимального значения для данного сечения струи. Согласие экспериментальных точек с теоретическими кривыми и в этом случае хорошее, однако на значительных расстояниях от точки сброса наблюдаются несколько большие отклонения экспериментальных данных от теоретических зависимостей.

Еще ряд примеров расчетов по b, є-моделям распространения струй примеси, сбрасываемых в водную среду, можно найти в цитированной обзорной статье Роди в [63]. В статье приведены результаты расчетов распределений температуры и скорости движений жидкости в вертикально направленных струях, в струях, проникающих в жидкую среду вдоль твердых стенок или истекающих под некоторыми углами к направлению основного течения жидкости. Во всех случаях имеющиеся экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с теоретическими зависимостями. В связи с этим имеется, по-видимому, возможность сделать заключение, что b, є-модели в настоящее время являются уже достаточно проверенными моделями для расчетов поведения струй примеси в ближних к точкам выпуска зонах, где уровень турбулизации струй еще превосходит уровень естественной турбулентности морской среды.

Расчет поля концентрации примесей, сбрасываемых в океан, представляет собой, как мы видим, весьма сложную задачу. В качестве исходной информации при начале расчета необходимо знать основные параметры сбрасываемых вод (объемы сброса, концентрации примесей, изменчивость этих характеристик во времени). Далее необходимо знать весовую функцию существующего или проектируемого очистного сооружения, что должно дать возможность определить характеристики вод, прошедших очистку и предназначенных для сброса в океан. Сведения о конструктивных особенностях оголовков сбросных устройств должны в свою очередь позволить оценить первоначальные разбавления струй



Рис. 4.12. Результаты расчета по *b*, є-модели параметров нагретой струи примеси, вытекающей на поверхность водоема. Изменение нормированного значения температуры струи, ее полуширины и полуглубины в зависимости от безразмерного расстояния до точки сброса (графики *a*, *б* и *в* соответственно, обозначения — в тексте) (по работе Роди в [63]).

примеси в морской воде. Для этой цели следует использовать изложенные выше интегральные или *b*, є-модели расчета ближних зон струй, истекающих из сбросных устройств. После снижения уровня собственной турбулентности струй до уровня естественной океанской турбулентности вступают в силу методы расчета струй, рассмотренные в разделе 2.3. Естественно, что в этой цепочке расчетов отдельные ее звенья могут быть заменены более простыми схемами оценки трансформации поля загрязнения. В большинстве случаев результаты теоретических расчетов требуют экспериментальной проверки, для чего можно использовать флюоресцирующие красители, изотопы, дискретные частицы. Такое сочетание теоретических и экспериментальных методов должно в KOнечном счете привести к гарантии, что уровни загрязнений не будут превышать допустимые нормы и воды океана останутся чистыми и богатыми разнообразными формами жизни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Айтсам А. М. Турбулентная диффузия веществ загрязнения, сбрасываемых сточными водами в море. — Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. д-ра физ.-мат. наук, ИОАН, М., 1968. — 24 с.
- 2. Белоусова Э. И., Латун В. С. Сгонио-нагонная циркуляция вод и распространение примеси в прибрежной зоне моря.— Морские гидрофизические исследования, 1975, № 3, с. 54—65.
- 3. Беляев В. И., Колесников А. Г., Нелепо Б. А. Определение интенсивности радиоактивного заражения в океане на основе новых данных о процессах обмена. — Третья междунар. конф. ООН по использованию атомной энергии в мирных целях, Женева, 1964. Документ ООН А/конф., 28/P/766, Украинская ССР, май 1964, Русский текст, 1964.
- 4. Беляев В. И., Колесников А. Г., Нелепо Б. А. Закономерности распространения радиоактивных загрязнений в океане.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1967, т. 3, № 3, с. 1092—1100.
- 5. Беляев В. С., Озмидов Р. В. Модель вертикального турбулентного обмена в океане при перемежающейся турбулентности.— ДАН СССР, 1980, т. 254, № 4, с. 995—998.
- 6. Беляев В. С., Озмидов Р. В. Влияние перемежаемости турбулентности на формирование структуры поверхности океана.— ДАН СССР, 1982, т. 263, № 5, с. 1225—1229.
- 7. Бенилов А. Ю. О генерации турбулентности в океане поверхностными волнами.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1973, т. 7, № 3, с. 292—303.
- 8. Берлянд М. Е. Современные проблемы атмосфериой диффузии и загрязнения атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 448 с.
- 9. Брозин Х.-Ю., Кремзер У., Муравьев С. С. Экспериментальное исследование диффузии красителя в Балтийском море. Океанология, 1977, т. 17, вып. 2, с. 221—226.
- 10. Ван Дам Ж. Горизонтальная диффузия в Северном море у побережья Голландии в связи с удалением промышленных сточных вод.— В кн.: Междунар. ассоциация по гидравл. исслед., 11-й конгресс, 1965, 1966, т. 6, с. 585—597.
- 11. В заимодействие атмосферы, гидросферы и литосферы в прибрежной зоне моря.— Изд. Болгарской АН, под ред. З. К. Белберова, В. И. Захариева, О. А. Кузнецова и др., София, 1980.— 314 с.
- 12. В заимодействие атмосферы, гидросферы и литосферы в прибрежной зоне моря.— Результаты междунар. эксперимента «Камчия-78». Изд. Болгарской АН, под ред. З. К. Белберова, С. М. Анцыферова, В. Н. Захариева и др. София, 1982.— 262 с.
- Виноградов А. С. О вертикальной диффузии радиоактивной примеси в океане.— Морские гидрофизические исследования, 1976, № 3, с. 87—93.
- 14. В и ноградов А. С. Применение радиоактивных изотопов в качестве трассеров гидрофизических процессов в океане. В кн.: Мезомасштабная изменчивость поля температуры в океане, М., 1977, с. 71—110.
- Виноградов А. С. Вертикальная диффузия в океане космогенных изотопов.— Океанология, 1978, т. 18, вып. 1, с. 50—57.
- 16. Виноградов А. С. Вертикальная диффузия в океане радиоактивных выпадений. — Океанология, 1979, т. 19, вып. 2, с. 239—245.
- 17. Виноградов А. С. Влияние верхнего однородного слоя на диффузию радиоактивных выпадений в океане.— Океанология, 1982, т. 22, вып. 5, с. 744—749.
- 18. Галкин Л. М. Решение диффузионных задач методом Монте-Карло. М.: Наука, 1975.— 96 с.
- 19. Гаргер Е. К. К расчету параметров горизонтальной диффузии по турбулентным характеристикам.— Труды Ин-та экспериментальной метеорологии, 1972, вып. 27, с. 82—89.
- 20. Гезенцвей А. Н. О горизонтальном макротурбулентном обмене в Черном море. Труды ИОАН, 1961, т. 52, с. 115—132.

- Горошко В. И. Турбулентная диффузия примеси в прибрежной зоне моря.— В кн.: Исслед. изменчивости гидрофиз. полей в океане, М., Наука, 1974, с. 145—150.
- 22. Демышев С. Г., Еремеев В. Н., Иванов Л. М., Кныш В. В. Влияние вихревых образований открытого океана на диффузию пассивной примеси.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1982, т. 18, № 3, с. 276—285.
- 23. Демышев С. Г., Еремеев В. Н., Иванов Л. М., Кныш В. В. Распространение пассивной примеси в вихревых полях открытого океана.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1983, т. 19, № 2, с. 185—194.
- 24. Журбас В. М. Траектории турбулентных струй примеси в устойчиво стратифицированной среде.— Водные ресурсы, 1977, № 4, с. 165—172.
- 25. Журбас В. М. Основные механизмы распространения нефтн в море.— Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа, т. 12, ВИНИТИ, М., 1978, с. 144—159.
- 26. Журбас В. М., Мамедов Р. М. Экспериментальное исследование диффузии струй пассивной примеси в поверхностном слое моря.— Океанология, 1976, т. 16, вып. 6, с. 990—994.
- 27. Журбас В. М., Муравьев С. С., Татараев Т. М. Экспериментальное исследование турбулентной диффузни струй примеси в поверхностном слое моря.— Океанология, 1975, т. 15, вып. 4, с. 611—615.
- 28. Загрязнение солоноватых морей. Под ред. Г. Околотовича, 1976. Институт морского рыболовства, Гдыня, ПНР.— 546 с.
- 29. Зайдлер Р., Кремзер У., Муравьев С. С. Диффузионные опыты с красителями вблизи берега. — В кн.: Взаимодействие атмосферы, гидросферы и литосферы в прибрежной зоне моря, 1980, изд. Болгарской АН, София, с. 92—100.
- 30. Залесный В. Б., Иванов Ю. А. Численные эксперименты по анализу двухмерной модели термохалинной и ветровой циркуляции океана.—Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1978, т. 14, № 2, с. 184—194.
- Зац В. И. Об устойчивости затоплення полей сточных вод в промежуточном слое стратифицированного моря.—Водные ресурсы, 1975, № 1, 180—191.
- 32. Зац В. И., Немировский М. С., Шульгина Е. Ф. и др. Комплексный подход к исследованию глубоководных выпусков сточных вод.— Водные ресурсы, 1979, № 6, с. 181—191.
- 33. Зац В. И., Немировский М. С. Использование метода флуоресцирующих индикаторов для изучения процессов перемешивания в зонах сброса сточных вод в море. Биология моря, 1972, вып. 27, Киев, Наукова думка, с. 31—41.
- 34. Зац В. И., Немировский М. С., Андрющенко Б. Ф. и др. Опыт теоретического и экспериментального исследования проблемы глубоководного сброса сточных вод на примере района Ялты. – Киев: Наукова думка, 1973. – 276 с.
- 35. Зац В. И., Озмидов Р. В. Турбулентность и перемешивание в Черном море.— В кн.: Исслед. по динамике вод и гидрохимии Черного моря, ч. 2, 1978, изд. Координац. центра стран—членов СЭВ по проблеме «Изучение хим., физ., биол. и других процессов в важнейших районах Мирового океана, М., с. 237—291.
- 36. Иванов К., Филиппов Ю. Г. Распространение динамически пассивной примеси в поверхностном слое моря.— Океанология, 1978, т. 18, вып. 3, с. 423—426.
- 37. Израэль Ю. А., Цыбань А. В. Об ассимиляционной емкости Мирового океана.— ДАН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 702—705.
- 38. Исаев Г. В., Овсиенко С. Н. Распространение вязкой пленки на поверхности моря при ветровом дрейфе.— Метеорология и гидрология, 1983, № 2, с. 74—81.
- 39. Исследование турбулентности и решение задач переноса загрязняющих веществ в море./Труды ГОИН, 1977, вып. 141, под ред. Е. В. Борисова, 1977.— 170 с.

- 40. Каган Б. А., Оганесян Л. А., Рябченко В. А. Распространение пассивной примеси от мгновенного точечного источника в Мировом океане (численный эксперимент).— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1978, т. 14, № 6, с. 621—627.
- 41. Каган Б. А., Рябченко В. А. Численные эксперименты по сезонной эволюции цикла углерода в океане. Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1982, т. 18, № 4, с. 373—382.
- 42. Каменкович В. М. К вопросу о коэффициентах турбулентной диффузии и вязкости при крупномасштабных движениях океана и атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1967, т. 3, № 12, с. 1326—1333.
- 43. Қарабашев Г. С. Фотоэлектрический подводный флюориметр. Труды ИОАН, 1965, т. 77, с. 110—115.
- 44. Колесников А. Г. Некоторые результаты прямого определения интенсивности вертикального турбулентного обмена в море. — Межведомств. комитет по проведению МГГ, «Некоторые проблемы и результаты океанологических исследований», раздел «Океанологня», 1959, изд. АН СССР, вып. 1, с. 20—28.
- 45. Кол'есников А. Г. Вертикальный турбулентный обмен в устойчиво стратифицированном море.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 11, с. 1614— 1623.
- 46. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
- 47. Координационный центр стран—членов СЭВ по проблеме «Изучение хим., физ., биол. и других процессов важнейших районов Мирового океана». Информ. бюл. № 5, М., 1977.— 210 с.
- 48. Координационный центр стран—членов СЭВ по проблеме «Изучение хим., физ., биол. и других процессов важнейших районов Мирового океана». Информ. бюл. № 17, М., 1984.— 74 с.
- 49. Коротенко К. А. Влияние тонкой структуры поля скорости течения на перенос вещества в океане. Океанология, 1983, т. 23, вып. 2, с. 249-254.
- 50. Коротенко К. А. О вертикальном потоке вещества в океане со слоистой структурой поля скорости течения.— Океанология, 1983, т. 23, вып. 3, с. 396—398.
- 51. Коротенко К. А. О вертикальном переносе вещества в расслоенном океанском пикноклине.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1983, т. 19, № 7, с. 773—776.
- 52. Кочергин В. П., Боковиков А. Г. Трехмерная численная модель распространения примеси в прибрежной зоне глубокого водоема.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1980, т. 16, № 7, с. 729—737.
 53. Кочергин В. П., Боковиков А. Г. Численные эксперименты по рас-
- 53. Кочергин В. П., Боковиков А. Г. Численные эксперименты по распространению примесей в море.— Метеорология и гидрология, 1984, № 3, с. 73—79.
- 54. Кремзер У. Сравнение экспериментальных данных о максимальной концентрации примеси в диффундирующих в море пятнах с теоретическими выражениями.— Океанология, 1981, т. 21, вып. 2, с. 244—248.
- 55. Кремзер У., Озмидов Р. В. Турбулентность, диффузия и микроструктура полей Балтийского моря. — В кн.: Исслед. по динамике вод Балтийского моря, 1977, Коорд. центр стран—членов СЭВ по проблеме «Изучение хим., физ., биол. и других процессов важнейших районов Мирового океана», М., с. 152—197.
- 56. Кузнецов В. Р. Вероятность концентрации пассивной примеси в турбулентных потоках с поперечным сдвигом.— Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, 1972, № 5, с. 85—91.
- 57. Лозовацкий И. Д. Модель вертикальной структуры турбулизированных слоев в океане. Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1982, т. 18, № 1, с. 70—78.
- 58. Лозовацкий И. Д., Озмидов Р. В. Статистические характеристики локальной структуры развитой мелкомасштабной турбулентности в океане.— Океанология, 1979, т. 19, вып. 5, с. 757—765.

- 59. Любимцев М. М., Ваньян П. Л. О распределении вероятностей пульсаций концентрации примесей в турбулентных потоках.— Информ. бюлл. № 18, Коорд. центр стран—членов СЭВ по проблеме «Изучение хим., физ., биол. и других процессов важнейших районов Мирового океана», М., 1984, c. 56—60.
- 60. Маккавеев П. Н., Якушев Е. В. Моделирование вертикального распределения суммарной углекислоты в фотическом слое олиготрофных районов океана. — Океанология, 1983, т. 23, вып. 5, с. 801—806.
- 61. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 304 с.
- 62. Материалы III Всесоюзного симпозиума по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод. Москва—Таллин, 1969.— 206 с.
- 63. Методы расчета турбулентных течений. Под ред. В. Колльмана. Русский перевод под ред. А. Д. Хонькина.— М.: Мир, 1984.— 464 с.
- 64. Мирабель А. П., Монин А. С. О статистических закономерностях перемешивания примеси двумерной турбулентностью. — Изв. АН СССР. Физика атм. и океана, 1983, т. 19, № 9, с. 902-912.
- 65. Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К. О численном моделировании диффузии примеси в стохастических полях скорости. Изв. АН СССР, Физика атм. н океана, 1980, т. 16, № 3, с. 229-235.
- 66. Монин А. С. О взаимодействии между вертикальной и горизонтальной диффузией примесей в море.— Океанология, 1969, т. 9, вып. 1, с. 76—81.
- 67. Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.— 320 с.
- 68. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука. Часть 1, 1965 (640 с.); часть 2, 1967 (720 с.).
- 69. Нелепо Б. А. Исследование радиоактивности вод Атлантического океана.— ДАН СССР, 1960, т. 134, № 4, с. 810—811.
- 70. Нелепо Б. А. Ядерная гидрофизика. М.: Атомиздат, 1970. 224 с.
- 71. Новиков Е. А. О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости. — Прикл. мат. и мех., 1958, т. 22, вып. 3, с. 576-579.
- 72. Озмидов Р. В. Экспериментальное исследование горизонтальной турбулентной диффузии в море и искусственном водоеме небольшой глубины.-Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, № 6, с. 756—764. 73. Озмидов Р. В. О роли турбулентных вихрей разных масштабов в про-
- цессе диффузии.— Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1958, № 2, с. 272—273.
- 74. Озмидов Р. В. О расчете горизонтальной турбулентной диффузии пятен примеси в море.—ДАН СССР, 1958, т. 120, № 4, с. 761-763.
- 75. Озмидов Р. В. О зависимости коэффициента горнзонтальной турбулентной диффузии в ветровых течениях от относительной глубины водоема.---Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1959, № 8, с. 1242—1246. 76. О змидов Р. В. Горизонтальная турбулентная диффузия пятен примеси
- в море.— Труды ИОАН, 1960, т. 37, с. 164—181.
- 77. Озмидов Р. В. Диффузия примеси в поле однородной изотропной турбулентности.— Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1960, № 1, с. 174—175.
- 78. Озмидов Р. В. О турбулентном обмене в устойчиво стратифицированном океане.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1965, т. 1, № 8, с. 853-860.
- 79. Озмидов Р. В. О некоторых особенностях энергетического спектра океанической турбулентности.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 4, с. 828—831.
- 80. Озмидов Р. В. О зависимости коэффициента горизонтального турбулентного обмена в океане от масштаба явления. — Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1968, т. 4, № 11, с. 1224-1225.
- 81. Озмидов Р. В. Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмент в океане.— М.: Наука, 1968.— 200 с.
- 82. Озмидов Р. В. Международная экспедиция по исследованию турбулентной диффузии примесей в море. — Океанология, 1969, т. 9, вып. 6, с. 1128 — 1130.
- 83. Озмидов Р. В. Международный симпозиум по исследованию турбулентности и процессов диффузни примесей в море.— Океанология, 1976, т. .16, вып. 4, с. 726—728.
- 18 Заказ № 422

- 84. Озмидов Р. В. Международиое совещание по моделям диффузии примесей в море. -- Океанология, 1982, т. 22, вып. 6, с. 1043-1044.
- 85. Озмидов Р. В. Мелкомасштабная турбулентность и тонкая структура гидрофизических полей в океане.-- Океанология, 1983, т. 23, вып. 4, с. 533--537.
- 86. О з м и д о в Р. В. Основные закономерности распространения загрязняющих примесей в Мировом океане. — Метеорология и гидрология, 1984, № 8, c. 51-58.
- 87. Озмидов Р. В., Асток В. К., Гезенцвей А. Н., Юхат М. К. Статнстические характеристикн полей концентрации пассивной примеси, искусственно вносимой в море.— Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1971, т. 7, № 9, с. 963—973.
- 88. Озмидов Р. В., Гезенцвей А. Н., Карабашев Г. С. Новые данные о диффузии примесей в море. -- Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1969, т. 5, № 11, с. 1191—1204.
- 89. Озмидов Р. В., Гезенцвей А. Н., Ле-Куанг-Тоай и др. Экспериментальное исследование диффузии искусственно вносимых в море примесей. — В кн.: Исслед. океанич. турбулентности, М., Наука, 1973, с. 64-78.
- 90. Озмидов Р. В., Попов Н. И. К изучению вертикального водообмена в океане по данным о распространении в нем стронция-90. Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1966, т. 2, № 2, с. 183—190.
- 91. Океанология, т. І. Гидрофизика океана. Под ред. В. М. Каменковича и А. С. Монина.— М.: Наука, 1978.— 456 с.
- 92. Окубо А., Озмидов Р. В. Эмпирическая зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в океане от масштаба явления.-Изв. АН СССР, Физнка атм. и океана, 1970, т. 6, № 5, с. 534—536.
- 93. Панчев С. О существовании степенных зависимостей в спектрах океанической турбулентности. Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, 1975, **†**. 11, № 6, c. 620—625.
- 94. Панчев С. Спектры крупномасштабной геофизической турбулентности в инерционных интервалах. — Българско геофизично списание, 1976, т. 2, № 2, c. 3—11.
- 95. Пивоваров А. А. Термика океана. Изд. МГУ, 1979. 208 с.
 - 96. Рябченко В. А. Численное моделирование распределения растворенного кислорода в Мировом океане. Океанология, 1977, т. 17, вып. 6, с. 1004-1009.
 - 97. Симонов А. И., Назаров И. М., Грузинов В. М. и др. Баланс нефтяных углеводородов в Мировом океане (на примере Северной Атлантики).— Метеорология и гидрология, 1984, № 3, с. 64—72.
- 98. Стыро Б. И. Самоочищение атмосферы от радиоактивных загрязнений.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.— 288 с.
- 99. Течения в Байкале. Новосибирск: Наука, 1977. 160 с.
- 100. Течения и диффузия вод Байкала. Пруды Лимнологического ин-та СО АН СССР, 1970, т. 14/34.—214 с.
- 101. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической фнзики. — Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит-ры, 1951. — 660 с.
- 102. Тоомпуу А. Неавтомодельность дисперсии концентрации при турбулентной диффузии в море. — Океанология, 1982, т. 22, вып. 5, с. 738—743. 103. Труды Института океанологии АН СССР, 1946, т. І. – 160 с.
- 104. Френкиль Ф. Н. Турбулентная диффузия: распределение средней концентрации в поле однородного турбулентного потока. - В кн.: Проблемы механики. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1955, с. 384-421.
- 105. Химия океана. Том І. Под ред. О. К. Бордовского, В. Н. Иваненкова.— М.: Наука, 1979.— 518 с.
- 106. Шкудова Г. Я., Джиоев Т. З. Численная модель циркуляции вод и распространения примеси в глубоководном бароклинном море (на примере Чериого моря). — Труды ГОИН, 1975, вып. 126, с. 92—103.
- 107. Штокман В. Б. Турбулентный обмен в районе Аграханского полуострова в Каспийском море. — Журнал геофизики, 1936, т. 6, вып. 4, с. 340-388.

- 108. Штокман В. Б. О турбулентном обмене в средней и южной частях Каспийского моря.— Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., 1940, № 4, с. 569— 592.
- 109. Штокман В. Б. О пульсациях горизонтальных компонент скорости морских течений вследствие турбулентности большого масштаба.— Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1941, № 4—5, с. 476—486.
- 110. Штокман В. Б. Основы тсории Т, S-кривых как метода изучения перемешивания и трансформации водных масс моря.— Проблемы Арктики, 1943, № 1, с. 32—71.
- 111. Якушев Е. В. Математическое моделирование распределения фосфатов в меридиональной плоскости южной половины Мирового океана.— Океанология, 1984, т. 24, вып. 2, с. 277—284.
- 112. Якушев Е. В. Численное моделирование распределения и изменчивости соединений фосфора в океане.— Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, ИОАН, 1984.— 16 с.
- 113. Assaf G., Gerard R., Cordon H. Some mechanisms of oceanic mixing revealed in aerial photographs.—J. Geophys. Res., 1971, vol. 76, p. 6550— 6572.
- 114. Batchelor G. K. The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion.—Quart. J. Roy. Met. Soc., 1950, vol. 76, N 328, p. 133—146.
- 115. Beitrage zur Meereskunde. Akademie-Verlag. Berlin, 1972, Heft 30/31.— 196 S.
- 116. Bowden K. F. Horizontal mixing in the sea due a shearing current.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, N 2, p. 83—95.
 117. Brosin H.-J., Kremser U., Muraviev S. S., Zeidler R. Parametric
- 117. Brosin H.-J., Kremser U., Muraviev S. S., Zeidler R. Parametric description of mean concentration fields of passive additives in the sea.— Raporty MJR, Ser. R, Gdynia, 1976, N 2a, p. 139–151.
- 118. Chandrasekhar S. The theory of axisymmetric turbulence.— Phil. Trans. Roy. Soc., 1950, vol. A242, N 855, p. 557—577.
- 119. Corrsin S. Heat transfer in isotropic turbulence.— J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, N 1, p. 113—118.
- 120. Corrsin S. Theories of turbulent dispersion.— Mechanics of Turbulence. 1962, Proc. Intern. Symp. National Science Research Center, Marseille, 1961, p. 27—52.
- 121. Csanady G. T. Turbulent diffusion in the environment.—D. Reidel Publishing Comp., Dordrecht—Boston, 1973.—248 p.
- 122. Fennel W., Lass H. U. Phytoplankton patchiness and advection diffusion models.— Beitrage zur Meereskunde, 1982, H. 47, S. 95—103.
- 123. Fjeldstad J. E. Wärmeleitung im Meer.— Geophys. Publik., 1933, Bd. 10, N 7, S. 1—20.
- /124. Fox D. G. Forced plume in a stably stratified fluid.— J. Gepphys. Res., 1970, vol. 75, N 33, p. 6818—6835.
- 125. Gyllander C. Water exchange and diffusion processes in Tvären, a Baltic bay.— Proc. Symp. Int. Atom. Energy Agency, 1966, Vienna, p. 207—220.
 126. Hela J., Voipio A. Tracer dyes as a means of studying turbulent diffu-
- 126. Hela J., Voipio A. Tracer dyes as a means of studying turbulent diffusion in the sea — Annales Acad. Sci. Fennica, 1960, ser. A, vol. 6, N 69.
- 127. Howard L. M. Note on a paper of John W. Miles. J. Fluid. Mech., 1961, vol. 10, N 4, p. 509-512.
- 128. Ichiye T. Upper ocean boundary-layer flow determined by dye diffusion.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, N 2, part 2, p. 270—277.
 129. Joseph J., Sendner H. Über die horizontale Diffusion in Meer.—
- 129. Joseph J., Sendner H. Über die horizontale Diffusion in Meer.— Deutsch. Hydr. Z., 1958, Bd. 11, N 2, S. 49-77.
- 130. Joseph J., Sendner H., Weideman H. Untersuchungen über die Horizontale Diffusion in der Nordsee.— Deutsch. Hydr. Zeitsch., 1964, Bd. 17, N 2, S. 57-75.
- 131. Katz B., Gerard R., Costin M. Response of dye tracer to sea surface conditions.-J Geophys. Res., 1965, vol. 70, N 22, p. 5505-5513.
- 132. Kraichnan R. H. Diffusion by a random velocity field.— Phys. Fluids, 1970, vol. 13, N 1, p. 22-31.

- 133. Krauss W. Theorie des Triftstromes und der vertuellen Reibung im Meer.-Deutsch. Hydr. Zeitsch., 1965, Bd. 18. N 5, S. 193-210.
- 134. Kremser U, Brosin H.-J. Untersuchungen über vertikale Austauschkoeffizienten und Richardson'sche Zahlen in der mittleren Ostsee.- Beitrage zur Meeresk., 1969, H. 26, S. 5-10.
- 135. Kremser U., Matthaus W. Grundlagen und Methoden zur Berechnung mittlerer vertikaler Warmeaustauschkoeffizienten in der Ostsee .- Gerlands Beitr. Geophys., 1973, Bd. 82, N 2, S. 128-134.
- 136. Levy E. M., Ehrhardt M., Kohnke D. e. a. Global oil pollution.— Intergovernment Oceanographic Commission UNESCO, Paris, 1981.—35 p.
- 137. Lin J. T. Relative dispersion in the enstrophy cascading inertial range of homogeneous two-dimensional turbulence.- J. Atm. Sci., 1972, vol. 29, N 2,
- 138. MCEWEN G. F. The dynamics of large horizontal eddies (axes vertical) in the ocean off Southern California.-J. Mar. Res., 1948, vol. 7, N 3, p. 188-216.
- 139. Miles J. M. On the stability of a heterogeneouse shear flow .- J. Fluid Mech. 1961, vol. 10, N 4, p. 496-508.
- 140. Munk W. H., Ewing C. C., Revelle R. R. Diffusion in Bikini Lagoon.-Trans. Amer. Geophys. Union, 1949, vol. 30, N 1, p .59-66.
- 141. Nichoul J. (editor). Remote sensing of shelf sea hydrodynamics.- 1984, Elsevier, Amsterdam.— 354 p.
- 142. Obukhov A. M. Description of turbulence in terms of Lagrangian variables.— Adv. in Geophys., 1959, vol. 6, p. 113—116.
- 143. Okubo A. A review of theoretical models for turbulent diffusion in the sea.— J. Oceanogr. Soc. Japan. 1962, 20th Anniversary vol. p. 286—320.
- 144. Okubo A. A note on horizontal diffusion from an instantaneous source in a nonuniform flow.-J. Oceanogr. Soc. Japan, 1966, vol. 22, N 2, p. 36-40.
- 145. Okubo A. The effect of shear in an oscillatory current on horizontal diffusion from an instantaneous source.— Oceanology and Limnology, 1967, vol. 1, N 3, p. 194-204.
- 146. Okubo A. Oceanic diffusion diagrams.— Deep-Sea Res., 1971 vol. 18, p. 789-802.
- 147. Okubo A., Andreasen V., Mitchel J. Chaos-induced turbulent diffusion.— Physics Letters, 1984, vol. 105A, N 4—5, p. 169—172.
- 148. Okubo A., Carter H. H. An extremely simplified model of the "shear effect" on horizontal mixing in a bounded sea.-J. Geophys. Res., 1966, vol. 71, N 22, p. 5267-5270.
- 149. Okubo A., Ebbesmeyer C. C., Sanderson B. G. Langrangian diffusion equation and its application to oceanic dispersion.— J. Oceanogr. Soc. Japan, 1983, vol. 39, N 5, p. 259—266. 150. Ozmidov R. V., Zatz V. I. Study of mesoscale processes in the shelf
- zone of the Black Sea using remote techniques .-- In: Remote sensing of shelf sea hydrodynamics. 1984. Ed. J. Nichoul, Elsevier, Amsterdam, p. 149-157.
- 151. Pritchard D. W., Okubo A., Carter H. Observation and theory of eddy movement and diffusion of an introduced tracer material in the surface layer of the sea. Disposal radioactive wastes seas, oceans and surface waters .--- Vienna, 1966.
- 152. Richardson L. F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbore graph.— Proc. Roy. Soc., 1926, ser. A, vol. 110, N 753, p. 709-737. 153. Richardson L. F., Stommel H. Note on eddy diffusion in the sea.—
- J. Meteorol., 1948, vol. 5, N 5, p. 238-240.
- 154. Saffman P. G. The effects of wind shear on horizontal spread from instantaneous ground source .-- Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1962, vol. 88, N 378, p. 382–393. 155. Schmidt W. Der Massenaustausch bei der ungeordneten Strömung in
- freier Luft und seine Folgen .- Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl. (2a), 1917, Bd. 126, N 6, S. 757-804.
- 156. Stommel H. Horizontal diffusion due to oceanic turbulence .- J. Mar. Res., 1949, vol. 8, N 3, p. 199–225.

- 157. Sutton O. G. The theory of eddy diffusion in the atmosphere.— Proc. Roy. Soc., 1932, ser. A, vol. 135, N 826, p. 143—165.
- 158. Sverdrup H. U. Lateral mixing in the deep water of the south Atlantic ocean.-J. Mar. Res., 1939, vol. 2, N 3, p. 195-207.
- 159. Sverdrup H. U., Fleming R. The waters of the coast of Southern California.— Bull. Scripps. Inst. Oceanogr. Univ. Calif., 1941, vol. 4, N 10, p. 261—378.
- 160. Taylor G. I. Eddy motion in the atmosphere.— Phil. Trans. Roy. Soc., 1915, ser. A, vol. 215, p. 1-26.
- 161. Taylor G. I. Diffusion by continuous movements.— Proc. Lond. Math. Soc., 1921, ser. A, vol. 20, p. 196—211.
- 162. T a y l o r G. I. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube.— Proc. Roy. Soc. London, 1953, ser. A, vol. 219, N 1137, p. 186—203.
- 163. Taylor G. I. The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe.— Pros. Roy. Soc. London, 1954, ser. A, vol. 223, N 1155, p. 446—468.
- 164. Townsend A. A. The diffusion of heat spots in isotropic turbulence.--Proc. Roy. Soc., 1951, ser. A, vol. 209, p. 418-430.
- 165. Williams R. W., Gibson C. H. Direct measurement of turbulence in the Pacific Equatorial Undercurrent. J. Phys. Oceanogr., 1974, vol. 4, N 1, p. 104-108.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Активная фаза струи 135, 136 Анизотропия процесса диффузии 30, 82, 86, 102, 138, 152, 241, 243 Апвеллинг 185, 186 Асимметрия пульсаций концентрации примеси 140, 141 Ассимиляционная емкость океана 257, 258 Блоковая схема расчета баланса биогенов 175—180, 184 Вертикальная диффузня при перемежающейся турбулентности 210, 211 Весовая функция очистного сооружения 262, 263 Взаимодействие вертикальной и горизонтальной диффузии 41 Время жизни частиц 239 -- обновления воды 173 Высота подъема факела сточных вод 139 Глубина Экмана 105 Граничные (краевые) условия 10, 66, 67, 163, 171, 175, 182, 183, 189, 203, 206, 208, 224, 228, 237 Двумерная турбулентность 43-45, 49 Дисперсия пульсаций концентрации примеси 56, 58, 107, 109, 140, 141, 145 — распределений концентрации примеси 95, 123-125, 137, 153 Дистанционные, аэрокосмические методы 77, 78, 100, 102, 105, 106, 153 Диффузионные опыты 68, 70, 75, 76, 88, 106, 121, 133, 138—140, 147, 205 – — с дискретнымн частицами 148— 151 Диффузия молекулярная 8, 63, 195 Зависимость коэффициентов турбулентной диффузии от времени 54, 84, 90, 96, 98 - — масштаба явления 24, 29, 33, 37, 67, 84, 98, 122, 153, 154, 181, 233 — плотностной стратификации 25, 29, 234 — — — — числа Ричардсона 26 Закон степени 5/3 35, 142-144 — степени 4/3 29, 35, 56, 118, 121, 149—151, 154, 200, 219, 233 Изотопы терригенные 168, 173 — космогенные 168, 169, 172, 173 искусственные 168, 172, 173 Изотропия горизонтальная 30, 33, 135

Квазигоризонтальные струи 131, 132 Конечно-разностная аппроксимация 218, 234 ---, порядок точности 218, 222, 225, 227 Косинус-фильтр 81, 88, 107 Коэффициент (параметр) вовлечения 129, 139 Коэффициенты молекулярной вязкости нефти 196 — диффузии 8, 9, 208, 251
 — температуропроводности 233 Коэффициенты турбулентной диффузии 16, 52-54, 64, 254 ——— горизонтальные 16, 30, 37, 40, 41, 48, 67, 90, 93, 98, 118, 177, 183, 225, 233 — — — вертикальные 16, 30, 41, 44, 48, 64, 90, 98, 118, 177, 183, 200, 211, 213, 214, 233, 249 — — — эффективные 44, 45, 91, 173, 210, 241, 248, 249 — — температуропроводности 66, 229, 232Критерий качества воды 259 Критическое время диффузии 47, 94 Лагранжа метод 250 переменные 250—253, 257 Лагранжев коэффнциент корреляции 53 масштаб 53, 238, 246, 249 Масштаб вертикального распределения радионуклида 167 диффузионно-распадный 171 — длнны 32 — Колмогорова 30, 55, 124 — Монина-Обухова 26, 27 — Озмидова 28 солености 27 — температуры 27 Метод блуждающих частиц 235, 240, 241, 245, 249, 250 вложенных сеток 229, 231 определения коэффициентов обмена косвенный 64, 65 — — — прямой 66, 67 — резервуаров 172—174, 187 Начальные условия 10, 64, 66, 67, 163, 175, 202, 222, 224 Нелинейность уравнения состояния морской воды 132, 133 Относительная (взаимная) диффузия частиц 54, 55, 67, 75, 124, 156

- интенсивность пульсаций концент-

рации примеси 108, 146 Очистные сооружения 261-264 Передаточная функция очистного сооружения 262-264 Поток тепла вертикальный 66 — — на границе раздела воздух вода 186, 187 — плавучести 129 примеси через границы слоев 203, 204, 206, 208, 209 — углекнслого газа 186 Правила осреднения Рейнольдса 14 Предельная толщина струи 136 Предельно допустимые концентрации 258 Примеси концентрация 8, 14 потоки 8, 17, 63, 66 уравнеине баланса 9 типы источников 11, 71—74, 76, 78, 116, 139, 207, 222, 226, 237 Принцип суперпозиции 13 Программа ГЕОСЕКС 173 Пятна цветущего моря 181 Распределение пульсаций концентрации примесн 60, 61, 140, 141 Родамин 68, 88 Сбросные устройства 138, 257, 264, 265 Скорость выравнивания (диссипации) флуктуаций концентрации примеси 61, 111, 143 диссипации температурных неоднородностей 232 турбулентной энергии 124, 126, 143, 199, 200, 228, 232, 233, 266 диффузин 37, 79, 127 — трения 111 Случайные блуждания частиц 238 Совместный эффект вертнкальной диффузии и градиента скорости 44, 86, 93, 102 Спектр пульсаций концентрации прнмеси 31, 58, 109, 116, 140, 143, 147, 262, 264 Статнстические характеристики поля концентрацин примеси 107, 114, 140, 142, 147 Счетный коэффициент диффузии 234 Тензор (матрица) коэффициентов турбулентного обмена 15, 16, 247

Теория «видимости сквозь дым» 124 Толщина избытка импульса 267 Уравнение баланса энергии турбулентности 232, 266 — диффузии в форме Лагранжа 251, 253, 257 — Корсина 56 — молекулярной диффузии 10, 11

 турбулентной диффузии полуэмпирнческое 15, 17, 32, 37, 146

— Эйнштейна--Колмогорова 51, 52

Фаза растекания нефти гравитационно-вязкая 191—193, 195

— — инерционная 191, 192, 195

— — поверхностного натяжения 191, 193—196

Факторы самоочищения водиой массы 257, 261, 265

Фиктивиые (счетные) потоки примеси 234

Флюоресцеин 68, 69

Флюориметр 68—70, 76, 77, 88, 116, 134, 138, 140, 145

Фоновая концентрация примеси 159 Фундаментальные решения уравнений диффузии 11--13, 38-40, 42, 43, 45 47, 49, 204

Характерное (крнтическое) время диффузии через прослойку 209

Цнркуляции Лангмюра 87, 105, 114

Частота Вяйсяля—Брента 25, 130— 133, 199, 201, 233

Частотная (спектральная) характеристнка аналитического фильтра 79, 81 Число Ричардсона 25, 26, 135, 136, 186, 199, 208, 233 Робиоль вос. 24, 125

Рейнольдса 34, 135

Шлюзовой эффект 165

Эксцесс пульсаций концентрации примеси 141 Эллипсы дисперсий пятен краснтеля 152 Энстрофия 31, 33—35

Ядерная метеорология 158 -- гидрофизика 158

оглавление

Преднсловие	3
Введение	4
Глава 1. Элементы теории диффузии примесей	8
 1.2. Днффузия примеси в турбулентно движущейся жидкости 1.3. Коэффициенты турбулентной диффузии 1.4. Зависимость коэффициентов обмена от определяющих фак- 	14 16
торов 1.5. Модели диффузии с зависящими от времени и масштаба явления коэффициентами обмена	25 37
 1.6. Диффузия примеси в неоднородном и нестационарном поле осредненной скорости течения	44 50
1.8. Флюктуацни концентрации днффундирующей примеси.	56
Глава 2. Диффузия примесей в океане от локализованных источников	64
 2.1. Методы экспериментальных исследований диффузнн приме- сей в океане	
Глава 3. Диффузия примесей в океане от распределенных источииков	158
 3.1. Диффузия примесей, выпадающих из атмосферы 3.2. Диффузия в океане биогенных элементов, кислорода и углекислого газа 3.3. Особенности диффузии пятен нефти в океане 3.4. Диффузия примеси от распределенных источников в тонко-переслоенном по вертикалн океане 	174 190 198
Глава 4. Практические методы расчета диффузии примесей в океане	216
 4.1. Численные расчеты концентрацин примеси по полуэмпири- ческому уравнению диффузии	235 257
Спнсок литературы	270
Предметный указатель	278

Монография

Ростислав Всеволодович Озмидов ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСЕЙ В ОКЕАНЕ

Редактор З. И. Мироиенко. Художник Е. Е. Городная, Художественный редактор В. В. Быков. Технический редактор Г. В. Ивкова. Корректор А. В. Хюркес. ИБ № 1604. Сдано в набор 11.12.85. Подпнсано в печать 9.04.86. М-15114. Формат 60×90⁴/не. Бумага типографская № 2. Литературная гарнитура. Печать высокая. Печ. л. 17,5. Кр.-отт. 17,5. Уч.-изд. л. 19,77. Тираж 890 экв. Индекс ОЛ-217. Заказ № 422. Цена 3 р. 30 к. Гидрометеоиздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, 23.

Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая кинга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленииград, Прачечный переулок, 6