

Х. ГРИНСПЕН

ТЕОРИЯ  
ВРАЩАЮЩИХСЯ  
ЖИДКОСТЕЙ

Гидрометеоиздат  
Ленинград · 1975

The Theory of Rotating Fluids  
by  
Harvey P. Greenspan  
Cambridge  
At the University Press  
1968

Перевод с английского Э. А. Гурмузовой (гл. II—IV, VI)  
и Р. В. Пяскового (гл. I, V)

Под редакцией д-ра физ.-мат. наук Б. А. Кагана

В монографии известного английского гидродинамика излагаются теории таких движений жидкости, основным элементом которых является вращение. Важные для многих технических приложений, эти теории находят наиболее яркое воплощение в исследованиях атмосферных и океанических течений. Многие привычные явления погоды и известные черты циркуляции океана не имели бы места на невращающейся планете. Прекрасные аналогии этим процессам автор демонстрирует в лабораторной колбе, вращаемой патефонным диском. В книге отражены последние достижения в теории нестационарных и нелинейных движений, различных колебательных (волновых) процессов и гидродинамической устойчивости.

Математические выкладки и решения сопровождаются иллюстрациями экспериментальных результатов.

Книга рассчитана на гидромехаников, метеорологов, океанологов.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	6

### Глава 1. Введение

#### Часть А

1.1. Несколько простых экспериментов	7
1.2. Уравнение движения	11
1.3. Обзор теории	14

#### Часть Б

1.4. Формулировка задачи для стратифицированной жидкости	18
1.5. Элементы теории завихренности	22
1.6. Элементы теории вязкого пограничного слоя	26

### Глава 2. Движение вращающейся жидкости в резервуаре; линейные теории

2.1. Классификация	30
2.2. Почти твердое вращение	30
2.3. Экмановский слой	32
2.4. Спинал	36
2.5. Задачи с начальными условиями: формулировка	39
2.6. Геострофическая мода	44
2.7. Инерционные волны	51
2.8. Теорема о средней циркуляции	53
2.9. Вязкая диссипация	55
2.10. Задача с начальными данными: решение и критика	57
2.11. Особые случаи	59
2.12. Движение в сфере	62
2.13. Прецессия и задача о вынужденных движениях	67
2.14. Резонанс в сфере	76
2.15. Движение в цилиндре	79
2.16. Волны Россби: часть первая	83
2.17. Стационарные течения и экмановские слои	89
2.18. Вертикальные пограничные слои	95
2.19. Стационарные течения и вертикальные слои сдвига	103
2.20. «Ветровая» циркуляция	115
2.21. Некоторые эффекты стратификации	121

### Глава 3. Движение вращающейся жидкости в резервуаре; нелинейные теории

3.1. Введение	130
3.2. Пограничный слой на бесконечной пластине	130
3.3. Пограничный слой на конечной пластине	136

- 3.4. Течение между концентрическими пластинами 139
- 3.5. Сферические границы 144
- 3.6. Моментно-интегральные методы 148
- 3.7. Спинап 155
- 3.8. Некоторые эксперименты по нелинейным явлениям 165
- 3.9. Большая угловая прецессия 167
- 3.10. Вихревые течения и автомодельные решения 171

#### *Глава 4. Движение в неограниченной вращающейся жидкости*

- 4.1. Классификация 175
- 4.2. Плоские инерционные волны 175
- 4.3. Медленное движение вдоль оси вращения 181
- 4.4. Осциллирующее движение 189
- 4.5. Распространение волн в однородном течении 193
- 4.6. Движение вдоль оси вращения с умеренными скоростями 200
- 4.7. Зависимость от времени 209

#### *Глава 5. Уравнения, осредненные по глубине. Модели океанической циркуляции*

- 5.1. Введение 211
- 5.2. Уравнения, осредненные по глубине 211
- 5.3. Океанические модели 219
- 5.4. Стационарные циркуляции и инерционные пограничные слои 233
- 5.5. Волны Россби (часть вторая) 229
- 5.6. Численные исследования 236
- 5.7. Течение между концентрическими сферами 244

#### *Глава 6. Устойчивость*

- 6.1. Введение 253
- 6.2. Критерий Рэлея 253
- 6.3. Устойчивость экмановского слоя: эксперименты 258
- 6.4. Устойчивость экмановского слоя: теория 263
- 6.5. Вертикальные слои сдвига 271
- 6.6. Стратифицированные жидкости 275
- 6.7. Термическая конвекция во вращающемся кольце 276

Список литературы и именной указатель 283  
Обозначения 302

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Мы являемся свидетелями становления новой науки — геофизической гидродинамики. Она занимается изучением динамических процессов в атмосфере и океане и, в первую очередь, движений глобального масштаба.

Такие движения обладают тремя общими свойствами: во-первых, их динамика в значительной мере определяется вращением Земли, во-вторых, они охватывают только тонкую сферическую оболочку и поэтому их вертикальные масштабы значительно меньше горизонтальных и, в-третьих, среда, в которой развиваются эти движения, обычно является стратифицированной, причем таким образом, что более легкие слои жидкости подстилаются более тяжелыми. Эти свойства планетарных движений, так же, впрочем, как и возбуждающие их силы, были известны уже давно. Однако количественное описание пространственной структуры крупномасштабных потоков в атмосфере и особенно в океане до сих пор еще остается до конца не решенной проблемой.

Сейчас, когда мы приобрели уже некоторый опыт в воспроизведении глобальной циркуляции, стало ясно, что трудности подобного рода исследований связаны большей частью с несовершенством наших представлений о механизме явления. Создавшаяся ситуация требует изучения интересующих нас движений при строго контролируемых условиях. Для этого имеются две возможности: лабораторное экспериментирование и решение модельных задач. При всей своей ограниченности они ценны тем, что с их помощью можно надеяться выделить наиболее характерные стороны явления и тем самым облегчить понимание его механизма.

В этом отношении весьма полезна книга Х. Гринспена «Теория вращающихся жидкостей», предлагаемая вниманию читателя в русском переводе. Она входит в известную Кембриджскую серию монографий, посвященных современным проблемам геофизики, и, как во всех книгах этой серии, в ней дан обзор современного состояния знаний в области науки, находящейся в ранней стадии быстрого роста.

Жанр книги своеобразен. С одной стороны, она предназначена служить учебным пособием и этим объясняется включение в нее общих сведений из гидродинамики и элементов теории вязкого пограничного слоя. С другой стороны, книга объединяет оригинальные исследования автора и его зарубежных коллег по динамике вращающейся жидкости, заключенной в резервуар, и теории волновых движений, которые не нашли еще достаточно отражения в монографической литературе.

Отбор материала здесь весьма субъективен. Основным принципом, которым руководствовался автор, является новизна, содержательность и законченность выполненных исследований. Такой подход к выбору материала вряд ли может встретить возражение. Некоторое сожаление вызывает лишь отсутствие в книге упоминаний результатов работ советских ученых. Этот пробел читатель может восполнить, обратившись к книгам Л. А. Дикого «Теория колебаний земной атмосферы» (Л., Гидрометеоиздат, 1969), А. С. Монина «Прогноз погоды как задача физики» (М., «Наука», 1969), В. М. Каменковича «Основы динамики океана» (Л., Гидрометеоиздат, 1973) и коллективной монографии «Нелинейные системы гидродинамического типа» под редакцией А. М. Обухова (М., «Наука», 1974).

Книга Х. Гринспена написана живо и ясно, примеры и иллюстрации производят, помимо всего прочего, большое эстетическое впечатление. Книга, безусловно, будет полезна всем, кто интересуется динамикой жидкости, и прежде всего специалистам по динамике океана и атмосферы.

При переводе были учтены исправления автора, любезно присланные им вместе со списком дополнительной литературы специально для русского издания.

*Б. Каган*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Выбор материала и стиль изложения невозможно поставить в точное соответствие друг с другом, особенно, если изучаемые предметы находятся в процессе быстрого и разностороннего развития. Может быть поэтому мне было бы интересно очертить сферу этой работы, ее рациональность и некоторые из решений и компромиссов, к которым я пришел или которые я принял.

Я стремился подготовить основание для поддержки и поощрения исследований вращающихся жидкостей. Поскольку эта тема имеет множество ответвлений, я попытался сконцентрировать внимание на тех вопросах, которые считаю фундаментальными, исключительно важными для большинства, если не для всех областей приложения. Практически, это означает изучение вращающихся жидкостей при вполне обычных условиях, не приукрашенных очень специальными или экзотическими эффектами, т. е. изучения движения заключенной в сосуд несжимаемой вязкой жидкости, такой как вода, в простой контролируемой обстановке. Кроме того, внимание сосредоточено почти исключительно на главных явлениях, происходящих *только во вращающейся* среде. Чтобы ограничить объем монографии, я сильно сокращал, а иногда опускал обсуждение материала, который получил широкое освещение в других книгах.

Подробность теоретического анализа — это проблема, не имеющая общего удовлетворительного решения. То, что достаточно для одного читателя, может оказаться недостаточным или, наоборот, излишним для другого. Моя политика состоит в следующем: если материал нов, тема содержательна или методы основополагающи, то предпочтено полное изложение. С другой стороны, я, колеблясь, просто отмечал или резюмировал трудные, пространные или незаконченные исследования, позаботившись указать все относящиеся к делу работы. Сложные детали тщательно разработанных экспериментов и вычислительных программ также опущены. Однако серьезному студенту настоятельно рекомендуется воспроизвести своими силами некоторые эксперименты, требующие умеренных расходов; сообщаются достаточные для этой цели подробности. Эти опыты дают жизнь предмету, и их роль в развитии интуиции невозможно переоценить.

Я стараюсь разбить изложение на возможно большее число достаточно самостоятельных разделов. С этой целью часто повторяются основные уравнения движения, которые являются главнейшими определениями. Я рассматриваю эти повторения как небольшую плату за предоставляемое удобство.

Во всем этом, несомненно, присутствует значительная доля личного предпочтения, которое является авторской прерогативой, если даже это может оказаться вызовом чьим-то литературным мнениям.

## Г Л А В А 1

### ВВЕДЕНИЕ

#### Ч А С Т Ь А

##### 1.1. Несколько простых экспериментов

На земле все явления, происходящие в жидкости, в большей или меньшей степени связаны с вращением. Вращение является совершенно необходимым фактором для циркуляции большого масштаба в атмосфере и океане и столь многих мелкомасштабных течений, что нет надобности их перечислять. Хотя разнообразие этих движений исключительно велико, существуют все же общие процессы в их механизме. Это та основная структура вращающихся жидкостей, которая изучается здесь.

Важнейшие эффекты вращения, которые не могут существовать без него, несомненно, можно назвать заметными; более того, их можно наблюдать в очень простых экспериментах. Легкость, с которой воспроизводятся и демонстрируются важные и экстраординарные явления, очаровательна.

Несколько интересных опытов можно выполнить с простейшими приборами, такими как диск патефона, источник света, прозрачный цилиндрический сосуд и немного дополнительного оборудования. Закрытый сосуд *целиком* заполнен водопроводной водой, в которой взвешено немного алюминиевого порошка, смешанного с обычным стиральным. Сосуд освещают сбоку через вертикальную щель. Наилучшим направлением наблюдения является перпендикуляр к направлению лучей. Схема эксперимента показана на рис. 1.1. Свет, отраженный случайно ориентированными плоскими частичками, образует однородную фактуру, показанную в центре рис. 1.4. Очень легкое сдвиговое смещение в любой части сосуда приводит к такому упорядоченному перемещению металлических частичек, что изменение интенсивности света видно наблюдателю. В результате получается исключительно чувствительный индикатор относительных движений жидкости, пригодный для визуального и фотографического наблюдения.

В первом эксперименте маленький твердый предмет надежно фиксировался на дне заполненного сосуда, и вся система приводилась в состояние твердого вращения. Затем скорость вращения была чуть-чуть изменена, на 0,5% от 16 об/мин, так что угловые скорости оболочки и содержащейся в ней жидкости не оставались одинако-

вымп. Эта разница скоростей существует в течение значительного промежутка времени, более длительного, чем требуется для демонстрации опыта. Существенная особенность здесь состоит в возникновении движения жидкости относительно препятствия.

На фотографии (рис. 1.2, а) ясно виден столбик жидкости, жестко связанной с выпуклостью на дне. Вся жидкость, которая содержится в этом вертикальном цилиндре, опирающемся на препятствие, удерживается в нем и должна двигаться вместе с препятствием как единое целое. Течение вокруг этого цилиндра почти такое же, как если бы

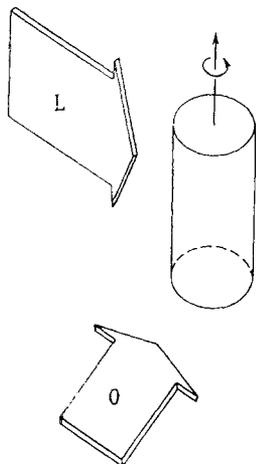


Рис. 1.1. Схематическое расположение установки.

L — щелевой источник света; O — направление наблюдения.

он весь был непроницаемым и твердым, как это видно на рис. 1.2, б. Смысл эксперимента состоит в том, чтобы показать, как относительное движение тела и вращающейся жидкости формирует столбчатое или двухмерное течение. Теоретически это было впервые предсказано Праудменом [210] и вскоре после этого экспериментально подтверждено Тэйлором [263, 264, 266]. (Чтобы возбудить относительное движение, Тэйлор медленно перемещал препятствие по дну вращающегося сосуда; разумеется, чистый эффект оставался в основном тем же самым.)

Это наиболее поразительное и необычное явление, связанное с вращением, встречается часто и во многих эквивалентных формах на протяжении этой работы. Другие примеры столбиков Тэйлора — Праудмена будут описаны позднее.

Наблюдаемая сильная тенденция к двухмерности в действительности есть частное проявление более общего свойства вращающихся жидкостей, а именно — вращение позволяет несжимаемой жидкости, такой как вода, поддерживать внутреннее волновое движение. Это можно показать на описанной установке с помощью маленького колеблющегося диска, помещенного в середине цилиндрического сосуда [88, 193]. Диск совершает «бесконечно малые» колебания с частотой  $\omega$  в направлении нормали к его собственной поверхности и параллельно оси вращения. Пока сосуд не вращается, движение жидкости, возбуждаемое таким способом, внешне во всех практических отношениях — это вполне обычное потенциальное течение. Однако, если прибор будет равномерно вращаться с частотой  $\Omega$ , то при  $\omega \leq 2\Omega$  можно будет наблюдать необычные эффекты. Это показано на рис. 1.3. Узор, который становится видимым благодаря тонким свободным слоям сдвига в жидкости, определенно напоминает конусы Маха в динамике сжимаемой жидкости вплоть до многократного отражения от боковых стенок цилиндра. Внутренние пограничные слои являются на самом деле вязко модифицированными характеристическими поверхностями, типичными для гиперболических или волновых задач. Столбики Тэйлора — Праудмена соответствуют

характеристическим поверхностям при нулевой частоте возбуждения,  $\omega = 0$ . По мере увеличения частоты до значения  $2\Omega$  характеристические конусы приближаются к горизонтальным плоскостям. При переходе через это критическое значение система волн совершенно исчезает, и течение снова становится похожим на потенциальное. Математически переход от гиперболического характера к эллиптическому должен происходить при точном равенстве  $\omega = 2\Omega$ .

Другой важный процесс во вращающейся жидкости связан с механизмом, при помощи которого вторичное течение может существенно изменять главное движение путем небольшого перераспределения углового момента. Вторичное течение часто возбуждается вязкими пограничными слоями, и воздействие на основное движение достигается растяжением вихревой линии и сохранением углового момента. Это взаимодействие двух движений происходит при затухании вихрей, будь то ураган, диссипирующий над сушей, или чай, успокаивающийся в чашке после помешивания. Действительно, последний «эксперимент» является совсем тривиальным, он доступен всем, и с его помощью можно добиться понимания этого важного механизма.

Каузальное наблюдение обнаруживает, что движение в обычной чайной чашке прекращается приблизительно через минуту после помешивания. Кроме того, концентрация чайнок в центре дна служит верным указанием на присутствие вторичного течения. Гипотеза о том, что затухание вихря в этом случае вызвано процессом вязкой диффузии в полосе шириной  $2L$  дает характерный масштаб времени  $L^2/\nu$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость воды. Типичным значениям  $L$  и  $\nu$  ( $L = 4$  см,  $\nu = 0,01$  см<sup>2</sup>/с при 100° С) соответствует слишком большое время диссипации — ясно, что упомянутая выше



Рис. 1.2. а — столбик Тэйлора — Праудмена; б — на фото Д. Дж. Вэйкера показано течение позади столбика Тэйлора — Праудмена. Линии краски лежат в плоскости уровня значительно выше цилиндрического препятствия, вызвавшего возмущение, относительно движение однородно и стационарно. В отсутствие вращения линия краски остается прямой (на рисунке — горизонтальной), проходя поверх цилиндра.

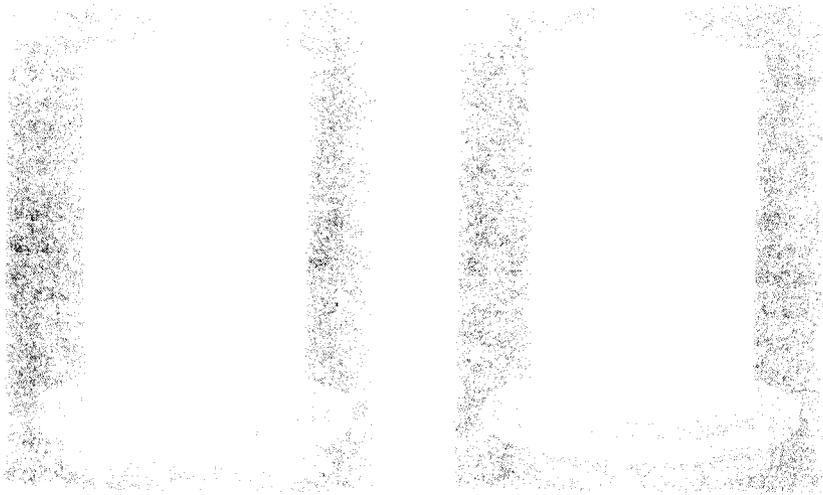


Рис. 1.3. *a* — волны, возбуждаемые колеблющимся диском,  $\omega/\Omega = 1,75$ . Половина угла при вершине конуса  $59^\circ$ , теоретическое значение  $56^\circ$ ; *b* — угол при вершине увеличивается с ростом  $\omega/\Omega$ .

гипотеза ошибочна. Правильный масштаб времени оказывается равным  $L/(\Omega v)^{1/2}$  ( $\Omega$  — начальная скорость вращения), что соответствует промежутку времени, в течение которого вторичный поток может переместить частичку жидкости в придонный пограничный слой, где элиминируется избыток ее углового момента.

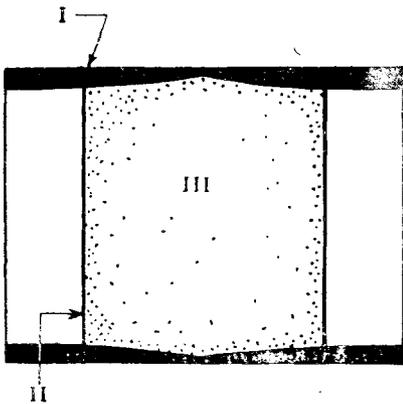


Рис. 1.4. Закручивание из состояния покоя. Влекущее движение на ранней стадии указывает на наличие экмановского пограничного слоя I (преувеличено), световой фронт II и почти неподвижная сердцевина III.

Очень показателен обратный эксперимент — закручивание из состояния покоя [290], если его выполнять с помощью техники, использованной в предыдущих опытах. В этом случае можно наблюдать формирование пограничных слоев на горизонтальных поверхностях в течение нескольких первых оборотов, следующих за мгновенным стартом. Невращающаяся жидкость всасывается в эти слои, раскручивается под действием вязкости и возвращается во внутреннюю часть вдоль боковых стенок.

Рисунок 1.4 показывает этот вид движения; пограничные слои появляются в виде тонких темных полосок, прилегающих к горизонтальным поверхностям. Невозму-

щная жидкость всегда занимает небольшое центральное ядро и является немного более сильным источником рассеянного света, чем закрученная жидкость, вернувшаяся из пограничных слоев. Почти совершенно вертикальный световой фронт, разделяющий два внутренних режима, является убедительным доказательством того, что вращающиеся течения имеют сильное предрасположение к двумерности даже при наличии нелинейных эффектов. Этот цилиндрический фронт отмечает положение тех частиц жидкости, первоначально находившихся на боковых стенках, которые вращение заставило двигаться внутрь сосуда всех вместе в виде вертикальных столбиков. Временной масштаб процесса раскручивания такой же, как и в эксперименте с чайной чашкой, так как преобладающие механизмы идентичны.

Этот механизм, включающий взаимодействие пограничных слоев, вторичных потоков, завихренности и углового момента, настолько важен, что большая часть этой книги посвящена его разъяснению. Остальное отведено другим процессам, которые действительно заслуживают равного внимания, в частности, из-за вызываемых ими интересных и заметных течений. Атмосферные струйные и великие океанические течения принадлежат к этой категории.

Описанные здесь опыты дают представление о главных эффектах. Полный анализ этих и других экспериментов появится в следующих разделах.

## 1.2. Уравнения движения

Мы принципиально ограничимся рассмотрением движения несжимаемой вязкой жидкости с неизменными физическими свойствами. Вначале формулируется общая задача этого типа, а затем обоснуются отдельные упрощения теории. Проявления плотностной стратификации исследуются достаточно часто на протяжении этой работы, так что гарантируется детальное развитие и более общей теории. Однако она представлена и отдельно в разделе 1.4 с тем, чтобы отложить на некоторое время введение дополнительных усложнений.

Уравнения, описывающие движение несжимаемой вязкой жидкости, выражают сохранение массы и количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) + (\nabla \times \mathbf{q}) \times \mathbf{q} + 2\Omega \times \mathbf{q} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F} - \nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  — скорость частицы, измеряемая в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  ( $= \Omega \hat{\mathbf{k}}$ )<sup>1</sup>;  $\mathbf{r}$ ,  $t$ ,  $P$ ,

<sup>1</sup> Если  $\Omega$  зависит от времени, в левую часть (1.2.2) следует добавить член  $-\Omega \times (d/dt) \Omega$ .

$\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{F}$  представляют соответственно радиус-вектор частицы, время, давление, плотность, кинематическую вязкость и массовую силу, отнесенную к единице массы. Массовая сила предполагается консервативной  $\mathbf{F} = \nabla A$ , так что ее вместе с центробежной силой и  $P$  можно записать в форме *редуцированного давления*

$$p = P + \rho A - \frac{1}{2} \rho (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.2.3)$$

Это упрощает уравнение (1.2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{v} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{q}). \quad (1.2.4)$$

Полная форма конвективного ускорения  $\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q}$  используется чаще, чем инвариантное векторное представление.

Уравнения движения в инерциальной системе координат получаются из предыдущих уравнений, если положить в них  $\boldsymbol{\Omega} = 0$ .  
Формула

$$\mathbf{q}_{\text{inert}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{q}_{\text{rot}}$$

связывает между собой скорости частицы в инерциальной и вращающейся системах.

На твердых непроницаемых поверхностях вязкая жидкость должна двигаться вместе с этими поверхностями, так как скольжение вдоль них или пересечение их невозможно. Если поверхность проницаемая, можно задать нормальную компоненту скорости, но требование отсутствия скольжения или относительной тангенциальной скорости остается в силе. В общем случае граничная поверхность имеет части, равномерно вращающиеся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}_W$ . По отношению к системе, вращающейся со скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$ , граничное условие на такой поверхности есть

$$\mathbf{q} = (\boldsymbol{\Omega}_W - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}. \quad (1.2.5)$$

Постановка задачи завершается описанием начального поля скорости

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{q}_*(\mathbf{r}). \quad (1.2.6)$$

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы решить уравнения (1.2.1) и (1.2.4) в фиксированной области с граничными условиями типа (1.2.5) и (1.2.6).

Пусть  $L$ ,  $\Omega^{-1}$ ,  $U$  характеризуют типичную длину, время и относительную скорость движения частицы. Замена переменных  $\mathbf{r}$ ,  $t$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\rho$  их нормированными значениями  $L\mathbf{r}$ ,  $\Omega^{-1}t$ ,  $U\mathbf{q}$ ,  $\Omega\mathbf{k}$ ,  $\rho\Omega UL\rho$  позволяет привести уравнения к безразмерному виду:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla p - E \nabla \times \nabla \times \mathbf{q}, \quad (1.2.8)$$

с соответствующими граничными условиями. (Значок  $\Lambda$  отмечает единичный вектор.) При этом появляются два важных безразмерных параметра: число Экмана

$$E = \frac{\nu}{\Omega L^2} \quad (1.2.9)$$

и число Россби

$$\varepsilon = \frac{U}{\Omega L}. \quad (1.2.10)$$

Первый является грубой мерой отношения типичной силы вязкости к силе Кориолиса и есть, по существу, обратное число Рейнольдса. Подобно этому число Россби — отношение конвективного ускорения к ускорению Кориолиса — дает общую оценку относительного значения нелинейных членов. Число Экмана очень мало в большинстве тех случаев, когда преимущественно проявляются эффекты вращения. Практически величина  $10^{-5}$  является для него обычной и в последующем предположение  $E \ll 1$  используется без дальнейших оговорок. Число Россби  $\varepsilon$  имеет порядок единицы или меньше; в линейной теории его значение принимается бесконечно малым.

*Безразмерное уравнение вихря во вращающейся системе есть*

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \times \{(\varepsilon \mathbf{v} + 2\hat{\mathbf{k}}) \times \mathbf{q}\} = -E \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}, \quad (1.2.11)$$

где

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{q}. \quad (1.2.12)$$

Тривиальное решение этих уравнений,  $\mathbf{q} = 0$ , отвечает, конечно, нетривиальному состоянию твердого вращения, наблюдаемому во вращающейся системе. В инерциальной системе соответствующая размерная скорость есть просто  $\mathbf{q}_{\text{inert}} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}$ . Очевидно, что вязкая жидкость, заключенная в закрытый равномерно вращающийся сосуд, стремится с течением времени к этому естественному состоянию жесткого вращения. Поучительно исследовать способ, которым это достигается. Важная попытка продвинуться в указанном направлении сделана в главе 2.

Вероятно, здесь уместны некоторые пояснения обозначений. Для различения размерных и безразмерных переменных не используются специальные символы. Контекст (т. е. присутствие параметров, подобных  $\varepsilon$  и  $E$ ) вполне гарантирует от недоразумений. Хотя безразмерная форма имеет свои преимущества, она используется не повсеместно. В последующем характерные значения длины, времени и скорости, употребляемые в других разделах, будут обозначаться специальными символами  $\llbracket L, t, U \rrbracket$ , в данном случае  $\llbracket L, \Omega^{-1}, \varepsilon \Omega L \rrbracket$ . Это позволит легко ссылаться и переходить к различным способам нормировки, когда это понадобится. Другие безразмерные переменные будут определены явно.

### 1.3 Обзор теории

Теперь может быть установлено, что эта теоретическая формулировка достаточно обща, чтобы объяснить явления, описанные в первом разделе. Действительно, можно много почерпнуть из почти поверхностного анализа уравнений.

Рассмотрим, во-первых, следствие малости числа Экмана  $E$ , которое является множителем при членах с высшими производными в (1.2.8). Это число является формальным критерием существования пограничных слоев где-либо внутри области, занятой жидкостью. Хорошо известно, что тонкие слои сдвига расположены вдоль граничных поверхностей, и внутри этих слоев тангенциальная компонента скорости приспособляется к ее значению на стенке посредством вязкости. Однако вязкие слои могут появляться также внутри потока в противодействие любому эффекту, стремящемуся создать более или менее резкие разрывы профиля скорости. Структура любого пограничного слоя зависит от основного баланса сил и в общем изменяется от случая к случаю. Будет показано, что в задачах о вращающейся жидкости толщина пограничного слоя может быть равна  $LE^{1/2}$ ,  $LE^{1/3}$ ,  $LE^1$ .

Концентрация действия вязкости в узких слоях означает, что где-нибудь в другом месте жидкость ведет себя по существу как невязкая, т. е. как если бы  $E = 0$ . Классическая теория пограничного слоя или метод сращиваемых асимптотических разложений справедливо считаются аналитическими средствами, связывающими различные режимы вязкого течения [276].

Может быть не так очевиден или общеизвестен факт существования пограничных слоев при малых числах Россби  $\varepsilon$ , называемых инерционными пограничными слоями. Снова можно предложить математический критерий: когда  $E$  равно нулю,  $\varepsilon$  является множителем при наибольших оставшихся членах со старшими производными. При  $0 < E \ll \varepsilon \ll 1$  должны иметь место два пограничных слоя: «широкий» инерционный слой и внутри его более тонкий вязкий подслой. Строгий смысл неравенства, а также соотношение между двумя параметрами представляет собой предмет дальнейшего исследования. Точная природа довольно тонкого баланса сил в нелинейном инерционном пограничном слое излагается в разделе 5.4.

Рассмотрим простой частный случай редукции общей теории для медленного ( $\varepsilon = 0$ ), стационарного ( $(\partial/\partial t) \mathbf{q} = 0$ ) и невязкого ( $E = 0$ ) течения. Уравнение количества движения есть теперь

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla p. \quad (1.3.1)$$

Вихрь от этого выражения и использование (1.2.7) дает глубокий результат, известный как теорема Тэйлора — Праудмена:

$$(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla) \mathbf{q} = 0. \quad (1.3.2)$$

Отсюда следует, что при описанных условиях скорость частицы должна быть независимой от координаты, измеряемой в направлении оси вращения  $z$ , т. е.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y).$$

Более того, поскольку каждая частица в вертикальном столбе жидкости имеет одну и ту же скорость, весь столб движется как единый удлиненный вертикальный элемент жидкости. Такой элемент, ограниченный на концах твердыми стенками, во время движения вынужден сохранять одну и ту же длину. Например, согласно этой теореме не может существовать течения через небольшое возвышение в ситуации, показанной на рис. 1.2, так как для этого потребовалось бы изменение высоты столба жидкости. (Граничное условие отсутствия нормальной компоненты скорости на непроницаемых стенках означает, что вертикальная скорость равна нулю на верхней стенке, но не на препятствии. Так как эта скорость не зависит от высоты, противоречие очевидно, и течение такого типа невозможно.) Альтернатива состоит в том, чтобы цилиндрический объем жидкости, находящийся над препятствием, двигался как твердое тело. Это согласуется с наблюдениями. Однако существуют и другие возможности, поскольку исходные предположения были очень строгими. Противоречие означает только то, что какие-нибудь предположения не выполняются в реальных течениях. Это требует изучения, но для введения достаточно отметить, что эксперименты действительно обнаруживают такие двухмерные течения и что теория предсказывает их возникновение. Полная линейная теория развита в следующей главе.

Наконец, линейная теория нестационарного невязкого течения допускает волнообразные решения. При  $\epsilon = 0$ ,  $E = 0$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{Q}e^{i\lambda t}, \\ p &= \Phi e^{i\lambda t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

Задача сводится к решению уравнений:

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (1.3.4)$$

$$i\lambda \mathbf{Q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} = -\nabla \Phi, \quad (1.3.5)$$

с невязким граничным условием

$$\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (1.3.6)$$

на стенках сосуда; здесь  $\hat{\mathbf{n}}$  — их внешняя нормаль. Для давления эта краевая задача сводится к уравнению

$$\nabla^2 \Phi - \frac{4}{\lambda^2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla)^2 \Phi = 0, \quad (1.3.7)$$

с условием

$$-\lambda^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi + \frac{4}{\lambda^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi) + 2i\lambda (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (1.3.8)$$

на граничной поверхности. Эта обобщенная проблема собственных значений допускает решение для замкнутого объема при вещественных  $\lambda$  ( $|\lambda| < 2$ ), но доказательство этого и многих других интересных свойств требует далеко идущего анализа. Здесь уместно отметить

лишь тот факт, что (1.3.7) при  $|\lambda| < 2$  есть пространственный гиперболический оператор. Гиперболичность уравнений означает, что разрывы могут возникать в жидкости поперек характеристических поверхностей, которые в данном случае являются коническими

$$(x^2 + y^2)^{1/2} \pm \lambda (4 - \lambda^2)^{-1/2} z = \text{const.} \quad (1.3.9)$$

Это поверхности, которые показаны на рис. 1.3; эксперименты Гертлера [87, 88] и Озера [193] подтверждают теоретическую зависимость угла при вершине конуса от частоты колебаний диска. Заметим, что «скорость звука» является функцией частоты, так что волновая система дисперсионна.

Этот предварительный анализ показывает, что некоторые из наиболее важных эффектов во вращающейся жидкости можно объяснить с помощью простой теории. Более того, баланс между градиентом давления и силой Кориолиса с поправками на эффект вязкости вблизи границ выступает как основа всего предмета. Раз эти процессы вполне понятны, имеются основания для дальнейшего исследования. Это не означает, что другие механизмы всегда второстепенны, но лишь то, что в систематическом изложении они стоят на втором месте.

## Ч А С Т Ь Б

### 1.4. Формулировка задачи для стратифицированной жидкости

Для описания эффектов сжимаемости и изменения плотности при вращательном движении жидкости нужна более общая формулировка. Можно ожидать, что комбинация стратификации и вращения приведет к серьезным трудностям, особенно в силу того, что эти факторы порознь связаны с очень богатым набором сложных физических явлений (см. [296] в качестве современного обзора теории стратифицированной жидкости). В соответствии с целями, выдвинутыми в предисловии, здесь изучаются только модификации основных процессов вращения, и теория развита в той мере, в какой она согласуется с этими ограниченными целями.

Рассмотрим движение слабо стратифицированной жидкости, имеющей постоянные физические свойства, такие как динамическая и объемная вязкость  $\mu_*$ ,  $\beta_*$ , удельная теплоемкость  $c_p$  и теплопроводность  $k$ . Уравнения, описывающие движение жидкости, выражают сохранение массы, момента и энергии и дополняются уравнением состояния. В *равномерно вращающейся* системе координат уравнения динамики таковы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1.4.1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) + (\nabla \times \mathbf{q}) \times \mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q} \right] = -\nabla P - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) -$$

$$+ \rho \mathbf{F} - \mu_* \nabla \times \nabla \times \mathbf{q} - \left( \beta_* + \frac{4}{3} \mu_* \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (1.4.2)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T \right) = \kappa \nabla^2 T + \mu_* \left[ \nabla^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + 2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{q}) \times \mathbf{q} - \right. \\ \left. - 2 \mathbf{q} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \times \mathbf{q} \cdot \nabla \times \mathbf{q} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{q})^2 \right] + \beta_* (\nabla \cdot \mathbf{q})^2, \quad (1.4.3)$$

где  $T$  — температура. Величина

$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla P \right),$$

которая обычно появляется в левой части (1.4.3), отброшена, так как для жидкостей она очень мала по сравнению с другими слагаемыми. Это допускает некоторое упрощение процедуры без существенного ущерба. Для реальных условий членом вязкой диссипации тоже можно пренебречь по тем же соображениям, но это еще не очевидно, и временно он будет сохранен.

Уравнение состояния

$$\rho = \rho(P, T) \quad (1.4.4)$$

в общем случае очень сложно, но для большинства жидкостей превосходное приближение в широком диапазоне значений дает выражение

$$\rho = \rho_m - \alpha_* (T - T_m), \quad (1.4.5)$$

где индекс « $m$ » означает среднюю величину, а коэффициент термического расширения  $\alpha_*$  очень мал. Для воды изменение плотности составляет около 1% при температуре от 0 до 50° С и 3% при температуре от 50 до 100° С.

Наиболее интересный для нас класс движений связан с незначительными отклонениями от состояния равновесия или близкого к нему состояния, причем массовой силой является сила тяжести, и она параллельна вектору угловой скорости  $\Omega$ .

Статическое равновесие, т. е. состояние, при котором отсутствует относительное движение жидкости, при постулированных выше условиях во вращающейся системе невозможно (см. также [297]). Для доказательства этого предположим, что  $\mathbf{q}_e = 0$  (индекс означает равновесную переменную). Из уравнения момента (1.4.2) следует

$$\nabla P_e = -\rho_e \Omega^2 \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}) - \rho_e g \hat{\mathbf{k}}. \quad (1.4.6)$$

Вихрь этого выражения дает следующее уравнение в цилиндрических координатах для осесимметричного равновесного распределения плотности:

$$g \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + r \Omega^2 \frac{\partial \rho_e}{\partial z} = 0.$$

Его общее решение есть

$$\rho_e = \rho_e \left( z - \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \right). \quad (1.4.7)$$

Давление и температура  $T_e$ , которая находится из уравнения состояния (1.4.4), должны быть также функциями ( $z - \Omega^2 r^2 / 2g$ ). Однако при этом уравнение энергии

$$\nabla^2 T_e = 0 \quad (1.4.8)$$

не имеет нетривиального решения нужной формы

$$T_e = T_e \left( z - \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \right).$$

Это противоречие доказывает утверждение о том, что в стационарном состоянии должна иметь место конвекция. Однако можно доказать, что состояния, близкие к статическому равновесию, существуют почти без изменений гораздо дольше, чем многие изучаемые проявления вращения. Например, если сила тяжести много больше центробежной силы, а ширина и высота контейнера сравнимы между собой, то

$$\frac{\Omega^2 r^2}{2g} \ll z$$

и  $\rho_e$ ,  $T_e$  и т. д. по существу являются функциями одной высоты. В этом случае

$$T_e \cong T_0 + z \Delta T \quad (1.4.9)$$

есть точное решение (1.4.8), и оно описывает состояние приближенного равновесия при малом числе Фруда  $F_R = \Omega^2 L / g$  с ошибкой порядка  $F_R$ .

Среда, обладающая диффузионной передачей очень малых количеств тепла (или соли), может находиться в условиях, близких к статическому равновесию. Диффузионными процессами часто полностью пренебрегают, потому что основная стратификация изменяется незначительно за время протекания главного процесса. Может оказаться даже, что за этот промежуток времени «стационарное» состояние будет почти достигнуто, прежде чем скажутся процессы, которыми мы пренебрегли. Другими словами, по порядку величины масштаб времени для диффузии температуры (или солености) может быть больше, чем для движения. Распределения, близкие к равновесным, которые в действительности являются слегка варьирующими функциями этого большого масштаба времени, оказываются почти стационарными для более коротких интервалов. Точный анализ и процедура разложения, объединяющая все малые изменения и множество масштабов времени, были бы излишним усложнением с точки зрения наших ограниченных целей. Здесь мы имеем дело с возмущениями линейного температурного поля (1.4.9), близкого к равновесному. Иногда это распределение как будто может развиваться при наличии стационарной конвекции. Однако полное аналитическое описание равновесного поля, в том числе и движения жидкости, представляет, может быть, наиболее трудную задачу (см. раздел 6.7).

Движение жидкости во вращающейся системе часто возникает при вращении участков **граничной** поверхности со слегка отлича-

ющимися угловыми скоростями. Хотя возможны и другие способы, анализ размерностей исходных уравнений основан именно на этом виде возбуждения и на предположении, что плотностная стратификация оказывает решающее действие лишь постольку, поскольку существенна сила плавучести.

Как и прежде, превышение скорости над скоростью твердого вращения будем характеризовать величиной  $\varepsilon\Omega L$  так, чтобы безразмерные изменения скорости стали порядка единицы. Масштабы длины, времени и скорости суть  $[L, \Omega^{-1}, \varepsilon\Omega L]$ . Структура плотности описывается тремя величинами:  $\rho_0$  — средним по всему полю значением,  $\Delta\rho$  — мерой стратификации вблизи равновесного состояния,  $\varepsilon\Omega^2 L \rho_0/g$  — характеристикой отклонения плотности, вызванного вращением. Последний масштаб получен из условия равенства сил Кориолиса и плавучести. Следовательно, мы имеем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \rho'_e(z) + \frac{\varepsilon\Omega^2 L}{g} \rho', \quad (1.4.10)$$

где  $\rho'$  — безразмерное возмущение плотности. Первые два члена с масштабными множителями определяют  $\rho_e$ . Распределение температуры представляется аналогичным образом:

$$T = T_0 + \Delta T \left( T_e(z) + \frac{\varepsilon\Omega^2 L}{\rho_0 g} T \right). \quad (1.4.11)$$

Обычно  $\Delta T$  задано, а величина  $\Delta\rho$  определяется с помощью соотношения, включающего известное разложение

$$\alpha_* = \frac{\Delta\rho}{\Delta T} = \left( \frac{d\rho}{dT} \right)_m.$$

Наконец, давление есть

$$P = \rho_0 g L P_e + \varepsilon \rho_0 \Omega^2 L^2 p. \quad (1.4.12)$$

В связи с изменениями плотности появляется несколько новых параметров в задачу к  $\varepsilon$  и  $E$ :

число Фруда  $F_R = \Omega^2 L/g$ ;

плотностной коэффициент  $\mu = \Delta\rho/\rho_0$ ;

внутреннее число Фруда  $f_{FR} = \Omega^2 L \left| \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g \right| = F_R/\mu$ ;

число Прандтля  $\sigma_P = \mu_* c_P/k$ ;

коэффициент диффузии  $D = \nu\Omega/c_P\Delta T$ .

Из них  $\varepsilon$ ,  $E$ ,  $F_R$ ,  $D$  предполагаются малыми (хотя и в различной степени) по сравнению с единицей,  $f_{FR}$  порядка единицы,  $\sigma_P$  может быть больше единицы. Эти предположения ограничивают обсуждение очень небольшим диапазоном значений параметров, однако он охватывает широкое разнообразие интересных и важных физических процессов.

Достаточно показательны удельные величины для воды. При  $20^\circ\text{C}$   $\mu_* = 0,01002 \text{ г}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$ ,  $k = 6\cdot 10^4 \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^{-3} \text{ град}^{-1}$ ,  $c_P = 4\cdot 10^7 \text{ см}^2\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{град}^{-1}$ ,  $\rho = 0,9982 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ . Кроме того,  $\rho = 1$

при  $4^\circ \text{C}$ ,  $0,988$  при  $50^\circ \text{C}$  и  $0,958$  при  $100^\circ \text{C}$ , это дает  $\alpha_* \cong 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-1}$ . Следовательно, величина  $\mu = 0,001$  требует разности температур в несколько градусов. Если, например,  $\alpha_* = 2 \cdot 10^{-4} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-1}$ , то  $\mu = 0,001$  и  $\mu = 0,01$  соответственно при  $\Delta T = 5^\circ \text{C}$  и  $\Delta T = 50^\circ \text{C}$ . Типичные значения в экспериментах могут быть  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\mu = 0,01$ ,  $L = 20 \text{ см}$ ,  $\Omega = 1 \text{ рад/с}$ , так что  $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $F_R \cong 0,02$ ,  $f_R = 2,0$ ,  $\sigma_p = 6,67$ ,  $D = 5 \cdot 10^{-12}$ . Большое значение числа Прандтля свидетельствует о том, что, прежде чем движение диссипирует под действием вязкости, происходят небольшие изменения температуры вблизи ее равновесного положения. Малое значение  $D$  указывает на то, что диссипация механической энергии трением — несущественный член в уравнении энергии. Читатель также может проверить, что член, опущенный в этом уравнении, действительно мал.

С помощью этих масштабных множителей уравнения возмущенной массы, момента и энергии переписываем в *бездразмерной* форме:

$$F_R \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mu \mathbf{q} \cdot \nabla \rho'_e + \varepsilon F_R \mathbf{q} \cdot \nabla \rho' + (1 + \mu \rho'_e + \varepsilon F_R \rho') \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1.4.13)$$

$$(1 + \mu \rho'_e + \varepsilon F_R \rho') \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} \right) = -\nabla p - F_R \rho' \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}) - \rho' \hat{\mathbf{k}} + E \left( \nabla^2 \mathbf{q} + \left( \frac{\beta_*}{\mu_*} + \frac{4}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{q} \right), \quad (1.4.14)$$

$$(1 + \mu \rho'_e + \varepsilon F_R \rho') \left( f_R \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T_0 + \varepsilon f_R \mathbf{q} \cdot \nabla T \right) = \frac{E f_R}{\sigma_p} \nabla^2 T + \varepsilon D \left( \nabla^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - 2 \nabla \cdot \mathbf{q} \times \nabla \times \mathbf{q} - 2 \mathbf{q} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \times \mathbf{q} \cdot \nabla \times \mathbf{q} + \left( \frac{\beta_*}{\mu_*} - \frac{2}{3} \right) (\nabla \cdot \mathbf{q})^2 \right). \quad (1.4.15)$$

Общее уравнение состояния (1.4.4) дополняет эту систему.

Фундаментальная линейная теория получается, если положить в этих уравнениях  $\varepsilon = 0$ , добавить необходимое число граничных условий и заменить общее уравнение состояния (1.4.4) приближением Буссинеска (1.4.5) (см. [240]). Эта система все еще остается слишком внутрительной, чтобы иметь с ней дело, и дальнейшие упрощения неизбежны.

Если отбросить *все* члены с малыми параметрами, то теория переходит в простейшую форму:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1.4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla p - \rho' \hat{\mathbf{k}} \quad \{ + E \nabla^2 \mathbf{q} \}, \quad (1.4.17)$$

$$f_R \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T_0 = 0 \quad \left\{ + \frac{E f_R}{\sigma_p} \nabla^2 T \right\}, \quad (1.4.18)$$

$$\rho' = -T. \quad (1.4.19)$$

Хотя мы и ожидаем, что эта система способна описывать движения в большинстве областей, занятых жидкостью, но она не допу-

скает существования на стенках сосудов пограничных слоев, которые имеют решающее значение для вращающихся потоков. Вероятно, самый легкий путь устранения этого недостатка состоит в том, чтобы удержать члены, умноженные на число Экмана и отмеченные скобками в (1.4.17) и (1.4.18). Задача будет полностью сформулирована после надлежащего задания граничных условий.

Разумеется, физические процессы, которые *должно* подвергнуть аналитическому изучению, зависят от конкретной задачи. Позже (см. раздел 2.21) мы будем рассматривать движения стратифицированной жидкости, в которой пограничный слой термической конвекции не имеет значения, и в этих случаях простейшая вязкая теория вполне удовлетворительна.

Распределение солености  $S$  часто служит фактором плотностной стратификации наряду с полем температуры. Этот фактор можно учесть, заменив (1.4.5) более общим приближением

$$\rho = \rho_m - \alpha_* (T - T_m) + \alpha_S (S - S_m) \quad (1.4.20)$$

и добавив к системе уравнение сохранения соли

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla S = \kappa_S \nabla^2 S. \quad (1.4.21)$$

Линеаризованная форма (1.4.21) получается тем же способом, который использован при выводе (1.4.18).

Интересная и важная аналогия существует между вращательным движением однородной жидкости и стратифицированным течением без вращения. Многие эффекты, наблюдаемые в одном случае, имеют аналоги в другом. Для облегчения сравнения выведем теперь линейную теорию движения стратифицированной жидкости без вращения.

Нужна новая система размерностей для характеристики масштабов движения в стратифицированном потоке *без вращения*. Выберем масштабы  $\llbracket L, \left( L \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \right|^{1/2}, \varepsilon_S \left( L \cdot \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \right|^{1/2} \right) \right]$  и положим

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \Delta \rho (\rho'_e(z) + \varepsilon_S \rho'), \\ T &= T_0 + \Delta T (T_e(z) + \varepsilon_S T), \\ P &= \rho_0 g L P_e + \varepsilon_S \Delta \rho g L p, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.22)$$

где  $\varepsilon_S$  — малый параметр, аналогичный  $\varepsilon$  во вращающейся системе. Масштаб времени как раз соответствует маятниковым колебаниям в редуцированном гравитационном поле  $(\Delta \rho / \rho_0) g$ . Приближение низшего порядка выводится вполне идентично предыдущему. Линейная теория записывается так:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} &= -\nabla p - \rho' \hat{\mathbf{k}} + \varepsilon_S \nabla^2 \mathbf{q}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T_e &= \frac{\varepsilon_S}{\sigma_P} \nabla^2 T, \\ \rho' &= -T, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.23)$$

где  $E_S = v((\Delta\rho/\rho_0)gL)^{-1/2}L^{-1}$  играет роль числа Экмана. Для простоты примем  $\mathbf{q} \cdot \nabla T_c = w = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ . Единственное уравнение для возмущения давления, которое вытекает отсюда, есть

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{E_S}{\sigma_p} \nabla^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - E_S \nabla^2\right) \nabla^2 p + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) p = 0. \quad (1.4.24)$$

В специальном случае двумерного движения  $p = p(x, y, t)$  при  $\sigma_p = 1$  получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E_S \nabla^2\right)^2 \nabla^2 p + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p = 0. \quad (1.4.25)$$

Это приближение важно потому, что (1.4.25) идентично уравнению для давления в теории вращающихся течений (2.2.2). Смысл этого факта будет рассмотрен подробнее в § 2.2. Дальнейшее сравнение двух этих движений дается периодически в последующих главах.

### 1.5. Элементы теории завихренности

Теория вращающихся жидкостей образует только часть общей теории завихренности. Однако, так как наши цели ограничены, это краткое обсуждение основ касается только тех аспектов общей теории, которые нужны нам прямо и немедленно. Конечно, основные концепции теории завихренности предполагаются известными, и они уже были даны без доказательства в предыдущих разделах.

Исчерпывающее изложение имеется во многих курсах динамики жидкостей; в частности заслуживают внимания работы Голдстейна [86], Лайтхилла [448], Трасдейла [272].

Нужно будет различать абсолютный вихрь  $\mathbf{v}_a$ , измеренный в инерциальной системе, и относительный вихрь  $\mathbf{v}$ , измеренный в равномерно вращающейся системе. Они связаны соотношением

$$\mathbf{v}_a = \nabla \times \mathbf{q}_{\text{inert}} = 2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{q}_{\text{rot}} = 2\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{v}. \quad (1.5.1)$$

Такое же различие устанавливается для циркуляции по замкнутому контуру

$$\Gamma_a = \oint_{\gamma} \mathbf{q}_{\text{inert}} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} \mathbf{q}_{\text{rot}} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\gamma} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma + \oint_{\gamma} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}.$$

Некоторое преобразование последнего интеграла приводит к форме

$$\Gamma_a = \Gamma + 2\boldsymbol{\Omega} \int \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} d\Sigma = \Gamma + 2\boldsymbol{\Omega} \Sigma_p. \quad (1.5.2)$$

Здесь  $\Sigma_p$  — проекция поверхности  $\Sigma$ , ограниченной контуром  $\gamma$ , на плоскость, перпендикулярную вектору  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{k}}$ ;  $\hat{\mathbf{n}}$  — единичный вектор, нормальный к  $\Sigma$ .

Применение теоремы Стокса дает равносильное определение циркуляции

$$\Gamma_a = \int \mathbf{v}_a \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma. \quad (1.5.3)$$

Завихренность в некоторой точке пропорциональна мгновенному угловому моменту сферического элемента жидкости (жесткого) в этой точке. Разумеется, мгновенная угловая скорость частицы есть как раз  $1/2 \omega_a$ . Линия в жидкости, повсюду касательная к  $v_a$ , называется вихревой линией; вихревые линии, проходящие через каждую точку малой замкнутой кривой, образуют вихревую трубку. Если площадь поперечного сечения трубки  $\Delta\Sigma$  мала, величина  $v_a \cdot \hat{n} \Delta\Sigma$  имеет одно и то же значение повсюду вдоль трубки и называется ее интенсивностью. Это следует из теоремы о дивергенции

$$\nabla \cdot v_a = 0, \quad (1.5.4)$$

примененной к объему вихревой трубки, заключенному между сечениями  $\Delta\Sigma_1$  и  $\Delta\Sigma_2$ . Согласно (1.5.3), этот результат равносильно утверждению о том, что циркуляция по некоторому контуру, опоясывающему боковую поверхность трубки, постоянна. Другое заключение, вытекающее из (1.5.4), состоит в том, что вихревые линии не могут начинаться или оканчиваться в жидкости, они либо замкнуты, либо оканчиваются на твердых границах.

Структуру поля завихренности можно изобразить с помощью вихревых трубок равной интенсивности, пронизывающих среду. Положение каждой трубки задается ее центральной вихревой линией. Плотность трубок в некотором месте пропорциональна завихренности, возрастающей по мере сближения трубок. При растяжении вихревой трубки постоянной интенсивности завихренность возрастает, компенсируя уменьшение площади поперечного сечения.

Аккуратная аппроксимация уравнения завихренности в *инерциальном* пространстве

$$\frac{D}{Dt} v_a = \frac{\partial}{\partial t} v_a + \mathbf{q} \cdot \nabla v_a = v_a \cdot \nabla \mathbf{q} - \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla P + \nu \nabla^2 v_a \quad (1.5.5)$$

дает соотношение между конвективной скоростью изменения абсолютной завихренности (левая часть) и тремя процессами, вызывающими это изменение (правая часть). Эти процессы в том порядке, как они записаны, есть растяжение и поворот вихревых линий, возникновение завихренности за счет изменения плотности и диффузионный перенос завихренности от соседних элементов.

Если плотность постоянна, (1.5.5) переходит в однородное уравнение с частными производными параболического типа. Единственным решением его было бы  $v_a = 0$ , если бы завихренность не создавалась на граничных поверхностях вследствие присутствия вязкости, требующей исчезновения относительной тангенциальной скорости на границах. Диффузия завихренности связана с передачей момента от одной частицы к другой при наличии градиента момента, который максимален на стенках сосуда. Ситуация подобна переносу тепла в жидкости от нагретой границы: полный поток завихренности соответствует потоку тепла на границе. При вычислении поля завихренности твердые границы по их действию можно заменить эквивалентным распределением источников завихренности.

Завихренность можно взять в качестве первичной переменной при расчетах течений жидкости; это желательно по нескольким причинам. Во-первых, завихренность действительно является принципиальной физической характеристикой многих потоков (Лайтхилл [148] приводит, например, задачу о задувании свечи кольцевым вихрем, создаваемым губами)<sup>1</sup>. Во-вторых, перенос завихренности совершается посредством конвекции или диффузии, тогда как изменения давления и скорости распространяются с бесконечной скоростью звука в несжимаемой жидкости. Следовательно, пространственный и временной масштабы существенных изменений завихренности меньше, чем масштабы изменений давления или скорости, каждая из которых может мгновенно испытывать большие изменения на бесконечности. Таким образом, часто намного легче вычислить поле завихренности, и этот подход привел к значительному прогрессу в численном решении задач вязкого течения [194—196]. Результаты расчета Пирсоном некоторых движений вращающейся жидкости подробно изложены в главе 3.

Ниже кратко сформулированы несколько классических теорем о завихренности невязких жидкостей. Полное обсуждение этих важных результатов можно найти у Голдстейна [86].

Теорема Лагранжа утверждает, что если в невязкой среде с постоянной плотностью поле завихренности равно нулю в начальный момент, то оно остается нулевым всегда,  $v_a = 0$ . (Условия, разумеется, исключают все способы возникновения завихренности.) Подобный результат справедлив и при наличии стратификации, если  $\nabla \rho \times \nabla P = 0$ .

Теорема Кельвина вытекает из формулы для полного изменения циркуляции по замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкостью:

$$\frac{D}{Dt} \Gamma = - \oint_{\gamma} \frac{1}{\rho} \dot{\nabla} P \cdot ds. \quad (1.5.6)$$

Следовательно, если жидкость однородна или баротропна  $P = P(\rho)$  и диссипация отсутствует, то *циркуляция по контуру, движущемуся вместе с жидкостью, остается все время постоянной*. Теорема Гельмгольца следует прямо отсюда и утверждает, что при тех же условиях *вихревая трубка движется вместе с жидкостью и ее интенсивность остается постоянной*.

Эти важные теоремы, будучи записаны для вращающейся системы координат, показывают, как изменяются относительная завихренность и циркуляция под действием основного вращения. Например, соотношение (1.5.6)

$$\frac{D}{Dt} \Gamma = - \oint_{\gamma} \frac{1}{\rho} \nabla P \cdot ds - 2 \frac{D}{Dt} \int \Omega \cdot \hat{n} d\Sigma$$

<sup>1</sup> Имеется в виду то, что курильщики демонстрируют в виде дымовых колец. — Прим. перев.

означает, что относительная циркуляция уменьшается с увеличением площади сечения, нормальной к  $\Omega$ .

Теорема Эртеля [58], имеющая частное значение в теории вращательных движений жидкости, касается недиссипативного потока в *равномерно вращающейся* системе координат, в котором определенные величины, такие как соленость  $S$ , температура  $T$  и т. п., сохраняются в движущихся частицах. В частности,

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla S = 0. \quad (1.5.7)$$

Уравнение относительной завихренности, записанное для *вращающейся* системы координат, есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \times ((\mathbf{v} + 2\Omega) \times \mathbf{q}) = \nabla P \times \nabla \frac{1}{\rho}, \quad (1.5.8)$$

но для дальнейшего выгодно использовать абсолютную завихренность (измеряемую в той же системе). Так как  $\Omega$  постоянно, (1.5.8) переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_a + \nabla \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{q}) = \nabla P \times \nabla \frac{1}{\rho}. \quad (1.5.9)$$

После умножения на  $\nabla S$  можно представить уравнение в следующей форме:

$$\nabla S \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_a - \nabla \cdot (\nabla S \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{q})) = \nabla S \cdot \nabla P \times \nabla \frac{1}{\rho}. \quad (1.5.10)$$

С помощью (1.5.7) можно показать, что

$$\nabla S \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{q}) = - \frac{\partial S}{\partial t} \mathbf{v}_a - \mathbf{q} (\mathbf{v}_a \cdot \nabla S)$$

и подстановка этого соотношения в (1.5.10) при надлежащей группировке членов приводит к уравнению Эртеля

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \right) \left[ \frac{(2\Omega + \mathbf{v}) \cdot \nabla S}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho} \nabla S \cdot \nabla P \times \nabla \frac{1}{\rho}. \quad (1.5.11)$$

Если правая часть равна нулю, то величина в квадратных скобках должна сохраняться при движении частицы. Это достигается любым из нескольких способов. Закон термодинамического состояния, который до сих пор не использовался, может устанавливать отношение  $\rho$  только к  $P$  или только к  $S$ ;  $\rho$  может быть константой; три вектора  $\nabla S$ ,  $\nabla P$  и  $\nabla \rho$  могут быть компланарны. Следует еще раз отметить, что теорема справедлива для любых величин, удовлетворяющих (1.5.7). Обобщение теоремы дано Эртелем и Россби [59] и Трасдейлом [273].

Если поток несжимаем, но стратифицирован, то сама плотность удовлетворяет (1.5.7), и из теоремы следует

$$\frac{D}{Dt} \left[ \frac{(2\Omega + \mathbf{v}) \cdot \nabla \rho}{\rho} \right] = 0.$$

Движение в тонком слое жидкости, обсуждаемое в главе 5, подобно этому, только вместо плотности там будет фигурировать глубина  $H$ , являющаяся функцией координат. Оказывается, что величина

$$\frac{1}{H} (2\Omega + v) \cdot \hat{k},$$

называемая потенциальным вихрем, сохраняется при этих условиях. Но это уже другая тема.

### 1.6. Элементы теории вязкого пограничного слоя

Основная цель здесь, как и в предыдущем разделе, состоит в том, чтобы извлечь из старого и вполне развитого предмета несколько результатов, наиболее важных для изучения вращающихся жидкостей. Независимо от полноты, это даст по крайней мере минимальные предпосылки для обоснования последующих разделов. Имеется несколько исчерпывающих изложений теории пограничного слоя [180, 229, 235], а элементарное введение дано Кэриером [33].

Наблюдение показывает, что во многих задачах вязкость важна только в определенных тонких слоях, и это служит основанием для математических приближений, которые упрощают уравнения движения. (Инерционный пограничный слой рассматривается в разделе 5.4.) Обычная ситуация состоит в том, что вязкость вынуждает поле скорости в жидкости подчиняться условию отсутствия скольжения на твердой стенке. Это приспособление поля скорости происходит внутри очень тонкого вязкого слоя и может приводить к изменениям характеристик потока, сравнимым с их абсолютными значениями.

Как мы отмечали выше, появление таких быстро меняющихся режимов можно предвидеть всякий раз, когда члены с высшими производными в уравнениях имеют множителем малый параметр, например  $E\nabla \times \nabla \times \mathbf{q}$  в (1.2.8). Это, конечно, недостаточное условие, и слишком часто вопросы существования и локализации пограничного слоя должны решаться на основе интуиции, опыта или твердых экспериментальных фактов.

Предположим теперь, что в потоке частично вязкой несжимаемой жидкости на поверхности  $\Sigma$  имеется пограничный слой. Точные размерные уравнения движения во вращающейся системе есть, конечно, (1.2.1) и (1.2.2), и нужно воспользоваться тем, что компоненты течения быстро изменяются внутри пограничного слоя, чтобы упростить эту систему. Этого можно достичь, последовательно пренебрегая касательными производными вдоль  $\Sigma$  от любой переменной, там где они входят вместе с нормальной производной от той же функции. Формальные преобразования можно проделать по-разному. Представленный здесь способ отчасти основан на выкладках Крабтри, Кюхмана и Сауэрби [46].

Система координат для уравнений пограничного слоя строится следующим образом. Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — ортогональные криволиней-

ные координаты на поверхности сосуда  $\Sigma$ .  $\xi_1$  измеряет расстояние вдоль  $\hat{n}$  — единичной нормали к  $\Sigma$ . Поверхности  $\xi_3(x, y, z) = \text{const}$ , таким образом, все параллельны <sup>1</sup>  $\Sigma$ , которая задана уравнением  $\xi_3 = 0$ , и по построению вектор единичной нормали к каждой из этих поверхностей  $\hat{n}(\xi_1, \xi_2)$  есть непрерывная функция только поверхностных координат. (Это расширение понятия нормали  $\hat{n}$ , определенной на  $\Sigma$ , до поля векторов, нормальных к семейству параллельных поверхностей, таково, что для этих векторов  $\nabla \times \hat{n} = 0$ ). Наконец, можно усмотреть, что три координаты  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  образуют взаимно ортогональную систему на  $\Sigma$ , но не обязательно повсюду.

Вектор положения точки P в пограничном слое можно записать как

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_\Sigma(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \hat{n}(\xi_1, \xi_2),$$

где  $\mathbf{r}_\Sigma$  — вектор положения на  $\Sigma$ . В окрестности  $\Sigma$   $\xi_3$  очень мало и длина дуги приблизительно дается соотношением

$$ds^2 = d\mathbf{r}_P \cdot d\mathbf{r}_P \cong d\mathbf{r}_\Sigma \cdot d\mathbf{r}_\Sigma + d\xi_3^2.$$

Это равносильно

$$ds^2 = h_1^2 d\xi_1^2 + h_2^2 d\xi_2^2 + d\xi_3^2,$$

где метрические коэффициенты

$$h_j = \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{r}_P \right|$$

В самом деле, для  $j = 1, 2$

$$h_j \cong \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{r}_\Sigma \right| \quad \text{и} \quad h_3 \cong 1.$$

Единичные векторы на  $\Sigma$  есть

$$\hat{\mathbf{i}}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathbf{r}_\Sigma$$

и вместе с  $\hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{n}$  образуют ортогональную триаду.

Скорость частицы вблизи  $\Sigma$  можно разложить на тангенциальную и нормальную компоненты:

$$\mathbf{q} = \hat{n} \cdot \mathbf{q} \hat{n} - \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{q}), \quad (1.6.4)$$

подстановка этого выражения в уравнение сохранения массы дает

$$(\hat{n} \cdot \nabla)(\hat{n} \cdot \mathbf{q}) + \hat{n} \cdot \nabla \times (\hat{n} \times \mathbf{q}) + \hat{n} \cdot \mathbf{q} \nabla \cdot \hat{n} - \hat{n} \times \mathbf{q} \cdot \nabla \times \hat{n} = 0.$$

На непроницаемых граничных поверхностях нормальный поток  $\hat{n} \cdot \mathbf{q}$  равен нулю и, следовательно, во всем пограничном слое он дол-

<sup>1</sup> Точнее, эквидистантны. — Прим. перев.

жен оставаться относительно малым. Однако существует быстрое изменение по нормальному расстоянию  $\xi_3$ ; производная в этом направлении  $(\hat{n} \cdot \nabla)(\hat{n} \cdot \mathbf{q})$  по порядку величины превосходит само значение  $\hat{n} \cdot \mathbf{q}$ . Следовательно, третьим членом в предыдущей формуле можно пренебречь по сравнению с первым. Последний член пренебрежимо мал, так как система координат в пограничном слое построена на семействе поверхностей, параллельных  $\Sigma$ , и  $\hat{n}$  принадлежит полю векторов, нормальных к этим поверхностям. Таким образом, редуцированная форма уравнения сохранения массы в пограничном слое есть

$$(\hat{n} \cdot \nabla)(\hat{n} \cdot \mathbf{q}) + \hat{n} \cdot \nabla \times (\hat{n} \times \mathbf{q}) = 0, \quad (1.6.2)$$

или, если вектор скорости выразить через криволинейные компоненты

$$\mathbf{q} = q_1 \hat{i}_1 + q_2 \hat{i}_2 + q_3 \hat{i}_3,$$

то

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_1 q_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_2 q_2) \right) + \frac{\partial q_3}{\partial \xi_3} = 0. \quad (1.6.3)$$

Исключение явно малых членов из уравнений момента приводит к следующим уравнениям пограничного слоя:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{q_1}{h_1} \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1} + \frac{q_2}{h_2} \frac{\partial q_1}{\partial \xi_2} + q_3 \frac{\partial q_1}{\partial \xi_3} + \frac{q_1 q_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - \\ & - \frac{q_2^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} + 2(\Omega_2 q_3 - \Omega_3 q_2) = - \frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} q_1, \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{q_1}{h_1} \frac{\partial q_2}{\partial \xi_1} + \frac{q_2}{h_2} \frac{\partial q_2}{\partial \xi_2} + q_3 \frac{\partial q_2}{\partial \xi_3} - \frac{q_1^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} + \\ & + \frac{q_1 q_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} + 2(\Omega_3 q_1 - \Omega_1 q_3) = - \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial p}{\partial \xi_2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} q_2, \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \xi_3}. \quad (1.6.6)$$

Последнее уравнение означает, что давление постоянно внутри пограничного слоя и равно тому его значению, которое имеет место сразу же за пределами переходной зоны в области невязкого течения. Хотя это утверждение в целом верно, иногда оно недостаточно при решении определенных задач, где решающим является следующее приближение. Чтобы предусмотреть такую возможность, было бы вернее заменить (1.6.6) более полной формой уравнения баланса этой компоненты момента. Однако, когда это нужно, соответствующие уравнения пограничного слоя обычно вновь выводятся из

точной теории посредством формальной процедуры<sup>1</sup>. Расширение (1.6.6) возникает тогда как часть этого процесса, в то же время другие пренебрежимые члены отбрасываются (как относящиеся к приближению более высокого порядка).

На поверхности  $\Sigma$  скорость жидкости и скорость стенки одинаковы. Условия на другом краю пограничного слоя при большом  $\xi_3$  требуют, чтобы характеристики течения достигали значений, предписанных области *невязкого* потока.

Часто удобно выражать зависимые переменные в форме, которая ясно указывает на быстрые изменения вблизи поверхности  $\Sigma$ . Это делается путем разделения функции на слагаемые, например:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \tilde{\mathbf{q}}.$$

Функция  $\mathbf{q}_1$  есть решение уравнений без вязкости, а  $\tilde{\mathbf{q}}$  означает вклад пограничного слоя, который экспоненциально затухает с ростом расстояния от  $\Sigma$ . Замена  $\mathbf{q}$  и  $p$  в предыдущих уравнениях такими суммами приводит к модифицированной системе уравнений для возмущений функций в пограничном слое. Многие задачи формулируются в таком виде.

---

<sup>1</sup> Символ порядка величины  $O$ , появляющийся в формальных преобразованиях для пограничного слоя, часто используется в дальнейшем. Он имеет следующее определение:  $F(x, E) = O(E^a)$ , если для достаточно малого  $E$  существует постоянная  $A$  такая, что  $|F(x, E)| \leq AE^a$ . Это равносильно записи  $\lim_{E \rightarrow 0} F(x, E)/E^a < \infty$ . Операция  $O$  однородна, если  $A$  не зависит от  $x$ .

Приближенное значение величины иногда обозначается  $\cong$ . Например,  $t_c \cong E^{-1/2}$  нужно понимать как равенство не в точном смысле. Экспонента  $E$ , которая определяет сущность величины, задана точно этим выражением, но для точного равенства, возможно, нужен еще множитель, скажем,  $1/2$  или  $2$ . Символ  $\cong$  означает равенство в более узком смысле, скажем, по крайней мере в пределах нескольких цифр,  $\sim$  означает асимптотическое равенство.

**ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ  
В РЕЗЕРВУАРЕ;  
ЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРИИ**

**2.1. Классификация**

Введем несколько произвольное деление движений вращающейся жидкости, связав его в основном с тем, рассматривается ли жидкость, заключенная в тело, или наоборот. Отнесем к первому классу все течения, существенно ограниченные в объеме или заключенные в резервуар, где внешние ограничивающие стенки оказывают заметное влияние на течение. При этом особо выделяются линейные и нелинейные задачи. Второй класс включает задачи, описывающие движения тел или объектов в неограниченной вращающейся жидкости. В этих случаях влияния внешних стенок по сравнению с явлениями, создаваемыми движением тела, незначительны и модель неограниченной жидкости (с отодвинутыми на бесконечность внешними стенками) оказывается достаточно приемлемой.

**2.2. Почти твердое вращение**

Большая часть линейных задач связана с движениями, которые представляют собой малые отклонения от установившегося состояния твердого вращения. В этом случае скорость течения мала по сравнению с основной скоростью вращения, и  $\varepsilon \ll 1$ . Вследствие этого нелинейными членами можно пренебречь.

Линейная модель движений вязкой несжимаемой жидкости получается при задании  $\varepsilon = 0$  в (1.2.7) и (1.2.8):

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p - E\nabla \times \nabla \times \mathbf{q}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

с соответствующими граничными условиями.

Для того чтобы получить формальный вывод (2.2.1), нужно все зависимые переменные представить в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ ; например

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t, E, \varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{r}, t, E) \varepsilon^n.$$

Подстановка этих разложений в основные уравнения приводит к последовательности задач, соответствующих различным степеням  $\varepsilon$ . Первая из них (с членами  $\varepsilon^0$ ) принадлежит к классу линейных задач. Эта же процедура используется в следующей главе при обсуждении нелинейных явлений, но в линейном случае в (2.2.1) используются более простые обозначения, в которых верхние индексы опущены.

Один из приемов, привлекаемых при решении задач этого типа, состоит в том, чтобы, исключая из уравнений  $\mathbf{q}$ , получить одно уравнение шестого порядка в частных производных для давления:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E\nabla^2\right)^2 \nabla^2 p + 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} p = 0. \quad (2.2.2)$$

(Однако граничные условия не могут быть записаны в терминах только одной зависимой скалярной переменной.) Очевидно, решение этого уравнения получить трудно, и поэтому необходимы дальнейшие упрощения.

Существует также некоторый класс важных задач, описывающих равномерное движение тела во вращающейся жидкости или течение жидкости за телом. Обычно в этих случаях и тело, и жидкость вращаются с одной и той же угловой скоростью, и возмущение создается за счет относительных различий скоростей перед препятствием и на некотором расстоянии от него. В особых случаях число Россби  $\varepsilon$  может не быть малым, и тем не менее задача все еще остается линейной. Например, если во вращающейся системе существует однородное движение со скоростью  $\mathbf{U}$  за небольшим препятствием, то отклонения от скорости основного течения являются обычно довольно малыми всюду, за исключением, вероятно, окрестности тела. Для получения равномерно справедливого приближения (см. [276]<sup>1</sup>) формальный метод решения, опирающийся на эту физическую картину, должен включать «сшивку» внутренних (вблизи тела) и внешних (вдали от тела) разложений в частично совпадающей области. В низшем приближении окончательный результат достигается заменой нелинейного конвективного члена  $\mathbf{q} \cdot \Delta \mathbf{q}$  на  $\mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{q}$ . Это как раз и есть классическое озиновское приближение, и мы будем пользоваться этой «концепцией замены», не прибегая для обоснования к более корректной процедуре.

Следовательно, линейная теория в этом случае при умеренных значениях  $\varepsilon$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p + E\nabla^2 \mathbf{q}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

Решения выписанной системы должны давать хорошие приближения для большей части рассматриваемой области. Эта подстановка

<sup>1</sup> См. также Дж. Коул «Методы возмущений в прикладной математике». М., «Мир», 1972. — *Прим. ред.*

безусловно справедлива вдали от тела и может оказаться не оправданной в непосредственной близости от него, где преобладающими являются другие члены уравнений. Это отчасти подтверждают точные решения задач, для которых использовалась линеаризация Озина.

Из (2.2.3) снова может быть получено простое уравнение для давления, и оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla - E \nabla^2\right)^2 \nabla^2 p + 4(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla)^2 p = 0. \quad (2.2.4)$$

Теперь уже нетрудно усмотреть тесную связь между невращающимися стратифицированными течениями и почти твердым вращением. Уравнения (1.4.24) и (2.2.2) становятся совершенно аналогичными, а сходство с (1.4.25) еще более очевидным. Координата  $z$ , определяющая расстояние вдоль оси вращения, играет ту же самую роль, что и координата  $x$ , которая характеризует расстояние вдоль поверхности постоянной плотности. В этом случае явление тэйлоровских столбов должно иметь и имеет аналогию в виде скачков уплотнения в стратифицированной среде [296]. Известны также многие другие явления, включая волновые системы, которые в грубом приближении являются эквивалентными [274]. И в действительности, вращательные движения, которые гораздо проще создать экспериментально, в некоторых случаях могут быть эффективно использованы для того, чтобы имитировать стратификацию. Результаты, содержащиеся в работах по одному из этих явлений, часто приложимы и к другому, и об этой связи полезно помнить, несмотря на то, что она *не* будет подчеркиваться в последующем в каждом отдельном случае.

### 2.3. Экмановский слой

Рассмотрим идеализированную ситуацию, когда вязкая жидкость находится в верхней полуплоскости  $z > 0$ , ограниченной при  $z = 0$  непроницаемым диском. Сначала жидкость и диск вращаются как твердое тело с одинаковой постоянной угловой скоростью, а затем в некоторый начальный момент времени скорость вращения диска слегка увеличивается. Если при анализе этой задачи выбрать *вращающуюся* систему координат, в которой начальное состояние является одним из состояний относительного покоя, то безразмерная краевая задача сведется к решению уравнения (2.2.1), дополненного граничными условиями  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, 0) = 0$  и  $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}$  на плоскости  $z = 0$ . (Характеристическая скорость равна длине, умноженной на изменение скорости вращения диска.) Предполагается также, что  $\mathbf{q} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Это условие, необходимое для того, чтобы обеспечить сохранение твердого вращения основной массы жидкости при удалении границ. Свойственная результирующему движению осевая симметрия позволяет существенно упростить уравнения движения, если они записаны в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ .

Скорость  $\mathbf{q} = (u, v, w)$  и давление в этом случае не зависят от азимутального угла  $\theta$ . Чтобы еще больше упростить эту и без того простую задачу, можно полностью исключить радиальную координату с помощью следующей подстановки:

$$\mathbf{q} = -\nabla \times (r\chi(z, t)\hat{\theta}) + rV(z, t)\hat{\theta}. \quad (2.3.1)$$

Краевая задача для «функции тока»  $\chi$  и для азимутальной скорости  $V$  записывается тогда так:

$$\left(E \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) V - 2 \frac{\partial}{\partial z} \chi = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\left(E \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi + 2 \frac{\partial}{\partial z} V = 0, \quad (2.3.3)$$

причем  $V - 1 = \chi = (\partial/\partial z) \chi = 0$  при  $z = 0$ ,  $V = \chi = 0$  при  $t = 0$  и обе функции исчезают при  $z = \infty$ . Решение можно получить с помощью преобразований Лапласа (для необходимого обращения интегралов см. [32]), и оно имеет вид:

$$V = Re \left[ \exp(-2i^{1/2}E^{-1/2}z) + F(z, t) \right], \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} \chi = E^{1/2}m \left[ (2i)^{-1/2} \exp(-2i^{1/2}E^{-1/2}z) - \right. \\ \left. - (2i)^{-1/2} \operatorname{erf}(2it)^{1/2} - (2i)^{-1/2} F(z, t) \right], \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} F(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \exp(2i^{1/2}E^{-1/2}z) \operatorname{erfc} \left\{ (2i)^{1/2}t^{1/2} + \frac{1}{2}(Et)^{-1/2}z \right\} - \right. \\ \left. - \exp(-2i^{1/2}E^{-1/2}z) \operatorname{erfc} \left\{ (2i)^{1/2}t^{1/2} - \frac{1}{2}(Et)^{-1/2}z \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Особый интерес представляет окончательное установившееся течение, когда компоненты скорости равны

$$\frac{u}{r} = \exp(-E^{-1/2}z) \sin E^{-1/2}z, \quad (2.3.7)$$

$$\frac{v}{r} = \exp(-E^{-1/2}z) \cos E^{-1/2}z, \quad (2.3.8)$$

$$w = E^{1/2} \left[ -1 + \exp(-E^{-1/2}z) (\sin E^{-1/2}z + \cos E^{-1/2}z) \right], \quad (2.3.9)$$

а окончательное редуцированное давление —

$$p = -2E \exp(-E^{-1/2}z) \sin E^{-1/2}z. \quad (2.3.10)$$

Простейшая форма решения для установившегося потока, зависящая только от переменной  $\zeta = E^{-1/2}z$  (рис. 2.4), показывает, что движение пластинки передается жидкости через вязкий пограничный слой толщиной  $E^{1/2}$  ( $(\nu/\Omega)^{1/2}$  в размерных единицах). (Этот результат принадлежит Экману [55], который рассмотрел близкую задачу о течениях, возбуждаемых в океане приложенным к его

поверхности касательным напряжением ветра.) Внутри этого тонкого слоя сила Кориолиса уравновешивается вязким сдвигом<sup>1</sup>, и давление остается постоянным с точностью до члена малого порядка,  $O(E)$ . Таким образом, в установившемся потоке благодаря непосредственному воздействию вязкости жидкие частицы около пластины вращаются с увеличивающейся угловой скоростью. За счет преобладания возрастающей силы Кориолиса над градиентом давления вдоль пластины жидкость выталкивается радиально наружу, как в центробежном вентиляторе. Этот расход массы в пограничном слое должен компенсироваться небольшим нормальным притоком порядка  $E^{1/2}$  из невязкой внутренней области. При отсутствии других

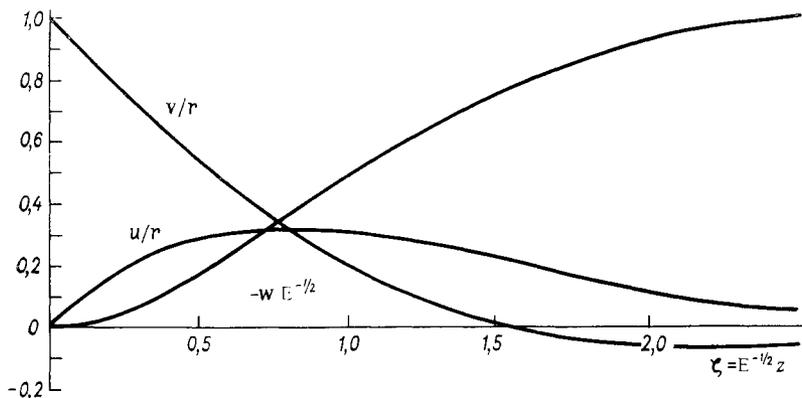


Рис. 2.1. Профили скорости в стационарном экмановском слое.

близких границ при подсосе пограничного слоя в основной толще жидкости создается чисто вертикальное вторичное течение. Рассматриваемое течение замыкается на бесконечности пока неопределенным образом.

Скорости внутри пограничного слоя имеют единичный порядок. Они существуют только в этом тонком слое, примыкающем к стенкам, тогда как небольшая внутренняя циркуляция порядка  $O(E^{1/2})$  возникает в пределах всей жидкости.

Спиралевидный график, изображенный на рис. 2.2, на котором нанесена горизонтальная компонента скорости как функция координаты пограничного слоя, известен как спираль Экмана.

Стационарное уравнение вихря

$$-2 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{q} = E \nabla^2 v \quad (2.3.11)$$

свидетельствует о том, что существование стационарного пограничного слоя конечной толщины связано с тем, что диффузия завихренности от пластинки нейтрализуется за счет искривления вихревых линий. В гидродинамических задачах диффузия чаще всего

<sup>1</sup> Точнее, притоком импульса, обусловленным влиянием сил вязкости. — Прим. ред.

уравновешивается конвекцией, в результате чего создается стационарный вязкий или термический пограничный слой. Что касается вращающихся жидкостей, то они приходят к тому же конечному состоянию другими и существенно более сложными путями.

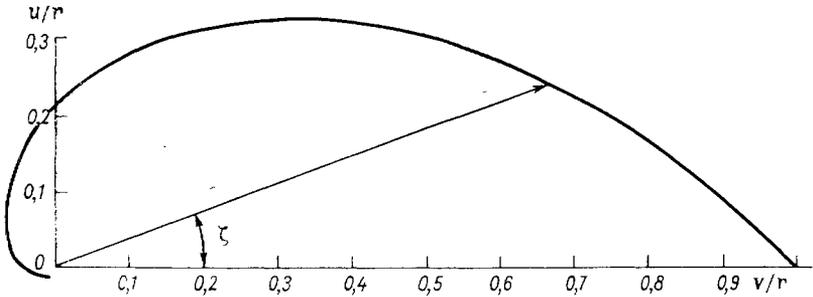


Рис. 2.2. Спираль Экмана. Координата пограничного слоя имеет смысл полярного угла.

Исследование неустановившегося решения показывает, что экмановский слой формируется в течение относительно короткого интервала времени, а именно за несколько полных оборотов системы.

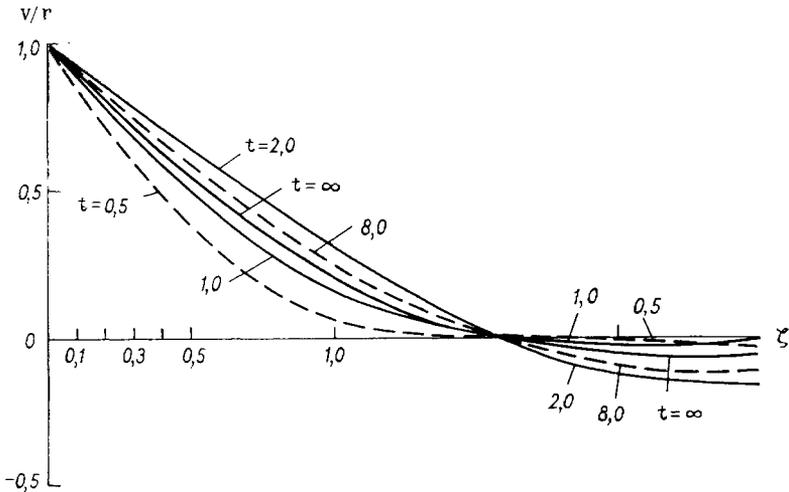


Рис. 2.3. Азимутальная скорость как функция времени, иллюстрирующая переход к стационарному состоянию экмановского слоя.

Рисунок 2.3 иллюстрирует изменение азимутальной компоненты скорости. Процесс, однако, осложняется из-за наличия постоянной вязкой диффузии и незначительных колебаний с двойной безразмерной частотой (т. е. с частотой, равной  $2\Omega$ ). Асимптотика дополнительной функции ошибок комплексного аргумента в (2.3.6) служит этому наглядным доказательством

$$\operatorname{erfc}(2it)^{1/2} \sim (2\pi it)^{-1/2} \exp(-2it).$$

Колебания этой частоты возникают вследствие возбуждения собственных невязких мод. Подставляя  $E$ , равное нулю, в (2.3.2) и (2.3.3), можно показать, что решение, пропорциональное  $\exp(i\lambda t)$ , существует только тогда, когда  $\lambda = \pm 2$  или  $\lambda = 0$ .

Анализ случая, когда скорость вращения диска в некоторый момент времени уменьшается, приводит к совершенно аналогичным результатам, только с противоположным знаком.

#### 2.4. Спинал

Предположим, что конфигурация области, рассмотренная в последнем разделе, модифицирована таким образом, что жидкость заключена между двумя параллельными концентрическими плоскостями, и вся система по-прежнему вращается, как твердое тело. Затем скорости вращения обоих дисков одновременно увеличиваются на одинаковую величину и жидкость вновь достигает состояния твердого вращения. Спинал определяется как переходный режим между этими двумя состояниями твердого вращения. Спинал в любом произвольном замкнутом резервуаре имеет тот же самый смысл и включает резкое изменение угловой скорости, приводящее жидкость через неустановившийся режим к конечному состоянию твердого вращения.

Хотя жидкость в рассмотренной геометрии является безграничной в горизонтальном направлении, однако комбинация двух бесконечных плоскостей, вращающихся в унисон, создает движение, которое является прообразом всех спиналовых течений в резервуарах. В этом случае математическая задача почти идентична той, которая описывается уравнениями (2.3.2), (2.3.3) и т. д., за исключением того, что граничные условия на бесконечности заменяются условиями на второй пластине, т. е.

$$\chi = (\theta/\partial z) \chi = V - 1 = 0$$

при  $z = 1$ . (Расстояние между пластинами является характеристической длиной  $L$ .)

Решение этой задачи было дано Гринспеном и Говардом [96], которые использовали метод преобразований. Детальный анализ полученного решения очень сложен и поэтому здесь не приводится. К счастью, все движение может быть представлено в относительно простых терминах. Полное описание требует некоторого повторения предыдущего раздела, особенно при рассмотрении ранней фазы движения, однако, возможно, это оправдывается фундаментальной природой этого процесса.

Начальное импульсное изменение угловой скорости немедленно вызывает появление на каждом диске релеевского сдвигового слоя, который затем растет благодаря вязкой диффузии. За несколько полных оборотов при  $t \doteq 1$  становятся чувствительными эффекты вращения и благодаря вихревой диффузии развивается квазистационарный экмановский пограничный слой. Аналитическое описание этой эволюции приводит к функциям, аналогичным тем, которые

входят в уравнение (2.3.6). Кроме того, решение включает инерционные колебания с двойной вращательной частотой, но очень малой амплитудой. Экмановский слой характеризуется направленным наружу радиальным потоком порядка безразмерной единицы, создаваемым центробежной силой, и этот перенос уравнивается небольшим притоком в пограничный слой из внутренней области жидкости. Однако при наличии другого диска этот вертикальный поток внутрь пограничного слоя может поддерживаться только за счет установления равного по величине небольшого внутреннего течения, которое направлено радиально во внутреннюю область жидкости. Другими словами, приток жидкости в экмановский слой вместе с геометрическими ограничениями данной области создает небольшую радиальную конвекцию во внутренней области жидкости, которая обеспечивает сохранение массы.

Так как внутреннее течение является практически невязким, то угловой момент кольцевой области течения, которое перемещается внутрь области для замещения жидкости, проникающей в экмановский слой, сохраняется, и кольцевая область должна приобретать большую угловую скорость. Экмановский слой действует на жидкость, обладающую малым угловым моментом внутри области, как сток. Эта жидкость при замещении ее жидкостью с большим угловым моментом описывает большие радиусы. Как только внутри области достигается конечное установившееся состояние, экмановский слой разрушается. Это происходит за безразмерное время порядка  $E^{1/2}$ , временной масштаб становится недостаточно большим для пограничных слоев, которые заметно растут. Тем временем возникают небольшие колебания, вызванные тем, что под влиянием вязкости первоначальный импульс очень слабо изменяется внутри области и более заметно около границ. Эти колебания существуют до тех пор, пока, наконец, они не разрушаются благодаря вязкости за безразмерное время порядка  $E^{-1}$ . (В резервуарах *конечного* объема время диссипации приблизительно равно  $E^{1/2}$ .) Можно считать, что в течение этого времени вязкие пограничные слои на каждой стенке за счет одного только диффузионного процесса простираются до полного перекрытия, так что никакой невязкой области внутри жидкости больше не существует. В этом случае вязкие силы становятся существенными во всей внутренней области и действуют так, чтобы исключить остаточные собственные колебания. Таким образом, неустановившееся движение между *бесконечными* дисками включает три различные фазы: образование вязких пограничных слоев (за  $t \doteq 1$ ), спинап ( $t \doteq E^{-1/2}$ ); разрушение за счет сил вязкости остаточных явлений ( $t \doteq E^{-1}$ ).

Созданная на этой основе физическая картина позволяет оценить с помощью элементарных физических соображений характерное время спинапа  $t_c$ . Если увеличение скорости вращения равно  $\varepsilon\Omega$ , то  $\varepsilon\Omega L = U$  есть характерная скорость переноса внутри экмановского слоя толщиной  $\delta = (\nu/\Omega)^{1/2}$ . Закон сохранения массы требует притока массы в вязкий слой из внутренней области со скоростью

$$w_1 = 2U\delta/L.$$

Здесь  $L$  — характерная вертикальная длина резервуара, так что  $w_1$  представляет собой характерную радиальную скорость внутренней циркуляции. Кольцеобразная область внутренней части жидкости, масса и угловой момент которой равны соответственно  $M$  и  $ML^2\Omega$ , приобретает угловую скорость  $(1 + \varepsilon\Omega)$  за счет радиального движения внутрь области и на расстояние  $\frac{1}{2} \varepsilon L$ . Угловой момент сохраняется, потому что внутреннее течение невязкое. Время, необходимое для того, чтобы жидкое кольцо преодолело это расстояние и за счет этого достигло угловой скорости нового установившегося состояния, должно быть равно

$$t_c \doteq \frac{\varepsilon L}{w_1} \doteq \left( \frac{L^2}{\nu \Omega} \right)^{1/2} \doteq E^{-1/2} \Omega^{-1}.$$

Экмановский слой действует как сток (или источник), мощность которого фактически пропорциональна  $E^{1/2}$  и локальной разности угловых скоростей пограничного и внутреннего течения. Это равенство было получено Чарни и Элиассеном [43], которые оценили характерное время  $t_c$  в метеорологической задаче. Бонди и Литлтон [18] при обсуждении векового запаздывания земного ядра нашли, что  $t_c$  представляет собой временное запаздывание угловой скорости около оси ядра по сравнению с угловой скоростью оболочки в каждый момент времени.

Другое приближение, которое описывает еще одну сторону рассматриваемой физической картины, связано с исследованием завихренности. Вихрь невязкого уравнения момента (2.2.4) дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{q} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{q} = 0,$$

которое представляет собой нестационарную форму теоремы Тэйлора — Праудмена для течения вне пограничных слоев. Вертикальная скорость, обусловленная экмановской конвергенцией, имеет порядок  $E^{1/2}$  и разные знаки на двух границах. Ее вертикальный градиент также имеет порядок  $E^{1/2}$ . Следовательно, относительная вертикальная завихренность может только увеличиваться (за счет «растяжения») от нуля до конечного значения 2 за безразмерное время, приблизительно равное  $E^{-1/2}$ .

Следующая таблица показывает характерные времена для практически интересного случая  $L = 4$  см,  $\Omega = 200\pi$  с<sup>-1</sup>.

Материал	$\frac{\nu}{\text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}}$	$\frac{L^2 \nu^{-1}}{\text{с}}$	$\left( \frac{L^2}{\Omega \nu} \right)^{1/2}$	$E$
Смазочное масло	1,00	16	0,16	$1,0 \cdot 10^{-4}$
Вода	0,01	1 600	1,60	$1,0 \cdot 10^{-6}$
Ртуть	0,001	16 000	5,05	$1,0 \cdot 10^{-7}$

Аналитическое приближение для внутреннего течения между дисками, справедливое в течение времени спинапа, имеет вид:

$$V_1 = 2S(2t) (1 - \exp(-2E^{1/2}t)), \quad (2.4.1)$$

$$X_1 = -2 \left( z - \frac{1}{2} \right) E^{1/2} S(2t) \exp(-2E^{1/2}t), \quad (2.4.2)$$

где  $S(x)$  — интеграл Френеля

$$S(x) = \int_0^x (2\pi t)^{-1/2} \sin t \, dt. \quad (2.4.3)$$

Эксперименты, выполненные для определения скорости затухания в процессе спинапа, обнаружили очень точное совпадение с предсказанным множителем  $2E^{1/2}$  (см. [96]). В этой работе было также показано, что важные количественные характеристики для произвольных осесимметричных резервуаров могут быть получены с помощью методов пограничного слоя. Некоторые стороны этого метода были развиты Бонди и Литтловом [18], а также Стерном [241] в связи с исследованием неустойчивости экмановского слоя. Полное аналитическое решение, найденное в случае двух параллельных дисков, подтверждает основную физическую картину изучаемого явления и дает убедительное математическое обоснование для использования методов пограничного слоя. Эти методы являются единственно возможными при анализе общего случая движения в резервуарах произвольной формы, которыми мы займемся в следующем разделе. Кроме того, «точное» решение позволяет выявить роль инерционных осцилляций и служит иллюстрацией метода, в котором учитываются все три временных масштаба — период вращения, время вязкого затухания и время спинапа. Эти более тонкие детали не рассматриваются в теории пограничного слоя.

## 2.5. Задача с начальными условиями: формулировка

Резервуар произвольной формы наполнен жидкостью и вращается с постоянной угловой скоростью. В некоторый определенный момент времени  $t = 0$ , вообще говоря любой, но приемлемый физически, начальное состояние жидкости задано. Требуется исследовать результирующее неустановившееся течение и точно описать переход к состоянию твердого вращения.

Если начальные условия очень слабо отличаются от условий твердого вращения, то в этом случае справедлива линейная теория. Задача описывается тогда уравнениями (2.2.1) с граничными условиями  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{q}_*(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = 0$  на поверхности резервуара  $\Sigma$ . В упомянутой выше вращающейся системе координат конечная скорость течения  $\mathbf{q} = 0$ . (Задача о спинапе из последнего раздела формулируется точно так же, как и в координатной системе, жестко связанной с телом.)

Пусть верхние и нижние поверхности резервуара  $\Sigma = \Sigma_T + \Sigma_B$  представлены в виде:

$$z = f(x, y) \quad (\Sigma_T), \quad z = -g(x, y) \quad (\Sigma_B) \quad (2.5.1)$$

и пусть  $\mathbf{n}$  *всегда* обозначает внешнюю нормаль к  $\Sigma$ . Предполагается, что нормаль является *непрерывной* векторной функцией на  $\Sigma$ , в частности,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_T &= \hat{\mathbf{k}} - \nabla f = (1 + (\nabla f)^2)^{1/2} \hat{\mathbf{n}}_T, \\ \mathbf{n}_B &= -\hat{\mathbf{k}} - \nabla g = (1 + (\nabla g)^2)^{1/2} \hat{\mathbf{n}}_B, \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

где  $\hat{\mathbf{n}}_T$  и  $\hat{\mathbf{n}}_B$  — единичные векторы.

В этом общем случае движение имеет такую же структуру, как и в частном случае течения между двумя параллельными дисками. По-прежнему число Экмана  $E$  мало, непосредственное воздействие вязкости в течение всей основной фазы движения сосредоточено в тонком пограничном слое на стенке резервуара. Кроме того, этот экмановский слой создает вторичную внутреннюю циркуляцию, которая оказывает сильное влияние на течение посредством растяжения вихревых линий и передачи углового момента. Таким образом, вязкость полностью устраняет эффект начального распределения скоростей в течение спинапового масштаба времени  $E^{-1/2}$ , и в качестве важного параметра разложения появляется  $E^{1/2}$ . Следовательно, анализ общего случая движения может быть выполнен на основании теории пограничного слоя. Приближенное решение представляется в виде суммы двух частей: почти невязкое движение в пределах внутренней области резервуара сшивается с движением в вязком пограничном слое. Это дает возможность удовлетворить граничным условиям. Кроме того, для того чтобы все основные явления описывались с помощью этого решения, оно должно оставаться равномерно точным во всем пространстве и в течение достаточно длинного периода времени  $t \doteq E^{-1/2}$ . Это очень важное требование, но его трудно удовлетворить вследствие существования нескольких источников неоднородности: трех различных временных масштабов, вязких пограничных слоев, а иногда и резонанса пограничного слоя и свободных сдвиговых слоев. Используемые методы должны быть достаточно гибкими, чтобы можно было преодолеть все возникающие затруднения.

Кратко метод решения состоит в следующем. В исходные уравнения подставляются разложения, которые имеют вид ряда по половинным степеням числа Экмана, и в результате задача сводится к решению последовательности простых задач. Первой из них, для первого или нулевого приближения решения в невязкой внутренней области соответствует  $E = 0$ . Во второй внутреннее движение подправляется за счет влияния вязкости, которое обеспечивает равенство нулю основной тангенциальной скорости на границе. Однако пограничные слои вызывают дальнейшие изменения внутреннего движения, создавая небольшой нормальный поток массы, и это порождает третью задачу. Когда вторичная внутренняя циркуляция определена, она

также должна быть скорректирована на границе. Эта процедура продолжается до тех пор, пока взаимодействие внутреннего и пограничного течений будет определено с желаемой точностью. Практически с достаточной математической строгостью исследование обычно заканчивается на вторичном течении порядка  $E^{1/2}$ . Поэтому необходимо найти такое приближенное решение, которое было бы равномерно справедливым вплоть до членов  $O(E^{1/2})$  на всем промежутке времени спинапа  $t \doteq E^{-1/2}$ .

Во многих случаях решение задачи для внутренней области можно представить в виде суперпозиции всех невязких мод, которые по существу делятся на два типа. Имеется бесконечное число *инерционных мод*, которые могут быть представлены как

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{Q}_m(\mathbf{r}) \exp s_m t, \\ p &= \Phi_m(\mathbf{r}) \exp s_m t \end{aligned} \right\} \quad (2.5.3)$$

( $\mathbf{Q}$  и  $\Phi$  — комплексные функции), и единственная *геострофическая мода*, соответствующая нулевой частоте, вида

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_0(\mathbf{r}, E^{1/2}t), \\ p &= \varphi_0(\mathbf{r}, E^{1/2}t). \end{aligned} \right\} \quad (2.5.4)$$

Геострофическое течение является одним из течений, в которых градиент давления и сила Кориолиса в точности уравновешивают друг друга на протяжении многих периодов. Это течение изменяется медленно, и зависимость его от времени можно обнаружить только по истечении достаточно продолжительного времени

$$\tau = E^{1/2}t. \quad (2.5.5)$$

Каждая из этих мод должна быть скорректирована с учетом вязкости, как это описано выше. Например,  $\mathbf{q}_0$  при наличии вязкого пограничного слоя должно быть исправлено на  $\tilde{\mathbf{q}}_0$ , которое в свою очередь создает дальнейшее изменение внутреннего течения  $\mathbf{q}_1$ . Оно должно быть исправлено на стенках с помощью следующей вязкой поправки  $\tilde{\mathbf{q}}_1$ , и итерации продолжают дальше. Таким образом, было получено приближенное решение следующего вида [95]:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_0(\mathbf{r}, \tau) + \sum_m A_m \mathbf{Q}_m(\mathbf{r}) e^{s_m t} + E^{1/2} \left\{ \mathbf{q}_1(\mathbf{r}, \tau) + \sum_m \mathbf{q}_{m1}(\mathbf{r}, t, E^{1/2}) \right\} + \dots \\ &\dots + \tilde{\mathbf{q}}_0 + \sum_m \tilde{\mathbf{q}}_{m0} + E^{1/2} \left\{ \tilde{\mathbf{q}}_1 + \sum_m \tilde{\mathbf{q}}_{m1} \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

$$\begin{aligned} p &= \varphi_0(\mathbf{r}, \tau) + \sum_m A_m \Phi_m(\mathbf{r}) e^{s_m t} + E^{1/2} \left\{ \varphi_1(\mathbf{r}, \tau) + \sum_m \varphi_{m1}(\mathbf{r}, t, E^{1/2}) \right\} + \dots \\ &\dots + \tilde{\varphi}_0 + \sum_m \tilde{\varphi}_{m0} + E^{1/2} \left\{ \tilde{\varphi}_1 + \sum_m \tilde{\varphi}_{m1} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Здесь тильдой отмечены функции, принадлежащие пограничному слою и зависящие от растянутой координаты  $\zeta$ . Эти функции при

$\tau \rightarrow \infty$  стремятся экспоненциально к нулю. Внешний край пограничного слоя  $\xi = \infty$  в терминах обычных пространственных переменных, конечно, по-прежнему расположен на стенке. На поверхности резервуара  $\zeta$  равна нулю, а нормальная производная от функций в пограничном слое имеет вид

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \cong -E^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Тангенциальная производная  $\hat{\mathbf{n}} \times \nabla$  от любой функции по порядку величины не больше  $O(1)$ .

Функции, принадлежащие внутренней области, не зависят от  $\zeta$  и не меняются поперек пограничного слоя.

Вследствие пространственной и временной неоднородности точный вид последующих членов разложения за указанными тремя членами остается неясным. Поэтому мы ограничиваемся анализом поля первичного течения, его пограничным слоем и вызванной им вторичной циркуляцией.

Экмановские слои, образующиеся за счет геострофического течения, быстро меняются со временем в период формирования, а затем остаются почти неизменными. Если заходит речь об основном вязком течении  $\mathbf{q}_0$ , то пограничные слои можно рассматривать установившимися, потому что учет действительной временной зависимости при  $t \leq E^{-1/2}$  становится несущественным. Результаты, приведенные в разделе 2.2, подкрепляют это утверждение, и, для того чтобы упростить анализ, мы положим

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{q}}_0 = O(E^{1/2}),$$

что объясняет выбираемый вид решения. Приближенная скорость, получаемая таким образом, оказывается весьма точной внутри интересующего нас интервала  $0 \leq t \leq t_c \doteq E^{-1/2}$ . Однако теперь мы не можем достаточно точно описать пограничные слои и вторичное течение в ранние моменты времени. Для изучения начальных стадий могут быть использованы незначительные модификации (см. раздел 2.9), однако более строгое исследование неустановившегося течения приводит к выражению для  $\mathbf{q}_0$ , почти совпадающему с тем, которое было найдено из решения уравнений для установившегося пограничного слоя. Пограничные слои и вторичные течения также совпадают с полученными из более простой теории, по крайней мере, в течение времени спинапа. Следовательно, в настоящее время с помощью более сложного приближения можно лишь ненамного продвинуться вперед, но зато много потерять в смысле простоты и ясности. По этой причине мы продолжим начатое исследование в прежнем духе.

Третий временной масштаб  $t \doteq E^{-1}$ , который характеризует время, требуемое для проникновения вязкой диффузии во внутреннюю область, не играет заметной роли в задачах о неустановившихся движениях в резервуарах конечного объема. (Его влияние становится значительным в стратифицированной жидкости, раздел 2.21.)

Чтобы получить решение, равномерно справедливое для больших  $t$ , частотный параметр  $s_m$  в (2.5.3) также необходимо представить в виде ряда

$$s_m = s_{m,0} + E^{1/2} s_{m,1} + \dots, \quad (2.5.8)$$

где

$$s_{m,0} = i\lambda_m \quad (2.5.9)$$

определяет невязкое собственное значение. Параметр  $s_{m,1}$  выбирается так, чтобы исключить вековые члены, обладающие неприемлемыми скоростями роста, которые появляются при формальном разложении. Этот прием очень напоминает классический метод Пуанкаре [207].

Подстановка этих разложений в основные уравнения (2.2.1) и соответствующие граничные условия приводят к последовательности задач для невязких мод, течений пограничного слоя и их взаимодействия.

Для геострофической моды первые три задачи этой последовательности могут быть записаны следующим образом:

$$\mathcal{A}_1: 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_0 = -\nabla\varphi_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{q}_0 = 0,$$

с граничными условиями  $\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на  $\Sigma$ ;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2: 2\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0 - \hat{\mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\varphi}_1 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{\mathbf{q}}_0, \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0) &= 0 \quad [\text{см. (1.6.2)}], \end{aligned}$$

с граничными условиями  $\mathbf{q}_0 + \tilde{\mathbf{q}}_0 = 0$  на  $\Sigma$ ,  $\xi = 0$ ;

$$\mathcal{A}_3: \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}_0 + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_1 = -\nabla\varphi_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{q}_1 = 0,$$

с граничными условиями  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{q}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_1) = 0$  на  $\Sigma$ ,  $\mathbf{q}_0(\mathbf{r}, 0)$  задан.

Последовательность задач для характерной инерционной моды записывается так:

$$\mathcal{B}_1: i\lambda_m \mathbf{Q}_m + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m + \nabla\Phi_m = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{Q}_m = 0,$$

с граничными условиями  $\mathbf{Q}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на  $\Sigma$ ;

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2: \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{q}}_{m0} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{q}}_{m0} - \hat{\mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\varphi}_{m1} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{\mathbf{q}}_{m0}, \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{m1}) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_{m0}) &= 0, \end{aligned}$$

с граничными условиями  $\tilde{\mathbf{q}}_{m0} = -\mathbf{Q}_m e^{s_m t}$  на  $\Sigma$ ,  $\xi = 0$ ,  $\mathbf{q}_m = 0$  при  $t = 0$ ;

$$\mathcal{B}_3: \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}_{m1} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_{m1} = -\nabla\varphi_{m1} - s_{m,1} \mathbf{Q}_m e^{s_m t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{q}_{m1} = 0,$$

с граничными условиями  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{q}_{m1} + \bar{\mathbf{q}}_{m1}) = 0$  на  $\Sigma$ ,  $\mathbf{q}_{m1} = 0$  при  $t = 0$ .

Самым простым было бы предположить, что все функции, появляющиеся в последовательности  $(\mathcal{B})$ , имеют одинаковую экспоненциальную зависимость от времени, однако в этом классическом приближении неожиданно встречаются большие трудности, которые нелегко преодолеть. Затруднения возникают из-за чередования предельных процессов, включающих  $E$  и  $\zeta$ , при наличии резонанса на поверхности резервуара. Предлагаемый метод несколько лучше, так как он позволяет избежать этих затруднений, дает лучшее приближение для реальных нестационарных пограничных слоев и приводит к тому же значению коэффициента затухания  $s_{m, 1}$ , что и классический анализ. Здесь не будет рассматриваться ни один из этих методов, и параметр  $s_{m, 1}$  будет определяться самым простым из всех доступных способов, даже в тех случаях, когда для обоснования необходимо прибегать к другому методу.

## 2.6. Геострофическая мода

Задача  $\mathcal{A}_1$  для  $\varphi_0$  и  $\mathbf{q}_0$ , описываемая уравнениями

$$\left. \begin{aligned} 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_0 &= -\nabla\varphi_0, \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6.1)$$

и условием  $\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на границе  $\Sigma$ , представляет собой частный случай общей задачи для инерционной моды  $\mathcal{B}_1$ , соответствующий  $\lambda = 0$ . Отсюда ясно, что эти функции не изменяются за период полного оборота, и на этом основании можно угадать форму решения, содержащего более длинную временную шкалу

$$\tau = E^{1/2}t.$$

Вихрь уравнения момента (2.6.1) дает:

$$(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla) \mathbf{q}_0 = 0; \quad (2.6.2)$$

это соотношение еще раз показывает, что  $\mathbf{q}_0$  есть трехмерный вектор, не зависящий от высоты  $z$ . Движение является столбчатым; вся вертикальная колонка жидкости от нижней ( $z = -g$ ) до верхней поверхности ( $z = f$ ) движется как единое целое.

Из (2.6.1) нетрудно выразить скорость через давление; в результате получаем

$$\mathbf{q}_0 = \frac{1}{4} (\mathbf{n}_T - \mathbf{n}_B) \times \nabla\varphi_0. \quad (2.6.3)$$

Здесь  $\mathbf{n}_T$  и  $\mathbf{n}_B$  — векторы, нормальные к  $\Sigma$  в точках, где нижняя и верхняя поверхности соединяются одной и той же вертикальной

линией. Граничное условие, эквивалентное  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_0 = 0$ , тогда будет следующим:

$$\hat{\mathbf{n}}_T \cdot (\hat{\mathbf{n}}_B \times \nabla \varphi_0) = (\hat{\mathbf{n}}_T \times \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \nabla \varphi_0 = 0, \quad (2.6.4)$$

и в силу того, что  $\varphi_0$  не зависит от  $z$ , его можно переписать так:

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \varphi_0 \times \nabla (f + g) = 0. \quad (2.6.5)$$

Это означает, что *давление является функцией только общей высоты  $h = f + g$  и зависит от времени параметрически*

$$\varphi_0 = \varphi_0(f + g, \tau) = \varphi_0(h, \tau). \quad (2.6.6)$$

Частный случай, в котором  $h$  является константой, и поэтому  $\nabla h = 0$ , а (2.6.5) удовлетворяется автоматически, анализируется отдельно, после развития общей теории (когда это оказывается более удобным,  $h$  определяется как общая глубина).

Зная зависимость давления от  $h$ , можно найти скорость

$$\mathbf{q}_0 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial h} \varphi_0(h, \tau) \right] \mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B. \quad (2.6.7)$$

Следовательно, при геострофическом течении столб жидкости высотой  $h$  двигается во внутренней области резервуара как целое, сохраняя постоянную длину. Давление здесь играет роль функции тока.

Очевидно, геострофичность может существовать только тогда, когда резервуар имеет замкнутые контуры  $C$  постоянной общей высоты  $h$ , как это показано на рис. 2.4. Это не всегда имеет место, и простой резервуар, состоящий из полусферы, вращающейся относительно диаметра на ее плоской поверхности, является одним из резервуаров, для которых невозможно никакое геострофическое течение. Контуры постоянной высоты в такой геометрии, как изображенный на рис. 2.14 усеченный цилиндр, не образуют замкнутых линий тока. Оказывается, что в резервуарах такой формы взамен геострофической моды появляется бесконечное число весьма специфических низкочастотных инерционных волн, называемых волнами Россби. Волны Россби изучаются в § 2.16 и 5.5.

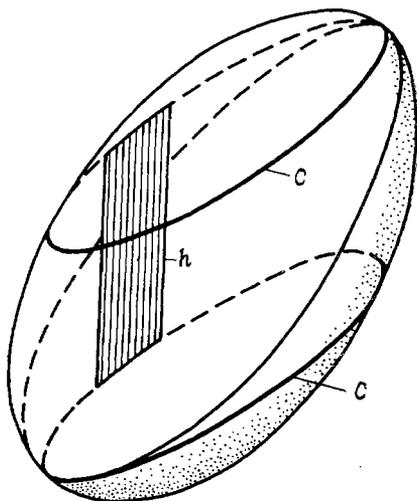


Рис. 2.4. Резервуар произвольной геометрии, в котором изображен столб постоянной высоты и геострофические контуры.

Линейный контур  $C$ , расположенный на ограничивающей поверхности, играет важную роль в общей теории и поэтому полезно заметить, что его единичный тангенциальный вектор имеет вид

$$\frac{\hat{\mathbf{n}}_T \times \hat{\mathbf{n}}_B}{|\hat{\mathbf{n}}_T \times \hat{\mathbf{n}}_B|} = \frac{\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B}{|\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B|}.$$

Кроме того, циркуляция геострофической скорости относительно  $C$  представляет собой

$$\Gamma(\mathbf{h}, \tau) = \oint_C \mathbf{q}_0 \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \varphi_0(\mathbf{h}, \tau) \right] \oint_C |\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B| ds \quad (2.6.8)$$

и не равна нулю. *Геострофическая мода обладает циркуляцией!*

Для того чтобы изучить влияние вязкости на основное геострофическое течение, нужно решить задачи  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{A}_3$ . Рассмотрим сначала задачу  $\mathcal{A}_2$ :

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0 - \hat{\mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Psi}_1 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{\mathbf{q}}_0, \quad (2.6.9)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0) = 0, \quad (2.6.10)$$

при  $\mathbf{q}_0 + \tilde{\mathbf{q}}_0 = 0$  при  $\xi = 0$ . Это обычная постановка задачи для установившегося экмановского пограничного слоя, частный случай которого рассматривается в разделе 2.3. Появление первого уравнения связано с выполнением условия обращения в нуль тангенциальной составляющей внутренней скорости на стенке.  $C$  помощью второго уравнения определяется нормальный поток  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1$ , который возбуждается этим вязким слоем и приводит к последующему изменению внутреннего течения (задача  $\mathcal{A}_3$ ).

Простые векторные преобразования (2.6.9) (и тот факт, что  $\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0 = 0$  внутри слоя) сводят это уравнение к уравнению пограничного слоя, которое служит для определения тангенциальной компоненты скорости:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0 + i\tilde{\mathbf{q}}_0) = 2i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0 + i\tilde{\mathbf{q}}_0). \quad (2.6.11)$$

Оно имеет решение

$$\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_0 + i\tilde{\mathbf{q}}_0 = -\{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{q}_0 + i\mathbf{q}_0\}_\Sigma \exp \left[ -(2i\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^{1/2} \xi \right], \quad (2.6.12)$$

где корень подразумевается всегда положительным и вещественным, а значение  $\mathbf{q}_0$  берется на  $\Sigma$ . Нормальный поток внутрь пограничного слоя находится интегрированием (2.6.10), а на стенке ( $\xi = 0$ ) поток определяется с помощью следующего соотношения:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left\{ \left[ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{q}_0 + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}|} \tilde{\mathbf{q}}_0 \right] \Big|_{\xi=0} \right\}. \quad (2.6.13)$$

Если относительная тангенциальная скорость на стенке равна  $U$ , а не нулю, то в двух предыдущих формулах значение внутренней

скорости  $\mathbf{q}_0$  на  $\Sigma$  должно быть соответственно заменено через  $\mathbf{q}_0 - U$ .

Хотя формула (2.6.13) была получена для координатной системы, связанной с пограничным слоем (см. стр. 27), тем не менее это никак не сказывается на ее общности. Другими словами, конечный результат больше не связан с частным методом перехода от вектора, определенного только на  $\Sigma$ , к векторной функции положения  $\mathbf{r}$ . Чтобы доказать это, предположим, что  $\mathbf{F}$  есть вектор, определенный только на  $\Sigma$ , а  $F(x, y, z)$  — любая непрерывная скалярная функция, которая обладает тем свойством, что  $F = \mathbf{F}$  на  $\Sigma$ . Кроме этого, пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — ортогональные криволинейные координаты с соответствующими единичными векторами  $\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3$ , причем  $\xi_3 = \text{const}$  есть поверхность  $\Sigma$ . Из определения вихря

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}_1 \times \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{F} + \hat{\mathbf{i}}_2 \times \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathbf{F} + \hat{\mathbf{i}}_3 \times \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \mathbf{F}$$

следует, что на  $\Sigma$ , где  $\hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{n}}$ ,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}_2 \cdot \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{F} - \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathbf{F}.$$

Так как выражение не содержит нормальных производных,  $F$  может быть заменена ее значением на поверхности, так что

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}}_2 \cdot \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} F - \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} F.$$

Поэтому величина  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$  на  $\Sigma$  зависит только от производных  $F$  на поверхности и не зависит от их значений внутри области. Следовательно,  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$ , т. е. правая часть последнего уравнения оказывается однозначно определенной величиной. Практически получить точное решение (2.6.13) достаточно просто и нет никакой необходимости включать поверхностные градиенты на границе. Например,  $\mathbf{q}_0$  и  $\hat{\mathbf{n}}$  на  $\Sigma$  часто задаются как функции от  $x, y, z$ . В этом случае  $\mathbf{q}_0(x, y, z)$  и  $\hat{\mathbf{n}}(x, y)$  также являются надлежащими векторными функциями положения (области поля, которые, очевидно, имеют корректную форму на  $\Sigma$ ), и все вычисления сводятся к одному из общепринятых векторных преобразований в декартовых координатах.

Следующий шаг — это решение задачи  $\mathcal{A}_3$ :

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_1 = -\nabla \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_0, \quad (2.6.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_1 = 0, \quad (2.6.15)$$

при  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_1 = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_1$  на границе  $\zeta = 0$ . Применение оператора вихря к (2.6.14) сводит его к

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{q}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla \times \mathbf{q}_0. \quad (2.6.16)$$

После интегрирования (2.6.16) и удовлетворения (2.6.15) находим

$$\mathbf{q}_1 = \nabla \times \left( \frac{1}{2} z \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_0 \right) + \nabla \times \mathbf{B}(x, y, \tau). \quad (2.6.17)$$

Если применить теорему Стокса к части верхней и нижней граничных поверхностей ( $z = f$ ,  $z = -g$ ), ограниченных контуром  $C$  (см. рис. 2.4), то получится одно уравнение, содержащее  $\mathbf{q}_0$  и его производную по времени. Пусть обозначения  $\Sigma'_T$  и  $\Sigma'_B$  используются для выделения этих частей  $\Sigma$ , и пусть

$$ds = \frac{\hat{\mathbf{n}}_T \times \hat{\mathbf{n}}_B}{|\hat{\mathbf{n}}_T \times \hat{\mathbf{n}}_B|} ds$$

представляет собой элемент дуги, направленной вдоль  $C$ . Так как все векторы не зависят от  $z$ , то на основании (2.6.17) (проявляя должную заботу о знаках) имеем

$$\left. \begin{aligned} \int \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \mathbf{q}_1 d\Sigma'_T &= \frac{1}{2} \oint_C f \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \\ \int \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{q}_1 d\Sigma'_B &= \frac{1}{2} \oint_C g \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau} \cdot d\mathbf{s} - \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.18)$$

Однако использование (2.6.13) подразумевает, что

$$\left. \begin{aligned} \int \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \mathbf{q}_1 d\Sigma'_T &= -\frac{1}{2} \oint_C |\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} (\hat{\mathbf{n}}_T \times \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_0) \cdot d\mathbf{s}, \\ \int \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{q}_1 d\Sigma'_B &= \frac{1}{2} \oint_C |\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} (\hat{\mathbf{n}}_B \times \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_0) \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.19)$$

Подстановка этих выражений в предыдущую систему и исключение интеграла, содержащего  $\mathbf{B}$ , дает

$$\begin{aligned} - \oint_C d\mathbf{s} \cdot [(\mathbf{q}_0 + \hat{\mathbf{n}}_T \times \mathbf{q}_0) |\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} + (\mathbf{q}_0 - \hat{\mathbf{n}}_B \times \mathbf{q}_0) |\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2}] = \\ = \oint_C (f + g) \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Поскольку  $d\mathbf{s} \times \mathbf{q}_0 = 0$  и  $f + g = h$ , где  $h$  равна константе на контуре  $C$ , то (2.6.20) упрощается и принимает вид

$$- \oint_C d\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}_0 (|\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} + |\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2}) = h \oint_C \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.6.21)$$

Наконец, после подстановки уравнения (2.6.7) для геострофической скорости  $\mathbf{q}_0$  последнее уравнение, в свою очередь, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{\partial}{\partial h} \varphi_0(h, \tau) \right] \oint_C (|\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} + |\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2}) |\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B| ds = \\ = h \left[ \frac{\partial^2}{\partial h \partial \tau} \varphi_0(h, \tau) \right] \oint_C |\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B| ds, \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

откуда  $(\partial/\partial h)$   $\varphi_0$  может быть определено с помощью интегрирования. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial h} \varphi_0(h, \tau) = \left( \frac{\partial}{\partial h} \varphi_0(h, 0) \right) \exp \left( -\frac{I(h)}{J(h)} \tau \right), \quad (2.6.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I(h) &= \oint_C |\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B| \left( |\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} + |\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} \right) ds, \\ J(h) &= h \oint_C |\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B| ds, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.24)$$

и  $\tau = E^{1/2} t$ .

Фундаментальное решение получается после определения геострофической скорости из (2.6.7). Функция  $\varphi_0(h, 0)$  остается неопределенной и должна быть найдена с помощью начальных условий. Прежде чем это можно будет сделать, необходимо выяснить свойства инерционных мод. Значение  $\nabla \times \mathbf{V}$  и, следовательно, окончательный вид вторичного движения  $\mathbf{q}_1$  находится из (2.6.17) и граничных условий на верхней и нижней поверхностях. Однако в этом случае теория дает формулу только для компонент скорости в направлении нормали к геострофическим контурам. Для расчета тангенциальной компоненты необходимо рассмотреть следующее приближение. Если

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

а  $\mathbf{v}_{\parallel} \times (\hat{\mathbf{n}}_T \times \hat{\mathbf{n}}_B) = 0$ , то отсюда следует, что

$$\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \mathbf{v}_{\perp} = \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \mathbf{q}_1|_{z=f} + \frac{1}{2} (z-f) \left( \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \nabla \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_0 \right),$$

$$\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{v}_{\perp} = \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{q}_1|_{z=-g} + \frac{1}{2} (z+g) \left( \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \nabla \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}_0 \right).$$

Из этих двух уравнений две компоненты  $\mathbf{v}_{\perp}$  могут быть определены (см. также раздел 2.17).

Экспоненциальный множитель в (2.6.23) является функцией только общей высоты  $h$ . Значит, скорость затухания геострофического течения изменяется от контура к контуру. Это может послужить основой для ряда элементарных экспериментов. Гринспен и Говард [96] сравнили теорию с экспериментом для резервуара переменной глубины, состоящего из цилиндрического бака, основанием которого служил конус с углом раствора, равным  $110^\circ$ . Геострофическое течение создавалось за счет спина бака. В процессе проведения эксперимента замерялось время, необходимое для того, чтобы пришел в равновесие поплавок и фиксировалось положение последнего. (В этом эксперименте верхняя поверхность остается свободной, и это неизбежно должно повлечь за собой небольшое изменение теории, детали можно выяснить в цитированной литературе.) Экспериментальные результаты показаны на рис. 2.5; сплошная линия — это теоретическое значение (для  $h = g$ ) времени, кратного  $e$ , т. е.  $\exp -\frac{t}{t_c}$ ;

$$t_c = E^{-1/2} \Omega^{-1} g \left( 1 + \left[ 1 + \left( \frac{dg}{dr} \right)^2 \right]^{1/4} \right)^{-1},$$

причем для конического основания  $t_c$  является линейной функцией  $g$ . По-видимому, между теорией и экспериментом нет никаких существенных расхождений.

Чтобы продемонстрировать геострофическое течение в резервуаре произвольной конфигурации, можно осуществить более качественный эксперимент. Несимметричный резервуар в форме мяча для регби, похожий на тот, что изображен на рис. 2.4, вращается вокруг вертикальной оси (рис. 2.6 а). В момент, когда жидкость во внутренней области вращается как твердое тело, в резервуар вводятся чернила, скорость вращения затем слегка увеличивается. Это первоначальное состояние формирует главным образом геострофическую моду и рис. 2.6 б показывает, что чернила следуют по тому геострофическому

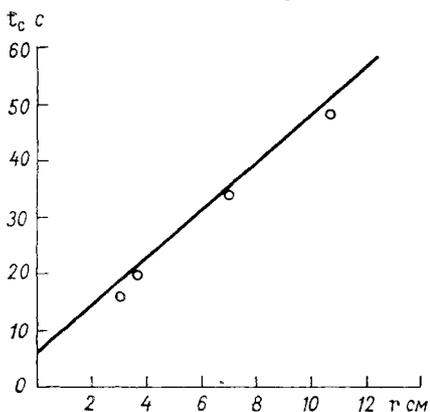


Рис. 2.5. Зависимость времени от радиуса в случае спина резервуара с коническим основанием, угол раствора которого равен  $110^\circ$  [96].

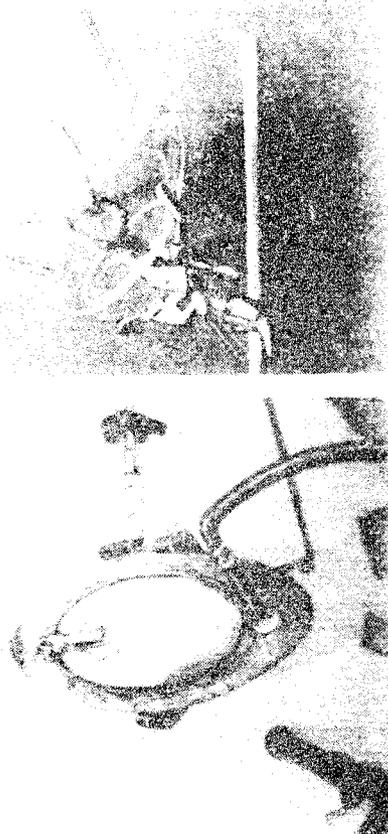


Рис. 2.6. а — овалный резервуар, подобный изображенному на рис. 2.4. На его поверхности нанесены геострофические контуры; б — следы чернил, введенных в одно отверстие во время спина резервуара, совпадают с геострофическими контурами. Фотография была сделана после трех полных оборотов резервуара.

контур  $S$ , который проходит через входное отверстие. Теоретическая кривая показана как сплошная линия. (В этом случае скорость затухания вдоль  $S$  не определялась.) Если взглянуть на этот эксперимент с другой точки зрения, то можно увидеть, что он демонстрирует теорему Тэйлора — Праудмена, потому что относительное движение мало и во вращающейся системе координат существенно устойчиво (для большого периода времени).

Общая теория дает объяснение столбчатого движения, показанного на рис. 1.1. Там контуры постоянной высоты над выпуклостью образуют ряд отдельных находящихся на некотором расстоянии друг от друга замкнутых кривых. В спине жидкие частицы не могут ни проникнуть внутрь этой области снаружи, ни уйти из нее, и две области разделены сдвиговой поверхностью. Взвешенные алюминиевые частицы концентрируются в области сдвига, и этим вызывают изменение в характере рассеяния света, что делает столб видимым.

## 2.7. Инерционные волны

Рассмотрим теперь задачу  $\mathcal{B}_1$  для невязких инерционных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} i\lambda \mathbf{Q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} + \nabla \Phi = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.7.1)$$

с  $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на границе. (Здесь индексы опущены.) Вектор комплексной скорости выражается через давление следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2\right) \mathbf{Q} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi - \frac{1}{4} i\lambda \nabla \Phi - \frac{1}{i\lambda} \hat{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi), \quad (2.7.2)$$

причем  $\lambda \neq 0, \pm 2$ . Первое исключенное значение  $\lambda = 0$  соответствует геострофической моде, изученной в предыдущем разделе. Второе будет рассмотрено отдельно.

Задача в терминах одного давления (она была исследована Пуанкаре [208] и упоминалась после него Картаном [371]) имеет вид

$$\nabla^2 \Phi - \frac{4}{\lambda^2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla)^2 \Phi = 0 \quad (2.7.3)$$

при

$$-\lambda^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi + 4(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi) + 2i\lambda (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (2.7.4)$$

на границе. Хотя для точного определения мод и частот в частных случаях (например, в цилиндре или сфере) необходимо решить эту краевую задачу для  $\Phi$ , теоретические свойства системы часто становятся более ясными и объяснимыми, если оставить вектор скорости в первоначальном виде и сохранить исходную формулировку уравнений (2.7.1) и т. д. Тогда для  $|\lambda| = 2$  не нужно делать никакого исключения.

Установим теперь некоторые свойства этой задачи на собственные значения. Обозначим комплексно сопряженную функции  $\psi$  через  $\psi^+$ .

*Собственные значения  $\lambda$  — действительные и  $|\lambda| \leq 2$*

Если (2.7.1) умножить на  $\mathbf{Q}^+$  и проинтегрировать по всему объему резервуара, то в результате получим

$$i\lambda \int \mathbf{Q}^+ \cdot \mathbf{Q} \, dV + 2 \int \mathbf{Q}^+ \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} \, dV = - \int \mathbf{Q}^+ \cdot \nabla \Phi \, dV.$$

Так как  $\mathbf{Q}^+$  удовлетворяет уравнению дивергенции и  $\mathbf{Q}^+ \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на границе, то легко показать, что правая часть уравнения будет

равна нулю. [Заметим, в частности, что если  $(\mathbf{Q}, \lambda)$  представляет собой пару: собственная функция — собственное значение, то это справедливо также и для  $(\mathbf{Q}^+, -\lambda)$ .] Следовательно,

$$\lambda = 2i \frac{\int \mathbf{Q}^+ \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} \, dV}{\int \mathbf{Q}^+ \cdot \mathbf{Q} \, dV} = -2 \frac{\int Im [\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^+] \, dV}{\int \mathbf{Q}^+ \cdot \mathbf{Q} \, dV}, \quad (2.7.5)$$

что доказывает первую часть теоремы.

Пусть скорость выражается через сумму действительной и мнимой частей

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_R + i\mathbf{Q}_I.$$

Простая граница для  $\lambda$ , получаемая точно из (2.7.5), тогда имеет вид

$$|\lambda| \leq 4 \frac{\int |\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q}_R \times \mathbf{Q}_I| \, dV}{\int (\mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_R + \mathbf{Q}_I \cdot \mathbf{Q}_I) \, dV}. \quad (2.7.6)$$

Однако

$$2 \int |\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q}_R \times \mathbf{Q}_I| \, dV \leq 2 \int |\mathbf{Q}_R| |\mathbf{Q}_I| \, dV \leq \int (|\mathbf{Q}_R|^2 + |\mathbf{Q}_I|^2) \, dV,$$

что при подстановке в (2.7.6) дает

$$|\lambda| \leq 2. \quad (2.7.7)$$

### Ортогональность

Пусть  $(\mathbf{Q}_n, \lambda_n)$ ,  $(\mathbf{Q}_m, \lambda_m)$  — две пары (собственная функция — собственное значение), удовлетворяющие (2.7.1) для каждого  $\lambda_n \neq \lambda_m$ . На основании исходных уравнений можно получить

$$\left. \begin{aligned} i\lambda_n \mathbf{Q}_m^+ \cdot \mathbf{Q}_n + 2\mathbf{Q}_m^+ \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_n &= -\mathbf{Q}_m^+ \cdot \nabla \Phi_n, \\ -i\lambda_m \mathbf{Q}_n \cdot \mathbf{Q}_m^+ + 2\mathbf{Q}_n \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m^+ &= -\mathbf{Q}_n \cdot \nabla \Phi_m^+. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.8)$$

Если эти выражения сложить и проинтегрировать по всему объему  $V$ , то в силу того, что  $\mathbf{Q}_m^+ \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_n) = -\mathbf{Q}_n \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m^+)$ , отсюда следует

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int \mathbf{Q}_m^+ \cdot \mathbf{Q}_n \, dV = 0.$$

Предполагая, что  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , находим

$$\int \mathbf{Q}_m^+ \cdot \mathbf{Q}_n \, dV = 0. \quad (2.7.9)$$

Приведенное соотношение ортогональности может быть записано в терминах одного лишь давления:

$$\int dV \left[ \nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_m^+ + \frac{4}{\lambda_n \lambda_m} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_n) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_m^+) \right] = 0. \quad (2.7.10)$$

Это выражение является более простым для использования в любых конкретных вычислениях, так как метод решения неизменно включает определение  $\Phi$ . С другой стороны, соотношение (2.7.9) более удобно с теоретической точки зрения. Присутствие собственных значений в последнем уравнении делает эту математическую задачу интересной и вместе с тем трудной.

Если распределение скоростей представить как суперпозицию инерционных мод

$$\mathbf{Q}_* = \sum_m A_m \mathbf{Q}_m, \quad (2.7.11)$$

то коэффициенты Фурье могут быть рассчитаны с помощью (2.7.9)

$$A_m = \frac{\int \mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{Q}_m^+ dV}{\int \mathbf{Q}_m^- \cdot \mathbf{Q}_m dV}. \quad (2.7.12)$$

Обычно произвольное распределение скорости наряду с инерционными колебаниями должно включать также и геострофическое течение. Геострофическая мода, которая соответствует совокупности собственных функций с нулевым собственным значением, конечно, ортогональна к любой другой моде. Однако это не важно! Если имеется полный набор любых начальных распределений, должно существовать некоторое другое отличительное свойство, которое разграничивает геострофическое и инерционные колебания. Иными словами, как определить произвольную функцию  $\varphi_0(h, 0)$  в уравнениях (2.6.7) и (2.6.23)? Ответ на этот вопрос содержится в теореме о средней циркуляции.

## 2.8. Теорема о средней циркуляции

Определим осредненный по глубине вектор скорости

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = \int_{-g}^f \mathbf{Q} dz, \quad (2.8.1)$$

который является трехкомпонентным вектором, не зависящим от координаты  $z$ . Исходные уравнения могут быть тогда переписаны в терминах  $\langle \mathbf{Q} \rangle$ . Например,

$$\int_{-g}^f \nabla \cdot \mathbf{Q} dz = \nabla \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle - \mathbf{Q}_T \cdot (\nabla f - \hat{\mathbf{k}}) - \mathbf{Q}_B \cdot (\nabla g + \hat{\mathbf{k}}) = 0, \quad (2.8.2)$$

где нижние индексы Т или В указывают на принадлежность соответствующих функций к верхней или нижней поверхностям резервуара.

Граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 &= \mathbf{Q}_T \cdot (\nabla f - \hat{\mathbf{k}}), \\ &= 0 = \mathbf{Q}_B \cdot (\nabla g + \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \right\} \quad (2.8.3)$$

позволяют упростить последнее уравнение, которое теперь принимает вид

$$\nabla \cdot \langle Q \rangle = 0. \quad (2.8.4)$$

После осреднения уравнения момента получаем

$$i\lambda \langle Q \rangle + 2\hat{k} \times \langle Q \rangle = -\nabla \left( \int_{-g}^f \Phi dz \right) + \Phi_T \mathbf{n}_T + \Phi_B \mathbf{n}_B \quad (2.8.5)$$

и, в частности,

$$i\lambda \nabla \times \langle Q \rangle = \nabla \times (\Phi_T \mathbf{n}_T) + \nabla \times (\Phi_B \mathbf{n}_B); \quad (2.8.6)$$

Здесь нормальные вектора определяются, как и в (2.5.2). Применение теоремы Стокса к *любой* части поверхности резервуара  $\Sigma'$ , ограниченной контуром  $\gamma$ , дает

$$i\lambda \oint_{\gamma} \langle Q \rangle \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} \Phi_T \mathbf{n}_T \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\gamma} \Phi_B \mathbf{n}_B \cdot d\mathbf{s}.$$

Пусть  $\gamma$  — геострофический контур  $C$ , определенный в разделе 2.6. Он представляет собой поверхностный контур, соответствующий постоянной общей высоте  $f + g = h$ , для которого  $\mathbf{n}_T \cdot d\mathbf{s} = 0 = \mathbf{n}_B \cdot d\mathbf{s}$ . Тогда правая часть последнего уравнения тождественно равна нулю и

$$\oint_C \langle Q \rangle \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.8.7)$$

для  $\lambda \neq 0$ . *Средняя циркуляция по геострофическому контуру  $C$  равна нулю для всех инерционных мод.* Во вращающейся координатной системе только геострофическая мода может обладать средней циркуляцией, и это свойство позволяет нам завершить синтез произвольного начального состояния. Заметим, что  $h$  является константой на  $C$ , поэтому в (2.8.7) может быть использовано общепринятое определение среднего  $h^{-1} \langle Q \rangle$ .

Если в резервуаре отсутствуют замкнутые контуры постоянной высоты, то, конечно, простой геострофической моды не существует. В этом случае теорема не верна, и инерционные моды могут обладать циркуляцией. Действительно, в этом случае вместо геострофического течения возникают особые инерционные моды, но изучение этих волн России мы пока отложим.

Пусть  $Q_*(\mathbf{r})$  представляет теперь некоторое произвольное распределение скорости внутри резервуара, и предположим, что это распределение можно охарактеризовать набором всех натуральных мод, как инерционных, так и геострофической:

$$Q_*(\mathbf{r}) = \mathbf{q}_0 + \sum_m A_m Q_m. \quad (2.8.8)$$

Коэффициенты Фурье  $A_m$  находятся с помощью интеграла ортогональности и уже были выписаны в (2.7.12).

Теорема о средней циркуляции используется для определения  $q_0$  следующим образом. Интегрируя по глубине, получаем

$$\int_{-g}^f \mathbf{Q}_*(r) dz = h\mathbf{q}_0 + \sum_m \mathbf{A}_m \langle \mathbf{Q}_m \rangle,$$

теперь вычислим среднюю циркуляцию по контуру  $C$

$$\frac{1}{h} \oint_C \langle \mathbf{Q}_* \rangle \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{q}_0 \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.8.9)$$

Правая часть последнего уравнения представляет собой циркуляцию геострофического течения, определенную в (2.6.8). Отсюда следует, что

$$\frac{\partial q_0}{\partial h} = -\frac{2}{J(h)} \oint_C \langle \bar{\mathbf{Q}}_* \rangle \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.8.10)$$

где  $q_0$  и  $J$  даны в (2.6.7) и (2.6.24) соответственно. Таким образом, синтез произвольного распределения завершен.

## 2.9. Вязкая диссипация

Полное решение, равномерно справедливое вплоть до величин порядка  $O(E^{1/2})$ , для достаточно длительного промежутка времени, включающего слияние, требует определения показателя затухания  $s_{m,1}$ , появляющегося в (2.5.8). Только после этого можно приступить к решению систем  $\mathcal{B}_2$  и  $\mathcal{B}_3$  (стр. 43). Это весьма трудоемкая задача, и поэтому здесь мы только наметим план ее решения. Приближенное решение заимствовано из работ Гринспена [94] и Кудлика [136].

Задача  $\mathcal{B}_2$  представляет собой типичную задачу о расчете неустановившегося экмановского слоя. Уравнение пограничного слоя для тангенциальной компоненты скорости имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{q}}_{m0} + 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}_{m0} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \tilde{\mathbf{q}}_{m0} \quad (2.9.1)$$

и

$$\tilde{\mathbf{q}}_{m0} + \mathbf{Q}_m e^{s_m t} = U \quad (2.9.2)$$

на  $\zeta = 0$  и начальными условиями  $\tilde{\mathbf{q}}_{m0} = 0$  при  $t = 0$ . Здесь  $U$  — относительная скорость стенки в случае, когда различные части границ имеют разные скорости. В данном случае  $U = 0$ . Решение находится с помощью прямого преобразования Лапласа. Если изображение функции  $\psi$  записать в виде

$$L\{\psi\} = \int_0^\infty e^{-st} \psi dt, \quad (2.9.3)$$

то

$$\begin{aligned} \bar{q}_{m0} = & \frac{1}{2} L^{-1} \{L \{U^* - \hat{\mathbf{n}} \times U^*\} \exp [-(s + 2i\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^{1/2} \zeta] + \\ & + L \{U^* + \hat{\mathbf{n}} \times U^*\} \exp [-(s - 2i\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^{1/2} \zeta]\}, \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

где

$$U^* = U - Q_m e^{s_m t}$$

и определено на  $\Sigma$ ,  $\zeta = 0$ , а квадратный корень имеет положительное вещественное значение.

После того как скорость пограничного слоя найдена, нормальный поток получается интегрированием

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{q}_{m1}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \bar{q}_{m0}). \quad (2.9.5)$$

Если  $U = 0$ , то  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_{m1}$  при  $\zeta = 0$  является почти чисто колебательной функцией времени. Этот вывод справедлив везде, за исключением окрестностей некоторых критических кривых на  $\Sigma$ . Итак, граничное условие для следующей задачи можно считать найденным и теперь можно приступить к определению вторичного внутреннего течения. (Нестационарный пограничный слой в геострофическом движении представляет особый случай этой задачи. Исследование соответствующего этому случаю частного решения доказывает сделанное ранее утверждение, см. стр. 42).

Выше мы отмечали, что, если опустить специфические математические трудности или, точнее, пренебречь ими, то показатель  $s_{m,1}$  может быть определен классическими методами. Значение этого параметра получается правильным и подтверждается другими способами.

Рассмотрим теперь задачу  $\mathcal{B}_3$ , и пусть

$$\mathbf{q}_{m1} = Q_{m1} e^{s_m t}. \quad (2.9.6)$$

Если  $E$  равно нулю, то краевая задача имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{Q}_{m1} &= 0, \\ i\lambda_m \mathbf{Q}_{m1} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_{m1} &= -\nabla \Phi_{m1} - s_{m,1} \mathbf{Q}_{m1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.9.7)$$

где  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q}_{m1}$  — известная функция на границе. Формула для потока, приведенная в [136], записывается следующим образом:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q}_{m1} = F_m; \quad (2.9.8)$$

$$F_m = \lim_{E \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow s_m} \left\{ - \int_0^\infty \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{W}_m) d\zeta \right\}, \quad (2.9.9)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_m = & \frac{1}{2} (Q_m - \hat{\mathbf{n}} \times Q_m) \Big|_{\zeta=0} \exp(-V \bar{x}_+ \zeta) + \\ & + \frac{1}{2} (Q_m + \hat{\mathbf{n}} \times Q_m) \Big|_{\zeta=0} \exp(-V \bar{x}_- \zeta) \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

и

$$x_{\pm} = s \pm 2i\hat{n} \cdot \hat{k}.$$

Если (2.9.7) умножить на  $Q_m^+$ , а сопряженную (2.7.1) систему умножить на  $Q_{m1}$  (тем же способом, который мы использовали при выводе соотношения ортогональности), и затем результаты сложить и проинтегрировать по всему объему, то получим

$$\int Q_m^+ \cdot \nabla \Phi_{m1} dV + \int Q_{m1} \cdot \nabla \Phi_m^+ dV + s_{m,1} \int Q_m^+ Q_m^+ dV = 0. \quad (2.9.11)$$

После дальнейших упрощений, для чего используем (2.9.8), имеем

$$s_{m,1} = \frac{-\int \Phi_m^+ F_m d\Sigma}{\int Q_m^+ \cdot Q_m^+ dV}. \quad (2.9.12)$$

Это необходимое условие существования решения неоднородной краевой задачи [уравнения (2.9.7) и др.], когда существует нетривиальное однородное решение, в нашем случае собственная функция  $Q_m$ . Аналогичные требования разрешимости появляются во всех задачах на собственные значения с возмущением.

После длинных алгебраических выкладок находим

$$\int \Phi_m^+ F_m d\Sigma = \frac{1}{2^{3/2}} \int d\Sigma \{1 - (\hat{n} \cdot \hat{k})^2\}^{-1} \times \{|\hat{n} \cdot \hat{k} \times Q_m - i\hat{k} \cdot Q_m|^2 \times \\ \times |\delta_+|^{1/2} \left(1 + \frac{i\delta_+}{|\delta_+|}\right) + |\hat{n} \cdot \hat{k} \times Q_m + i\hat{k} \cdot Q_m|^2 |\delta_-|^{1/2} \left(1 + i \frac{\delta_-}{|\delta_-|}\right)\}, \quad (2.9.13)$$

где

$$\delta_{\pm} = \lambda_m \pm 2\hat{k} \cdot \hat{n}.$$

Это доказывает, в частности, следующий важный результат:

$$Res_{m,1} < 0, \quad (2.9.14)$$

*т. е. все инерционные моды заключенной в резервуаре жидкости затухают во временной шкале спинапа  $t \doteq E^{-1/2}$ .*

Эта формула для  $s_{m,1}$  может быть проверена экспериментально для резервуаров различных форм, и согласие с экспериментальными данными в общем получается хорошим. Проверка этого утверждения приводится в разделе 2.12.

## 2.10. Задача с начальными данными: решение и критика

Решение задачи для внутренней области с начальными данными с точностью до  $O(E^{1/2})$  за время спинапа во многих случаях может быть теперь получено с помощью результатов предыдущих разделов. Общее, зависящее от времени, решение для вектора скорости имеет вид

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{q}_0\left(x, y, E^{1/2}t\right) + \sum_m A_m Q_m(\mathbf{r}) \exp(i\lambda_m + s_{m,1} E^{1/2})t. \quad (2.10.1)$$

Если  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{q}_*(\mathbf{r})$ , то

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{q}_0(x, y, 0) + \sum_m A_m \mathbf{Q}_m(\mathbf{r}). \quad (2.10.2)$$

Используя теорему о средней циркуляции и соотношения ортогональности для отыскания неизвестных величин, имеем

$$\mathbf{q}_0(x, y, \tau) = \frac{1}{J(h)} \left( \oint_C \langle \mathbf{q}_* \rangle \cdot d\mathbf{s} \right) \left( \exp - \frac{I(h)}{J(h)} \tau \right) \mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B. \quad (2.10.3)$$

Здесь  $I$  и  $J$  определены в (2.6.24), а

$$A_m = \frac{\int \mathbf{q}_* \cdot \mathbf{Q}_m^+ dV}{\int \mathbf{Q}_m^+ \cdot \mathbf{Q}_m dV}. \quad (2.10.4)$$

Уравнения (2.6.23), (2.7.2) и (2.8.10) связывают скорость, соответствующую определенной моде, и давление.

Геострофическая мода в резервуаре, поверхность которого полностью покрыта замкнутыми контурами постоянной высоты, возбуждается всякий раз, когда начальное распределение скоростей обладает средней циркуляцией. Компонента начального течения, которая не обладает средней циркуляцией, порождает инерционные моды, которые затухают за время спинала точно так же, как геострофическая мода. Экмановский пограничный слой (и связанный с ним эффект вязкости) очень сильно влияет на внутренний режим течения посредством процессов переноса момента количества движения и растягивания вихревых линий, а не за счет диффузии завихренности. Это объясняет, почему состояние твердого вращения достигается за такое сравнительно короткое время.

Ввиду весьма специфического характера задачи Пуанкаре необходимо обратить внимание на некоторые важные нерешенные математические вопросы. Наиболее очевидные из них касаются полноты невязких собственных функций и природы спектра невязких собственных значений. По существу решение общей внутренней задачи методом преобразования Лапласа (см. [96] и [253]) автоматически разрешило бы эти вопросы. К несчастью, это очень трудная задача, даже если преобразованная краевая задача оказывается корректно поставленной и относится к классическому типу, т. е. состоит из эллиптического дифференциального уравнения со смешанными граничными условиями. Именно по этой причине указанная задача с начальными условиями была решена путем синтеза мод и неточности этого приближения допускались сознательно. Необычная сложность невязкого предельного процесса является еще одним источником многих трудностей. Не ясно, всегда ли существует взаимно-однозначное соответствие между невязкими и вязкими модами, и фактически само существование непрерывных невязких мод в резервуарах определенной формы нуждается в изучении (см. [116] и [295]). Приближение пограничного слоя может потребовать модификации при наличии острых углов, и в этом случае необходимо

определить влияние внутренних сдвиговых слоев, связанных с характеристиками и изломами поверхности. Последующий анализ послужит иллюстрацией некоторых результатов и идей, однако теория остается все еще неполной.

## 2.11. Особые случаи

Если общая высота  $h$  остается всюду постоянной, то ограничений на движение становится намного меньше, так как в этом случае уравнение (2.6.5) автоматически удовлетворяется. В рассматриваемой ситуации верхняя и нижняя поверхности резервуара имеют одинаковую форму и расположены на фиксированном расстоянии друг от друга по вертикали. Боковая поверхность резервуара представляет собой вертикальную стенку. Нормали к  $\Sigma$  в точках пересечения нижней и верхней поверхностей одной и той же прямой линией — антипараллельны, т. е.

$$\mathbf{n}_T(x, y) = -\mathbf{n}_B(x, y). \quad (2.11.1)$$

Эти вектора являются функциями только горизонтальных координат. Поэтому (2.6.3) принимает вид

$$\mathbf{q}_0 = \frac{1}{2j} \mathbf{n}_T \times \nabla \varphi_0. \quad (2.11.2)$$

Геострофическое течение остается не зависящим от вертикальной высоты  $z$ , однако каждый контур на поверхности резервуара является теперь контуром постоянной общей высоты.

Уравнение (2.8.6) для вихря осредненной по глубине инерционной скорости имеет вид

$$i\lambda \nabla \times \langle \mathbf{Q} \rangle = \nabla \times [(\Phi_T - \Phi_B) \mathbf{n}_T],$$

отсюда следует, что

$$\mathbf{n}_T \cdot \nabla \times \langle \mathbf{Q} \rangle = 0. \quad (2.11.3)$$

Если пренебречь вязкими поправками для момента, то решение для общей скорости может быть записано так:

$$\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{q}_0(r) + \sum_m A_m \mathbf{Q}_m(r) e^{i\lambda_m t}.$$

Коэффициенты Фурье определяются, как и раньше, из интеграла ортогональности, а  $\mathbf{q}_0(r)$  находится из начальных условий  $\mathbf{q}(r, 0) = \mathbf{q}_*(r)$ . Так как

$$\langle \mathbf{q}_* \rangle = h \mathbf{q}_0 + \sum_m A_m \langle \mathbf{Q}_m \rangle,$$

то из уравнения (2.11.3) можно показать, что

$$\mathbf{n}_T \cdot \nabla \times \langle \mathbf{q}_* \rangle = h \mathbf{n}_T \cdot \nabla \times \mathbf{q}_0, \quad (2.11.4)$$

и это — основное уравнение, служащее для определения  $q_0$ , когда  $h$  равно константе.

Граничное условие на боковой стенке записывается так:

$$\mathbf{n}_L \cdot \mathbf{q}_0 = 0,$$

где  $\mathbf{n}_L$  — нормаль к этой вертикальной поверхности. Таким образом, полная краевая задача для геострофического давления  $\varphi_0(x, y)$  формулируется следующим образом:

$$\frac{h}{2} \mathbf{n}_T \cdot \nabla \times (\mathbf{n}_T \times \nabla \varphi_0) = \mathbf{n}_T \cdot \nabla \times \langle \mathbf{q}_* \rangle, \quad (2.11.5)$$

причем

$$\mathbf{n}_L \cdot (\mathbf{n}_T \times \nabla \varphi_0) = 0 \quad (2.11.6)$$

на боковой стенке. Система состоит из неоднородного эллиптического двумерного уравнения в частных производных и соответствующего граничного условия. Другими словами, задача хорошо поставлена, но нетривиальна. Движение в цилиндрическом баке является одним из важных примеров течения этого типа, который легко решается (см. раздел 2.15).

Уравнение (2.11.3) по существу является особым случаем теоремы о средней циркуляции. Эта теорема в данном примере утверждает, что

$$\oint_{\gamma} \langle \mathbf{Q} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \int \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \nabla \times \langle \mathbf{Q} \rangle d\Sigma' = 0, \quad (2.11.7)$$

для любого контура  $\gamma$  на поверхности резервуара, и обычные соображения для интегралов этого вида приводят непосредственно к (2.11.3).

Если только часть резервуара имеет постоянную высоту, то вполне вероятно, что для сшивки решения из разных областей потребуется ввести внутренние сдвиговые слои. Резервуары, обладающие незамкнутыми геострофическими контурами, рассматриваются в разделах 2.16 и 2.20.

Переходя к следующему особому случаю, приведем доказательство (см. [136]) того, что  $|\lambda| = 2$  не является собственным значением для резервуара конечного объема. Пусть  $(\mathbf{Q}_n, \lambda_n)$ ,  $(\mathbf{Q}_m, \lambda_m)$  — две любые различные пары собственных функций и собственных значений. Из основного уравнения для этих мод можно получить, что

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_m^- &= (4 - \lambda_n \lambda_m) \mathbf{Q}_n \cdot \mathbf{Q}_m^+ - \frac{4}{\lambda_n \lambda_m} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_n) \times \\ &\times (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_m^+) + i \lambda_m \mathbf{Q}_m^+ \cdot \nabla \Phi_n - [i \lambda_n \mathbf{Q}_n \cdot \nabla \Phi_m^+. \end{aligned}$$

В результате интегрирования этих выражений по всему объему резервуара имеем

$$(4 - \lambda_n \lambda_m) \int \mathbf{Q}_n \cdot \mathbf{Q}_m^+ dV = \iint \left\{ \nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_m^+ + \frac{4}{\lambda_n \lambda_m} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_n) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_m^+) \right\} dV,$$

откуда, в частности,

$$(4 - \lambda_m^2) \int \mathbf{Q}_m \cdot \mathbf{Q}_m^\dagger dV = \int \left\{ \nabla \Phi_m \cdot \nabla \Phi_m^\dagger + \frac{4}{\lambda_m^2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_m) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Phi_m^\dagger) \right\} dV, \quad (2.11.8)$$

Если  $\lambda_m^2 = 4$  и интеграл от скорости является конечным, то правая часть тождественно равна нулю. Это означает, что  $\Phi_m = \text{const}$ . Далее сравнительно легко можно показать, что постоянство давления эквивалентно нулевому полю скорости.

Из-за того, что в предыдущих разделах были опущены детали вывода, мы почти не касались важных эффектов всплесков в пограничном слое или резонансов на некоторых критических кривых на  $\Sigma$ . Многие авторы отмечали, что обычный экмановский пограничный слой в случае инерционных колебаний становится сингулярным везде, где частота колебания связана с угловой скоростью соотношением

$$\lambda = 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}.$$

Робертс и Стюартсон [219] исследовали частный случай устойчивого течения в окрестности критической области. Их анализ учитывает влияние членов, характеризующих боковой сдвиг, и указывает на то, что структура пограничного слоя изменяется локально, когда характерная толщина варьирует от  $E^{1/2}$  до  $E^{2/3}$ . Это изменение могло бы проявиться в линейной теории как сингулярность. Однако общее влияние этих всплесков на внутреннее течение, очевидно, пренебрежимо мало по сравнению с потоком экмановского слоя. Безусловно, вид асимптотического разложения за членами низшего порядка диктуется природой этой неоднородности. В анализе Гринспенна [94] преодолены некоторые из этих трудностей, при этом сохраняется зависимость от времени и вводятся разумные ограничения. Оба цитированных выше исследования оставляют желать лучшего (в частности, остался нерешенным вопрос о том, необходим ли учет нелинейных членов), хотя кажется вполне вероятным, что эти всплески не существенны в первичном течении. Возможное влияние критических зон можно было бы учесть введением вдоль характеристического направления внутренних слоев сдвига, значительно более слабых, чем те, которые предложили Бонди и Литтлтон [19]. Однако даже слабые слои сдвига могут служить источником неустойчивости течения, и следовательно стать существенными. В любом случае неоднородность приводит к тому, что формальное обобщение этого анализа для учета членов всех порядков становится невозможным.

Другой вопрос, представляющий интерес с математической точки зрения, связан с невязкой задачей на собственные значения для инерционных волн. Спектр собственных значений для внутренней задачи будет найден в двух случаях, когда он является не счетным, но плотным в интервале  $|\lambda| \leq 2$  (см. раздел 2.15). Этот спектр характеризует только неоднородные предельные процессы; спектр вязкой

задачи в действительности является дискретным. Фактически вся концепция, на которой основан невязкий анализ (последний заключается в том, что каждая мода разделяется на невязкую компоненту и поправку на пограничный слой), оказывается неверной, если эффективная длина волны моды имеет порядок толщины пограничного слоя. Вывод о плотности спектра связан с тем, что асимптотический метод не может точно локализовать собственные значения. Это приближение дает только проекцию точного положения собственного значения на действительную ось  $\lambda$ ; спроектированные значения являются плотными.

## 2.12. Движение в сфере

Сферический резервуар прекрасно иллюстрирует общую теорию, потому что в этом случае собственные моды, собственные частоты и их вязкие поправки могут быть определены точно. Кроме того, такой резервуар очень удобен для экспериментальных целей, так же как и для сопоставления с данными в естественных условиях.

В этом случае геострофические контуры представляют собой кривые на сфере постоянного цилиндрического радиуса  $r$ ; так что геострофическая скорость имеет только одну азимутальную компоненту. Поскольку

$$f = g = (1 - r^2)^{1/2}, \quad (2.12.1)$$

то соотношения (2.6.7) и (2.6.23) для геострофической скорости и давления принимают вид

$$\mathbf{q}_0 = \hat{\theta} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_0(r, 0) \exp(-E^{1/2} (1 - r^2)^{-3/4} t) \right) \quad (2.12.2)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_0(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_0(r, 0) \exp(-E^{1/2} (1 - r^2)^{-3/4} t). \quad (2.12.3)$$

Задача Пуанкаре для мод в цилиндрических координатах записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \left( 1 - \frac{4}{\lambda^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.12.4)$$

где

$$r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2}{i\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \left( 1 - \frac{4}{\lambda^2} \right) z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.12.5)$$

на  $r^2 + z^2 = 1$ . Разделяющиеся решения могут быть найдены в модифицированной «сплюсненной сфероидально» координатной системе, введенной Брайеном [27]:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left( \frac{4}{4 - \lambda^2} - \eta^2 \right)^{1/2} (1 - \mu^2)^{1/2}, \\ z &= \left( \frac{4}{\lambda^2} - 1 \right)^{1/2} \eta \mu; \end{aligned} \right\} \quad (2.12.6)$$

эти решения

$$\Phi_{nmk} = \Psi_{nmk}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) e^{ik\theta} = P_n^{|k|}(\eta/c_{nmk}) P_n^{|k|}(\mu) e^{ik\theta}, \quad (2.12.7)$$

где

$$c_{nmk} = \left(1 - \frac{1}{4} \lambda_{nmk}^2\right)^{-1/2},$$

а  $\lambda_{nmk}$  —  $m$ -е собственное значение, которое является решением трансцендентного уравнения

$$k P_n^{|k|} \left(\frac{1}{2} \lambda\right) = 2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) \frac{d}{d\lambda} P_n^{|k|} \left(\frac{1}{2} \lambda\right). \quad (2.12.8)$$

Собственные функции отмечены здесь тремя индексами ( $n, m, k$ );  $n$  и  $k$  пробегает все значения, а  $m$  имеет конечное число значений

$$m = 1, \dots, I_{nk}$$

(символ  $|k|$  используется для выполнения второстепенных алгебраических упрощений).

Важно заметить, что на поверхности сферы

$$\mu = \cos \Theta, \quad \eta = \frac{1}{2} \lambda_{nmk} c_{nmk}$$

все функции  $\Psi_{nmk}$  ( $m$  — переменное, а  $n, k$  — фиксированы) сводятся к одной и той же зональной гармонике

$$\Psi_{nmk} = P_n^{|k|} \left(\frac{1}{2} \lambda_{nmk}\right) P_n^{|k|}(\cos \Theta), \quad (2.12.9)$$

где  $\Theta$  — полярный угол.

Пусть собственное значение  $\lambda$  соответствует индексу  $k$ , тогда из (2.12.8) следует, что  $-\lambda$  соответствует индексу  $-k$ . Смысл этого ясен: инерционные моды представляют собой перемещающиеся волны, каждая из которых распространяется в определенном направлении (по часовой стрелке или против нее относительно оси вращения). Здесь отсутствуют стоячие колебания. В общем случае имеют место следующие соотношения:

$$(\Phi_{nmk}, \Psi_{nmk}, \lambda_{nmk}, s_{nmk, 1}) = (\Phi_{nm-k}^+, \Psi_{nm-k}, -\lambda_{nm-k}, s_{nm-k, 1}^+). \quad (2.12.10)$$

Последний фактор характеризует показатель затухания моды, введенный в (2.5.8).

Произведение функций Лежандра, записанных выше, на самом деле является элементарным полиномом по  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{z}$ . Тоомре (см. [1]) и Кудлик [136] привели общие полиномиальные формулы для сферических и сфероидальных мод. В частном случае сферы они имеют вид

$$P_n^{|k|}(\eta/c_{nmk}) P_n^{|k|}(\mu) = \left(\frac{(2n)!}{2^n n! (n-|k|)!}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{nmk} \mathbf{z}}{2}\right)_i^{e_{nk}} \left(\frac{\mathbf{r}}{c_{nmk}}\right)^{|k|} \times \\ \times \prod_{j=1}^{I_{nk}} \left\{ y_j^2 \left(1 - \frac{\lambda_{nmk}^2}{4}\right) \mathbf{r}^2 + \frac{\lambda_{nmk}^2}{4} (1 - y_j^2) \mathbf{z}^2 + y_j^2 (y_j^2 - 1) \right\}. \quad (2.12.11)$$

Здесь

$$e_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{если } n - |k| \text{ является четным,} \\ 1, & \text{если } n - |k| \text{ является нечетным,} \end{cases}$$

$$I_{nk} = n - |k| - e_{nk},$$

а  $y_j$ ,  $j = 1, \dots$ ,  $I_{nk}$  представляют собой  $n - |k| - e_{nk}$  действительных различных корней  $P_n^{|k|}(y)$  в интервале  $(0,1)$ , исключая  $y = 0$  и  $y = 1$ . Некоторые из осесимметричных мод проиллюстрированы на рис. 2.7.

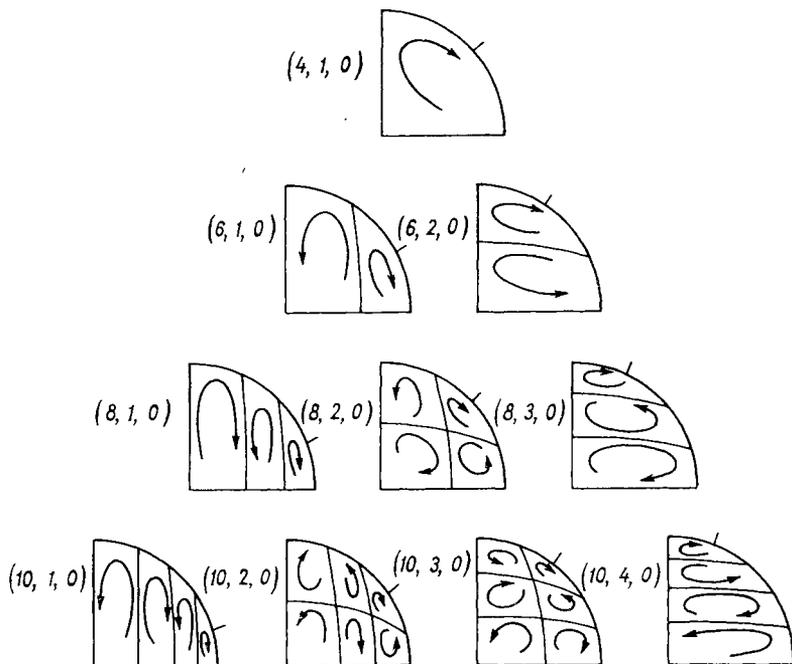


Рис. 2.7. Примеры циркуляции для сферических мод низкого порядка.

Полезно выразить обычное свойство ортогональности интеграла (2.7.10) в терминах вновь определенных функций. Особенно полезна следующая форма:

$$\iint r \, dr \, dz \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{nmk} \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{n'm'k} + \frac{k^2}{r^2} \Psi_{nmk} \Psi_{n'm'k} + \left( 1 + \frac{4}{\lambda_{nmk} \lambda_{n'm'k}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{nmk} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{n'm'k} \right\} = 0 \quad (2.12.12)$$

для  $(n, m) \neq (n', m')$ . Моды, связанные с различными абсолютными значениями индекса  $k$ , ортогональны в силу следующего соотношения:

$$\int_0^{2\pi} \exp i(k + k') \theta \, d\theta = 0, \quad k \neq -k'.$$

Общие результаты для эллипсоидального резервуара, которые можно сравнить с приведенными выше, были получены Кудликом [136] и для частных случаев Хафом [119] и Картэном [37].

Расчет вязких эффектов, в частности показателя затухания моды, с помощью (2.9.12) и (2.9.13) является трудной задачей, но приводит прямо к цели. В табл. 2.1 помещены некоторые численные результаты и экспериментальные значения. Первая из этих мод (2,1,1) особенно интересна, так как она представляет твердое вращение вокруг оси, отличной от оси вращения самой сферы. Это, безусловно, негравитационная невязкая мода в координатной системе, связанной с вращающейся сферой, и мы иногда будем называть ее спиновой модой. Практически говоря, это наиболее легко возбудимая мода, так как для ее возбуждения достаточно иметь слабое импульсивное изменение в направлении оси вращения сферы, которая вращается вместе с жидкостью как твердое тело. Экспериментальные значения

Таблица 2.1

Идентификация моды (n, m, k)	Собственные значения $\lambda_{nmk}$	Показатель затухания $s_{nmk, 1}$	Экспериментальные значения	
			$\lambda_{nmk}$	$Re s_{nmk, 1}$
(2, 1, 1)	1,0	$-2,62 + 0,259i$	1,0	-2,82
(4, 1, 0)	1,309	$-3,38 + 0,434i$	1,302	-3,88
(4, 1, 1)	0,820	$-3,87 + 0,315i$	—	—
(4, 2, 1)	1,708	$-2,64 + 0,504i$	—	—
(4, 3, 1)	0,612	$-3,95 + 0,180i$	—	—
(6, 1, 0)	0,938	$-4,64 + 0,329i$	0,935	-0,517
(6, 2, 0)	1,660	$-3,50 + 0,568i$	—	—
(8, 1, 0)	0,726	$-5,62 + 0,266i$	0,724	-6,32
(8, 2, 0)	1,354	$-4,87 + 0,487i$	—	—
(8, 3, 0)	1,800	$-3,53 + 0,632i$	—	—

показателя затухания, приведенные выше, были найдены этим способом Малкусом (частное сообщение) и У. Г. Вингом (сообщение Сперри Рэнд Корп.). Прецессию можно рассматривать как последовательность бесконечно малых изменений такого типа, и вполне вероятно, что эта мода будет играть ключевую роль в этой задаче. По этой причине запишем теперь собственную функцию в форме

$$\Psi_{211} = rz. \quad (2.12.13)$$

Скорость и давление тогда переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Q_{211} e^{it} &= e^{i(\theta-t)} (z\hat{r} + iz\hat{\theta} - r\hat{k}), \\ \Phi_{211} e^{it} &= irze^{i(\theta-t)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12.14)$$

Олдридж и Тоомре [1] использовали в какой-то мере новый метод возбуждения внутренних мод в сфере. Последняя подвергалась небольшим колебаниям, одновременно она (вместе с осциллятором) вращалась с постоянной скоростью. Они измерили в широком

диапазоне значения давления в зависимости от вынуждающей частоты. Рисунок 2.8, изображающий редуцированное давление в полюсе как функцию частоты возбуждения, свидетельствует о существовании различных резонансных пиков в точках, соответствующих собственным значениям, предсказанных теорией. Механизм возникновения резонанса прост. Колеблющаяся сфера создает осциллирующий экмановский слой, который в свою очередь формирует небольшой нормальный поток к границе, обуславливая тем самым

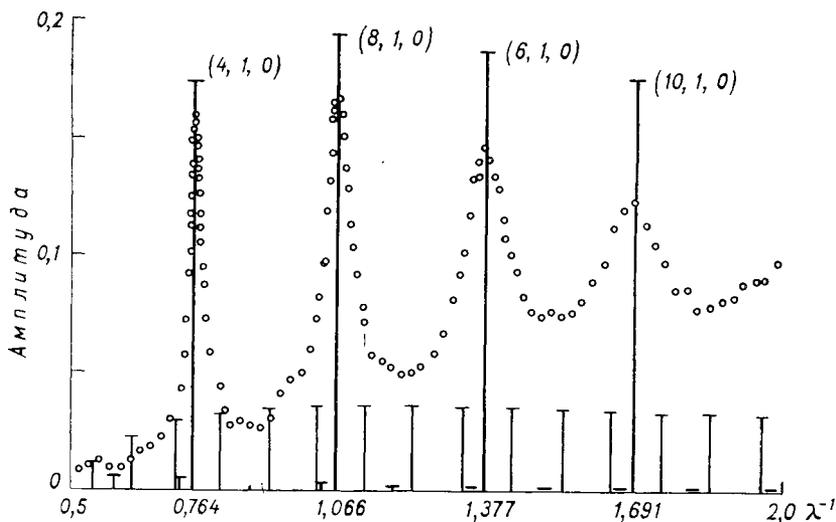


Рис. 2.8. Пики амплитуды давления в зависимости от  $1/\lambda$ , показывающая резонанс сферических симметричных мод. Амплитуда колебания равна  $8^\circ$ ; измерения были сделаны в центре сферы [1].

появление внутреннего течения. На некоторых частотах этот зависящий от времени поток совпадает по фазе с внутренними модами и происходит резонанс. Собственные частоты очень четко локализованы, и эксперимент превосходно согласуется с теорией. Как только система резонирует, возбуждение прекращается и записывается время затухания колебаний. Это дает хороший способ определения экспоненциального показателя затухания. Ширина частотных кривых дает другой способ (но менее точный) для расчета той же характеристики. Полученные значения находятся в хорошем согласии с теорией, хотя и наблюдаются небольшие отклонения всегда в сторону более быстрого затухания. Некоторая неустойчивость или турбулентность в пограничном слое может послужить причиной этой погрешности вследствие увеличения эффективного значения кинематической вязкости в исследуемой области. Самые недавние наблюдения указывают на некоторую полосчатость структуры пограничного слоя, однако течение, по-видимому, остается по существу ламинарным. Тем не менее, теория достаточно хорошо согласуется с экспериментом, чтобы дать этой работе приоритет для настоящих целей, не превосходящая каких-либо будущих.

Необходимо также заметить, что с помощью этих экспериментов пока не удалось выяснить, существуют ли какие-либо всплески в вязком слое на критических широтах.

Теория вынужденных колебаний в сфере рассматривается в § 2.14, и там приводятся формулы для реакций давления и пика амплитуды. В частности, эти результаты могут служить аналитической основой для только что описанных экспериментов.

### 2.13. Прецессия и задача о вынужденных движениях

Рассмотрим движение жидкости, полностью заполняющей закрытый резервуар, который быстро вращается вокруг своего центра масс с неравномерной скоростью. (Течение во вращающемся сфероиде, обладающем прецессией, — это типичная интересующая нас задача.) Отклонения от состояния твердого вращения предполагаются малыми, и вся поверхность резервуара должна представлять собой огибающую замкнутых контуров постоянной общей высоты.

Выбор координатной системы для описания движения жидкости определяет, каким образом приложенные силы и моменты входят в уравнения движения, делая их неоднородными. Если резервуар несимметричный и весьма произвольной формы, то система осей, связанных с телом, на самом деле является единственно возможной для практического применения. Для резервуаров симметричной формы могут быть использованы другие координатные системы, однако в любом случае аналитическое описание поверхности резервуара и его положения в пространстве не должно содержать время.

Пусть  $(x, y, z)$  — система координат, связанная с резервуаром, который вращается с заданной *зависящей от времени* угловой скоростью  $\Omega(t)$ . Так как вектор вращения предполагается почти постоянным в инерциальном пространстве, то он может быть представлен в системе, связанной с телом, следующим образом:

$$\tilde{\Omega}(t) = \tilde{\Omega}(\hat{\mathbf{k}} + \varepsilon \delta(t)), \quad (2.13.1)$$

где единичный вектор  $\hat{\mathbf{k}}$  определяет ось  $z$ ,  $\delta(t)$  — отклонение от состояния твердого вращения;  $\varepsilon$  — малый параметр.

Краевую задачу можно привести к безразмерному виду, используя масштаб  $[\underline{L}, \tilde{\Omega}^{-1}, \varepsilon \tilde{\Omega} \underline{L}]$ , представляющий соответственно характерную длину резервуара, время и максимальную скорость. Любые приложенные извне консервативные силы в соединении с центробежным ускорением создают редуцированное давление. Следовательно, безразмерная краевая задача<sup>1</sup> может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2(\hat{\mathbf{k}} + \varepsilon \delta(t)) \times \mathbf{q} &= \nabla p + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \delta + E \nabla^2 \mathbf{q}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13.2)$$

<sup>1</sup> См. ссылку на стр. 11.

где  $\mathbf{q} = 0$  на  $\Sigma$ ;  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_*$  при  $t = 0$  и  $E = \frac{v}{\Omega L^2}$ . Линейная задача получается отсюда, если число Россби  $\varepsilon$  положить равным нулю.

Задача с начальными данными в отсутствии внешних сил [в (2.13.2)  $\delta(t) \geq 0$ ] уже была решена в разделе 2.10, где было показано, что конечное движение не зависит от начального состояния, поскольку эффект последнего диссипирует за время порядка  $E^{-1/2}$ . Через промежуток времени, равный времени спинапа, движение определяется только силами инерции. Для отыскания общего решения полной краевой задачи достаточно получить частное решение задачи о вынужденном течении, а затем его сложить с общим решением однородной задачи с начальными данными.

Влияние вязкости в задачах с неконсервативным силовым полем часто является несущественной. Рассмотрим теперь реакцию невязкого течения на воздействие осциллирующей массовой силы

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) e^{iat}.$$

(Реакция на воздействие массовой силы, имеющей произвольную временную зависимость, может быть найдена с помощью принципа суперпозиции — интеграла Фурье по всем частотам.)

Итак, требуется найти частное решение следующей краевой задачи:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla p + \text{Re} \mathbf{N} e^{iat}, \quad (2.13.3)$$

где  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на  $\Sigma$ . Используя подстановку

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= \text{Re} \mathbf{Q} e^{iat}, \\ p &= \text{Re} \Phi e^{iat}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13.4)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{Q} &= 0, \\ ia\mathbf{Q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} &= -\nabla \Phi + \mathbf{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13.5)$$

где  $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на  $\Sigma$ . Здесь предполагается, что скорость может быть представлена в виде суперпозиции амплитудных функций, соответствующих всем модам, как инерционным, так и геострофической

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_0 + \sum_m \mathbf{B}_m \mathbf{Q}_m. \quad (2.13.6)$$

Граничные условия тогда выполняются автоматически в силу уравнения неразрывности. Подставляя это выражение в (2.13.5) и определяя коэффициенты  $\mathbf{B}_m$  с помощью известных свойств ортогональности мод, получаем

$$\mathbf{B}_m = \frac{\int \mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}_m^+ dV}{(ia - sm) \int \mathbf{Q}_m \cdot \mathbf{Q}_m^+ dV}. \quad (2.13.7)$$

Функция  $q_0$  определяется на основании теоремы о средней циркуляции и результат оказывается таким же, как при замене  $q_*$  и  $\tau$  в (2.10.3) на  $N/ia$  и нуль соответственно:

$$q_0 = \frac{n_T \times n_B}{iaJ(h)} \oint_C \langle N \rangle \cdot ds. \quad (2.13.8)$$

Если частота  $a$  не совпадает с собственным значением  $\lambda_m$ , то мы можем с достаточной степенью точности положить  $s_m \cong i\lambda_m$ . Однако при наличии резонанса необходимо учитывать фактор вязкого затухания, чтобы сохранить конечную, ограниченную вязкостью резонансную амплитуду.

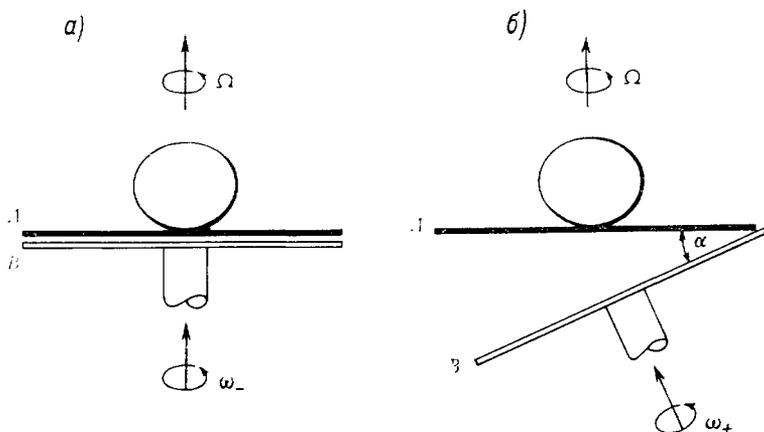


Рис. 2.9. Лабораторное устройство для создания прецессии. Скорости вращения плоскостей  $A$  и  $B$  равны соответственно  $\Omega$  и  $\omega_-$ . Прецессия создается путем наклона стола  $A$  на угол  $\alpha$ .

Теперь можно найти течение жидкости внутри резервуара произвольной формы, обладающего прецессией, однако, для определенности, мы остановимся на следующих практических задачах.

Резервуар неподвижно закреплен на вращающемся поворотном круге  $A$  (рис. 2.9), который сам установлен на другом поворотном круге  $B$ . Оба круга вращаются с постоянными скоростями:  $A$  — с частотой  $\Omega$  и  $B$  — с частотой  $\omega$ . Первоначально  $A$  покоится на  $B$ , так что векторы вращения  $\Omega$  и  $\omega$  имеют одно и то же направление. Жидкость, вращающаяся как твердое тело, затем импульсивно возмущается путем наклона  $B$  на малый угол  $\alpha$ , как это показано на рис. 2.9. В этом случае резервуар начинает прецессировать требуемым образом.

Обозначим через  $\omega_-$  и  $\omega_+$  вектор  $\omega$  непосредственно до и после импульсивного изменения угла наклона. Первоначальное состояние твердого вращения жидкости должно быть согласовано с новой угловой скоростью, и поэтому мгновенно развивается потенциальное течение, которое приводит в соответствие скорость и новые граничные условия. В лабораторной системе координат скорость оболочки изменяется от  $(\omega_- + \Omega) \times r$  до  $(\omega_+ + \Omega) \times r$ . Таким образом,

скорость частицы непосредственно после переключения представляется в *инерциальной системе координат* как

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, 0_+) = \nabla\Lambda + (\omega_- + \Omega) \times \mathbf{r}.$$

Граничные условия требуют, чтобы

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, 0_+) = (\omega_+ + \Omega) \times \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{на } \Sigma,$$

так что

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\Lambda = (\omega_+ - \omega_-) \times \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{на } \Sigma$$

является достаточным условием для существования потенциального течения

$$\nabla^2\Lambda = 0.$$

После того как  $\Lambda$  станет известно, начальные условия можно будет легко удовлетворить в любой из упомянутых систем <sup>1</sup>.

В системе координат, *связанной с резервуаром*,

$$\Omega = \Omega \hat{\mathbf{k}}, \quad \omega_- = \omega \hat{\mathbf{k}}$$

и

$$\omega = \omega_+ = -\omega \sin \alpha (\sin \Omega t \hat{\mathbf{i}} + \cos \Omega t \hat{\mathbf{j}}) + \omega \cos \alpha \hat{\mathbf{k}}.$$

Поэтому

$$\tilde{\Omega}(t) = \Omega + \omega = (\Omega + \omega \cos \alpha) \hat{\mathbf{k}} + \omega \sin \alpha (\sin \Omega t \hat{\mathbf{i}} + \cos \Omega t \hat{\mathbf{j}}).$$

Тогда, сравнивая с (2.13.1) для случая, когда  $\alpha$  мало, а  $\sigma = \omega / (\omega + \Omega)$ , можно будет записать следующие равенства:

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \omega; \quad \varepsilon = \sigma\alpha;$$

$$\delta(t) = -\frac{1-\sigma}{\sigma} (\sin \sigma t \hat{\mathbf{i}} + \cos \sigma t \hat{\mathbf{j}}). \quad (2.13.9)$$

Линейная форма невязкого уравнения момента (2.13.2) примет тогда следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla p - (1-\sigma) (-\cos \sigma t \hat{\mathbf{i}} + \sin \sigma t \hat{\mathbf{j}}) \times \mathbf{r}. \quad (2.13.10)$$

Это уравнение в точности совпадает с (2.13.3), если произвести подстановку

$$\left. \begin{aligned} a &= \sigma, \\ \mathbf{N} &= (1-\sigma) i e^{i\theta} (z \hat{\mathbf{r}} + iz \hat{\theta} - r \hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \right\} \quad (2.13.11)$$

Здесь сделан переход к цилиндрической системе координат.

<sup>1</sup> На самом деле, явно определять  $\Lambda$  не требуется, так как решение задачи с начальными данными зависит главным образом от структуры начального вихревого поля. Поскольку при потенциальном течении завихренность отсутствует, эта компонента начального течения дает нулевой вклад при расчете скорости, представленной в виде суперпозиции нормальных мод, — это подробно рассмотрено в разделе 2.10.

Если резервуар представляет собой сферу, то  $N$  в действительности пропорционально собственной функции  $Q_{211}$ , определенной в (2.12.14). Эта мода для наших целей определена просто как  $Q_1$ , а соответствующее ей собственное значение

$$s_1 = s_{211} = i - E^{1/2} (2,62 - 0,259i).$$

Из (2.13.7) непосредственно следует, что все амплитудные коэффициенты  $V_m$  равны нулю для  $m \neq 1$  и

$$V_1 = - \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma + iE^{1/2} (2,62 - 0,259i)}.$$

Последнее соотношение особенно успешно применяется в том случае, когда сфера прецессирует очень медленно, т. е.  $1 - \sigma = \frac{\omega}{\Omega} = O(E^{1/2})$ , а частоты мод и возбуждений почти одинаковы. Однако, если  $\sigma$  не равна единице и не близка к ней, то с достаточной степенью точности можно положить  $E = 0$ . В этом случае выражение для скорости имеет вид

$$\mathbf{q} = -Re^{i(\theta + \sigma t)} (z\hat{\mathbf{r}} + iz\hat{\theta} - g\hat{\mathbf{k}})$$

и описывает твердое вращение около первоначальной оси вращения  $\omega + \Omega$ , которое наблюдается в системе координат, связанной с телом. Конечно, при отсутствии вязкости сферическая оболочка не может передавать своих вращательных движений внутренней жидкости, и она остается не затронутой этим вращением. Для определения природы вынужденных движений требуется рассмотреть эффекты пограничного слоя. Внутреннее течение, создаваемое небольшим потоком, происхождение которого связано с существованием экмановского слоя даже при появлении резонанса, все еще может иметь порядок единицы. Это будет кратко обсуждаться ниже.

Рассмотрим теперь прецессию сфероидальной оболочки

$$\frac{r^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{z_0^2} = 1$$

и примем в качестве  $r_0$  характерную длину  $L$ , так что в безразмерных обозначениях  $\Sigma$  задается следующим образом:

$$r^2 + \frac{z^2}{l_0^2} = 1 \quad (l_0 = z_0/r_0).$$

Кудлик [136], следуя методу, предложенному в [94], нашел инерционные моды, соответствующие этой конфигурации. В случае, когда эксцентриситет  $e_*$  и частота прецессии малы, движение оболочки больше всего влияет на ту моду, которая при  $e_* = 0$  сводится к  $Q_{211}$  или  $N$ . Эта мода имеет вид

$$Q = \left( \frac{z}{2-\lambda} \hat{\mathbf{r}} + \frac{iz}{2-\lambda} \hat{\theta} - \frac{r}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} \right) e^{i\theta}. \quad (2.13.12)$$

Невязкое собственное значение этой моды равно

$$\lambda = 2 \frac{1 + e_*}{2 + e_*}; \quad e_* = \frac{1}{l_0^2} - 1.$$

Показатель затухания также является функцией эксцентриситета

$$s = 2i \frac{1 + e_*}{2 + e_*} + E^{1/2} s_{,1}(e_*),$$

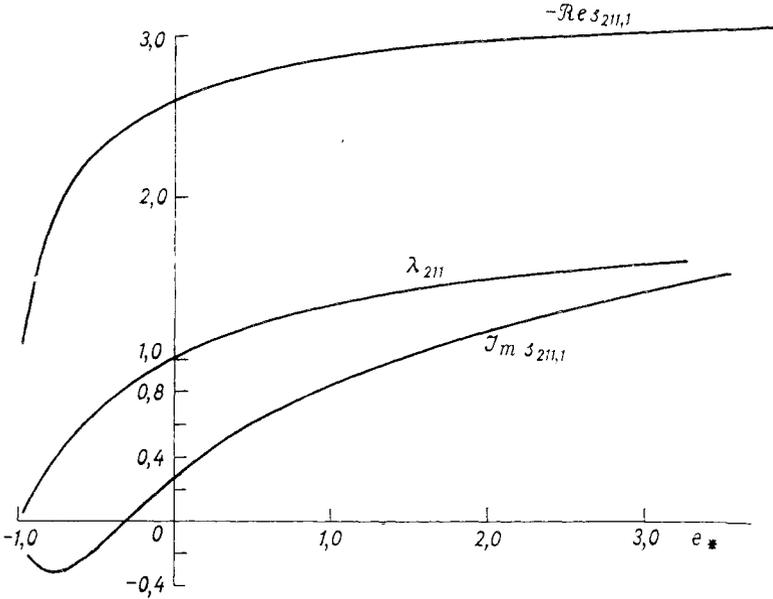


Рис. 2.10. Зависимость собственного значения и показателя затухания сферoidalной моды (2,1,1) от эксцентриситета.

где  $s_{,1}(e_*)$  изображена на рис. 2.10. Отсюда следует, что амплитуда вна

$$B = (1 - \sigma) \left[ \sigma - 2 \frac{1 + e_*}{2 + e_*} + i E^{1/2} s_{,1}(e_*) \right]^{-1} \frac{\lambda \left( 1 + \frac{l_0^2 \lambda}{2 - \lambda} \right)}{\left( 1 + \frac{l_0^2 \lambda^2}{(2 - \lambda)^2} \right)}.$$

Для малых значений  $e_*$  членами порядка  $O(e_*)$  можно пренебречь по сравнению с членами порядка  $O(1)$ . В этом случае показатель затухания  $s_{,1}$  можно заменить показателем затухания для сферы, так что

$$B \cong (1 - \sigma) \left[ \sigma - 2 \left( \frac{1 + e_*}{2 + e_*} \right) - E^{1/2} i (2,62 - 0,259i) \right]^{-1}. \quad (2.13.13)$$

«Резонанс» появляется, если

$$\sigma = 2 \left( \frac{1 + e_*}{2 + e_*} \right),$$

тогда амплитуда ограничивается только за счет вязких процессов. Так как  $\epsilon_*$  мало, это условие приближенно можно записать следующим образом:

$$\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{\epsilon_*}{2}.$$

Отсюда видно, что большие амплитуды могут быть результатом медленной обратной прецессии. Этот результат был получен Стюартсоном и Робертсом [220, 253] с помощью преобразования Лапласа. Резонанс более высоких мод имеет место на больших прецессионных частотах. Это явление будет рассматриваться в разделе 3.9.

В качестве последнего примера рассмотрим осесимметричный резервуар, который вращается равномерно и одновременно слабо колеблется около оси симметрии. В лабораторной установке, показанной на рис. 2.9 а, стол  $A$  вращается равномерно, а  $B$  колеблется таким образом, что

$$\omega = \epsilon \Omega \sin \omega t \hat{\mathbf{k}}.$$

Поэтому

$$\tilde{\Omega}(t) = \Omega (1 + \epsilon \sin \omega t) \hat{\mathbf{k}}$$

или в обозначении (2.13.1) (в надлежащем масштабе)

$$\delta(t) = \sin \frac{\omega}{\Omega} t \hat{\mathbf{k}}.$$

Вынуждающая сила, появляющаяся в (2.13.3), теперь имеет вид

$$\mathbf{N} = -\frac{\omega}{\Omega} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}, \quad (2.13.14)$$

а частота равна  $\alpha = \omega/\Omega$ . Для резервуаров симметричной формы  $\mathbf{N}$  представляет собой геострофическую амплитудную функцию и, соответственно, она должна быть ортогональна ко всем инерционным модам. Решение задачи в этом случае получается из (2.13.8)

$$\mathbf{q} = \text{Re } i \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} e^{i \alpha t}. \quad (2.13.15)$$

Этот малосодержательный результат получается, очевидно, вследствие того, что в последнем уравнении  $\mathbf{q}$  есть не что иное, как записанная в выбранном масштабе величина  $-\omega \times \mathbf{r}$ . Колебание можно исключить из рассмотрения, если считать первоначальную скорость равной скорости твердого вращения в инерциальном пространстве на частоте  $\Omega$ , т. е.  $\Omega \times \mathbf{r}$ . Это вполне возможно, так как взаимодействие симметричной оболочки с жидкостью определяется чисто вязким процессом; здесь оболочка не движется относительно жидкости. Теперь нужно найти вторичную циркуляцию, создаваемую экмановским слоем, внося в (2.13.15) поправку на вязкость в окрестности  $\Sigma$ . Значительное внутреннее течение может возникнуть также в том случае, когда подсос пограничного слоя либо совпадает, либо

резонирует с инерционной модой. Из уравнения (2.13.15) следует, что для исследования этого частного типа колебаний в качестве системы координат, связанной с телом, удобно использовать координатную систему, вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega$ .

Настало время ответить на вопрос, только ли пограничные слои ответственны за формирование циркуляции. Если движение возбуждается за счет подсоса на граничной поверхности, то общая невязкая краевая задача включает однородное уравнение (2.13.3) и граничное условие

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \text{Re} F e^{i a t} \quad \text{на } \Sigma.$$

Как и раньше, необходимо рассмотреть возбуждение только на одной частоте  $a$ . Образование резонансных мод путем колебания вращающегося резервуара является типичной задачей о расчете вторичной циркуляции.

Итак, требуется найти решение уравнения (2.13.15) при  $N = 0$ , удовлетворяющего условию

$$\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F, \quad \text{на } \Sigma. \quad (2.13.16)$$

Один из методов решения такой задачи состоит в замене неоднородного граничного условия массовой силой и использования результатов, полученных ранее. Общий подход будет заключаться в отыскании частной функции  $Q_P$ , обладающей свойствами:

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_P = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{Q}_P \cdot \hat{\mathbf{n}} = F \quad \text{на } \Sigma.$$

Для определенности предполагается, что  $\mathbf{Q}_P$  является потенциальным течением

$$\nabla \times \mathbf{Q}_P = 0.$$

Принимая

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_P + \mathbf{Q}',$$

получаем, что  $\mathbf{Q}'$  удовлетворяет краевой задаче (2.13.5) при

$$N = -(i a \mathbf{Q}_P + 2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_P).$$

Необходимая замена найдена. Решение тогда имеет вид

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{q}'_0 + \sum_m B'_m \mathbf{Q}_m,$$

где коэффициенты определяются из (2.13.7) и (2.13.8). Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}'_0 &= \frac{2}{i a f(h)} \mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B \int (F_T | \mathbf{n}_T | + F_B | \mathbf{n}_B |) d \Sigma_P, \\ B'_m &= - \frac{\int \Phi_m^+ F d \Sigma}{(i a - s_m) \int \mathbf{Q}_m \cdot \mathbf{Q}_m^+ d V}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13.17)$$

где  $\Sigma_P$  — проекция на плоскость  $x, y$  области, ограниченной контуром  $C$ . Это особенно удобная форма для расчета резонансной реакции, которая имеет место при  $a = \lambda_m$ , где  $\lambda_m$  — невязкое собственное значение. Простейший способ расчета амплитуды ограниченной вязкой моды заключается в том, чтобы включить вязкую поправку  $O(E^{1/2})$  в выписанное выше выражение для  $s_m$ .

Задача определения  $Q_P$  может оказаться трудной и поэтому здесь должен оказаться полезным прямой подход. Другой метод, в основе которого лежит использование разложений по естественным модам, был предложен в [94] и обобщен в [136] для симметричных резервуаров, вращающихся около оси симметрии.

В указанном методе в качестве основной переменной используется давление, которое затем представляется в виде

$$\Phi = \varphi_0(x, y) + \sum_m A_m \Phi_m(r). \quad (2.13.18)$$

Здесь  $\varphi_0$  — геострофическое давление,  $\Phi_m$  — амплитудная функция давления  $m$ -ной инерционной моды. Скорость жидкости не может быть теперь получена с помощью простой суперпозиции мод  $Q_m$ , так как граничные условия являются неоднородными.

Если ось вращения совпадает с осью симметрии резервуара, то путем сложных выкладок можно определить реакцию геострофической компоненты  $\varphi_0$  независимо от реакции инерционных волн. В этом случае имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \oint_C \langle \mathbf{Q} \rangle \cdot d\mathbf{s} &= \frac{2h(r)}{(4-a^2)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial h} \oint_C |\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B| ds = \\ &= \frac{2}{ia} \int (|\mathbf{n}_T| F_T + |\mathbf{n}_B| F_B) d\Sigma_P. \end{aligned}$$

Чтобы получить амплитуды инерционных мод в симметричном резервуаре, необходимо решить бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} A_j d_j + \frac{1}{2i} \sum_{m \neq j} A_m \frac{(a - \lambda_m)(a - \lambda_j)}{\lambda_m + \lambda_j} \int \Phi_j^\dagger \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_m d\Sigma = \\ = ia \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \int \Phi_j^\dagger F d\Sigma \end{aligned} \quad (2.13.19)$$

при  $j = 1, 2, \dots$ , где

$$d_j = \int dV \left[ \frac{a^2 - \lambda_j^2}{4} |\nabla \Phi_j|^2 + \frac{i}{2} (a - \lambda_j) \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_j^\dagger \times \hat{\mathbf{k}} \right].$$

Представляя

$$\Phi_j = \Psi_j(r, z) e^{ij\theta},$$

можно свести эти уравнения к соотношениям для мод с одинаковым индексом  $j$ . Это означает, что эта система уравнений сводится

к системе конечного порядка, как это было в случае сфероидального резервуара. Пример расчета для сферы приводится в следующем разделе, а детальный расчет для сфероида можно найти в [136]. Стюартсон и Робертс [220, 253] решили эту же задачу методом преобразований.

При изучении произвольных движений вращающейся жидкости представлять решение в виде разложения по натуральным модам, вероятно, не очень хорошо. Поскольку невязкие уравнения в конце концов являются гиперболическими уравнениями, то течения в резервуаре могут иметь и в действительности имеют слабые пространственные «разрывы» внутри жидкости. (Это видно на примере потока, представленного на рис. 1.3.) Хорошо известно, что представление Фурье для функций с разрывами не эффективно. Вуд [295] исследовал невязкий предел вязкой задачи для *нерезонансной* прецессии цилиндра. Он показал, что внутреннее течение имеет слабые разрывы на характеристиках, которые выходят из угловых областей. Рисунок этих характеристик в очень сильной степени зависит от размеров резервуара. Сходимость модовых рядов также должна быть чувствительной к размерам резервуара.

## 2.14. Резонанс в сфере

Теорию предыдущего раздела можно проиллюстрировать на примере колебаний в сфере (см. [94]).

Предположим, что сфера движется определенным образом около своего закрепленного центра, причем ее движения фиксируются в *координатной системе, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$* , как это описано на стр. 73. В этом случае сферическая оболочка, по видимому, будет скользить по поверхности, заключенной в резервуар жидкости. Пограничные слои на поверхности резервуара, создавая небольшой поток массы, возбуждают инерционные моды, и граничное условие на  $\sum$  для невязкой внутренней скорости в общем виде записывается так:

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = ru + zw = F(\theta, \Theta, t), \quad (2.14.1)$$

где  $\Theta$  — полярный угол. Функцию  $F(\theta, \Theta, t)$  можно найти, исследуя пограничный слой, который связывает индуцированный поток с заданным движением резервуара. Достаточно рассмотреть реакцию на возбуждение вида

$$F_k(\Theta) e^{i(k\theta + at)}.$$

Произвольная функция в (2.14.1) может быть представлена как суперпозиция этих индивидуальных компонент.

Пусть скорость сферической поверхности будет

$$U = U_w(r, z) \exp i(k\theta + at). \quad (2.14.2)$$

Соответствующая скорость в пограничном слое, найденная из (2.9.4), равна

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}} = & \frac{1}{2} (\mathbf{U} - i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{U}) \exp \{i [a + 2 \cos \Theta]\}^{1/2} \zeta \} + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{U} + i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{U}) \exp \{-i [a - 2 \cos \Theta]\}^{1/2} \zeta \}, \end{aligned} \quad (2.14.3)$$

а индуцированный поток массы —

$$F_k(\Theta) \exp i(k\theta + at) = -E^{1/2} \int_0^\infty \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}) d\zeta. \quad (2.14.4)$$

Этот поток имеет порядок  $O(E^{1/2})$ , так как взаимодействие резервуара с жидкостью является чисто вязким. Если  $F_k(\Theta)$  определены, то частное решение (2.13.19) может быть записано [если использовать формулу для мод (2.12.7)] в следующем виде:

$$\Phi_{nmk} = \Psi_{nmk} e^{ik\theta} = P_n^{|k|} (\eta/c_{nmk}) P_n^{|k|}(\mu) e^{ik\theta}.$$

Здесь используются тройные индексы. Для определенных значений  $n$  и  $k$  индекс  $m$  меняется от единицы до  $I_{nk}$ , которое равно общему числу возможных собственных значений. Собственные функции, соответствующие этим индексам, представляют собой зональные гармоники на поверхности сферы. Это дает возможность найти выражение для поверхностного интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \Psi_{nmk} \Psi_{n'm'k} \sin \Theta d\Theta = \\ & = \frac{2}{2n-1} \frac{(n+|k|)!}{(n-|k|)!} P_n^{|k|} \left( \frac{1}{2} \lambda_{nmk} \right) P_n^{|k|} \left( \frac{1}{2} \lambda_{n'm'k} \right) \delta_{m'm}. \end{aligned}$$

С учетом последнего соотношения система (2.13.19) переписывается следующим образом (см. [94]):

$$\begin{aligned} A_{nmk} d_{nmk} - 4k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{I_{nk}} A_{nj k} \frac{(a - \lambda_{nj k})(a - \lambda_{nmk}(n+|k|)!}{a^2 (\lambda_{nj k} + \lambda_{nmk})(n-|k|)!} \times \\ \times \frac{P_n^{|k|} \left( \frac{1}{2} \lambda_{nj k} \right) P_n^{|k|} \left( \frac{1}{2} \lambda_{nmk} \right)}{(2n+1)} = \\ = -\frac{(4-a^2)}{ia} \int_0^\pi F_k(\Theta) \Psi_{nmk} \sin \Theta d\Theta, \quad m = 1, \dots, I_{nk}, \end{aligned} \quad (2.14.5)$$

где

$$\begin{aligned} d_{nmk} = & 4 \left( \frac{1}{\lambda_{nmk}^2} - \frac{1}{a^2} \right) \iint \left( \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{nmk} \right)^2 r dr dz + \\ & + 2k \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\lambda_{nmk}} \right) \int_0^\pi \Psi_{nmk}^2 \sin \Theta d\Theta. \end{aligned} \quad (2.14.6)$$

Теперь мы имеем  $I_{nk}$  уравнений для  $I_{nk}$  неизвестных,  $A_{nmk}$ ,  $m = 1, \dots, I_{nk}$  и система разрешима. Амплитудные коэффициенты определяются просто.

Из этих формул следует, что резонанс имеет место всякий раз, когда частота возбуждения  $a$  является характеристическим значением  $\lambda_m$ . Однако благодаря вязким процессам амплитуда реакции все время остается конечной. Во все предыдущие уравнения соответствующие вязкие поправки вносятся с помощью замены невязкого собственного значения  $\lambda_m$  на более точное значение  $-is_m = \lambda_m - iE^{1/2} s_{m,1}$ .

В случае осесимметричного движения ( $k = 0$ ) решение становится особенно простым, так как уравнения (2.14.5) расщепляются. В экспериментах Олдриджа и Тоомре [1] для получения резонанса во внутренней жидкости использовалось осесимметричное колебание. В этом случае амплитуды реакции могут быть теперь полностью определены.

В качестве конкретного примера рассмотрим следующий случай: пусть граница движется только в круговом направлении

$$U = \hat{k} \times \text{re} \tilde{e}^{iat} = \sin \Theta \tilde{e}^{iat} \hat{\theta}. \quad (2.14.7)$$

Вначале необходимо определить нормальный поток внутрь экмановского слоя, который образуется за счет движения границы. Этот расчет аналогичен приведенному в разделе 2.9. Поскольку  $k = 0$ , амплитуды мод могут быть рассчитаны независимо [см. также (2.13.17)]. Нижние индексы теперь могут быть отброшены;  $\Psi$  обозначает произвольную моду;  $A$  — ее амплитуда,  $\lambda$  — соответствующее собственное значение. Следовательно, система (2.14.5) примет следующий вид:

$$A = -2^{-3/2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \frac{a\lambda^2 E^{1/2}}{(a+\lambda)(a-\lambda)} \frac{I_1}{I_2}, \quad (2.14.8)$$

где

$$I_1 = \int_0^\pi d\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \sin^2 \Theta \left\{ |a + 2 \cos \Theta|^{-1/2} - |a - 2 \cos \Theta|^{-1/2} - \right. \\ \left. - i \left[ \frac{a + 2 \cos \Theta}{|a + 2 \cos \Theta|^{3/2}} - \frac{a - 2 \cos \Theta}{|a - 2 \cos \Theta|^{3/2}} \right] \right\}, \quad (2.14.9)$$

$$I_2 = \iint \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 r dr dz.$$

Последнее интегрирование производится по объему единичной сферы.

Рассмотрим резонанс следующей моды:

$$\Psi = \Psi_{410} = z^2 - \frac{1}{2} z^4 - 2r^2 z^2 + \frac{2}{3} r^2 - \frac{1}{3} r^4,$$

для которой  $\lambda_{410} = 1,309$ ,  $s_{410,1} = -3,38 + 0,434i$ .

Чтобы рассчитать резонансную амплитуду, частота возбуждения принимается равной

$$a = \lambda_{410}$$

и  $\lambda$  в (2.14.8) *заменяется* на полное собственное значение  $-is_{410}$ , т. е.

$$-is_{410} = \lambda_{410} - iE^{1/2}s_{410,1}.$$

После интегрирования получаем

$$A = A_{410} = 0,452 + 0,055i.$$

Результаты Олдриджа и Тоомре [1] показывают, что теоретические и экспериментальные значения амплитуды давления находятся в прекрасном согласии, если число Россби устремить к нулю. Экспериментальные значения всегда меньше, чем предсказываемые, однако это расхождение очень небольшое.

## 2.15. Движение в цилиндре

Цилиндрический резервуар является другой прекрасной иллюстрацией общей теории для частного случая (см. раздел 2.11), когда общая высота  $h$  всюду равна константе, т. е.  $h = 1$ . Эта задача впервые была исследована Кельвином [130], позднее Бьеркнесом и Солсбергом [15] и затем многими другими.

Геострофическое движение в такой геометрии, как обычно, является двумерным, причем

$$\mathbf{q}_0 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \varphi_0. \quad (2.15.1)$$

Уравнение (2.11.5) сводится к виду

$$\nabla^2 \varphi_0 = 2\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \langle \mathbf{q}_* \rangle, \quad (2.15.2)$$

а граничное условие на боковой поверхности,  $r = a$ , записывается либо так:  $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \varphi_0 = 0$ , либо так:

$$\varphi_0(a, \theta) = 0. \quad (2.15.3)$$

Вращение сказывается на течениях этого типа значительно меньше. Любой поверхностный контур является геострофическим, и природа геострофического течения полностью определяется начальными данными.

Краевая задача для невязких внутренних колебаний  $\Phi e^{i\lambda t}$  вновь включает уравнения (2.12.4) и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ на } z = 0, z = 1; \\ i\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \text{ на } r = a. \end{aligned} \right\} \quad (2.15.4)$$

Решения этой задачи на собственные значения находятся методом разделения переменных; они имеют вид

$$\Phi_{nmk}(r, \theta, z) = J_{|k|}(\xi_{nmk}r/a) \cos(n\pi z) \exp(ik\theta), \quad (2.15.5)$$

где  $k = 0$  и  $n, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

$$\lambda_{nmk} = 2 \left(1 + \xi_{nmk}^2/n^2\pi^2 a^2\right)^{-1/2}, \quad (2.15.6)$$

а  $\xi_{nmk}$  представляют собой  $m$ -ное положительное решение трансцендентного уравнения

$$\xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi) + k \left(1 + \xi^2/n^2\pi^2 a^2\right)^{1/2} J_{|k|}(\xi) = 0. \quad (2.15.7)$$

Отрицательные собственные значения получаются, если  $\lambda$  и  $k$  заменить соответственно на  $-\lambda$  и  $-k$ , так что вычисление всех положительных собственных значений полностью определяет спектр.

Вообще, одним и тем же значениям  $\lambda$  не соответствуют оба значения  $\pm k$ , и модовые решения представляют собой прогрессивные волны.

Некоторые из замечаний, сделанных в разделе 2.11, могут быть теперь доказаны. Например, используя свойства уравнения для собственных значений, нетрудно показать, что невязкий спектр является несчетным, но плотным в интервале  $|\lambda| \leq 2$ . Это заключение не имеет отношения к действительному вязкому спектру, так как основная концепция теории пограничного слоя, которая гласит о том, что каждая мода распадается на невязкую компоненту и возмущение пограничного слоя, оказывается неверной в том случае, когда эффективная длина волнового колебания имеет порядок толщины пограничного слоя  $E^{1/2}$ . Ошибку, связанную с пренебрежением вязкостью внутри области, можно грубо оценить, если подставить

$$p = J_0(\xi r/a) e^{i(n\pi z + \lambda t)}$$

в точное уравнение для давления (2.2.2), а затем определить  $\lambda$  через  $\xi$ .

Отсюда следует

$$\lambda = 2 \left(1 + \xi^2/n^2\pi^2 a^2\right)^{-1/2} + iE \left(n^2\pi^2 + \xi^2/a^2\right).$$

Первый член представляет собой по существу невязкое собственное значение. Для больших волновых чисел  $k$  поправка имеет тот же порядок величины

$$k = \left(n^2\pi^2 + \xi^2/a^2\right)^{1/2} \doteq E^{-1/2}.$$

Следовательно, вязкие эффекты становятся существенными, когда длина волны моды мала. Анализируя выражение для поправки, можно заметить, что действительные положения собственных значений смещаются от вещественной оси, приближаясь к  $Im \infty$  при больших значениях  $\xi$  или  $n$ . Следовательно, плотный спектр является потому, что

$$\lim_{\xi, n \rightarrow \infty} \lim_{E \rightarrow 0} \neq \lim_{E \rightarrow 0} \lim_{\xi, n \rightarrow \infty}.$$

Невязкое приближение  $E = 0$  локализует только проекции точных положений собственных значений на вещественной оси, и эти спроектированные значения составляют плотный ряд. Аналогичное заключение, бесспорно, имеет место для всех конфигураций. Ситуация в окрестности начала  $\lambda = 0$  полностью не изучена. Фульц [76]

Рис. 2.11. Цилиндрическая осесимметричная инерционная мода (2, 1, 0), сфотографированная Фульцем [76]. Период вращения 4,04 с, период колебания диска 3,189 с, диаметр и высота резервуара 8,23 и 8,25 см, размер диска 2 см.

в своем эксперименте по возбуждению осесимметричных мод ( $k = 0$ ) произвел измерения частоты, которые оказались в хорошем согласии с данными теоретического расчета. Резонанс создавался варьированием частоты колебаний небольшого диска, помещенного внутрь цилиндра.

Таблица 2.2

Мода ( $n, m, k$ )	$a = \frac{\text{радиус}}{\text{высота}}$	Собственные значения	
		теория	эксперимент
(1, 1, 0)	2,0	1,708	1,754
	0,667	0,959	0,966
	0,4	0,623	0,617
(1, 2, 0)	2,0	1,487	1,351
	0,667	0,572	0,581
	0,286	0,254	0,253
(1, 3, 0)	2,0	1,051	1,052
	1,0	0,590	0,595
	0,4	0,245	0,243
(1, 4, 0)	0,5	0,234	0,234
(2, 1, 0)	2,0	1,913	1,923
	0,4	1,096	1,099
	0,667	1,025	1,020
(2, 2, 0)	0,4	0,674	0,676
	1,0	1,852	1,887
	0,4	1,402	1,408



Рис. 2.12. Цилиндрическая осесимметричная инерционная мода (3, 0, 1). Период вращения 4,055 с; период колебаний диска 2,612 с, диаметр резервуара и высота 8,23 и 8,25 см, размер диска 1,45 см.

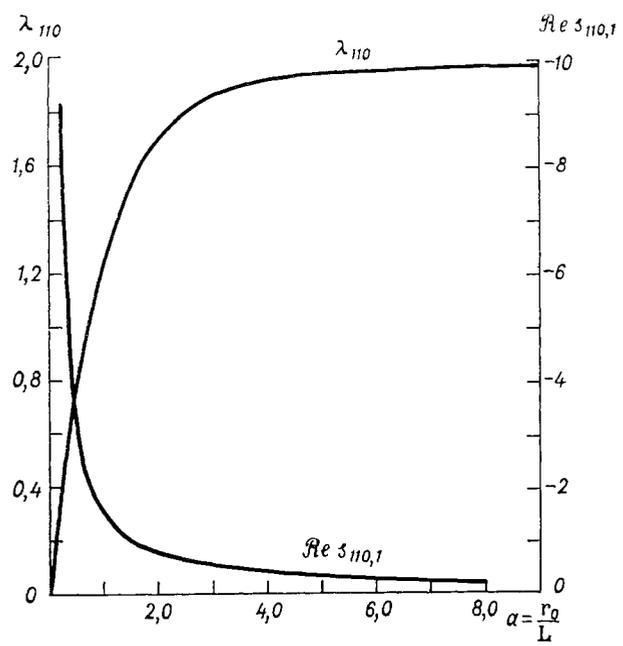


Рис. 2.13. Зависимость собственного значения и показателя затухания для цилиндрической моды (1, 1, 0) от радиуса резервуара.

Для определения резонанса было предложено использовать некоторые критерии, хотя максимальная реакция была очень чувствительна к изменениям частоты и могла быть локализована очень точно. Результаты представлены в табл. 2.2. Рисунки 2.11 и 2.12 показывают типичные модовые колебания.

К сожалению, ни Фультцем, ни кем-либо другим до сих пор не выполнены измерения скорости вязкого затухания. Теоретические поправки на эффект пограничных слоев, расположенных на верхней и нижней стенках резервуара, могут быть определены аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Однако пограничный слой на боковой поверхности имеет существенно иную структуру по сравнению с экмановским слоем, так как он возникает благодаря более сложному балансу сил, чем баланс сил Кориолиса и градиента давления. Вертикальные слои сдвига более полно изучаются в разделе 2.18; их роль в вязких диссипативных процессах только недавно была исследована Кудликом [136]. Время спинапа по-прежнему характеризует скорость диссипации и геострофической и инерционной мод. Однако с увеличением радиуса цилиндра время диссипации для *инерционных* мод постепенно становится больше и в пределе (для бесконечных концентрических дисков) становится равным  $E^{-1}$ . Это объясняет существование трех фаз спинапа в этой идеализированной геометрии. На последней фазе, соответствующей  $t \doteq E^{-1}$ , происходит вязкое затухание остаточных модовых осцилляций. Рисунок 2.13 показывает изменение собственного значения и показателя затухания в зависимости от  $a$  для первой моды (1, 1, 0).

## 2.16. Волны Россби: часть первая

Общая теория применима для любого резервуара, представляющего собой гладкую гнбающую замкнутых геострофических контуров. Однако легко создать такие конфигурации, для которых не существует никаких замкнутых кривых постоянной высоты. Спрашивается, как тогда изменится теория. Оказывается, в этом случае возникают совершенно новые явления, изучением которых мы теперь займемся.

Рассмотрим резервуар, изображенный на рис. 2.14 (мы его будем называть «усеченным цилиндром»), в котором угол наклона  $\alpha$  мал, хотя  $\alpha \gg E^{1/2}$ . Для определенности предположим, что верхняя поверхность располагается при  $z = 1$  и

$$z = y \operatorname{tg} \alpha.$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение плоскости основания. В этой конфигурации не существует замкнутых контуров постоянной высоты и геострофическая мода невозможна. Однако геострофическое течение в специальном случае прямого кругового цилиндра ( $\alpha = 0$ ) является весьма произвольным, и здесь мы сталкиваемся с задачей, в которой небольшое отличие в геометрии при-

водит к уменьшению числа возможных течений от бесконечности до нуля.

С помощью метода возмущений по  $\alpha$  будет показано, что при  $\alpha \neq 0$  возникает бесконечное число новых низкочастотных, не зависящих от глубины инерционных осцилляций. Эти волны обладают теми же свойствами, как и в случае простой геострофической моды. Именно они обладают завихренностью (теорема о средней циркуляции в этом случае не имеет места) и вместе с остальными инерционными модами могут создавать любые распределения начальных скоростей.

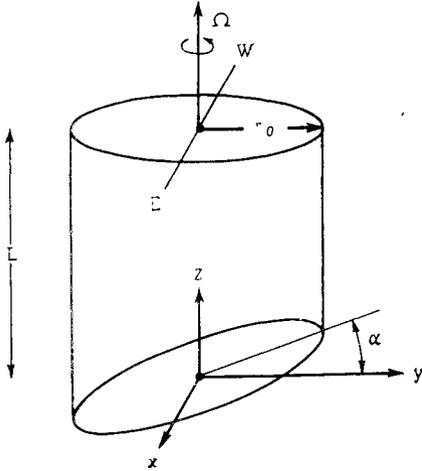


Рис. 2.14. Усеченный цилиндр. Область наименьшей глубины в направлении положительной оси  $z$  располагается на севере; соответственно указаны направления на восток и запад.

значительно модифицирована за счет небольшого наклона на угол  $\alpha$ . Обсуждение этих собственных функций опущено.

Рассмотрим теперь вопрос о возникновении низкочастотных инерционных волн, каждая из которых генерируется в общем геострофическом течении, когда угол  $\alpha$  равен нулю. С этой целью положим  $E = 0$  и примем

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \alpha \lambda^{(1)} + \alpha^2 \lambda^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^{(0)} + \alpha \mathbf{Q}^{(1)} + \dots, \\ \Phi &= \Phi^{(0)} + \alpha \Phi^{(1)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.16.3)$$

Подставляя эти выражения в (2.16.1), получим

$$\left. \begin{aligned} 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}^{(0)} &= -\nabla \Phi^{(0)}, \\ \nabla \cdot \mathbf{Q}^{(0)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.16.4)$$

где  $\mathbf{Q}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$  при  $z = 0, z = 1$  и  $\mathbf{Q}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$  при  $r = a$ .

Волны этого типа были исследованы Россби [231] в геофизических задачах и носят его имя. Частный случай, который мы сейчас рассмотрим, был изучен Педлоским и Гринспенем [201].

По-прежнему решения невязких безразмерных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.16.1)$$

удовлетворяющие граничному условию  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на поверхности  $\Sigma$ , ищутся в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}e^{i\lambda t}, \quad p = \Phi e^{i\lambda t}. \quad (2.16.2)$$

Как и следовало ожидать, каждая из невязких инерционных мод, определенных в предыдущем разделе, имеет свою копию в резервуаре, форма которого лишь не-

Уравнения следующего приближения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} i\lambda^{(1)}\mathbf{Q}^{(0)} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}^{(1)} &= -\nabla\Phi^{(1)}, \\ \nabla \cdot \mathbf{Q}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.16.5)$$

где  $\mathbf{Q}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$  при  $z = 1$ ,

$$-\left(y \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Q}^{(0)} + \mathbf{Q}^{(1)}\right) \cdot \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{Q}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2.16.6)$$

и

$$\mathbf{Q}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{на } r = a.$$

Из (2.16.4) следует, что

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla\Phi^{(0)}, \quad \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial z} = 0 \quad (2.16.7)$$

и

$$\Phi^{(0)} = 0 \quad \text{на } r = a.$$

Первоначальная скорость не зависит от высоты и геострофична. Действительно, в этом приближении решение является *любым* из всевозможных геострофических течений в прямом круговом цилиндре. Чтобы его конкретизировать, необходимо рассмотреть задачу для следующего приближения уравнения (2.16.5) и (2.16.6).

Скорость порядка  $\alpha$  может быть выражена в терминах функции давления  $\Phi^{(0)}$ , если к (2.16.5) применить операцию вихря и затем проинтегрировать его по  $z$ .

В результате получим

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \left( \frac{1}{4} i\lambda^{(1)} (z-1) \nabla^2 \Phi^{(0)} \right) \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{A}(x, y), \quad (2.16.8)$$

где  $\mathbf{A}$  — произвольная функция. Однако, так как  $\mathbf{Q}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$  при  $z = 1$ , то

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0.$$

Если подставить выражение для  $\mathbf{Q}^{(1)}$  из (2.16.8) в (2.16.6), которое представляет собой граничные условия на наклонной поверхности, то получается одно уравнение для  $\Phi^{(0)}$ :

$$\nabla^2 \Phi^{(0)} + \frac{2}{i\lambda^{(1)}} \frac{\partial}{\partial x} \Phi^{(0)} = 0, \quad (2.16.9)$$

удовлетворяющее условию  $\Phi^{(0)} = 0$  при  $r = a$ . Именно это уравнение было исследовано Россби [231].

Решения этой задачи на собственные значения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{mn}^{(0)} &= J_m \left( \xi_{mn} \frac{r}{a} \right) \exp i \left( m\theta + \xi_{mn} \frac{r}{a} \cos \theta \right), \\ \lambda_{mn}^{(1)} &= c / \xi_{mn}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16.10)$$

где  $J_m(\xi_{mn}) = 0$ , а  $m$  принимает всевозможные целочисленные значения, как положительные, так и отрицательные. Эти волны не имеют вертикальной структуры, они обладают средней циркуляцией и полностью замещают геострофическую моду. Вдобавок, они удовлетворяют всем свойствам (таким, как ортогональность), которым удовлетворяют другие инерционные волны.

Совершенно аналогичные результаты получаются для любой формы нижней поверхности, для которой замкнутые геострофические контуры не существуют, пока отклонение от горизонтальной плоскости мало'. Если

$$z = -\alpha d(x, y)$$

описывает положение нижней границы, то соответствующее (2.16.9) уравнение для амплитуды давления имеет вид

$$\nabla^2 \Phi^{(0)} - \frac{2}{i\lambda^{(1)}} \nabla d \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi^{(0)}) = 0. \quad (2.16.11)$$

Хотя краевая задача становится более сложной, общие выводы остаются прежними. Если резервуар не имеет замкнутых геострофических контуров, то волны Россби возникают взамен стационарного геострофического течения. Если резервуар имеет замкнутые геострофические контуры, волны Россби все еще возможны, однако в этом случае они не обладают средней циркуляцией. Вся средняя циркуляция содержится в остаточной геострофической моде, а моды Россби имеют тот же самый характер, что и обычные инерционные моды. Например, если  $d = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ , то окружности постоянного радиуса  $r$  являются геострофическими контурами. Геострофическая мода существует тогда наряду с волнами Россби

$$\Phi_{mn}^{(0)} e^{i\alpha \lambda_{mn}^{(1)} t} = J_{2m} \left( \eta_{mn} \sqrt{\frac{r}{a}} \right) \exp i(m\theta + \alpha \lambda_{mn}^{(1)} t),$$

где

$$J_{2m}(\eta_{mn}) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{mn}^{(1)} = \frac{8ma}{\eta_{mn}^2}$$

В этом случае волны Россби распространяются вдоль геострофических контуров, однако суммарная циркуляция вокруг этих замкнутых кривых отсутствует, если только  $m$  не равно нулю. Когда  $m = 0$ ,  $\lambda_{mn}^{(1)} = 0$  и решение вырождается в одну из бесчисленных чисто геострофических мод.

Слишком в усеченном цилиндре является интересным примером движения жидкости в резервуаре, скорость вращения которого импульсивно *возрастает* от скорости твердого вращения в нулевой момент времени [201]. Начальное состояние, если наблюдения производятся в *более быстро вращающейся* системе координат, возбуждает все волны Россби и, значит, только не зависящие от глубины инерционные моды [при условии что эффекты порядка  $O(\alpha)$  пренебрежимо малы].

Пусть  $\mathbf{q}_*$  представляет собой начальное состояние. Отсюда следует (см. стр. 70), что с точностью до  $O(\alpha)$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_* &= -\mathbf{r}\hat{\theta} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{k}} \times \nabla p_* \\ \text{или} \\ \nabla p_* &= -2\mathbf{r}\hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16.12)$$

Общее решение задачи в терминах волн Россби (скорость и давление имеют порядок единицы, частота порядка  $\alpha$ ) записывается в виде

$$\mathbf{q} = \sum A_{mn} \mathbf{Q}_{mn} \exp \frac{i\alpha}{\xi_{mn}} t, \quad (2.16.13)$$

$$p = \sum A_{mn} \Phi_{mn} \exp \frac{i\alpha}{\xi_{mn}} t, \quad (2.16.14)$$

где

$$\mathbf{Q}_{mn} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_{mn}. \quad (2.16.15)$$

Здесь верхние индексы опущены. Соотношения ортогональности используются для определения коэффициентов Фурье из начального распределения скорости. Вывод оказывается достаточно простым и результат имеет вид

$$A_{mn} = \frac{2i^{-m} a^2}{\xi_{mn}^2}. \quad (2.16.16)$$

Основное давление рассчитывается с помощью несложных алгебраических преобразований, из которых следует, что

$$\begin{aligned} \frac{p}{a^2} &= 8 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_m}{\xi_{mn}^2} \mathbf{J}_m \left( \xi_{mn} \frac{\mathbf{r}}{a} \right) \times \cos \left( \xi_{mn} \frac{\mathbf{r}}{a} \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha t}{\xi_{mn}} - \frac{\gamma \pi}{2} \right) \cos m\theta, \end{aligned} \quad (2.16.17)$$

где  $e_m = 1$ ,  $m \neq 0$  и  $e_m = \frac{1}{2}$ ,  $m = 0$ .

Выпишем также другую удобную для вычислений форму выражения (2.16.17):

$$\begin{aligned} -\frac{p}{a^2} &= \left( \frac{\mathbf{r}}{a} \right)^2 - 1 + 16 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_m}{\xi_{mn}^2} \mathbf{J}_m \left( \xi_{mn} \frac{\mathbf{r}}{a} \right) \cos m\theta \times \\ &\quad \times \sin \left( \xi_{mn} \frac{\mathbf{r}}{a} \cos \theta - \frac{m\pi}{2} + \frac{\alpha t}{2\xi_{mn}} \right) \sin \frac{\alpha t}{2\xi_{mn}}. \end{aligned} \quad (2.16.18)$$

Развитие этого течения показано на рис. 2.15. На этом рисунке помещены результаты суммирования приведенных выше рядов для

трех значений времени. Рисунок 2.16 представляет собой последовательность фотографий, которые иллюстрируют спинадун усеченного цилиндра, освещенного горизонтальным щелевым пучком и сфотографированным сверху. Видно, что волна в форме вихря появляется справа и перемещается к левой стороне резервуара (на рис. 2.14 от Е к W). С течением времени благодаря вязкости движение диссипирует. Соответственно все волны Россби затухают с тем же самым

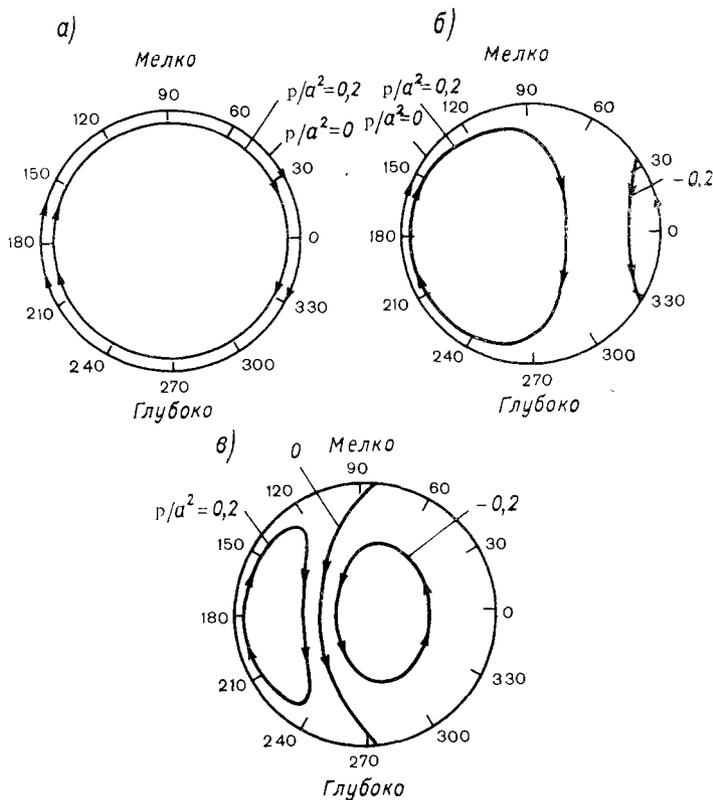


Рис. 2.15. Спинадун в усеченном цилиндре. Контуры постоянного давления показаны для трех случаев:  $\alpha \omega t = 0, \pi, 2\pi$ . Вихревые линии образуются в восточном конце резервуара и распространяются на запад.

показателем затухания, который был ранее получен для течения в прямом круговом цилиндре. В (2.16.17) или (2.16.18) могут быть внесены поправки на вязкость. Для этого правая часть указанных соотношений должна быть умножена на  $\exp(-2E^{1/2}t)$ . Хотя фазовая скорость направлена в одну и ту же сторону, групповая скорость оказывается разнонаправленной, так как система дисперсивна. Перенос энергии с востока на запад отсутствует.

Соответствующее спинадуну движение в цилиндре единичной высоты можно представить в низшем приближении как движение со

скоростью твердого вращения, которое достаточно медленно затухает со временем:

$$\left. \begin{aligned} q &= -r\hat{\theta} \exp(-2E^{1/2}t), \\ \frac{p}{a^2} &= \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \exp(-2E^{1/2}t). \end{aligned} \right\} \quad (2.16.19)$$

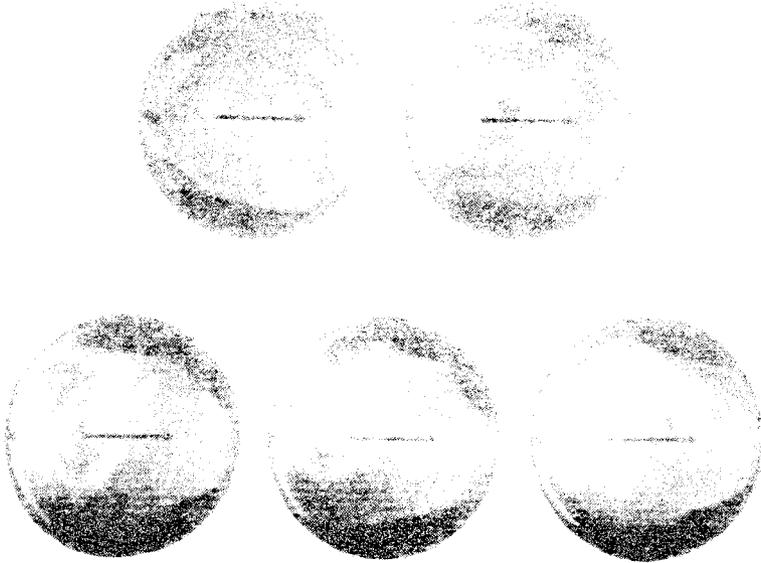


Рис. 2.16. Случай спиндауна в усеченном цилиндре, показывающий образование и распространение волн Россби, см. рис. 2.15.

Таким образом, отмеченные изменения в картине потока имеют место тогда, когда верхняя поверхность слегка наклонена. Чисто азимутальное течение в случае  $\alpha = 0$  заменяется системой переносящих вихри волн, которые распространяются в цилиндре с востока на запад.

### 2.17. Стационарные течения и экмановские слои

Небольшие стационарные течения во вращающейся жидкости можно создать различными способами. К числу простейших способов принадлежит следующий. Разные части граничной поверхности вращают со слегка различными угловыми скоростями. Например, две полусферы сферического резервуара вращаются независимо, точно так же, как верхняя, нижняя и боковая поверхности цилиндра. Очевидно, возможны и другие способы создания такого течения. Жидкость может впрыскиваться через пронизываемую стенку

(раздел 2.19), при этом нетрудно поддерживать и контролировать такие распределения температуры и солености, влияние которых обеспечит появление таких же течений. В этом разделе будут изучаться течения, возбуждаемые главным образом за счет движения границ.

Математический аппарат для решения подобных задач был развит в § 2.6, и на этот раз его необходимо только использовать. Если рассматривать резервуары с поверхностями, покрытыми замкнутыми контурами постоянной высоты, то основной стационарный геострофический поток описывается выражением (2.6.7):

$$\mathbf{q}_0 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dh} \varphi_0(h) \right] \mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B. \quad (2.17.1)$$

Заметим, что те же самые уравнения определяют  $\mathbf{q}_1$  (т. е.  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + E^{1/2}\mathbf{q}_1 + \dots$ ) и оба течения (первичное и вторичное) не зависят от высоты  $z$ .

Экмановский слой отделяет вязкое течение от стенок резервуара и индуцированный поток масс приводит к появлению вторичного внутреннего течения. В этом случае нет необходимости подробно анализировать структуру пограничного слоя, поскольку для нас важно только его влияние на вязкое внутреннее течение. В (2.6.13) было установлено, что нормальный поток к поверхности  $\Sigma$  описывается следующим образом:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_1 = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left\{ \left[ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{q}_0 - U) + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}|} (\mathbf{q}_0 - U) \right] \Big|_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \Big|^{-1/2} \right\}. \quad (2.17.2)$$

Эта формула связывает компоненты вязкой скорости на  $\Sigma$  с тангенциальной скоростью стенки  $U$ . Обозначение  $\{ \}_{\Sigma}$  указывает на то, что заключенные в скобках выражения определяются на границе. Другой вид этого соотношения, удобный в тех случаях, когда не используются разложения по степеням  $E^{1/2}$ , можно записать так

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} = -\frac{E^{1/2}}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left\{ \left[ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{q} - U) + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}|} (\mathbf{q} - U) \right] \Big|_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \Big|^{-1/2} \right\}. \quad (2.17.3)$$

Это уравнение справедливо до тех пор, пока пограничный слой является экмановским слоем и масштаб изменения  $\mathbf{q}$  много больше  $E^{1/2}$ . Действительно, чтобы быть последовательным, необходимо пренебречь всеми членами, меньшими, чем  $E^{1/2}$ , так как эта формула не справедлива за пределами этого приближения.

Произвольная функция  $\left( \frac{d}{dh} \right) \varphi_0$  определяется из граничных условий в основном так же, как и раньше, за исключением того, что  $\mathbf{q}_0$  теперь должна быть всюду заменена на  $\mathbf{q}_0 - U$  и движение

должно быть принято стационарным. Поэтому, когда  $U = U_T$  при  $z = f$ ,  $U = U_B$  при  $z = -g$ , из (2.6.20) следует, что

$$\oint_C ds \cdot \{(\mathbf{q}_0 - U_T + \hat{\mathbf{n}}_T \times (\mathbf{q}_0 - U_T)) | \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}} |^{-1/2} +$$

$$+ (\mathbf{q}_0 - U_B - \hat{\mathbf{n}}_B \times (\mathbf{q}_0 - U_B)) | \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}} |^{-1/2}\} = 0, \quad (2.17.4)$$

откуда

$$-\frac{1}{2} \frac{d\varphi_0}{dh} = \frac{1}{I(h)} \oint_C ds \cdot \{(U_T + \hat{\mathbf{n}}_T \times U_T) | \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}} |^{-1/2} +$$

$$+ (U_B - \hat{\mathbf{n}}_B \times U_B) | \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}} |^{-1/2}\}, \quad (2.17.5)$$

где  $I(h)$  определено в (2.6.24). Скорость  $\mathbf{q}_0$  тогда дается выражением (2.17.4).

Компоненты течения, нормальные к контурам постоянной глубины  $V_\perp$ , определяются из (2.17.2). Пусть

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp,$$

кроме того,  $(\partial/\partial z) \mathbf{q}_1 = 0$ . Следовательно, при  $z = f$

$$\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \mathbf{v}_\perp = \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \mathbf{q}_1 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \nabla \times \{(\hat{\mathbf{n}}_T \times (U_T - \mathbf{q}_0) +$$

$$+ (U_T - \mathbf{q}_0)) | \hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}} |^{-1/2}\}_\Sigma, \quad (2.17.6)$$

а при  $z = -g$

$$\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{v}_\perp = \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{q}_1 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \nabla \times \{(\hat{\mathbf{n}}_B \times (U_B \times (U_B - \mathbf{q}_0) -$$

$$- (U_B - \mathbf{q}_0)) | \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}} |^{-1/2}\}_\Sigma. \quad (2.17.7)$$

Обе скалярные составляющие  $V_\perp$  находятся из этих двух уравнений.

Проиллюстрируем рассмотренный метод на примере простой задачи. Пусть верхняя поверхность осесимметричного резервуара  $z = f(r)$  вращается с угловой скоростью  $(1 + \epsilon) \Omega$ , в то время как нижняя поверхность  $z = -g(r)$  вращается с частотой  $\Omega$ . Относительная безразмерная скорость стенки, записанная в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , тогда имеет вид

$$\left. \begin{aligned} U_T &= r\hat{\theta}, \\ U_B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.17.8)$$

Геострофическая скорость равна  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{v}_0(r) \hat{\theta}$  и

$$\frac{v_0(r)}{r} = \frac{\left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2\right)^{1/4}}{\left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2\right)^{1/4} + \left(1 + \left(\frac{dg}{dr}\right)^2\right)^{1/4}}. \quad (2.17.9)$$

Вторичный поток циркулирует в строго вертикальном направлении,  $q_1 = w_1(r) \hat{k}$ , где

$$w_1(r) = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{\left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2\right)^{1/4} \left(1 + \left(\frac{dg}{dr}\right)^2\right)^{1/4}}{\left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2\right)^{1/4} + \left(1 + \left(\frac{dg}{dr}\right)^2\right)^{1/4}} \right]. \quad (2.17.10)$$

В этом случае, очевидно, верхний и нижний экмановские слои непосредственно связаны друг с другом. Локальный сток в одном из них в точности равен притоку в другом, так что осредненный по вертикали в пределах пограничных слоев суммарный расход масс оказывается равным нулю. Такой точный баланс эффектов двух пограничных слоев на каждой вертикали является следствием теоремы Тэйлора — Праудмена. Формулы для единичной сферы

$$v_0 = \frac{r}{2}, \quad (2.17.11)$$

$$w_1 = \frac{4 - 3r^2}{8(1 - r^2)^{3/4}} \quad (2.17.12)$$

показывают, что основная часть жидкости вращается со средней скоростью этих двух полусфер. Жидкая частица, выходящая из нижнего экмановского слоя, перемещается вертикально вверх вдоль цилиндра определенного радиуса. Внутреннего радиального течения не существует, и поэтому жидкий элемент возвращается строго в то место пограничного слоя, откуда он вышел.

Фактически аналогичная картина имеет место и в цилиндрическом резервуаре, за исключением одной важной детали. Пограничный слой вдоль вертикальной стенки имеет структуру совершенно другую, чем экмановский слой. Однако его основное назначение по-прежнему состоит в том, чтобы служить связующим звеном между верхним и нижним слоями, а общий перенос масс в нем должен быть тот же, что и в горизонтальных пограничных слоях. Это попросту означает, что экмановские слои в этом случае определяют все движение. (Другая функция боковых пристеночных пограничных слоев заключается в том, чтобы привести в соответствие скорость жидкости и скорость вертикальной границы. Вертикальные сдвиговые слои возникают также всякий раз, когда границы или граничные условия допускают существование разрывов.)

Было бы неверным утверждать, что движение в вертикальных слоях всегда играет второстепенную роль по сравнению с движением в экмановских слоях. Природа этого движения представляет большой интерес для многих важных физических задач. По этой причине, а также для того чтобы глубже понять явления, происходящие во вращающейся жидкости, исследованию вертикальных слоев будут посвящены два следующих раздела.

В резервуарах, не имеющих замкнутых геострофических контуров, картина движения получается совершенно иной. Рассмотрим усеченный цилиндр (рис. 2.14), в котором течение создается за счет вращения верхнего диска, имеющего скорость, немного отличную

от скорости остального резервуара. Будет показано, что скорость течения вдоль контуров постоянной высоты порядка  $O(E^{1/2})$  в противоположность единичной разности скоростей оснований цилиндра; так что жидкости сообщается очень незначительное движение. Объясняется это тем, что скорость порядка единицы должна была бы быть направлена вдоль геострофических контуров, которые в данном случае упираются в стенки контейнера. Оценка приложенных и индуцированных напряжений показывает, что при сделанных допущениях не может существовать такого вязкого пограничного слоя, который обеспечил бы такой большой перенос масс. Для выполнения условия  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  на  $\Sigma$  нужно, чтобы

$$\mathbf{q}_0 = 0.$$

Однако нормальная компонента внутренней скорости на непроницаемых стенках может иметь порядок  $O(E^{1/2})$ , что согласуется с потоком масс, порожденным горизонтальными и вертикальными слоями.

Компонента скорости того же порядка, что и перпендикулярная к геострофическому контуру, может быть определена непосредственно из (2.17.6) и (2.17.7) с помощью подстановки  $U_B = 0$ ,  $U_T = r\dot{\theta}$ ,  $\mathbf{q}_0 = 0$ . Составляющая скорости, параллельная этим линиям постоянной глубины, находится из уравнения неразрывности как произвольная функция расстояния вдоль контура. Используя введенную раньше для этого резервуара систему координат, получим

$$\mathbf{q} = E^{1/2} \mathbf{q}_1 = E^{1/4} \left( \frac{X(y)}{\sin \alpha} \hat{\mathbf{i}} + \text{ctg} \alpha \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (2.17.13)$$

Применение метода возмущений оправдано в том случае, когда угол наклона  $\alpha$  больше  $E^{1/2}$ , никаких других ограничений не существует. Очевидно, переход от осесимметричного течения порядка единицы, возникающего при  $\alpha = 0$ , к эффективной блокировке, которая имеет место при ненулевом наклоне, достигается при очень малом угле наклона, скажем

$$\alpha E^{-1/2} \doteq 1.$$

Переходный режим до сих пор остается не изученным.

Явное определение функции  $X(y)$  требует проведения тщательного анализа пристеночных пограничных слоев, который будет выполнен в § 2.20. Займемся теперь проверкой сделанных замечаний, полагая  $X(y) = O(1)$ .

Чтобы получить решение задачи с учетом небольшого потока массы через поверхность резервуара, нужно сделать очень незначительные изменения. Пусть

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -S$$

(величина источника  $S$  используется здесь для оценки масштаба скорости); конечно, суммарное поступление жидкости в резервуар всегда равно нулю

$$\int S \, d\Sigma = 0.$$

Кроме того, поскольку результирующее внутреннее течение в общем больше индуцирующего его потока массы в  $E^{1/2}$  раз, то можно предположить, что

$$S = E^{1/2} M.$$

Это равенство гарантирует справедливость линейной теории во всех случаях.

При этих условиях (2.17.2) может быть соответственно переписано

$$\mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = -M - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left\{ (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{q}_0 + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}|} \mathbf{q}_0) |\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2} \right\}. \quad (2.17.14)$$

Применение этих формул для верхней и нижней поверхностей резервуара дает два уравнения для составляющих скорости, нормальных к геострофическим контурам, так как с точностью до  $O(E)$  скорость не зависит от высоты.

Геострофическая скорость описывается уравнением

$$\mathbf{q}_0 = -\frac{2}{i(h)} \left[ \int M_T d\Sigma'_T + \int M_B d\Sigma'_B \right] \mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B, \quad (2.17.15)$$

где  $I(h)$  определено в (2.6.24), а  $\Sigma'_T$ ,  $\Sigma'_B$  представляют собой части верхней и нижней поверхностей, очерченные геострофическим контуром  $C$ .

Если доказано, что перенос массы во внутреннюю область через геострофические контуры может иметь только порядок  $O(E)$ , то последнее уравнение легко интерпретируется. Действительно, поскольку  $\mathbf{q}_r$  направлена вдоль геострофических контуров и

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \varphi_1 + \mathbf{w}_1 \hat{\mathbf{k}},$$

то после выполнения векторного умножения и применения интегральной теоремы приходим к ожидаемому результату:

$$\int (\mathbf{q}_0 + E^{1/2} \mathbf{q}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_L d\Sigma_L = 0.$$

Здесь  $\Sigma_L$  — боковая поверхность вертикального цилиндра с образующей  $C$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_L$  — ее единичная нормаль ( $\mathbf{n}_L \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ ), а  $\Sigma_L$ ,  $\Sigma'_T$ ,  $\Sigma'_B$  образуют замкнутый объем  $V_L$ .

Если поверхностные интегралы, входящие в (2.17.15), в сумме не равны тождественно нулю, то сохранение массы в  $V_L$  требует, чтобы жидкость либо втекала, либо вытекала из остального объема резервуара. В этом случае жидкость должна переноситься через геострофические контуры или линии постоянной общей высоты  $h$ . Однако невязкая внутренняя циркуляция, согласно доводам, изложенным в предыдущем параграфе, не может обеспечить такого переноса. Отсюда следует, что необходимый перенос имеет место исключительно внутри экмановского пограничного слоя, существование

которого в свою очередь требует, чтобы внутренняя скорость имела единичный порядок.

Если поверхностные интегралы в (2.17.15) всегда взаимно уничтожаются, то первоначальная геострофическая скорость  $q_0$  равна нулю, так как необходимость в экмановском слое и, значит, в перераспределении массы через контуры постоянной высоты теперь отпадает. При этих условиях нормальная скорость на стенке может иметь единичный порядок, соизмеримый с порядком внутренней скорости.

Течения с источниками и стоками будут обсуждаться в § 2.19.

## 2.18. Вертикальные пограничные слои

Стационарный пограничный слой на боковой стенке (или свободный слой сдвига) является результатом другого, более тонкого баланса сил, чем тот, который приводит к появлению экмановского слоя. Структура вертикального пограничного слоя оказывается весьма сложной, он включает две переходные зоны интенсивного переноса — одну внутри другой. Резкие изменения и разрывы сглаживаются и азимутальная компонента скорости становится непрерывной в вязком слое, безразмерная толщина которого равна примерно  $E^{1/4}$ . Внутренний слой толщины  $E^{1/3}$  допускает существование вертикального потока массы порядка  $O(E^{1/2})$  и поэтому часто служит связующим звеном между экмановскими слоями.

Общий анализ основных уравнений и сравнение порядков величин различных членов позволяют выяснить многие свойства вертикальных слоев. Обычно с помощью такого сравнения удается обосновать более формальный подход. Однако в данном случае ближе к истине обратное утверждение, ибо основные физические процессы здесь отнюдь не очевидны, и провидательность, дополненная точным анализом, по-видимому, является существенной составной частью обсуждения «порядков величин». Поскольку это возможно, будем производить вначале анализ уравнений движения с помощью теории размерности.

Рассмотрим весьма общее состояние стационарного течения в цилиндрическом резервуаре, различные части поверхности которого могут вращаться независимо. Основное уравнение для редуцированного давления (2.2.2) имеет вид

$$E^2 (\nabla^2)^3 p + 4 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (2.18.1)$$

Очевидно, что два члена этого уравнения соизмеримы только в областях быстрого изменения давления. Вблизи горизонтальной границы, например  $z = 0$ , можно ввести растянутую переменную  $\zeta_1 = E^{-2}z$ ; тогда уравнение (2.18.1) приближенно запишется так:

$$E^{2-6a} \frac{\partial^6 p}{\partial \zeta_1^6} + 4E^{-2a} \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta_1^2} = 0.$$

Равенство выполняется, когда  $a = \frac{1}{2}$ . Эта величина соответствует экмановскому слою на таких поверхностях. Существуют и другие возможности. Действительно, пусть на цилиндрической стенке ( $r = 1$ )  $\zeta_2 = E^{-a} (1 - r)$ . Тогда уравнение (2.18.1) для членов ряда низшего порядка примет вид

$$E^{2-6a} \frac{\partial^6 p}{\partial \zeta_2^6} + 4 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (2.18.2)$$

Теперь равенство выполняется, если  $a = \frac{1}{3}$ . Таким образом, на поверхностях может образоваться вертикальный пограничный слой толщиной  $E^{1/3}$ . Дополнительную информацию можно получить, масштабируя исходные уравнения движения так, чтобы каждая новая зависимая переменная была единичного порядка. Однако, поскольку в общем случае мы неизбежно сталкиваемся с усложнениями, которые не являются необходимыми на этой стадии исследования, то вводятся дополнительные ограничения. Рассмотрим, например, движение в осесимметричном резервуаре и предположим, что все функции не зависят от азимутального угла  $\theta$ .

Если ввести следующие масштабы зависимых переменных:

$$(u(r, z), v, w, p) \Rightarrow (E^b \tilde{U}(\zeta_2, z), E^c \tilde{V}, E^d \tilde{W}, E^e \tilde{P}),$$

то после подстановки этих выражений в основные уравнения (2.2.1) и сохранения только главных членов получаем

$$\left. \begin{aligned} -E^{b-a} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta_2} + E^d \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} &= 0, \\ 2E^c \tilde{V} + E^{e-a} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \zeta_2} + E^{1-2a+b} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \zeta_2^2} &= 0, \\ 2E^b \tilde{U} - E^{1-2a+c} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \zeta_2^2} &= 0, \\ E^e \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} - E^{1-2a+d} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \zeta_2^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.18.3)$$

Вертикальный перенос жидкости порядка  $O(E^{1/2})$  может обеспечиваться пограничным слоем толщиной  $E^{1/2}$ , только при следующем наборе индексов

$$(a, b, c, d, e) = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right).$$

В этом случае подчеркнутые в (2.18.3) члены, если их приравнять нулю, составляют уравнения пограничного слоя. Заметим, что уравнение для радиального момента отражает условие баланса сил Кориолиса и градиента радиального давления.

Поскольку  $v = O(E^{1/6})$ , то пограничные слои этого типа не соответствуют случаю произвольного внешнего течения, для которого

эта составляющая имеет единичный порядок. Поэтому необходимо составить совсем другой баланс членов, который полностью согласовывался бы с  $E^{1/3}$ -слоем. В частности, требуется согласовать величину радиального переноса массы, чтобы в новом слое она осталась неизменной и имела порядок  $O(E^{1/2})$ .

Уравнение (2.18.2) означает, что в любом вертикальном слое сдвига, толщина которого не равна  $E^{1/3}$ ,

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} = 0.$$

Анализ показателей экспонент в (2.18.3) приводит к заключению, что следующий набор параметров:

$$(a, b, c, d, e) = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right),$$

удовлетворяет всем требованиям. Новый пограничный слой имеет толщину  $E^{1/4}$ , и уравнения пограничного слоя, записанные в растянутой координате

$$\zeta_3 = E^{-1/4}(1 - r),$$

являются теми же самыми, что и уравнения (2.18.3) для слоя толщиной  $E^{1/3}$ , за исключением последнего уравнения. Оно заменяется на

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = 0$$

(член, характеризующий радиальный сдвиг  $(\partial^2/\partial r^2)$  и, пренебрежимо мал в *область* пограничных слоев и может быть спокойно опущен). Хотя этот пограничный слой также обеспечивает вертикальный перенос массы порядка  $E^{1/2}$ , тем не менее только с его помощью *нельзя* удовлетворить все граничные условия на боковой стенке и поэтому остается ввести более узкий переходной слой. Условие однородности вертикальной структуры потока в более толстом слое

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} = 0 = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z},$$

как правило, влечет за собой появление ненулевого радиального потока при малых значениях  $\zeta_3$  (но больших  $\zeta_2$ ). Поэтому  $E^{1/4}$ -слой служит для выравнивания  $v$  с внутренним течением, а  $E^{1/3}$ -слой требуется для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на стенке.

Существуют и другие возможности. Задачи о подсосе жидкости (они будут рассмотрены в следующем разделе) описывают появление пограничных слоев со следующим набором индексов:  $\left( \frac{1}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12} \right)$  и  $\left( \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right)$ . Действительно, возможен любой набор вида  $\left( \frac{1}{3}, b, b - \frac{1}{3}, b - \frac{1}{3}, b \right)$ ; значение  $b$  зависит от конкретной задачи. В связи с этим из метода подобия больше не удастся извлечь

почти никакой пользы, и поэтому далее мы будем привлекать прямые аналитические методы.

Моррисон и Морган [184] при изучении медленного движения диска в вязкой вращающейся жидкости использовали метод преобразований. Приблизительно в то же время Праудмен [209] рассмотрел свободные сдвиговые слои, образованные с помощью концентрических сфер, которые вращаются с несколько различными скоростями. Однако природа вертикальных пограничных слоев,

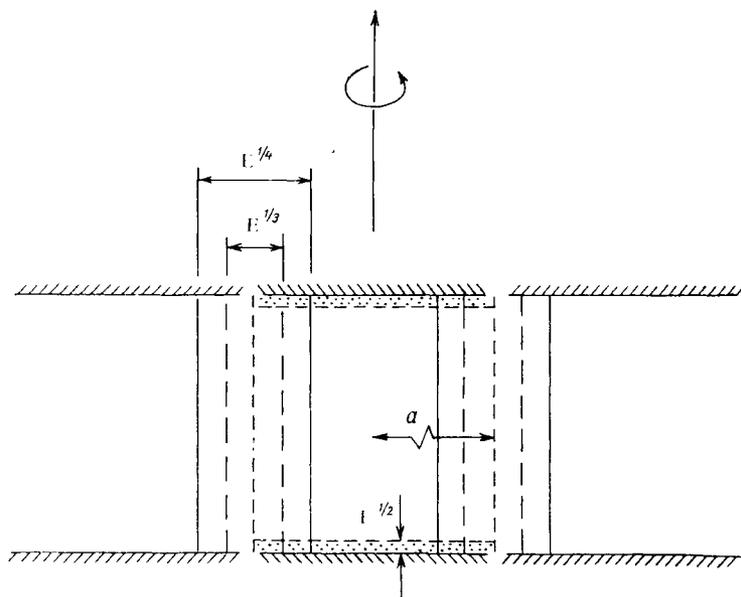


Рис. 2.17. Слои сдвига (в увеличенном масштабе), которые возникают в конфигурации, состоящей из концентрических дисков.

по-видимому, лучше всего раскрывается при анализе движений между концентрическими дисками (см. [248]). (Здесь используются несколько иные методы, включающие одновременно преобразование Фурье и метод пограничного слоя.)

Две одинаковые параллельные пластины вращаются равномерно около одной оси, как это показано на рис. 2.17. Внутренний диск каждой пластины может вращаться независимо, хотя различия скоростей вращения всегда остаются малыми. Рассматриваются две задачи. Первая или симметричная задача соответствует ситуации, когда оба внутренних диска имеют избыточную вращательную скорость, т. е.  $(1 + \epsilon) \Omega$ . В антисимметричной задаче скорость одного из дисков равна  $(1 + \epsilon) \Omega$ , а другого —  $(1 - \epsilon) \Omega$ .

Скорость за пределами сдвиговых слоев известна (см. раздел 2.17). В невязкой внутренней области жидкость вращается как твердое тело со средней скоростью вращения верхнего и нижнего дисков.

Если в качестве характерного масштаба длины принято расстояние  $L$  между пластинами,  $[\underline{L}, \Omega^{-1}, \varepsilon\Omega L]$  и

$$\mathbf{q} = -\nabla^{\times}(\chi(r, z)\hat{\theta}) + v(r, z)\hat{\theta},^1 \quad (2.18.4)$$

то безразмерные уравнения движения в координатной системе, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} EGv - 2\frac{\partial\chi}{\partial z} &= 0, \\ EG^2\chi + 2\frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.18.5)$$

где

$$G = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия записываются так:

$$\begin{aligned} u = w = 0, \quad v = V_T = rS(1 - r/a) \quad \text{при } z = 1, \\ u = w = 0, \quad v = V_B = \pm rS(1 - r/a) \quad \text{при } z = 0, \end{aligned}$$

где  $a = r_0/L$ , а знак выбирается в соответствии с тем, какая из двух задач (симметричная или антисимметричная) рассматривается. Определим единичную ступенчатую функцию  $S(x)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} S(x) &= 1, \quad x > 0, \\ &= 0, \quad x < 0. \end{aligned}$$

Хотя прямое преобразование представляет собой достаточно простой способ решения, однако, если использовать некоторые уже известные результаты, относящиеся к экмановским слоям на каждой пластине, то можно получить некоторые упрощения и определенные преимущества. При этом заново рассчитывать структуру экмановского слоя не понадобится, оценка его влияния на внутреннее течение посредством индуцированного потока уже получена в (2.17.3). Например, на нижней пластине  $\hat{n} = -\hat{k}$ , а скорость стенки равна  $U = V_B\hat{\theta}$ ; нормальная составляющая внутренней скорости на стенке тогда

$$w_B = \frac{1}{2} E^{1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (V_B - V_B)$$

<sup>1</sup> Часто функция тока определяется так:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \psi = r\chi.$$

Эти две функции равнозначны и выбор одной из них производится на основании общих соображений удобства алгебраических преобразований или для облегчения ссылок.

(нижние буквы служат для указания местоположения). На верхней пластине,  $z = 1$ , единичная нормаль есть  $\hat{n} = \hat{k}$ , откуда

$$w_T = -\frac{1}{2} E^{1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(v_T - V_T).$$

Однако

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\chi).$$

Эти условия могут быть сведены к следующим:

$$\left. \begin{aligned} \chi_B + \frac{1}{2} E^{1/2} (v_B - V_B) &= 0 \quad \text{при } z=0, \\ \chi_T - \frac{1}{2} E^{1/2} (v_T - V_T) &= 0 \quad \text{при } z=1. \end{aligned} \right\} \quad (2.18.6)$$

Последние характеризуют соответствующие граничные условия для всего потока *вне* экмановских слоев, поскольку изменения в этой области имеют линейные масштабы, большие, чем  $E^{1/2}$ , что, несомненно, справедливо для обоих вертикальных слоев сдвига.

Уравнения для внутренней области могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} &= 0, \\ E \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.18.7)$$

где

$$x = a - r. \quad (2.18.8)$$

Заметим, что в этих уравнениях отсутствуют члены, характеризующие быстрые вертикальные изменения; они уже были учтены при расчете экмановского слоя. Быстрые изменения в радиальном направлении все еще могут иметь место, однако в этом случае значение имеют лишь производные самых высших порядков. Переменная  $x$  (нерастянутая координата пограничного слоя) может изменяться от плюс до минус бесконечности, и аппроксимация уравнений для внутренней области в виде (2.18.7) будет приводить к пренебрежимо малым ошибкам.

Функции  $v$  и  $\chi$  не представляются в виде суммы составляющих для внутренней области и пограничного слоя (т. е.  $v = v_1 + \tilde{v}$ ), так как в этой задаче это представление не имеет никаких преимуществ при выборе методов решения.

Антисимметричная задача (2.18.7), удовлетворяющая условиям (2.18.6), записанными так же, как и для области пограничного слоя вблизи  $r = a$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \chi_B + \frac{1}{2} E^{1/2} [v_B + S(x)] &= 0 \quad \text{при } z=0, \\ \chi_T - \frac{1}{2} E^{1/2} [v_T - S(x)] &= 0 \quad \text{при } z=1, \end{aligned} \right\}$$

решается методом преобразований. Отсюда легко выводится, что

$$\frac{v}{a} = + \frac{E^{1/2} x}{2\pi i |x|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|x|\xi} \sinh \left\{ \frac{1}{2} E \xi^3 \left( z - \frac{1}{2} \right) \right\}}{\left[ 2 \cosh \frac{1}{4} E \xi^3 + \xi E^{1/2} \sinh \frac{1}{4} E \xi^3 \right]} d\xi, \quad (2.18.9)$$

$$\frac{\chi}{a} = - \frac{E^{1/2}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi} \frac{\cosh \left\{ \frac{1}{2} E \xi^3 \left( z - \frac{1}{2} \right) \right\}}{\left[ 2 \cosh \frac{1}{4} E \xi^3 + \xi E^{1/2} \sinh \frac{1}{4} E \xi^3 \right]} d\xi, \quad (2.18.10)$$

где контур интегрирования проходит ниже начала.

Сингулярности подынтегральных выражений располагаются в точках, определяемых приближенно следующими уравнениями:

$$\cosh \frac{1}{4} E \xi^3 = 0;$$

отсюда

$$\xi_n = \left( \frac{(4n+2)\pi i}{E} \right)^{1/3}.$$

Окончательные вычисления дают

$$\frac{v}{a} = - \frac{2^{1/3} E^{1/6}}{3\pi^{2/3}} \left( \frac{a-r}{|a-r|} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \left[ \pi (2n+1) \left( z - \frac{1}{2} \right) \right]}{(2n+1)^{2/3}} D_n, \quad (2.18.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{a} = & - \frac{E^{1/2}}{2} \left\{ S(1-r/a) - \frac{2}{3\pi} \left( \frac{a-r}{|a-r|} \right) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \left[ \pi (2n+1) \left( z - \frac{1}{2} \right) \right]}{2n+1} F_n \right\}, \quad (2.18.12) \end{aligned}$$

где

$$D_n = e^{-\gamma_n |a-r|} - 2e^{-1/2 \gamma_n |a-r|} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_n |a-r| - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$F_n = e^{-\gamma_n |a-r|} + 2e^{-1/2 \gamma_n |a-r|} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_n |a-r| \right)$$

и

$$\gamma_n = \left( \frac{(4n+2)\pi}{E} \right)^{1/3}. \quad (2.18.13)$$

Видно, что в том случае, когда центральные диски вращаются в противоположных направлениях, формируется только вертикальный пограничный слой толщиной  $E^{1/3}$ . Экмановские слои образуются на верхней и нижней пластинах, однако азимутальная скорость внутри области почти всюду, за исключением окрестности разрыва в точке  $r = a$ , равна нулю. Перенос жидкости от одной пластины к другой осуществляется посредством одного вертикального слоя.

Несколько иная ситуация имеет место для симметричной задачи, в которой оба диска имеют одинаковое превышение скорости. Здесь внутренняя азимутальная скорость равна  $v = S(1 - r/a)$ , а изменение единичного порядка, которое испытывает эта составляющая при переходе через  $r = a$ , требует введения слоя толщиной  $E^{1/2}$ . Решение преобразованной задачи на этот раз с отрицательным знаком в граничных условиях такое:

$$\frac{v}{a} = -\frac{iE^{1/2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi} \cosh \left[ \frac{1}{2} E\xi^3 \left( z - \frac{1}{2} \right) \right]}{\left[ \sinh \frac{1}{4} E\xi^3 + \frac{1}{2} E^{1/2} \xi \cosh \frac{1}{4} E\xi^3 \right]} d\xi.$$

Сингулярности подынтегрального выражения расположены в точках, определяемых уравнением

$$\sinh \frac{1}{4} E\xi^3 \cong 0.$$

Корни его равны

$$\xi_n = \left( \frac{4n\pi i}{E} \right)^{1/3}.$$

Кроме этого, в окрестности точек

$$\xi_0 = \left( -\frac{2}{E^{1/2}} \right)^{1/2}$$

знаменатель имеет разделенные нули. Следовательно, окончательно получаем следующие выражения для скорости за пределами экмановских слоев:

$$\begin{aligned} \frac{v}{a} = & \frac{r}{a} S(1 - r/a) - \frac{1}{2} \frac{a-r}{|a-r|} \exp(-2^{1/2} |a-r| E^{-1/4}) - \\ & - \frac{2^{1/2} E^{1/4}}{3} \frac{a-r}{|a-r|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n\pi)^{2/3}} \cos \left[ 2n\pi \left( z - \frac{1}{2} \right) \right] G_n; \end{aligned} \quad (2.18.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{a} = & -\frac{1}{2} E^{1/2} \frac{a-r}{|a-r|} \left\{ \left( z - \frac{1}{2} \right) \exp(-2^{1/2} E^{-1/4} |a-r|) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \left[ 2n\pi \left( z - \frac{1}{2} \right) \right] H_n \right\}, \end{aligned} \quad (2.18.15)$$

где

$$G_n = e^{-\beta_n |a-r|} - 2e^{-\frac{1}{2} \beta_n |a-r|} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_n |a-r| - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$H_n = e^{-\beta_n |a-r|} + 2e^{-\frac{1}{2} \beta_n |a-r|} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_n |a-r| \right)$$

$$\text{и} \quad \beta_n = \left( \frac{4n\pi}{E} \right)^{1/3}. \quad (2.18.16)$$

Анализ этих формул показывает, что симметричное течение включает *два* вертикальных слоя сдвига, один из которых регулирует разрыв азимутальной скорости, другой обеспечивает перенос масс. (Для определения  $u$  и  $w$  нужно продифференцировать  $\chi$ .) Таким образом, подтверждаются установленные ранее основные особенности свободных сдвиговых слоев. Слои толщиной  $E^{1/4}$  появляются всякий раз, как только возникает необходимость в регулировании азимутальной скорости, а сдвиговые слои толщиной  $E^{1/3}$  появляются, чтобы удовлетворить требованиям переноса.

Резервуар из концентрических сфер, исследованный Праудменом [209], демонстрирует все эти явления, так как изменение геометрии резервуара почти не сказывается на основных физических процессах. Однако мы сталкиваемся с некоторой трудностью в окрестности вертикальной касательной к экватору внутренней сферы. Определение структуры тонкого пограничного слоя представляет собой очень трудную задачу, которая только недавно была решена Стюартсоном [252]. Он нашел, что, кроме слоев толщиной  $E^{1/3}$  и  $E^{1/4}$ , имеется еще один пограничный слой толщиной  $E^{1/7}$ . Назначение этого нового вертикального слоя состоит в устранении сингулярности в градиенте азимутальной компоненты скорости. В пределах широтной полосы, окружающей экватор, ширина ее равна  $E^{1/4}$ , экмановский пограничный слой видоизменяется; в остальном теория остается прежней. Очевидно, что в этом случае ситуация невероятно усложняется. Множество различных масштабов делает невозможным формальное обобщение теории, ибо такая попытка связана, по-видимому, с необходимостью учета  $E^{1/20}$  (и даже  $E^{1/3 \cdot 1/4 \cdot 1/5 \cdot 1/7}$ ).

При конечных значениях числа Россби течение из пограничного слоя на сфере вместо того, чтобы возвращаться в свободный вертикальный сдвиговой слой, может проникать внутрь области в виде струи, находящейся в экваториальной плоскости. Нелинейная задача для сферы будет рассматриваться в главах 3 и 5.

## 2.19. Стационарные течения и вертикальные слои сдвига

В этом разделе исследуются те движения, в формировании которых первостепенную роль играют вертикальные слои сдвига. Сначала будет получено несколько общих результатов для стационарных невязких вращательных потоков. Затем последует детальный анализ пограничных слоев в прямом круговом цилиндре при наличии источников жидкости по поверхности [8, 109], этот анализ приведет нас к решению общей задачи данного типа. И, наконец, будут коротко обсуждены несколько других задач, каждая из которых касается интересных особенностей вертикальных слоев сдвига.

Рассмотрим задачу о *стационарном* течении внутри равномерно вращающегося цилиндра единичной безразмерной высоты, поперечное горизонтальное сечение которого показано на рис. 2.18. При этих условиях из теоремы Тэйлора — Праудмена немедленно вытекает, что скорость во внутренней области  $q_1$  с точностью до членов

порядка  $O(E)$  не зависит от  $z$ . Кроме того, в соответствии с (2.17.3) имеем, что граничные условия для  $\mathbf{q}_1$  на основаниях цилиндра могут быть записаны в виде

$$\mathbf{w}_1 = -\frac{1}{2} E^{1/2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{q}_1 \quad \text{при } z=1,$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2} E^{1/2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{q}_1 \quad \text{при } z=0.$$

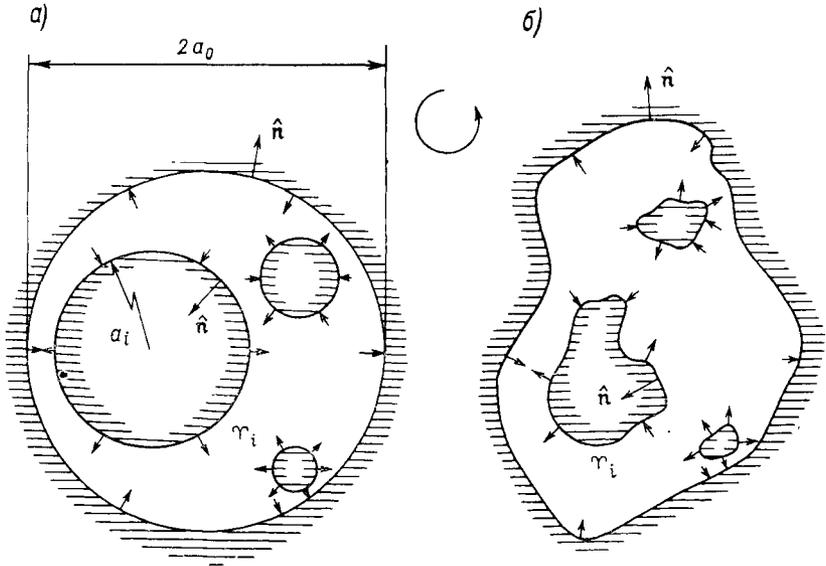


Рис. 2.18. Горизонтальные поперечные сечения многосвязных резервуаров с непроницаемыми вертикальными стенками.

$a$  — все резервуары являются прямыми круговыми цилиндрами;  $b$  — резервуары являются произвольными вертикальными цилиндрами.

Складывая и вычитая эти выражения, получаем, что в этом приближении экмановский слой является бездивергентным, т. е.

$$\mathbf{w}_1 = 0 \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{q}_1 = 0.$$

Последнее выражение эквивалентно следующему:

$$\nabla \times \mathbf{q}_1 = 0, \tag{2.19.1}$$

и, поскольку, помимо всего прочего,  $\nabla \cdot \mathbf{q}_1 = 0$ , то внутреннее течение во вращающейся координатной системе должно быть потенциальным. Давление выступает здесь в роли функции тока для горизонтального внутреннего течения, так как

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla p_1, \tag{2.19.2}$$

а это соотношение удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 p_1 = 0. \tag{2.19.3}$$

Однако, в отличие от функции тока,  $p_1$  является физической переменной и должна быть однозначной функцией положения. Это эквивалентно утверждению, что внутреннее течение не вносит никакого вклада в *полный* перенос масс. Объяснение этого заключается в следующем: приток «массы» к внутренней области из цилиндра произвольной формы (см. рис. 2.18 б) равен

$$M = - \oint_{\gamma} \mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds.$$

Однако вследствие (2.19.2) выражение для  $M$  может быть переписано так:

$$M = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \nabla p_1 \cdot ds = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{\partial p_1}{\partial s} ds.$$

Последний интеграл равен нулю, так как подынтегральное выражение является дифференциалом, а давление — однозначной функцией положения.

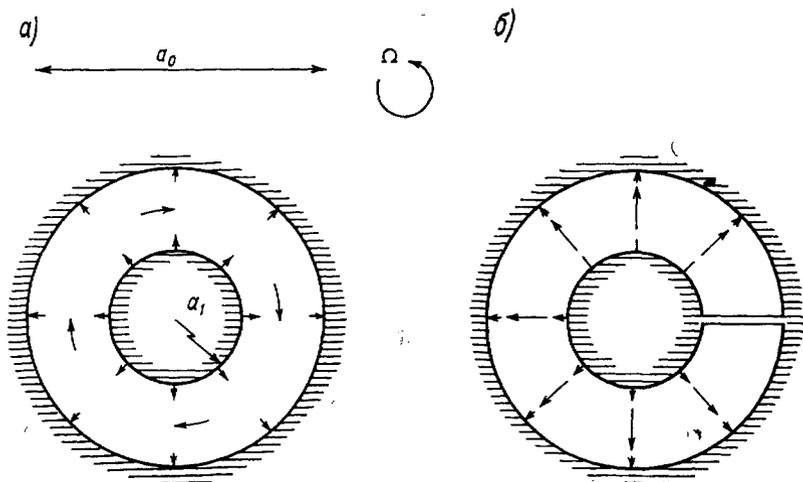


Рис. 2.19. а — горизонтальное поперечное сечение многосвязного резервуара, состоящего из концентрических цилиндров. б — та же конфигурация, сделанная односвязной введением радиальной стенки.

Следовательно, любой суммарный перенос массы в многосвязной области должен иметь место только внутри вертикальных и горизонтальных пограничных слоев. В случае односвязной области не возникает вопроса о *суммарном* потоке, порожденном всей граничной поверхностью. Те же самые заключения были получены в разделе 2.17 (стр. 94).

Две области, показанные на рис. 2.19, имеют существенно различные картины течений, когда внутренний цилиндр является однородным источником жидкости. В случае а) для многосвязного поперечного сечения перенос сосредоточен в пределах вязких слоев, внутреннее течение представляет собой потенциальный вихрь.

Область  $b$  является односвязной. Тонкий радиальный барьер предполагает наличие скачка давления, и в этом случае наблюдается чисто радиальное внутреннее течение.

Характер внутреннего потенциального течения определяется граничными условиями на стенках резервуара. Точно так же, как анализ экмановских слоев заканчивался постановкой эквивалентных граничных условий для  $q_1$ , так и здесь исследование бокового пристеночного пограничного слоя имеет ту же конечную цель. Из анализа пограничного слоя важно получить эффективную мощность двухмерного источника, расположенного на цилиндре  $\Sigma$  (рис. 2.18 б), и циркуляцию относительно него по контуру  $\gamma_i$ . Барсилон [8] нашел, что, если граничное условие на  $\Sigma_i$  задается в виде  $q = -S_i \hat{n}$ , то эквивалентное условие на этой поверхности для внутреннего течения может быть записано так:

$$\frac{\partial p_1}{\partial s} = -2 \langle S_i \rangle = -2 \int_0^1 S_i dz. \quad (2.19.4)$$

Более того, было также показано, что внутренняя циркуляция относительно  $\gamma_i$  описывается следующим образом:

$$\Gamma_i = \oint_{\gamma_i} \mathbf{q}_1 \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2} \oint_{\gamma_i} \frac{\partial p_1}{\partial n} ds = -E^{-1/2} \oint_{\gamma_i} \langle S_i \rangle ds. \quad (2.19.5)$$

Решение (2.19.3), подчиненное только условию (2.19.4) на каждой поверхности  $\Sigma_i$  при

$$\sum_i \langle S_i \rangle = 0,$$

не является единственным. Любая гармоническая функция в предположении, что она является постоянной величиной  $s_i$  на  $\Sigma_i$ , удовлетворяет требованиям (2.19.4) (заметим, что добавление к  $p_1$  любой константы не меняет выражения для скорости). Однако, если циркуляция около каждого внутреннего цилиндра определена так, как в (2.19.5), то задача имеет единственное решение. (Тогда все константы, за исключением одной, определяются.)

Для отыскания решения внутри области можно использовать конформное преобразование, однако этой стороне задачи здесь почти не будет уделяться внимания.

Сначала рассматривается область, показанная на рис. 2.18 а, так как результаты, полученные для нее, легко могут обобщаться на случай 2.18 б. Наши методы исследования отличаются от использованных в [8], вследствие чего удалось получить некоторые новые результаты.

Пусть характерная скорость втекания определяется как  $\varepsilon \Omega L$  и  $\llbracket L, \Omega^{-1}, \varepsilon \Omega L \rrbracket$  — масштабы соответствующих функций. Тогда линейная задача в безразмерном виде включает уравнения

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{q}_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.19.6)$$

и граничные условия на поверхности  $\Sigma_i$

$$\mathbf{q} = -S_i \hat{\mathbf{n}} \quad (i=0, 1, \dots, \text{И}) \quad (2.19.7)$$

и на граничных плоскостях  $z = 0$  и  $z = 1$

$$\mathbf{q} \equiv 0. \quad (2.19.8)$$

Мощность распределенных источников  $S_i$  является функцией положения, она положительна для локального стока и отрицательна для притока. Кроме того, закон сохранения массы требует, чтобы

$$\sum_{i=0}^{\text{И}} \int S_i d\Sigma_i = 0. \quad (2.19.9)$$

Другое ограничение, необходимость введения которого определяется требованием малости значений числа Россби, заключается в предположении, что суммарный перенос массы через любую поверхность имеет порядок  $O(E^{1/2})$

$$\int S_i d\Sigma_i = O(E^{1/2}), \quad (2.19.10)$$

однако сама функция источника  $S_i$  может быть порядка единицы.

Точные вязкие условия на граничных плоскостях заменяются эквивалентными условиями для потока вне экмановских слоев. С учетом (2.17.3) последние имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w} &= -\frac{1}{2} E^{1/2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{q} \quad \text{при } z = 1, \\ \mathbf{w} &= \frac{1}{2} E^{1/2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{q} \quad \text{при } z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19.11)$$

Рассмотрим любой из внутренних цилиндров и поместим начало цилиндрической системы координат в центре этого цилиндра. Пусть

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1^{\tilde{}} + \tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \tilde{\mathbf{p}}, \quad (2.19.12)$$

где  $\tilde{\mathbf{u}}$  и т. д. описывают эффект пограничного слоя рассмотренного на вертикальной поверхности цилиндра  $r = a$  (в нижних индексах нет надобности).

Уравнения, определяющие функции пограничного слоя в окрестности  $r = a$ , при  $x = r - a$  приближенно могут быть записаны так:

$$2\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial x}, \quad (2.19.13)$$

$$2\tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \theta} + |E| \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{v}}}{\partial x^2}, \quad (2.19.14)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial z} + E \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{w}}}{\partial x^2}, \quad (2.19.15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial z} = 0. \quad (2.19.16)$$

Члены, характеризующие радиальный сдвиг, не существенны в вертикальном пограничном слое и поэтому ими пренебрегают. Считается, что  $x$  изменяется от нуля на стенке до бесконечности внутри области. (Фактически  $x$  — обычная координата пограничного слоя.) Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= -\frac{1}{2a} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{E}{4} \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial x^3}, \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (2.19.17)$$

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial^4 \tilde{p}}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} &= 0, \\ E \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19.18)$$

Заметим, что уравнения (2.19.18) фактически те же, что и (2.18.7) в последнем разделе. Учет асимметрии в постановке общей задачи приводит к тому, что в выражении для  $\tilde{u}$  сохраняется только азимутальная производная от давления. Тот факт, что уравнения (2.19.18) не включают тангенциальную координату, означает, что анализ пограничного слоя, выполненный для цилиндра, с таким же успехом приложим к любой вертикальной границе произвольного поперечного сечения, если  $x$  и  $a\theta$  заменяются соответственно координатами по нормали и вдоль окружности.

Граничные условия при  $r = a$ ,  $x = 0$ , имеющие вид  $\tilde{u} + u_I = S(\theta, \mathbf{z})$ ,  $\tilde{v} + v_I = 0$ , после подстановки записываются следующим образом:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - \frac{E}{2} \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial x^3} = -\frac{1}{a} \frac{\partial p_I}{\partial \theta} - 2S(\theta, \mathbf{z}) \quad (2.19.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = -\frac{\partial p_I}{\partial r}. \quad (2.19.20)$$

Кроме того, на этой поверхности  $\tilde{w} = 0$ .  
Остальные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w} &\cong \frac{1}{4} E^{1/2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} \quad \text{при } \mathbf{z} = 0, \\ \tilde{w} &\cong -\frac{1}{4} E^{1/2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} \quad \text{при } \mathbf{z} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.19.21)$$

Для решения этой краевой задачи используются методы, предложенные Стюартсоном [248]. Сначала определяются все разделяющиеся решения вида

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w} &= Ae^{-\gamma x} \sin(az + b), \\ \tilde{p} &= Be^{-\gamma x} \cos(az + b). \end{aligned} \right\} \quad (2.19.22)$$

Из уравнений движения следует, что

$$a = \frac{E\gamma^3}{2}. \quad (2.19.23)$$

Одновременно, согласно граничным условиям,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{E\gamma^3}{2} + b \right) &\cong \frac{E^{1/2}\gamma}{2}, \\ \operatorname{tg} b &\cong -\frac{E^{1/2}\gamma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19.24)$$

Значения  $\gamma$ , удовлетворяющие этим трансцендентным соотношениям, во всех случаях, за исключением одного ( $\gamma \doteq E^{-1/4}$ ), пропорциональны  $E^{-1/2}$ . В этих случаях модель соответствует пограничному слою толщиной  $E^{1/2}$  и здесь

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{n1} = \gamma_n &= \left( \frac{2n\pi}{E} \right)^{1/2}, & \gamma_{n2} &= \gamma_n e^{i\pi/4}, \\ \gamma_{n3} &= \gamma_n e^{-i\pi/4} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (2.19.25)$$

причем  $a_{n1} = n\pi$ ;  $a_{n2} = a_{n3} = -n\pi$ . Для этих значений  $\gamma$  фаза оказывается отрицательной. Другой корень трансцендентного уравнения связан со слоем толщиной  $E^{1/4}$  и имеет вид

$$\gamma_0 = 2^{1/2} E^{-1/4}, \quad (2.19.26)$$

причем

$$a_0 = 2^{1/2} E^{1/4} \text{ и } b_0 = -2^{-1/2} E^{1/4}.$$

Следовательно, общее решение может быть записано так:

$$\tilde{w} = 2^{1/2} E^{1/4} A_0(\theta) \left( z - \frac{1}{2} \right) \exp \left( -2^{1/2} E^{-1/4} x \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{n1}(\theta) e^{-\gamma_{n1}x} + A_{n2}(\theta) e^{-\gamma_{n2}x} + A_{n3}(\theta) e^{-\gamma_{n3}x} \right] \sin(n\pi z), \quad (2.19.27)$$

$$\tilde{p} = -2^{1/2} E^{1/4} A_0(\theta) \exp \left( -2^{1/2} E^{-1/4} x \right) +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{A_{n1}(\theta)}{\gamma_{n1}} e^{-\gamma_{n1}x} + \frac{A_{n2}(\theta)}{\gamma_{n2}} e^{-\gamma_{n2}x} + \frac{A_{n3}(\theta)}{\gamma_{n3}} e^{-\gamma_{n3}x} \right] \cos(n\pi z). \quad (2.19.28)$$

Неизвестные коэффициенты, которые являются функциями  $\theta$ , определяются из граничных условий; например, из (2.19.20) следует, что

$$A_0(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial p_I}{\partial r}, \quad (2.19.29)$$

$$A_{n1}(\theta) - A_{n2}(\theta) - A_{n3}(\theta) = 0. \quad (2.19.30)$$

Таким образом,  $-A_0(\theta)$  является внутренней азимутальной составляющей скорости на стенке.

Использование условия  $\tilde{w} = 0$  на  $x = 0$  приводит к следующему выражению:

$$A_{n1}(\theta) + A_{n2}(\theta) + A_{n3}(\theta) = 2^{1/2} E^{1/4} \left( \frac{1 + \cos n\pi}{n\pi} \right) A_0(\theta), \quad (2.19.31)$$

а на основании остальных граничных условий, приведенных в (2.19.19), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{2^{1/2} E^{1/4}}{a} \frac{dA_0}{d\theta} + 2E^{1/2} A_0 &= 2 \langle S(\theta, z) \rangle + \frac{1}{a} \frac{\partial p_I}{\partial \theta}, \\ -\frac{1}{\gamma_{n1}} \left( \frac{1}{a} \frac{dA_{n1}}{d\theta} + n\pi A_{n1} \right) + \frac{1}{\gamma_{n2}} \left( \frac{1}{a} \frac{dA_{n2}}{d\theta} - \right. \\ &\quad \left. - n\pi A_{n2} \right) + \frac{1}{\gamma_{n3}} \left( \frac{1}{a} \frac{dA_{n3}}{d\theta} - n\pi A_{n3} \right) = \\ &= -2 \int_0^1 S(\theta, z) \cos n\pi z dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.19.32)$$

Точные формулы для коэффициентов, которые представляют собой решения периодических по  $\theta$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, находятся сравнительно просто. Однако более важно получить *граничное условие для внутреннего течения*, для чего нужно исключить  $A_0(\theta)$  из всех уравнений, начиная с (2.19.29) и кончая первым уравнением [см. в (2.19.32)]. Это дает

$$\frac{2^{1/2} E^{1/4}}{a} \frac{\partial^2 p_I}{\partial r \partial \theta} + E^{1/2} \frac{\partial p_I}{\partial r} + \frac{1}{a} \frac{\partial p_I}{\partial \theta} = -2 \langle S \rangle \quad (2.19.33)$$

при  $r = a$ . После интегрирования этого выражения по периметру цилиндра первый и третий члены пропадают и мы имеем

$$E^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_I}{\partial r} d\theta = -2 \int_0^{2\pi} \langle S \rangle d\theta. \quad (2.19.34)$$

Правая часть этой формулы пропорциональна *суммарному* стоку массы с этой поверхности, и поэтому для того, чтобы внутреннее течение имело единичный порядок, условие (2.19.10) необходимо заменить следующим:

$$\int_0^{2\pi} \langle S \rangle d\theta = O(E^{1/2}).$$

Левая часть уравнения (2.19.34) пропорциональна циркуляции относительно цилиндра и, действительно,

$$\Gamma = -E^{-1/2} a \int_0^{2\pi} \langle S \rangle d\theta. \quad (2.19.35)$$

Эту формулу можно сразу же обобщить на случай произвольного поперечного сечения (2.19.5).

Пока ограничения (2.19.10) остаются в силе, условие (2.19.33) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{a} \frac{\partial p_{\Gamma}}{\partial \theta} = -2 \langle S \rangle. \quad (2.19.36)$$

Это соотношение служит граничным условием для нормальной составляющей внутренней скорости при  $r = a$  и, очевидно, оно зависит только от характера осредненного по высоте распределения источников на стенке. Условие (2.19.4) является обобщением этой формулы.

Уравнение (2.19.36) записано с точностью до членов порядка  $O(E^{1/4})$  и лучшим приближением этого уравнения было бы

$$\frac{1}{a} \frac{\partial p_{\Gamma}}{\partial \theta} = -2 \left[ \langle S \rangle - \int_0^{2\pi} \langle S \rangle d\theta \right]. \quad (2.19.37)$$

Вертикальные пограничные слои приспособливают течение, вызванное произвольным стоком жидкости со стенок, к осредненному по глубине течению, соответствующему внутреннему потенциальному полю. Это означает, что любой средний перенос массы имеет место только в пределах пограничных слоев. Вертикальные слои перемещают половину среднего потока жидкости, вытекающего из любого вертикального цилиндра, в экмановские слои на горизонтальных граничных плоскостях. Что касается внутреннего течения, то влияние границ здесь такое же, как при распределении двухмерных жидких диполей и более высоких мультиполей.

Монопольный характер распределения источников на вертикальном цилиндре полностью трансформируется под влиянием примыкающих к нему слоев сдвига. В результате формируется внутренняя циркуляция, которая имеет вид потенциального вихря. Под влиянием силы Кориолиса положительный источник создает относительную циркуляцию отрицательного знака; сток вызывает положительную циркуляцию. (Фактически подобное воздействие на внутреннее течение можно было бы получить заменой соответствующего потока с источниками и стоками на внешней стенке резервуара таким же течением на неподвижном внутреннем цилиндре. См. обсуждение в конце раздела 2.17.)

Эти результаты приложимы к любым внутренним цилиндрам, а также и к внешней границе, если вместо  $x$  принять  $a_0 - r$  и произвести надлежащее изменение знака. Модификация носит весьма тривиальный характер.

Исследование функций пограничного слоя, соответствующих общему распределению источников  $S = O(1)$ , показывает, что в слое толщиной  $E^{1/3}$

$$\tilde{u} = O(1), \quad \tilde{v} = O(E^{-1/3}), \quad \tilde{w} = O(E^{-1/3}), \quad \tilde{p} = O(1),$$

тогда как в  $E^{1/4}$ -слое

$$\tilde{u} = O(E^{1/4}), \quad \tilde{v} = O(1), \quad \tilde{w} = O(E^{1/4}), \quad \tilde{p} = O(E^{1/4}).$$

Во внутреннем слое может наблюдаться значительная обратная циркуляция, интенсивность которой показывает, что в этой области, по-видимому, существенную роль играют нелинейные взаимодействия.

В качестве весьма важного иллюстративного примера рассмотрим область, состоящую из концентрических цилиндров (см. рис. 2.19 а), в которой на внутренней (внешней) границе помещен *однородный* источник (сток) жидкости. В соответствии с условием, ограничивающим суммарный перенос массы, пусть

$$S_1 = -\frac{ME^{1/2}}{2\pi a_1}$$

на внутреннем цилиндре  $r = a_1$ ; тогда из (2.19.9) следует, что

$$S_0 = -\frac{ME^{1/2}}{2\pi a_0} \quad \text{при } r = a_0.$$

Поле внутреннего давления для членов низшего порядка находится в результате решения уравнения (2.19.3), удовлетворяющего условиям (2.19.34) и (2.19.36). Именно,

$$\nabla^2 p_I = 0,$$

причем

$$\frac{\partial p_I}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } r = a_0 \text{ и } r = a_1,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial p_I}{\partial r} d\theta = -\frac{2M}{a_1} \quad \text{при } r = a_1.$$

В такой симметричной области давление может быть функцией только радиальной координаты, так что

$$p_I = c \ln(r). \quad (2.19.38)$$

Константа определяется по известной циркуляции около внутреннего цилиндра, откуда

$$c = -\frac{M}{\pi}.$$

Первоначальная внутренняя скорость ориентирована строго по окружности

$$u_I = 0, \quad v_I = -\frac{M}{2\pi r}, \quad w_I = 0. \quad (2.19.39)$$

Потенциальное течение создается *отрицательно* направленным вихрем мощностью  $-M/2\pi$ , который располагается в центре внутреннего цилиндра.

Структура пограничного слоя при  $r = a_1$  рассчитывается обычным образом, в результате получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{w} = & \frac{E^{1/4} M}{2^{1/2} \pi a_1} \left( z - \frac{1}{2} \right) \exp \left[ -2^{1/2} E^{-1/4} (r - a_1) \right] + \\ & + \frac{E^{1/4} M}{2^{1/2} \pi^2 a_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi z}{n} \left\{ e^{-\gamma_{2n} (r - a_1)} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_{2n} (r - a_1)} F_n \right\}, \end{aligned} \quad (2.19.40)$$

где  $F_n = \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{2n} (r - a_1) \right) + \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{2n} (r - a_1) - \frac{\pi}{3} \right)$ ;

$$\begin{aligned} \tilde{p} = & - \frac{E^{1/4} M}{2^{1/2} \pi a_1} \exp \left[ -2^{1/2} E^{-1/4} (r - a_1) \right] - \\ & - \frac{E^{1/4} M}{2^{1/2} \pi^2 a_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi z}{n \gamma_{2n}} \left\{ e^{-\gamma_{2n} (r - a_1)} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_{2n} (r - a_1)} G_n \right\}, \end{aligned} \quad (2.19.41)$$

причем

$$G_n = \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{2n} (r - a_1) \right) + \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{2n} (r - a_1) + \frac{\pi}{3} \right),$$

где

$$\gamma_{2n} = \left( \frac{4n\pi}{E} \right)^{1/3}.$$

С помощью этих формул можно рассчитать структуру слоев на внешнем цилиндре, если заменить  $M$  на  $-M$  и  $r - a_1$  на  $a_0 - r$ .

Величины, связанные со слоем толщиной  $E^{1/3}$ , равны

$$\tilde{u} = O(E^{1/3}), \quad \tilde{v} = O(E^{1/4}), \quad \tilde{w} = O(E^{1/4}), \quad \tilde{p} = O(E^{7/12}).$$

Появление множителя  $E^{1/3}$  свидетельствует о том, что последовательное разложение можно было бы выполнить по этому параметру (см. стр. 103 [8, 96, 136]).

Экспериментальное подтверждение основных теоретических результатов недавно было получено Хайдом [109]. Кольцеобразные течения описанного типа также изучались Левелленом [142] для существенно нелинейных условий и Кэрриером [35] для сжимаемой среды.

Стоммал, Аронс и Фоллер [257] и Фоллер [61] исследовали течения, вызываемые источниками и стоками в круговом резервуаре, нижняя поверхность которого является частью параболоида. Общая глубина здесь задается формулой

$$h = \left( 1 + b \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right),$$

так что замкнутых геострофических контуров не существует. Топография жестко регулирует невязкие течения, потому что жидкость вынуждена проходить через контуры постоянной глубины. Следова-

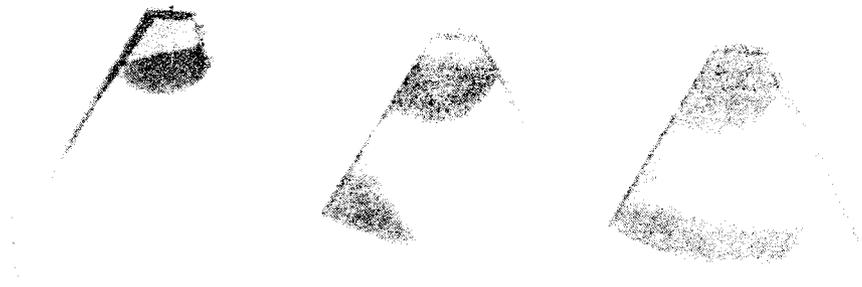


Рис. 2.20. Течение с источником и стоком в круговом сосуде с параболическим основанием [257]. В этой конфигурации нет замкнутых геострофических контуров и перенос массы осуществляется посредством западного пограничного слоя.

тельно, основное геострофическое течение появиться не может, и характер течения заметно отличается от того, который только что изучался. «Западный» пограничный слой, показанный на рис. 2.20, теперь представляет собой существенную часть циркуляции и действует как главный переносчик массы от источника к стоку.



Рис. 2.21. Эффекты конвекции, возникающей во вращающейся жидкости благодаря поднимающимся вверх пузырькам. Они возрастают к основанию пластины, где образуется «смерч» [275].

Аналогичная, но более простая задача подробно рассматривается в следующем разделе. Большое сходство между этими лабораторными потоками и океаническими течениями и циркуляциями анализируется в главе 5.

Тернер [275] смоделировал конвекцию в облаках, вводя во вращающийся резервуар поднимающиеся кверху плавучие пузырьки (рис. 2.21). Эффект пузырьков можно сравнить с тем, который создается маленьким диском, вращающимся с небольшим превышением скорости в точке выхода пузырьков. Оба устройства вызывают появление вторичной циркуляции, одно — с помощью поднимающихся вверх пузырьков, другое посредством конвергенции в экмановском слое. В каж-

дом случае небольшой поток формирует столбчатое движение, которое отделяется от основной массы жидкости вертикальными слоями сдвига. Тернер хотел показать, что за счет тэйлоровского механизма конвекция может создавать сильный поверхностный эффект (смерч) на большом удалении от основания.

Течение, подобное тому, которое описывается в разделе 1.1 и показано на рис. 1.2 б, было проанализировано Якобсом [126]. Он рассмотрел тонкую структуру многочисленных слоев сдвига, отделяющих столб Тэйлора — Праудмена от остальной жидкости. По-видимому, это была первая работа, в которой выполнен учет зависимости структуры слоя от азимутального угла.

Появление свободных слоев сдвига часто может служить отличительной чертой нелинейных течений; характеристики их устойчивости могут иметь некоторое значение для геофизики. Эксперименты Малкуса (с. 167) показывают существование слоев сдвига в том случае, когда сфера вращается и медленно прецессирует. По-видимому, они возникают вследствие нелинейного волнового взаимодействия, однако, поскольку это является предметом исследования следующей главы, обсуждение будет продолжено там.

## 2.20. «Ветровая» циркуляция

В разделе 2.17 мы начали обсуждение вынужденного движения во вращающемся усеченном цилиндре [201], которое может быть закончено только после того, как будет выяснена сущность боковых пограничных слоев. Напомним, что движение создавалось вращением верхнего горизонтального диска, скорость которого лишь слегка отличалась от скорости остального резервуара. Так как основание цилиндра было наклонено на угол  $\alpha$ , то контуры постоянной глубины были незамкнутыми, и внутреннее течение было очень ограниченным, скорость его имела порядок  $O(E^{1/2})$  по сравнению с единичным порядком величины разности скоростей между различными частями граничной поверхности. Скорость во внутренней области, описываемая (2.17.13), имеет вид

$$\mathbf{q} = E^{1/2} \left[ \frac{X(y)}{\sin \alpha} \hat{\mathbf{i}} + \operatorname{ctg} \alpha \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \right]. \quad (2.20.1)$$

Определение неизвестной функции будет дано в этом разделе.

Спинал в этой области (см. раздел 2.16) связан с образованием волн Россби, и весь процесс имеет удивительное сходство с явлениями, обнаруженными при изучении океанических циркуляций на  $\beta$ -плоскости (см. раздел 5.5). Это сходство не является случайным, и позже будет дано сравнение результатов, полученных с помощью этих простых моделей, с данными различных океанографических теорий. Здесь необходимо отметить также, что изменение глубины усеченного цилиндра играет ту же самую роль, что и широтное изменение силы Кориолиса в океанографии (т. е. ее касательной составляющей к поверхности Земли). Именно это и составляет самую основу

аналогии. В обсуждаемой задаче течение, создаваемое вращающимся диском, эффективно моделирует океаническую циркуляцию, возбуждаемую касательным напряжением ветра. Далее будет рассмотрен характер результирующего потока и показана его тесная связь с геофизическими течениями.

С математической точки зрения задача требует определения бокового пограничного слоя, который сращивается с рассмотренным выше внутренним течением. Вновь ограничимся случаем

$$1 \gg \alpha \gg E^{1/2}.$$

Последовательность проведения анализа была уже описана в разделе 2.19.

В пределах бокового слоя цилиндрические составляющие скорости ( $u, v, w$ ) с высокой степенью точности удовлетворяют уравнениям (2.19.13)–(2.19.16) (где вместо прежнего значения  $x$  принять  $x = a - r$ ).

Граничные условия при  $x = 0$  представим в виде

$$u = v = w = 0,$$

при  $x \rightarrow \infty$  (внутренний режим) — в виде

$$\left. \begin{aligned} u &\rightarrow \frac{E^{1/2}}{\alpha} \{X(a \sin \theta) \cos \theta + \sin \theta\}, \\ v &\rightarrow \frac{E^{1/2}}{\alpha} \{-X(a \sin \theta) \sin \theta + \cos \theta\}, \\ w &\rightarrow E^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20.2)$$

Соответствующие условия за пределами экмановских слоев, которые образуются на верхнем и нижнем основаниях  $z = 1$ ,  $z = \alpha \sin \theta$ , находятся из общей формулы (2.17.3) при  $U_T = r\theta$  и  $U_B = 0$ . Они имеют вид соответственно

$$\left. \begin{aligned} w &= E^{1/2} + \frac{1}{2} E^{1/2} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right], \\ -w + \alpha v \cos \theta + \alpha u \sin \theta &= \frac{E^{1/2}}{2} \times \\ &\times \left[ \alpha \sin \theta \left( \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (u + v) \right) - \alpha \cos \theta \times \right. \\ &\left. \times \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (v - u) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u + v + \alpha w \sin \theta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.20.3)$$

Здесь, как и раньше, оставлены только доминирующие производные.

Очевидно, внутренняя скорость имеет порядок  $O(E^{1/2})$ , и в этом случае не нужно вводить пограничный слой толщиной  $E^{1/4}$ , назначение которого в том, чтобы устранить сдвиговый разрыв. Пограничный слой толщиной  $E^{1/2}$  один может удовлетворить требованиям переноса

массы, и уравнения сразу же масштабируются с помощью следующей замены переменных:

$$(u, v, w, p, x) = \gamma (E^{1/2} u_I + E^{1/2} \tilde{U}, E^{1/2} v_I + E^{1/2} \tilde{V}, E^{1/2} w_I + E^{1/2} \tilde{W}, p_I + E^{1/2} \tilde{P}, E^{1/3} \xi),$$

где нижний индекс «I» указывает на то, что значение внутренней функции берется на стенке ( $r = a$ ). Полная краевая задача для возмущений, обусловленных эффектом пограничного слоя  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$  и т. д., имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -2\tilde{V} &= \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi}, \\ 2\tilde{U} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \xi^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2}, \\ -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.20.4).$$

где

$$\tilde{W} = 0 \text{ при } z = 1;$$

$$-\tilde{W} + \alpha \tilde{V} \cos \theta = 0 \text{ при } z = a \alpha \sin \theta; \quad (2.20.5)$$

$$\tilde{W} = \tilde{V} = 0 \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \xi = \infty;$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{\alpha} (X (\alpha \sin \theta) \cos \theta + \sin \theta) \text{ при } \xi = 0; \quad (2.20.6)$$

$$\tilde{U} = 0 \text{ при } \xi = \infty.$$

Если исключить горизонтальную составляющую скорости и положить  $\xi = z - 1$ , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\partial^4 \tilde{P}}{\partial \xi^4} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.20.7)$$

Разделяющиеся решения могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{W} &= Ce^{-m\xi} \sin \frac{m^3}{2} \xi, \\ \tilde{P} &= -\frac{2}{m} Ce^{-m\xi} \cos \frac{m^3}{2} \xi, \end{aligned} \right\} \quad (2.20.8)$$

где собственные значения являются решениями уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{m^3}{2} = \alpha \cos \theta. \quad (2.20.9)$$

Корни этого уравнения при  $Re\ m > 0$  равны

$$m \cong |2\alpha \cos \theta|^{1/3} \text{ при } \cos \theta > 0;$$

$$m \cong |2\alpha \cos \theta|^{1/3} \left( \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \text{ при } \cos \theta < 0;$$

$$m \cong (2n\pi)^{1/3} \left( 1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right),$$

когда

$$m^3 \cong \pm 2n\pi.$$

Необходимо отметить, что среди корней, близких к нулю, когда  $\cos \theta < 0$ , имеют место два корня, и один, когда  $\cos \theta > 0$ . Вследствие этого, как будет показано ниже, пограничный слой образуется только на той части боковой стенки, для которой  $\cos \theta < 0$ . Отсюда

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Общее решение для малых  $\alpha$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & \alpha C_{01} \xi \cos \theta S(\cos \theta) \exp[-|2\alpha \cos \theta|^{1/3} \zeta] + \\ & + \{\alpha C_{02} \xi \cos \theta \exp[-|2\alpha \cos \theta|^{1/3} e^{i\pi/3} \zeta] + \\ & + \alpha C_{03} \xi \cos \theta \exp[-|2\alpha \cos \theta|^{1/3} e^{-i\pi/3} \zeta]\} S(-\cos \theta) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_{n1} \exp[-(2n\pi)^{1/3} \zeta] - C_{n2} \exp[-(2n\pi)^{1/3} e^{i\pi/3} \zeta] - \\ & - C_{n3} \exp[-(2n\pi)^{1/3} e^{-i\pi/3} \zeta]\} \sin n\pi \xi \end{aligned} \quad (2.20.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P} = & - \frac{2C_{01}}{|2\alpha \cos \theta|^{1/3}} S(\cos \theta) \exp[-|2\alpha \cos \theta|^{1/3} \zeta] - \\ & - \frac{2}{|2\alpha \cos \theta|^{1/3}} \{C_{02} e^{-i\pi/3} \exp[-|2\alpha \cos \theta|^{1/3} e^{i\pi/3} \zeta] + \\ & + C_{03} e^{i\pi/3} \exp[-|2\alpha \cos \theta|^{1/3} e^{-i\pi/3} \zeta]\} S(-\cos \theta) - \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{C_{n1}}{(2n\pi)^{1/3}} \exp[-(2n\pi)^{1/3} \zeta] + \frac{C_{n2}}{(2n\pi)^{1/3}} \times \right. \\ & \times e^{-i\pi/3} \exp[-(2n\pi)^{1/3} e^{i\pi/3} \zeta] + \\ & \left. + \frac{C_{n3}}{(2n\pi)^{1/3}} e^{i\pi/3} \exp[-(2n\pi)^{1/3} e^{-i\pi/3} \zeta] \right\} \cos n\pi \xi. \end{aligned} \quad (2.20.11)$$

Здесь коэффициенты, которые являются функциями  $\theta$ , определяются из граничных условий. Например, условие  $\tilde{V} = 0$  при  $\xi = 0$  требует, чтобы

$$C_{01} = 0 \text{ для } \cos \theta > 0, \quad C_{02} + C_{03} = 0 \text{ для } \cos \theta < 0,$$

$$C_{n1} + C_{n2} + C_{n3} = 0.$$

Поскольку  $\tilde{W} = 0$  при  $\zeta = 0$ , к предыдущему соотношению может быть добавлено еще одно

$$C_{n1} - C_{n2} - C_{n3} = 0.$$

Отсюда

$$C_{01} = 0, \quad C_{02} + C_{03} = 0,$$

$$C_{n1} = 0, \quad C_{n2} + C_{n3} = 0.$$

Эти формулы могут применяться при всех  $\theta$  из-за присутствия в (2.20.10) и (2.20.11) мультипликативных ступенчатых функций. Последнее граничное условие при  $\zeta = 0$

$$\tilde{U} = -\frac{1}{\alpha} (X(a \sin \theta) \cos \theta + \sin \theta) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \tilde{P}}{\partial \zeta^3}$$

приводит к дифференциальным уравнениям

$$\frac{dC_{n2}}{d\theta} + n\alpha C_{n2} = 0, \quad (2.20.12)$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{C_{02}}{|2\alpha \cos \theta|^{1/3}} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} |2\alpha \cos \theta|^{2/3} C_{02} \right\} S(-\cos \theta) = i\tilde{U}. \quad (2.20.13)$$

Первое из них означает, что

$$C_{n2}(\theta) \equiv 0 \quad (n \geq 1), \quad (2.20.14)$$

поскольку все функции должны быть периодическими по  $\theta$ . Для  $\cos \theta > 0$  левая часть уравнения (2.20.13) равна тождественно нулю. Следовательно, в этом случае  $\tilde{U}$  также должно исчезнуть и отсюда следует, что

$$X(a \sin \theta) = -\frac{\sin \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

или

$$X(y) = -\frac{y}{(a^2 - y^2)^{1/2}}. \quad (2.20.15)$$

Таким образом, неизвестная функция  $X(y)$  определяется из условия, что при  $\cos \theta > 0$  на боковой поверхности не существует пограничного слоя. Кроме того, при  $\cos \theta < 0$

$$\tilde{U} = -\frac{2}{\alpha} \sin \theta \quad (2.20.16)$$

и уравнение (2.20.13) может быть непосредственно проинтегрировано. Если пренебречь членами порядка  $O(\alpha)$ , то

$$\frac{C_{02}}{|2\alpha \cos \theta|^{1/3}} = \frac{2\alpha i \cos \theta}{\alpha \sqrt{3}}. \quad (2.20.17)$$

Здесь произвольная постоянная определяется из условия равенства потока, обусловленного меридиональным пограничным слоем  $\int_0^\infty \tilde{V} d\zeta$ , внутреннему переносу жидкости через любой диаметр.

Тогда все коэффициенты определяются с точностью до  $O(\alpha)$ , и решение для давления в пограничном слое примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{P} = & \operatorname{Im} \left\{ \frac{8a}{\alpha \sqrt{3}} \cos \theta \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \times \right. \\ & \left. \times \exp \left[ -|2\alpha \cos \theta|^{1/2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \zeta \right] \right\} S(-\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.20.18)$$

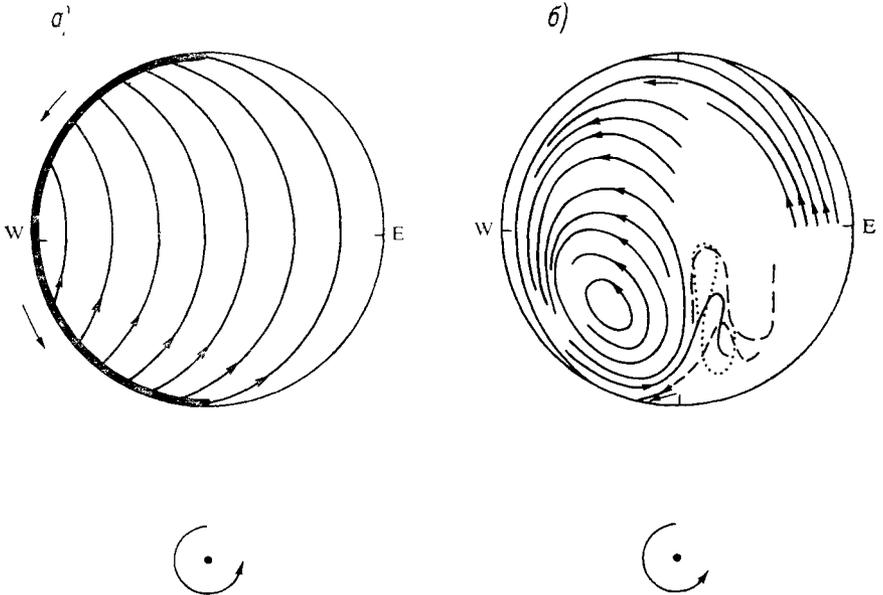


Рис. 2.22. *a* — теоретически рассчитанная циркуляция в усеченном цилиндре, вызванная вращающимся диском; *b* — пример наблюдаемой циркуляции.

Невязкое внутреннее течение, для которого давление является функцией тока, описывается следующим выражением:

$$p = \frac{2}{\alpha} E^{1/2} [x - (a^2 - y^2)^{1/2}], \quad (2.20.19)$$

а вертикальная скорость равна  $w = E^{1/2}$ . Основное течение образует горизонтальную циркуляцию порядка  $E^{1/2}/\alpha$ , которая замыкается через западный пограничный слой. Слабое вертикальное движение является частью вторичной циркуляции, поддерживающей экмановский слой, структура которого может быть определена при анализе членов более высокого порядка по  $\alpha$ . Теоретическое решение иллюстрируется на рис. 2.22 *a*.

Эксперименты, выполненные Р. Бердслеем в Массачусетском технологическом институте, подтверждают основные теоретические выводы, касающиеся местоположения пограничного слоя, его размеров и возникновения внутреннего течения. Однако в этих экспе-

риментах наблюдаются очень интересные нелинейные эффекты (см. рис. 2.22 б) и появляется неустойчивость в форме меандрирующей «струи», текущей из пограничного слоя по направлению к полюсу. Рисунок 2.23 показывает это явление в различные моменты времени, подробное описание рисунка приводится на стр. 227. Трудно удержаться, чтобы не сравнить это явление с отделением Гольфстрима у мыса Хаттерас, которое также может быть вызвано изменением топографии дна.

В действительности критерий, определяющий отделение океанических течений и предложенный в [92] (см. стр. 226), с таким же успехом применим и к лабораторным моделям. Эта аналогия с некоторыми планетарными движениями будет обсуждаться также в главе 5.

## 2.21. Некоторые эффекты стратификации

Устойчивая стратификация приводит к появлению двух новых процессов, каждый из которых вызывает исчезновение явлений, свойственных однородным вращающимся жидкостям. Действительно, при наличии достаточно большого градиента плотности могут исчезнуть все хорошо знакомые особенности: экмановские слои, двумерные движения, вертикальные слои сдвига и вторичные циркуляции.

Сила плавучести препятствует вертикальным движениям, и это означает весьма существенное уменьшение влияния экмановских

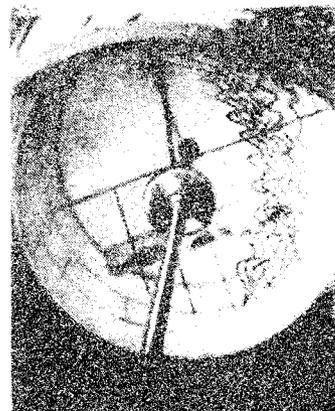
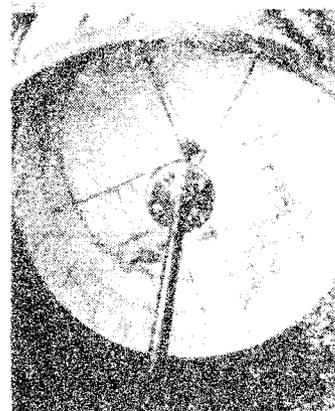
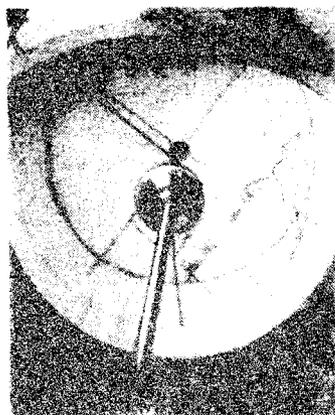


Рис. 2.23. Окрашенные прожилки на различной глубине указывают на развитие «меандр» в три момента времени (а—с).

слоев. Тенденция вязких слоев создавать вторичную циркуляцию нейтрализуется за счет уклона в направлении горизонтальных течений, возникающего в гравитационном поле. Вследствие этого механизм образования вихревых линий становится частично или полностью неэффективным и вязкая диффузия вновь оказывается доминирующим процессом. В этом случае временной масштаб диффузии  $E^{-1}\Omega^{-1}$  может характеризовать нестационарное течение в такой же степени, как и время спинаца для однородных жидкостей  $E^{1/2}\Omega^{-1}$ . И, наконец, из-за того, что появляются новые возможности для возникновения возмущений, столбчатое движение не может перемещаться по горизонтали вдоль поверхностей постоянной плотности.

Безусловно, класс движений, при описании которых вращение учитывается одновременно со стратификацией, имеет свои отличительные черты. Поэтому настоящий раздел посвящается краткому изучению некоторых весьма сложных взаимодействий, развивающихся в движениях этого класса.

Для наших ограниченных целей достаточно рассмотреть следствие из простой линейной теории для стационарных течений, сформулированной в разделе 1.4. Если стратификация является устойчивой и  $\epsilon = 0$ ,  $F_R = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $T_e = z$ , а  $\Omega$  вертикальный вектор, то безразмерные уравнения (1.4.16)–(1.4.19) могут быть представлены в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (2.21.1)$$

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla p + T\hat{\mathbf{k}} + E\nabla^2 \mathbf{q}, \quad (2.21.2)$$

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{Ef_R^i}{\sigma_p} \nabla^2 T, \quad (2.21.3)$$

где  $\mathbf{q}$  и  $T$  заданы на поверхности резервуара.

В случае, когда число Прандтля очень мало  $\sigma_p \ll E$  (или  $f_R$  велико), диффузия тепла преобладает над термической конвекцией, и тогда последнее уравнение переписется так:

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.21.4)$$

В этом частном случае температура определяется независимо от поля скорости. Кроме того, если  $T = 0$  на  $\Sigma$ , то температура тождественно равна нулю во всей среде и течение жидкости совершенно не зависит от равновесного поля плотности. С другой стороны, если тепловые процессы в этой предельной ситуации действительно изменяют распределение скоростей, то происходящие изменения не являются ни существенными, ни всеобъемлющими. Эта задача может быть также решена введением вязких пограничных слоев и невязкой внутренней области. Например, применение оператора вихря к (2.21.2) дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla T$$

(оно представляет собой уравнение «термического ветра» в метеорологии) и, в частности,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, поле плотности не изменяет вертикальную скорость, создаваемую за счет подсоса в экмановском слое, и растяжение вихревых линий остается основным явлением в вязкой области. Однако горизонтальные составляющие скорости больше не подчиняются теореме Тэйлора — Праудмена и пространственное изменение определяется наложенным полем температуры.

Решение любой задачи с учетом этих параметров ищется так же, как и в случае однородных жидкостей. В качестве примера рассмотрим движение во вращающемся цилиндрическом резервуаре с осесимметричными граничными условиями для скорости и температуры:  $\mathbf{q} = U = r\hat{\theta}$  при  $z = 0$ ;  $\mathbf{q} = 0$  всюду;  $T = T_T$  при  $z = 1$ ;  $T = T_B$  при  $z = 0$  и  $T = T_L$  при  $r = a$ . Температура  $T(r, z)$  определяется первой и поэтому может предполагаться известной. Вязкие пограничные слои на горизонтальных основаниях  $z = 0, 1$  являются обычными экмановскими слоями, и нормальный поток порядка  $O(E^{1/2})$  рассчитывается из (2.17.2) стандартным образом. Отсюда следует, что основная скорость во внутренней области направлена вдоль окружности круга, причем

$$v_\theta(r, z) = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \int_0^z \frac{\partial T}{\partial r} dz - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial r} dz. \quad (2.21.5)$$

Подробное описание поля скорости несколько отличается от решения для однородной жидкости (первый член справа), однако основные механизмы остаются прежними.

Мы можем заключить вслед за Кэрриером [33], что, когда диффузия преобладает над конвекцией, результирующее течение похоже на течение однородной жидкости.

В другом крайнем случае  $\sigma_p \gg 1$  (или  $f_R \ll 1$ ) уравнение (2.21.3) сводится к

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q} \equiv 0. \quad (2.21.6)$$

В этом случае в стратифицированной среде не существует *никаких* вертикальных движений, и все движение ограничено горизонтальными слоями. В этих условиях при описании стационарных течений не требуется вводить вязких слоев ни на вертикальных, ни на горизонтальных поверхностях, так как вязкость играет существенную роль во всей жидкости. Кроме того, в этом случае необходимо отказаться от граничных условий для  $T$ , поскольку отсутствует диффузия тепла. Тогда сформулированная выше задача об осесимметричном движении в цилиндре становится следующей:

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v = 0, \quad (2.21.7)$$

где  $v = 0$  при  $r = a$  и  $z = 1$ ;  $v = r$  при  $z = 0$ . Другие переменные задаются следующим образом:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 2v, \quad T = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Полное решение легко находится, оно записывается в виде

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\xi_{n1}} \frac{J_1\left(\xi_{n1} \frac{r}{a}\right)}{J_2(\xi_{n1})} \frac{\sin h\left((1-z) \frac{\xi_{n1}}{a}\right)}{\sin h\left(\frac{\xi_{n1}}{a}\right)}. \quad (2.21.8)$$

Частное решение для области, состоящей из двух концентрических бесконечных дисков, имеет вид

$$v = r(1-z). \quad (2.21.9)$$

Отсюда видно, что азимутальная скорость меняется непрерывно с высотой. Влияние вращающегося основания целиком поглощается за счет перераспределения полей плотности и скорости при переходе из одного состояния равновесия в другое. Напряжение трения убывает вследствие горизонтальной полосчатости жидкости, а скорость подчиняется условию геострофического баланса. При прочих равных условиях это течение имеет много общего с течением однородной жидкости и совпадает с ним, когда конвекция преобладает над диффузией [26].

Стационарные линейные течения, для которых  $\sigma_p \doteq 1$ ,  $f_R \doteq 1$  (как было показано Барсилоном и Педлоки [9], очень тесно связаны с течением в экстремальном случае  $\sigma_p \gg 1$ . В этом случае из уравнения (2.21.3) немедленно следует:  $w = O(E)$ . Это означает, что экмановские слои играют второстепенную и пассивную роль. Без вертикальной скорости порядка  $E^{1/2}$  не может существовать эффективное растяжение вихревых линий, и жидкость теряет один из своих самых действенных способов контроля над течениями.

Уравнение для давления может быть записано в виде

$$\nabla^2 \left( \frac{E^2 f_R}{\sigma_p} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 p + \nabla^2 p + \left( \frac{4f_R}{\sigma_p} - 1 \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2.21.10)$$

Из него можно получить все приведенные ранее варианты этого уравнения, а также определить структуру пограничных слоев на горизонтальных и вертикальных поверхностях при помощи подходящего выбора масштабов на каждой стенке. Если в окрестности  $z = 0$  ввести растянутую координату, так что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = E^{-a} \frac{\partial}{\partial z},$$

то отсюда следует, что  $a = 1/2$ , т. е. на этой плоскости может возникнуть пограничный слой толщиной  $E^{1/2}$ . Более важным является заключение о том, что указанное значение толщины характерно для всех пограничных слоев, в том числе и на вертикальной стенке. Вертикальные слои сдвига толщиной  $E^{1/3}$  и  $E^{1/4}$  не могут существо-

вать в жидкости с такими свойствами. Для того чтобы диффузия изменила плотность частицы жидкости, которая поднимается или опускается вдоль боковой поверхности, необходимо ввести более тонкий слой толщиной  $E^{1/2}$ .

Рассмотрим следующую задачу о течении внутри цилиндра (такая конфигурация использовалась в работе Барсилона и Педлоски [9]). Для определенности примем следующие граничные условия:  $\mathbf{q} = U_B = g\hat{\mathbf{t}}$  на  $z = 0$ ,  $\mathbf{q} = 0$  всюду и произвольное распределение температуры на всей поверхности. Предполагается (и это требуется доказать), что течение состоит из пограничных слоев и невязкой внутренней области. Чтобы найти эквивалентные граничные условия для внутреннего течения, которое представляет основной интерес, исследуем сперва вязкие слои.

Пусть

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + E^{1/2}\mathbf{q}_1 + \dots + \tilde{\mathbf{q}}_0 + \dots$$

и аналогично для давления ( $p = \varphi_0 + \dots$ ) и температуры. Подстановка этих рядов в (2.21.1)–(2.21.3) приводит к последовательности задач для течения в различных областях.

Функция  $\varphi_0$ , соответствующая первому члену ряда для давления, удовлетворяет усеченному уравнению (2.21.10)

$$\nabla^2 \left( \nabla^2 \varphi_0 + \left( 4 \frac{f_R}{\sigma_P} - 1 \right) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2.21.11)$$

После того как  $\varphi_0$  получена, скорость и температура определяются из

$$\mathbf{q}_0 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \varphi_0, \quad (2.21.12)$$

$$T_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}. \quad (2.21.13)$$

В соответствии с (2.21.3) в пределах горизонтального пограничного слоя  $\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} = 0$  (здесь  $\xi = E^{-1/2}z$  вблизи плоскости  $z = 0$ ). Следовательно,  $\tilde{T}_0 \equiv 0$ ; в пограничном слое в нулевом приближении изменения температуры отсутствуют, а температура внутри области

должна удовлетворять заданному граничному условию  $T_0 = T_B$ .

В этом приближении горизонтальный вязкий слой представляет собой обычный экмановский пограничный слой, и для него справедливы все полученные ранее результаты. Следовательно, нормальный поток при  $z = 0$ , как это следует из (2.17.2), имеет вид

$$w_1 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times [\hat{\mathbf{k}} \times (\mathbf{q}_0 - U_B) + \mathbf{q}_0 - U_B],$$

тогда как при  $z = 1$   $w_1 = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_0)$ . Однако внутренняя вертикальная скорость имеет порядок  $O(E)$  [см. (2.21.3)], так что

$$w_1 = 0, \quad (2.21.14)$$

значит, оба экмановских слоя (верхний и нижний) бездивергентны. Эти условия, записанные в терминах внутреннего давления, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla)^2) \varphi_0 = \tilde{\nabla}^2 \varphi_0 = 2\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{U}_B = 4 \text{ при } z = 0, \\ \tilde{\nabla}^2 \varphi_0 \text{ при } z = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.21.15)$$

Кроме того, условия для температуры эквивалентны следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = T_B(r, \theta) \text{ при } z = 0, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = T_T(r, \theta) \text{ при } z = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.21.16)$$

Таким образом, на каждом основании имеется по два условия, т. е. как раз столько, сколько требуется для решения бигармонического уравнения (2.21.11).

Чтобы завершить постановку краевой задачи, необходимо найти два независимых условия на боковой стенке  $r = a$ . Для этого обратимся к анализу вертикального пограничного слоя, используя растянутую координату  $\zeta = E^{-1/2}(a - r)$ . Легко показать, что в этом слое

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{v}_0 = 0, \quad \tilde{\varphi}_0 = 0 \quad (2.21.17)$$

и

$$-\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} = 0, \quad (2.21.18)$$

$$2\tilde{u}_1 = \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial \zeta^2}, \quad (2.21.19)$$

$$0 = \tilde{T}_0 + \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial \zeta^2}, \quad (2.21.20)$$

$$0 = \frac{\sigma_P}{f_R} \tilde{w}_0 - \frac{\partial^2 \tilde{T}_0}{\partial \zeta^2}. \quad (2.21.21)$$

Последние два уравнения имеют точно такую же структуру, как и уравнения для экмановского слоя; интегрируя их, с учетом условия  $\tilde{w}_0 = 0$  при  $\zeta = 0$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}_0 = A(\theta, z) \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_P}{4f_R} \right)^{1/4} \zeta \right] \sin \left( \frac{\sigma_P}{4f_R} \right)^{1/4} \zeta, \\ \tilde{T}_0 = \left( \frac{\sigma_P}{f_R} \right)^{1/2} A(\theta, z) \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_P}{4f_R} \right)^{1/4} \zeta \right] \cos \left( \frac{\sigma_P}{4f_R} \right)^{1/4} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2.21.22)$$

Составляющие  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{v}_1$  определяются затем путем интегрирования (2.21.18) и (2.21.19).

Функцию  $A(\theta, z)$  нельзя полностью определить без анализа детальной структуры потока в угловых зонах  $|r - a| < E^{1/2}$ ,  $|z| < E^{1/2}$  и  $|z - 1| < E^{1/2}$ , где вертикальный и горизонтальный слой частично перекрываются. (Эти зоны не представляют интереса при анализе движения однородной жидкости, так как вертикальные слои здесь много шире, чем  $E^{1/2}$ . В этом случае условия на граничных плоскостях остаются теми же, которые были получены при исследовании экмановского слоя (2.13.3).) Однако оказывается, что есть возможность получить всю необходимую информацию для окончательного решения внутренней задачи относительно  $\varphi_0$ .

Граничные условия для составляющих скорости вместе с (2.21.12) означают, что

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = 0 \quad \text{на } r = a. \quad (2.21.23)$$

Граничные условия для температуры имеют вид

$$\left(\frac{\sigma_p}{f_R}\right)^{1/2} A(\theta, z) = T_L(\theta, z) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}. \quad (2.21.24)$$

В результате интегрирования уравнения неразрывности (2.21.18) в пределах бокового пограничного слоя получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} \tilde{w}_0 d\xi = u_1(a, \theta, z),$$

напомним, что  $u_1 + \tilde{u}_1 = 0$  при  $r = a$ . Поскольку

$$u_1 = -\frac{1}{2r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta},$$

то отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \tilde{w}_0 d\xi = c, \quad (2.21.25)$$

В односвязной цилиндрической области (т. е. когда  $r = a$  является единственной вертикальной стенкой) суммарный вертикальный перенос масс должен равняться нулю, и в этом случае  $c = 0$ . После подстановки  $\tilde{w}_0$  из (2.21.22) имеем

$$\int_0^{2\pi} A(\theta, z) d\theta = 0.$$

Функцию  $A(\theta, z)$  теперь можно исключить из (2.21.24) и тогда

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_L(\theta, z) d\theta \quad \text{при } r = a. \quad (2.21.26)$$

(Заметим, что в соответствии с (2.21.23)  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} = 0$ .) *Только осредненная по горизонтали температура стенки влияет на внутреннее течение.* Кроме того, осредненная температура боковой стенки связывает значения давлений на двух основаниях цилиндра

$$\varphi_0(a, 1) - \varphi_0(a, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} T_L(\theta, z) d\theta.$$

Таким образом, полная постановка краевой задачи для  $\varphi_0$  включает уравнения (2.21.11) с граничными условиями (2.21.15), (2.21.16), (2.21.23) и (2.21.26). Найти решение этой системы довольно трудно, и в этом отношении практически полезными могут оказаться приближенные методы, развитые для аналогичных задач в теории упругости. Не будем предпринимать попыток решить какую-либо практическую задачу и закончим это обсуждение некоторыми общими соображениями о движении стратифицированных жидкостей.

В многосвязной области (см. рис. 2.18) константы, появляющиеся подобно тем, которые входят в (2.21.25), определяются по данным о циркуляциях около отдельных вертикальных стенок. Это похоже на ситуацию, которая встречается в задачах массопереноса (см. раздел 2.20).

В нестационарных течениях растяжение вихревых линий вновь становится существенным, однако при наличии стратификации оно намного слабее. Холтон [118] изучил явление спинапа в стратифицированной жидкости как теоретически, так и экспериментально. Он нашел, что жидкость адаптируется к квазиоднородному распределению в течение обычного времени спинапа, однако окончательный переход к состоянию твердого вращения достигается благодаря диффузии за более длительный промежуток времени  $E^{-1}\Omega^{-1}$ . Педлоски [200] также рассмотрел эту задачу, и между указанными авторами существует некоторое разногласие, касающееся случая непрерывной стратификации.

Задача о спинапе многослойной однородной жидкости отличается от соответствующей задачи для одного слоя только количественно. Механизм движения в пределах каждого слоя остается тем же самым, однако слои скользят друг по другу. Это приводит к увеличению характерного времени развития процесса, порядок которого, однако, остается равным  $E^{-1/2}\Omega^{-1}$ .

Нельзя не обратить внимания на анализ устойчивости как стационарных, так и нестационарных течений стратифицированной жидкости. Образование экмановских слоев на начальных стадиях развития нестационарного течения может сопровождаться большими перемещениями частиц первоначально вдоль стенки резервуара. Поскольку масштаб времени развития таких течений является слишком коротким, чтобы диффузионные процессы смогли заметно изменить плотность, то элемент жидкости может оказаться в неустойчивом состоянии неустойчивости. Частицы жидкости, более тяжелые, чем окружающие, будут погружаться. Поэтому в неста-

ционарных течениях наблюдается перемешивание. В стационарных вынужденных течениях неустойчивость может создаваться таким же образом. Точное условие, которое может быть использовано для предсказания образования и интенсивности перемешивания, до сих пор не установлено.

Рассмотренная здесь теория предполагает, что доминирующими процессами, определяющими формирование стационарных течений в стратифицированной жидкости, являются диффузия и динамические процессы порядка  $O(E)$ . Поскольку  $E$  мало, а вязкий сдвиг в значительной мере нейтрализуется стратификацией, то, естественно, возникает вопрос о значимости тех процессов, которыми мы раньше пренебрегали. Становится необходимым оценить вклады в формирование движения всех тех членов, которые были отброшены при линеаризации, и это приведет к целому ряду неожиданных последствий.

## ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРЕ; НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРИИ

### 3.1. Введение

В этой главе рассматриваются нелинейные процессы во вращающихся течениях. Мы постараемся, насколько это возможно, точно следовать плану предыдущей главы, чтобы облегчить сравнение между линейными и нелинейными решениями сходных задач. Нам хотелось бы здесь изложить достаточно строго и полно все то, что необходимо для расширения наших знаний о нелинейных явлениях. Будем надеяться, что эксперимент и подобие помогут нам выбрать разумные приближения, которые с помощью существующих в настоящее время методов позволят решить по возможности большее число задач. Пока получено очень немного результатов общего характера. В нашем распоряжении имеются всего лишь несколько достаточно детальных и обоснованных решений частных нелинейных задач.

### 3.2. Пограничный слой на бесконечной пластине

Карман [128] нашел точное решение стационарных нелинейных уравнений, которое отчасти аналогично решению для экмановского слоя (см. раздел 2.3). Бедвадт [16], Бэтчелор [40], Стюартсон [246, 249], Тириот [270], Роджерс и Лейнс [144, 225], Пирсон [196], Бентон [13] и другие модифицировали и обобщили эту работу.

В общем случае бесконечная пластина, помещенная в плоскости  $z = 0$ , вращается с угловой скоростью  $\Omega_w \Lambda(t) \hat{\mathbf{k}}$ , ( $|\Lambda(t)| \leq 1$ ) в безграничной среде. Жидкость на большом удалении от пластины вращается с угловой скоростью  $\Omega_f \hat{\mathbf{k}}$ . (Линейная теория предполагает, что две скорости вращения в любой момент времени лишь ненамного отличаются друг от друга.) Если максимальную угловую скорость

$$\Omega_{\max} = \max [\Omega_w, \Omega_f]$$

использовать для выбора масштаба времени, то *безразмерные* уравнения движения в *инерциальной системе* координат [см. (1.2.7) и последующие уравнения] имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} &= -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{q}, \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

Здесь число Россби принято равным единице, характерная скорость равна  $\Omega_{\max} L$ . Граничные условия записываются так:

$$\mathbf{q} = \frac{\Omega_w \Lambda(t)}{\Omega_{\max}} r \hat{\theta} \quad \text{при } z = 0,$$

и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\hat{\theta} \cdot \mathbf{q} - \frac{\Omega_f}{\Omega_{\max}} r) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \hat{r} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Вертикальная составляющая скорости не может быть задана на бесконечности, так как пограничный слой на пластине создает циркуляцию, поддерживающую перенос массы. Влияние этого потока сказывается в пределах всей бесконечной области.

Поскольку течение является осесимметричным, удобно воспользоваться цилиндрической системой координат. В этом случае уравнения могут быть переписаны следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = E \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right), \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + E \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.2.4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.2.5)$$

Автомодельное решение Кармана представляется в виде

$$u = rF(z, t), \quad v = rG(z, t), \quad w = H(z, t) \quad (3.2.6)$$

с

$$p = K(t)r^2 + L(z, t).$$

Подставляя эти выражения в систему (3.2.2)–(3.2.5) и исключая давление, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + 2F \frac{\partial F}{\partial z} - 2G \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( H \frac{\partial F}{\partial z} \right) &= E \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}, \\ \frac{\partial G}{\partial t} + 2FG + H \frac{\partial G}{\partial z} &= E \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ 2F &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

Выбранные функциональные зависимости полностью согласуются с заданными граничными условиями и

$$F(0, t) = 0, \quad G(0, t) = \frac{\Omega_w}{\Omega_{\max}} \Lambda(t), \quad H(0, t) = 0;$$

$$F(\infty, t) = 0, \quad G(\infty, t) = \frac{\Omega_f}{\Omega_{\max}}.$$

Хотя на функции  $F$ ,  $G$  и  $H$  могут налагаться весьма произвольные начальные условия, обычно считается, что движение начинается с состояния покоя или твердого вращения.

Отсутствие определенного характерного масштаба длины в случае бесконечной жидкости, ограниченной одной плоскостью, означает, что в постановке задачи не содержится явно никакого параметра, имеющего размерность длины. Число Экмана  $E$  можно исключить, вводя новые переменные, что по существу идентично введению масштаба пограничного слоя.

Пусть

$$\zeta = E^{-1/2} z, \quad F = F(\zeta, t), \quad G = G(\zeta, t), \quad H = E^{1/2} H(\zeta, t).$$

Исключая из задачи  $F$ , можно свести наши уравнения к следующей системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial \zeta} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right)^2 + G^2 + \frac{1}{2} H \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 H}{\partial \zeta^3} + \left( \frac{\Omega_f}{\Omega_{\max}} \right)^2, \\ \frac{\partial G}{\partial t} + H \frac{\partial G}{\partial \zeta} - G \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

где  $G = \frac{\Omega_w}{\Omega_{\max}} \Lambda = H = \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0$  при  $\zeta = 0$ ,  $G = \frac{\Omega_f}{\Omega_{\max}} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0$  при  $\zeta = \infty$  и  $G(\zeta, 0)$ ,  $H(\zeta, 0)$  — заданы.

Исходная задача Кармана является частным случаем поставленной здесь задачи, соответствующим стационарному движению при  $\Lambda(t) = 1$  и  $\Omega_f = 0$ . В задаче Бедвадта также рассматривается стационарное движение, однако в ней предполагается, что  $\Omega_w = 0$  и  $\Omega_{\max} = \Omega_f$ .

Численное решение задачи Кармана, найденное Кочреном [44], представлено на рис. 3.1. Анализ профилей показывает, что в пограничном слое не имеется никаких колебаний, и в этом отношении полученные профили совершенно не похожи на профили общей стационарной задачи. В действительности, как показали Роджерс и Лэнс [225], которые выполнили численное интегрирование для большого числа параметров, меняющихся в пределах от  $\frac{\Omega_f}{\Omega_w} = 0$  до  $\frac{\Omega_w}{\Omega_f} = 0$ , решение Кармана является *единственным* решением, не осциллирующим в пограничном слое. Для создания таких флуктуаций достаточно задать любое вращение жидкости на бесконечности.

Пирсон [196] и Бентон [13] рассчитывали изменение во времени кармановского решения при  $\Lambda = S(t)$  (импульсный пуск) и нулевых начальных условиях. Результаты Бентона для профиля азимутальной скорости показаны на рис. 3.2. Так же, как и в линейной теории, стационарное течение почти полностью устанавливается за несколько первых оборотов пластины,  $t \doteq 2$ . После завершения начальной стадии применение теории стационарного пограничного слоя доста-

точно хорошо оправдывается, хотя небольшие инерционные колебания продолжают существовать в течение длительного промежутка времени.

Решение Бедвадта показано на рис. 3.3. Существует много различных версий о том, как реализуется это идеализированное движение. Обычно исходят из того, что течение зарождается на бесконечности, а затем только возникает в пограничном слое, чтобы поддерживать течение во внутренней области. Кроме того, на всей пластине элементарный объем жидкости по мере продвижения внутрь

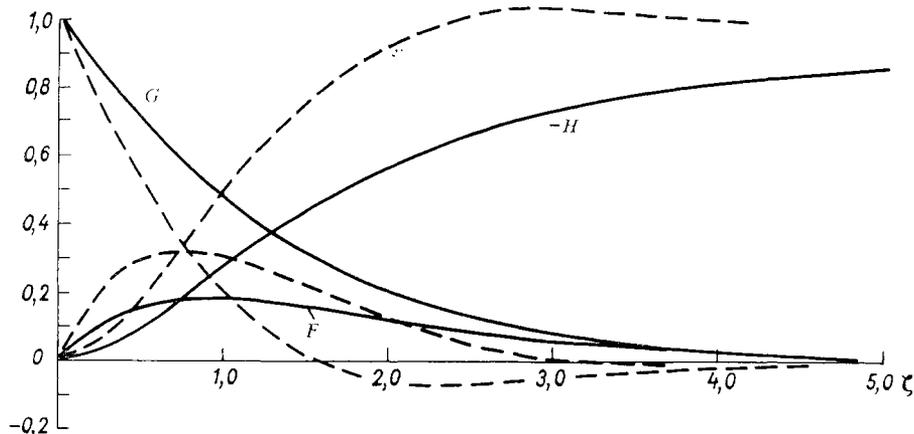


Рис. 3.1. Сплошными кривыми отмечены автомодельные профили скорости в задаче Кармана. Пунктирные кривые построены на основании решения соответствующей линейной задачи (стр. 33).

области должен все меньше зависеть от своего начального состояния и должен полностью подпадать под контроль локального невязкого течения за пределами этого слоя. Трудно допустить, что при этом не происходит отделения пограничного слоя и возникновения неустойчивости.

С аналитической точки зрения решение достаточно обосновано. Исследования аналогичных задач, относящихся к случаю конечных дисков, показывают, что автомодельные профили действительно являются прекрасными приближениями для внутренней части пластины. Выполненный Роттом и Левелленом [234] анализ вопроса о конечном подобии, который основывается на моментно-интегральных методах (раздел 3.6), и вместе с экспериментами Мэксурси [172] не оставляет сомнения в том, что решение Бедвадта может быть использовано для эффективного и точного описания внутренних течений, в том числе, безусловно, для всех линейных задач, которые были подтверждены экспериментально.

До сих пор еще существуют расхождения в вопросе об устойчивости пограничного слоя. Конечно, для решения этого вопроса необходимо выполнить ряд вполне определенных экспериментов. Такие эксперименты сделаны не были, однако можно предположить,

что при некоторых ограничениях (именно, при малых числах Рейнольдса пограничного слоя) последний будет оставаться устойчивым. Результаты, полученные Роджерсом и Лэнсом [225] для общей стационарной задачи, показывают непрерывное изменение профилей

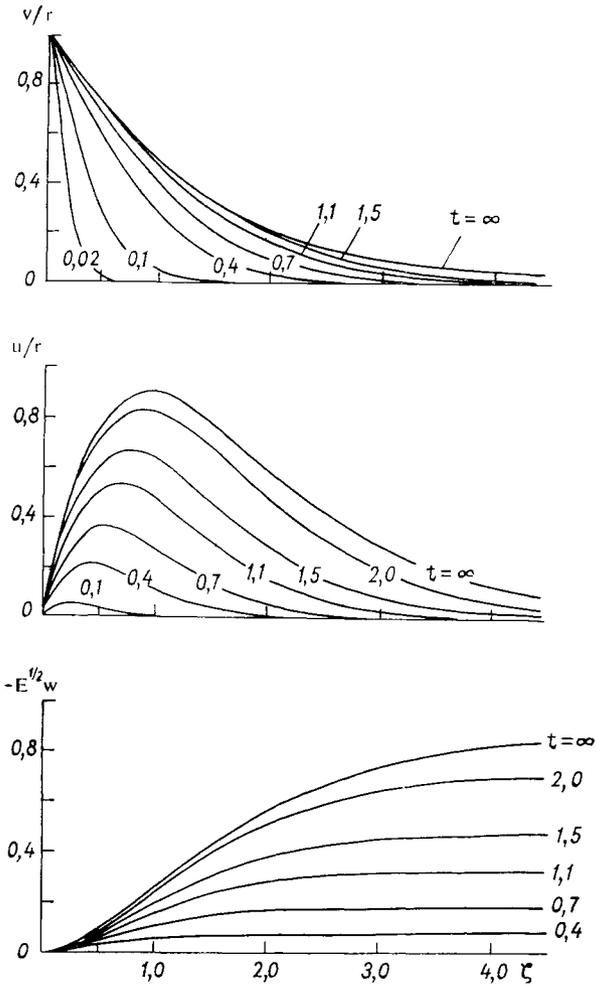


Рис. 3.2. Эволюция во времени решения Кармана [13].

скорости и отношения  $\Omega_f/\Omega_w$ . На рис. 3.4 изображена вертикальная компонента скорости на бесконечности (которая индуцируется за счет массопереноса в пограничном слое), как функция  $\Omega_f/\Omega_w$ . Информация, приведенная на этой диаграмме, может оказаться чрезвычайно полезной при использовании приближенных методов анализа (как в разделе 3.6).

Рис. 3.3. Сплошными кривыми изображены авто-модельные профили скорости в задаче Бедвадта. Пунктирные кривые построены на основании решения соответствующей линейной задачи.

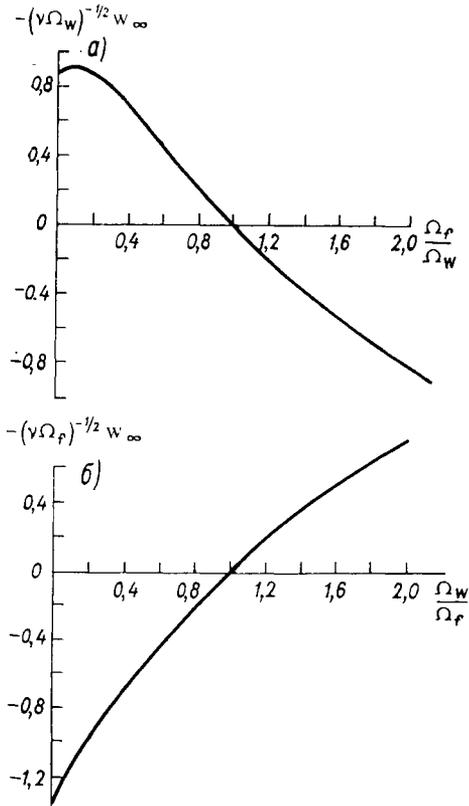
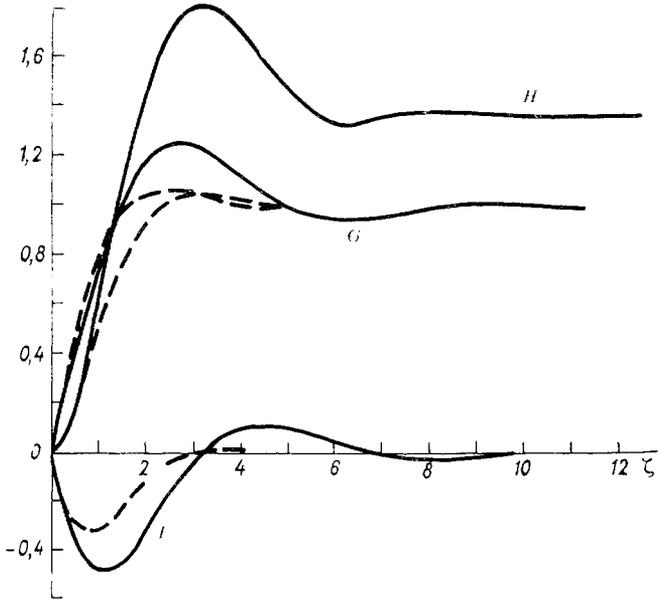


Рис. 3.4. Индуцированная вертикальная скорость, возникающая на плоской пластине как функция скорости вращения стенки  $\Omega_w$  и жидкости вне пограничного слоя  $\Omega_f$  [225].

Необычным в этом численном расчете является то, что перенос вдоль оси не является монотонной функцией  $\Omega_f, \Omega_w$ . Небольшое вращение жидкости на бесконечности фактически увеличивает величину нормального потока. Вполне возможно, что это связано с колебаниями, которые возникают в пограничном слое под влиянием вращения жидкости на бесконечности. Однако причины этого явления не выяснены.

### 3.3. Пограничный слой на конечной пластине

Рано или поздно встает вопрос о приложимости и связи автомоделльных решений с реальными течениями. В каких случаях и для каких граничных условий эти решения будут представлять адекватные и надежные приближения? Этот и следующий разделы посвящены ответам на эти вопросы.

Чтобы выяснить границы применимости решения Бедвадта, Роджерс и Лэнс [226] исследовали пограничный слой во вращающейся жидкости над неподвижным конечным диском. Их метод заключается в численном расчете достаточно большого числа членов ряда, полученного Стюартсоном [249]. Это разложение несправедливо в окрестности внешнего края диска и потому адекватно описывает течение при малых значениях радиуса  $r$ , скажем, при  $r = 1/2$ . Это представление решения в виде ряда затем сравнивается с автомоделльным решением для бесконечной пластины, которое предполагается справедливым, по крайней мере, в окрестности центра диска. Эти два решения должны, очевидно, совпадать и фактически так оно и есть. В действительности решение Бедвадта является хорошим приближением для внутренней половины диска. Отсюда следует, что течение внутри пограничного слоя в центральной области существенно зависит от локального невязкого потока и совершенно «забывает» об условиях на крае диска.

Исследуемая область состоит из наполненного жидкостью полубесконечного цилиндра радиуса  $a$ , вращающегося со скоростью  $\Omega_f$  и находящегося на неподвижном диске. Вдали от диска жидкость вращается вместе с боковой стенкой цилиндра как твердое тело, и градиент давления здесь в точности уравновешен центробежной силой. Поток вблизи диска ограничен вязким пограничным слоем, и решение нелинейных уравнений пограничного слоя должно быть достаточно точным на большей части основания, за исключением непосредственной окрестности углов. Можно ожидать, что здесь радиальные сдвиговые члены становятся весьма существенными, однако в первом приближении ими обычно пренебрегают. Поэтому оказывается, что уравнения пограничного слоя, которые содержат только вертикальные производные, предполагают существование бесконечной осевой скорости на внешнем радиусе, хотя другие компоненты скорости остаются здесь конечными. Эту сингулярность можно было бы устранить введением пограничного слоя на боковой стенке, однако наиболее вероятно, что общее влияние этой сингуляр-

ности на течение в окрестности центра диска будет мало и с этой точки зрения ее устранение на самом деле не заслуживает внимания.

Приближенные *безразмерные* уравнения пограничного слоя в инерциальной системе координат в соответствии с разделом 1.6 имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -r + E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.3.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = E \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0. \quad (3.3.3)$$

Давление остается существенно постоянным во всем слое и равно его значению на бесконечности; радиус  $a$  и скорость  $\Omega_i a$  являются характерными масштабами. Граничные условия записываются так:

$$\begin{aligned} u = v = w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \\ u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow r \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad 0 \leq r < 1 \end{aligned}$$

и

$$u = 0, \quad v = 1 \quad \text{при } r = 1 \quad \text{для всех } z.$$

Введение функции тока

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

облегчает решение задачи.

В методе разложения, предложенном Стюарсоном, вводятся переменные

$$x = 1 - r, \quad y = E^{-1/2} z x^{-1/4} \quad (3.3.4)$$

и ряды

$$\psi = E^{1/2} x^{3/4} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) x^n, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(y) x^n. \quad (3.3.5)$$

После подстановки этих разложений в (3.3.1)–(3.3.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  получается бесконечная последовательность задач для неизвестных функций. Первая из них имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 \psi_0}{dy^3} - \frac{3}{4} \psi_0 \frac{d^2 \psi_0}{dy^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi_0}{dy} \right)^2 &= 1 - V_0^2, \\ \frac{d^2 V_0}{dy^2} - \frac{3}{4} \psi_0 \frac{dV_0}{dy} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.6)$$

причем

$$V_0(0) = \psi_0(0) = \frac{d}{dy} \psi_0(0) = 0 \quad \text{и}$$

$$V_0(\infty) - 1 = \frac{d}{dy} \psi_0(\infty) = 0.$$

Численные решения этих уравнений сравниваются затем с решением Бедвадта. Результаты такого сравнения скорости как функции расстояния вдоль радиуса в точке  $z = E^{1/2}$ , соответствующей внешней границе пограничного слоя, показаны на рис. 3.5. Из этого рисунка видно, что кривые, по-видимому, соединяются в точке  $r = 1/2$ . На рис. 3.6 приводится сравнение профилей скорости в зависимости от осевой координаты  $zE^{-1/2}$  в точке  $r = 1/2$ . Совпадение получается достаточно хорошим.

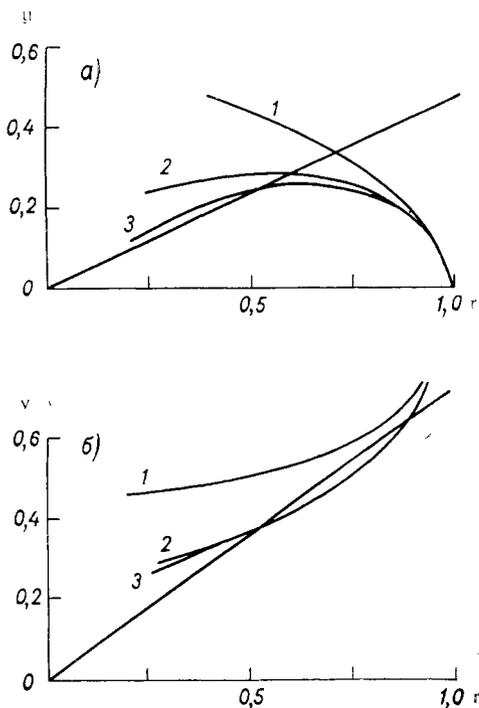


Рис. 3.5. а — радиальная скорость при  $\zeta = 1$  для конечного диска, вращающегося в неподвижной жидкости [226]; кривые 1, 2 и 3 характеризуют влияние увеличения числа членов разложения (3.3.5); б — азимутальная скорость при  $\zeta = 1$  для той же задачи.

Можно предположить, что решения систем уравнений, содержащих члены более высокого порядка (имеется в виду включение членов третьего порядка), сделали бы это совпадение еще лучшим, однако появление обратной циркуляции может вызвать некоторые затруднения. Осевая скорость здесь не показана, потому что, несмотря на качественное согласие, подобие тем не менее не является точным по указанным выше причинам. Эти результаты показывают, что автомодельное решение оказывается достаточно точным в области  $r < 1/2$ . Аналогичное заключение было сделано Кингом и Левелленом [131] на основе решения, полученного с помощью моментно-интегрального метода. Метод сращиваемых разложений, соединяющий решения, представленные в

виде рядов, справедлив только для малых  $r$ , а для  $1 - r$  остается не обоснованным. Обсуждение этого приближенного решения можно найти у Ротта и Левеллена [234].

Не намного труднее решить более общую задачу, в которой основание также может вращаться. Особый интерес представляет случай, когда диск и боковые стенки вращаются в противоположном направлении. Хотя уравнения (3.2.8), по-видимому, остаются справедливыми и в этом случае, никакого приемлемого автомодельного решения для одной бесконечной пластины в неограниченной жидкости найти не удалось. Расчеты, основанные на использовании разложения вблизи края конечной пластины, указывают, что противоположно

вращающаяся пластина задерживает начало отсоса жидкости из пограничного слоя. Например, когда  $\Omega_w = 0$ ,  $\gamma = 0,84$  является точкой, в которой осевая скорость меняет знак, и пограничный слой начинает выделять жидкость во внутреннюю область. Однако при  $\Omega_w = -0,9\Omega_f$  соответствующее значение  $\gamma$  равно 0,66. Кроме того,

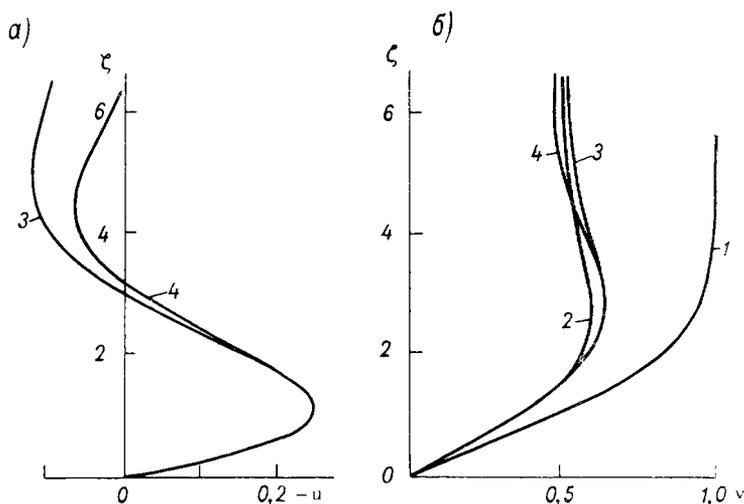


Рис. 3.6. а — изменение радиальной скорости при  $\gamma = 1/2$  в зависимости от координаты пограничного слоя; б — азимутальная скорость при  $\gamma = 1/2$ .

Цифры означают число членов разложения, 4 — автомодельное решение.

по-видимому, существует область около центра, где жидкость вращается в том же самом направлении быстрее, чем диск. В аналогичной ситуации такая же картина течения была получена Пирсоном [196] (см. следующий раздел). Следует отметить, что приведенные результаты во многих отношениях являются неполными. Чтобы их улучшить и сделать абсолютно надежными, необходимы дальнейшие исследования.

### 3.4. Течение между concentрическими пластинами

Течение между бесконечными concentрическими пластинами впервые было исследовано Бэтчелором [10], позже этим вопросом занимались Стюартсон [246], Лэнс и Роджерс [141] и Пирсон [196]. Две первые работы представляют собой теоретические исследования, в то время как в двух последних приводятся результаты численного исследования соответственно стационарного и нестационарного течений.

В простейшем случае два диска вращаются с одинаковыми мгновенными угловыми скоростями; для этого и многих других условий

течение может быть описано с помощью автомоделного решения уравнения (3.2.7). Решение этого вида безоговорочно предполагает, что условия на боковой стенке при бесконечном радиусе являются несущественными, вследствие чего имеет значение только локальное соотношение между внутренним течением и вязкими пограничными слоями. Конечно, возможность использования таких автомоделных решений в случае конечных дисков должна быть очень тщательно исследована, а границы их применимости реально определены.

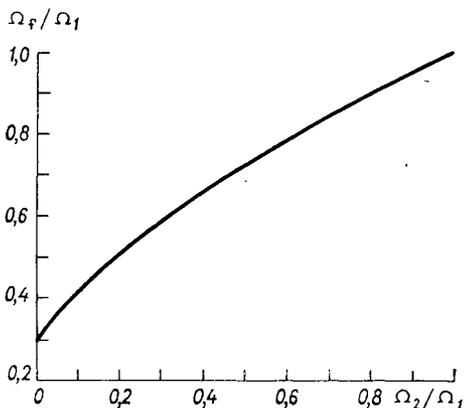


Рис. 3.7. Две concentрические пластины вращаются с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Угловая скорость заключенной между ними жидкости равна  $\Omega_f$ . Вертикальный перенос массы, создаваемый пограничными слоями, точно сбалансирован [225].

Когда пластины все время вращаются в одном направлении и число Экмана мало, поле течения состоит из пограничного слоя на каждой пластине и внутренней области, которая вращается как твердое тело с промежуточной скоростью, определяемой потоком. Для того чтобы описать течение, вполне достаточно привлечь расчеты Роджерса и Лэнса [225] (см. раздел 3.2).

Пусть скорость вращения одного диска поддерживается постоянной  $\Omega_w = \Omega_1$ , в то время как угловая скорость другого диска может меняться между нулем и  $\Omega_1$ . В этом случае в пограничный слой на

более быстром диске должна поступать жидкость аналогично тому, как это было в задаче Кармана. Кроме того, в соответствии с автомоделным решением Бедвадта на более медленном диске должен наблюдаться отток жидкости. Внутренняя область вращается как твердое тело с точной средней скоростью, при которой локальный отток жидкости из одного пограничного слоя при любом значении радиуса должен быть тождественно равен притоку жидкости в другом пограничном слое. Если обозначить скорость вращения внутренней жидкости через  $\Omega_f$  ( $\Omega_{1r}$  — скорость вращения на «бесконечности» для каждого слоя), то связь между  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_f$ , которая диктуется этим локальным притоком или балансом переноса, можно представить графически (рис. 3.7). Азимутальная скорость во внутренней области изменяется от  $\Omega_{1r}$ , когда две пластины одновременно вращаются как твердое тело, до  $0,3\Omega_{1r}$ , когда одна пластина остается неподвижной. Это решение неявно предполагает, что временная эволюция стационарного течения является такой, что влияние вязкой диффузии, в конце концов, распространяется на всю жидкость. Это условие, без сомнения, справедливо в случае бесконечных пластин и может не выполняться во многих реальных задачах, в которых приток из боковых областей контролируется.

Это решение не применимо в случае противоположно вращающихся дисков, когда наблюдается существенное отклонение от внутреннего режима твердого вращения.

Пирсон [196] численно проинтегрировал нестационарные уравнения (3.2.7) при задании различных граничных условий. При этом предполагалось, что в начальный момент жидкость находится в состоянии покоя. Угловая скорость одной или обеих пластин мгновенно увеличивалась и расчет проводился до тех пор, пока решение

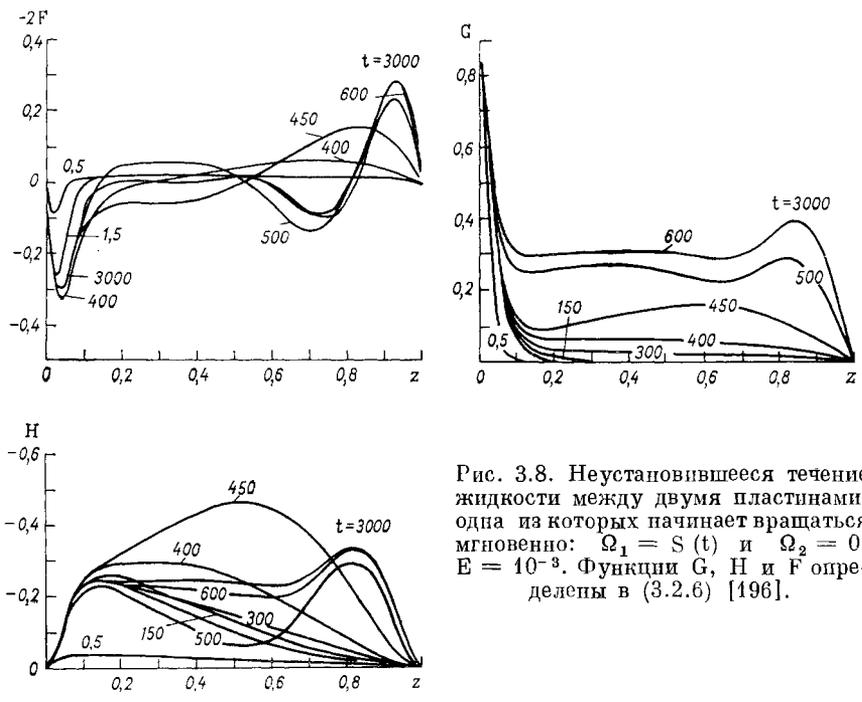


Рис. 3.8. Неустановившееся течение жидкости между двумя пластинами, одна из которых начинает вращаться мгновенно:  $\Omega_1 = S(t)$  и  $\Omega_2 = 0$ ,  $E = 10^{-3}$ . Функции G, H и F определены в (3.2.6) [196].

не выходило на стационарный режим. Стационарное решение, полученное таким образом, во всех рассмотренных случаях, за исключением одного, который мы сейчас кратко обсудим, находится в полном согласии с непосредственным решением стационарных уравнений, полученным Лэнсом и Роджерсом [141].

Один пример численного решения нестационарных уравнений для малого значения числа Экмана  $E = 10^{-3}$  показан на рис. 3.8. В этой задаче  $\Omega_1 = \delta(t)$ ,  $\Omega_2 = 0$ . Особенного внимания заслуживает тот факт, что в этом случае отчетливо проявляются два режима течения. В интервале сначала  $t \approx E^{-1/2}$  ( $5 < t < 150$ ) на поверхности вращающегося диска располагается единственный почти установившийся пограничный слой. В остальной области движение жидкости остается очень слабым и существенно невязким; большая часть жидкости пока еще не захвачена вязкой диффузией. Вихревая диффузия основательно меняет картину течения, когда характерный

масштаб времени составляет  $t \doteq 1000 \doteq E^{-1}$ , т. е. когда влияние вязких процессов распространяется на всю внутреннюю область. К этому времени все жидкие частицы подпадают под контроль вязкости и устанавливается окончательное стационарное состояние, предсказанное на основании расчетов стационарного пограничного слоя.

По-видимому, ясно, что если в реальных условиях вязкая диффузия прямо или посредством обратной циркуляции влияет на

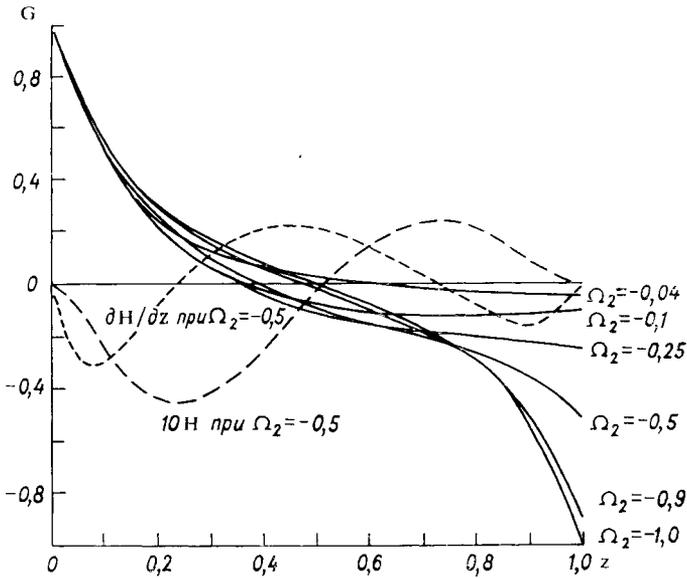


Рис. 3.9. Окончательно установившееся течение между дисками, вращающимися в противоположных направлениях,  $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = -1; -0,9; -0,5; -0,25; -0,1; -0,04; E = 10^{-2}$  [196].

внутреннюю жидкость, то течение должно быть таким же, как только что описанное окончательно установившееся течение. Если, однако, область имеет такую конфигурацию, что на основную массу жидкости вязкость не оказывает никакого влияния, то более правдоподобно течение, которое образуется только за счет пограничного слоя в течение времени спинаца.

Численные результаты для случая противоположно вращающихся дисков показаны на рис. 3.9. Число Экмана, равное здесь  $10^{-2}$ , не слишком малó, и поэтому пограничные слои получались очень широкими. Результаты расчетов для стационарных и нестационарных задач совпадают, когда  $\Omega_2 = -\Omega_1$  и  $E = 10^{-2}$ , однако это не справедливо для меньших значений числа Экмана. Роджерс и Лэнс [225] рассчитали симметричное течение около средней плоскости при  $E = 10^{-3}$ , однако результаты Пирсона свидетельствуют о заметной асимметрии в том случае, когда угловая скорость

внутренней области больше, чем скорость любой из пластин. Причина этого расхождения не ясна, но, по-видимому, может возникнуть специфическая вычислительная неустойчивость, связанная с решением для внутренней области, когда влияние каждой пластины сводится на нет. Поскольку обе пластины равноправны, то начальная регулировка и условия на боковых стенках могут тоже оказывать весьма существенное влияние на установление окончательного состояния.

Граничные условия на боковых стенках, естественно, участвуют в определении того, какое решение имеет место в случае конечных вращающихся дисков. С точки зрения эксперимента большого внимания заслуживают две модели [206, 236, 246]. Первая представляет собой открытое устройство, состоящее из двух отцентрированных дисков равной величины. Один из них остается неподвижным, другой равномерно вращается. Наблюдения показали, что основная часть жидкости или газа, заключенных между дисками, остается, по существу, неподвижной. Движение отмечается только в пограничном слое на вращающемся диске и почти нигде больше. С другой стороны, если диски помещены в хорошо пригнанный цилиндрический резервуар, то имеет место движение внутренней жидкости, которое очень напоминает течение между бесконечными пластинами. Азимутальная скорость в этом случае составляет примерно три десятых скорости вращающейся пластины в большей части центральной области. Экспериментальные результаты, относящиеся к противоположно вращающимся дискам, свидетельствуют об отсутствии циркуляции во внутренней области, следовательно подтверждают численные расчеты Роджерса и Лэнса.

С помощью численных расчетов Пирсона могут быть объяснены различные течения. Пограничный слой на вращающемся диске в открытой или свободной модели действует на бесконечную массу вязкой жидкости, которая непрерывно поступает из неограниченного внешнего резервуара. Частицы, попавшие во внутреннюю область между пластинами, остаются там примерно в течение времени спинапа  $E^{-1/2}$ , прежде чем они будут выброшены центробежными силами из пограничного слоя обратно в резервуар. Таким образом, влияние вязкой диффузии всегда нейтрализуется и никогда не может охватить целиком всю жидкость. Результирующее течение устанавливается непосредственно под воздействием пограничного слоя (профили, показанные на рис. 3.8, соответствуют времени спинапа  $t \approx E^{-1/2}$ ). Основной поток сосредоточен в пограничном слое, течение вне пограничного слоя имеет намного меньший порядок. Однако в случае, когда диски погружены в резервуар, вязкость оказывает влияние на внутреннюю область, так как теперь жидкость ограничена плоскостями и все время подвергаются воздействию одни и те же жидкие частицы. Конечное состояние в этом случае такое же, как в задаче с бесконечными дисками, в которой диффузия играет аналогичную роль.

Когда оба диска в *открытой* модели вращаются (не обязательно с одинаковой частотой), центральная часть внутренней жидкости

также вращается со сравнимой скоростью, однако всюду внутри, за исключением этой части жидкости, сохраняется почти полный покой. Причины этого явления могут заключаться в том, что любое вращение, независимо от того, захватывает ли оно внутренние жидкие частицы или нет, заметно усиливается при приближении к осевой линии вследствие сохранения углового момента.

### 3.5. Сферические границы

Движение, создаваемое быстро вращающимися сферами в безграничной покоящейся жидкости, было изучено Хоуартом [122]. Фокс [69] и Бэнкс [5] рассчитали его решение более подробно; первый автор обобщил метод Хоурта на случай тел различных форм.

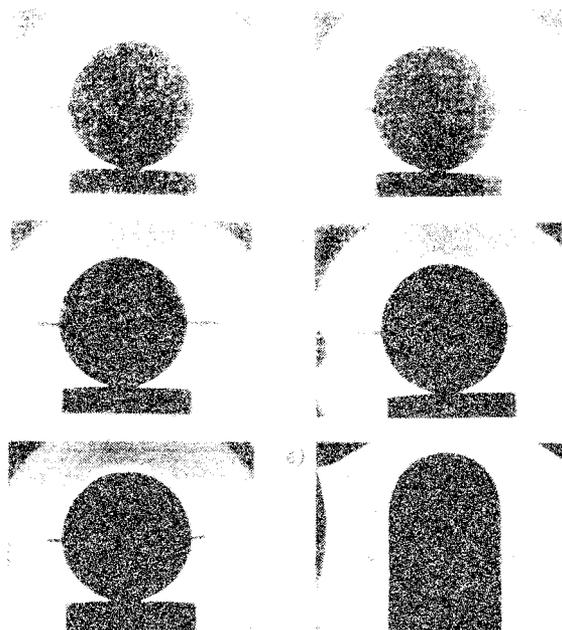


Рис. 3.10. Шлиерен-фотографии [20] пограничного слоя на вращающейся сфере, сделанные Боуденом и Лордом. Четко видна радиальная струя. Она становится короче по мере увеличения скорости от  $6 \text{ м/с}$  (а) до  $18 \text{ м/с}$  (е), возможно, вследствие появления некоторой турбулентности. В случае вращения половины тела, показанного в (е), струя не образуется.

Во многих отношениях характер течения напоминает тот, который устанавливается под влиянием единственной вращающейся пластины; совпадение становится более точным в полярных областях. В этих областях создаются пограничные слои и масса, вовлекаемая в них извне, выталкивается вдоль подстилающей поверхности по направлению к экваториальным широтам. Вблизи экватора потоки, сосре-

доточенные внутри модифицированных пограничных слоев Кармана на обеих полушарах, сталкиваются друг с другом. Их взаимодействие создает радиальную струю жидкости на экваторе, показанную на рис. 3.10 (этот рисунок заимствован из работы Боудена и Лорда [20], см. также [134]). Теоретический анализ движения на экваторе выполнен Стюартсоном [249].

Хотя обычная теория пограничного слоя не способна описать столкновения потоков, но, по-видимому, она чрезвычайно хорошо описывает движение на всей остальной сферической поверхности. Возмущение, создаваемое вблизи экватора, оказывает незначительное влияние на встречающиеся потоки пограничного слоя, если число Экмана мало. Численные решения, которые уже кратко обсуждались, подтверждают это заключение.

Уравнения для установившегося осесимметричного пограничного слоя (безразмерная форма этих уравнений при  $\Omega = 0$  дается в (1.6.3)—(1.6.5)) в сферической системе координат:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\Theta, \theta, r-1),$$

$$(h_1, h_2, h_3) = (1, \sin \Theta, 1),$$

$$(q_1, q_2, q_3) = (u, v, w),$$

записываются следующим образом:

$$\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (u \sin \Theta) + \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (3.5.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \Theta} + w \frac{\partial u}{\partial r} - v^2 \operatorname{ctg} \Theta = E \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (3.5.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial \Theta} + w \frac{\partial v}{\partial r} + uv \operatorname{ctg} \Theta = E \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \quad (3.5.3)$$

Здесь давление вне пограничного слоя считается постоянным и для приведения уравнений к безразмерному виду используются обычные характерные масштабы  $[r_0, \Omega^{-1}, r_0 \Omega]$ .

Метод решения основывается на представлении функций в виде рядов по полярному углу  $\Theta$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= \Theta F_1(\zeta) + \Theta^3 F_3(\zeta) + \dots, \\ v &= \Theta G_1(\zeta) + \Theta^3 G_3(\zeta) + \dots, \\ w &= E^{1/2} [H_1(\zeta) + \Theta^2 H_3(\zeta) + \dots], \end{aligned} \right\} \quad (3.5.4)$$

где

$$\zeta = E^{-1/2} (r-1).$$

В результате подстановки этих рядов в (3.5.1)—(3.5.3) и приравнивания членов с одинаковыми степенями  $\Theta$ , получим для опре-

деления неизвестных функций последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Первая из них имеет вид

$$\left. \begin{aligned} F_1^2 + H_1 \frac{dF_1}{d\xi} - G_1^2 &= \frac{d^2 F_1}{d\xi^2}, \\ 2F_1 G_1 + H_1 \frac{dG_1}{d\xi} &= \frac{d^2 G_1}{d\xi^2}, \\ 2F_1 + \frac{dH_1}{d\xi} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.5)$$

где  $F_1(\infty) = G_1(\infty) = 0$ ,  $F_1(0) = H_1(0) = 0$ ,  $G_1(0) = 1$ .

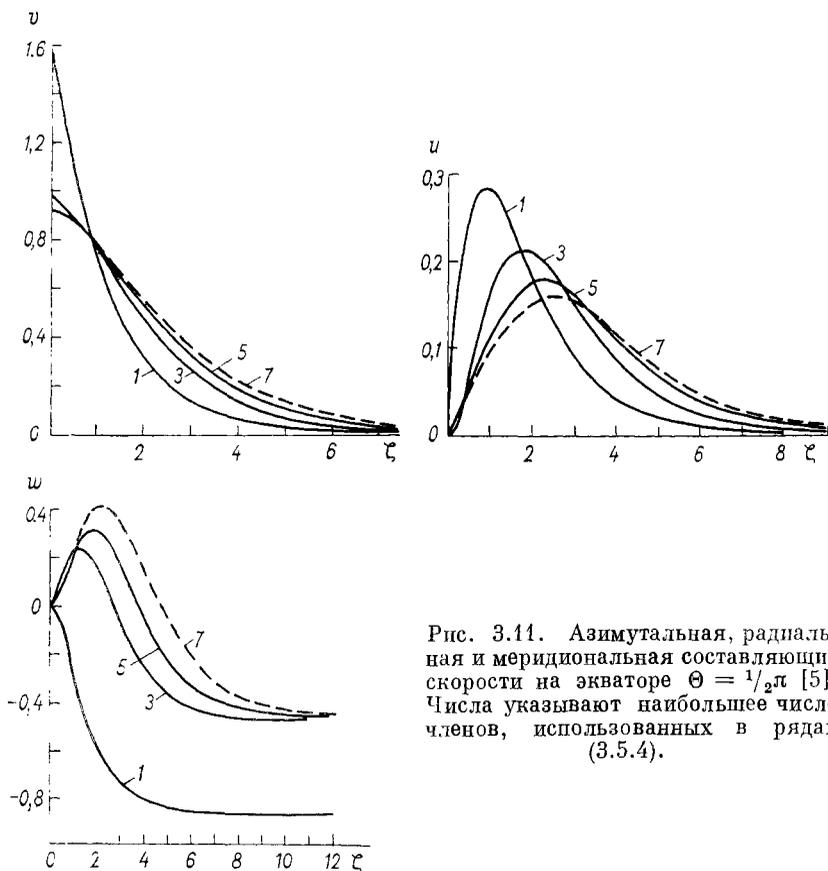


Рис. 3.11. Азимутальная, радиальная и меридиональная составляющие скорости на экваторе  $\Theta = 1/2\pi$  [5]. Числа указывают наибольшее число членов, использованных в рядах (3.5.4).

Семь первых функций каждого ряда были вычислены Фоксом и Бэнксом, и, кажется, численные расчеты свидетельствуют в общем о хорошей сходимости рядов в неэкваториальных широтах. Более того, численные расчеты не указывают ни на отделение, ни на преждевременный отток жидкости из пограничного слоя, как это предсказывал Нигэм [188, 189]. Экваториальные составляющие скорости, полученные Бэнксом, показаны на рис. 3.11. Числа на кривых означают наивысший порядок функций, включенных в расчет.

Линейное движение между концентрическими сферами, впервые изученное Праудменом [209], обсуждалось в предыдущей главе; течение внутри узкого кольцеобразного зазора между сферами будет рассматриваться в главе 5. Здесь мы рассмотрим численные результаты, полученные Пирсоном [197], для нестационарной задачи осесимметричного течения между концентрическими сферами. Сферы

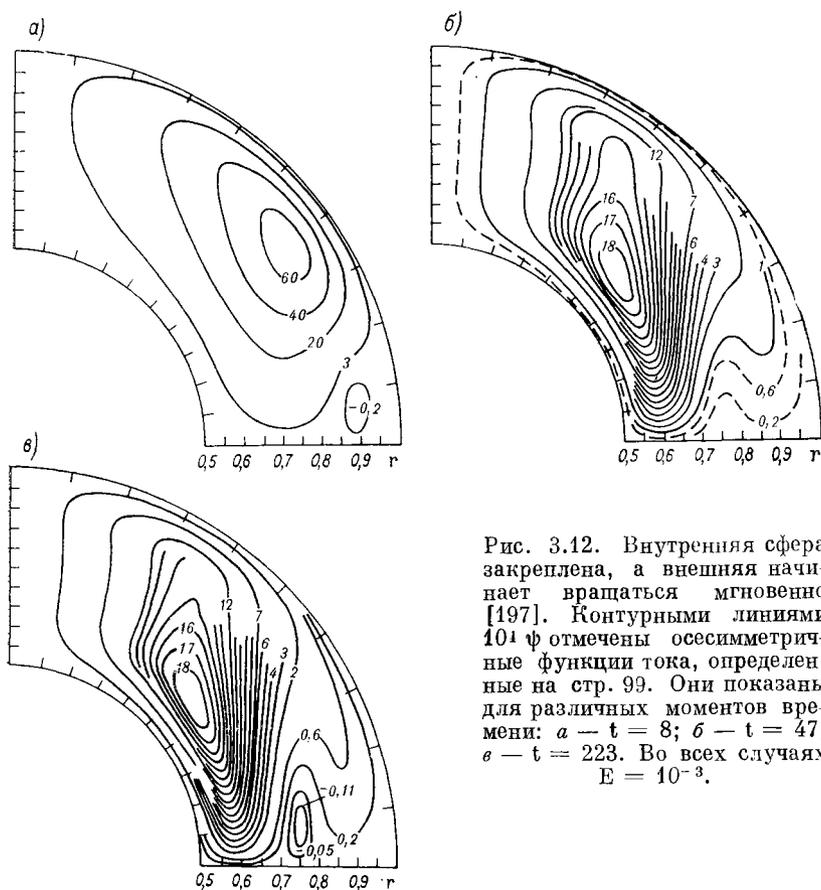


Рис. 3.12. Внутренняя сфера закреплена, а внешняя начинает вращаться мгновенно [197]. Контурными линиями  $10^4 \psi$  отмечены осесимметричные функции тока, определенные на стр. 99. Они показаны для различных моментов времени:  $a - t = 8$ ;  $b - t = 47$ ;  $c - t = 223$ . Во всех случаях  $E = 10^{-3}$ .

вращаются вокруг одной и той же оси, но с разными скоростями. (Узкий кольцеобразный зазор является частным случаем общей задачи, и нет никаких указаний на то, что с ним связаны особые трудности.)

Законченных расчетов в настоящее время настолько мало, что многие выводы невозможно сделать без оценки того, насколько хорошо работает программа. Сейчас мы располагаем некоторыми данными о течении в кольцеобразной области, когда ширина зазора равна радиусу внутренней сферы. В этом примере внутренняя сфера остается неподвижной, тогда как внешняя сфера начинает вращаться

мгновенно. Эволюция движения во времени и окончательная установившаяся циркуляция показаны на рис. 3.12 и 3.13. Совершенно очевидно, что в этом случае происходит образование внутреннего сдвига, а картина течения около полюса напоминает ту, которая наблюдается между концентрическими дисками. Затратив небольшие

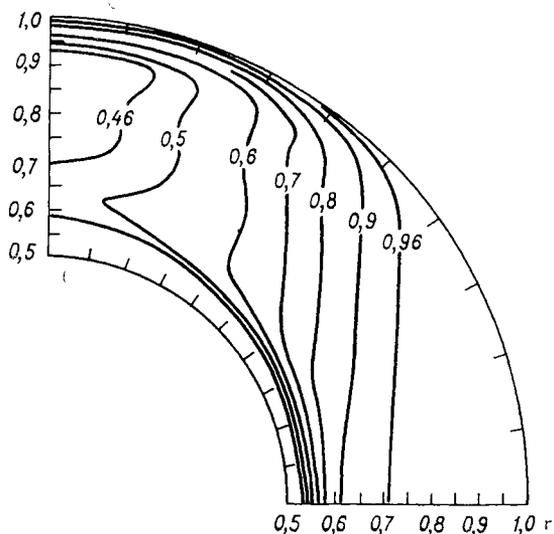


Рис. 3.13. Контурные линии угловой скорости при  $t = 223$ ,  $E = 10^{-3}$ . Условия те же, что и на рис. 3.12.

усилия, можно определить структуру свободных слоев сдвига и их зависимость от числа Россби. Режим течений вблизи экватора представляет значительный интерес в том случае, когда внутренняя сфера тоже вращается. Целый ряд поставленных здесь вопросов будет решен вскоре с помощью вычислительной техники. Однако, по-видимому, неизбежно возникнут новые вопросы.

### 3.6. Моментно-интегральные методы

Более эмпирический подход к решению уравнений движения основан на использовании моментно-интегральных методов, введенных Карманом [129] при изучении ламинарных и турбулентных пограничных слоев на вращающейся пластине. Позже Шульц-Грунов [236] с помощью тех же методов исследовал течение между конечными вращающимися дисками, и совсем недавно они применялись при решении задач этого типа Мэкком [167, 168], Кингом и Левелленом [131] и многими другими. Ротт и Левеллен [234] сделали обзор работ по теории вращающихся жидкостей.

Основная трудность использования сравнительно грубых методов состоит в том, что полученные с их помощью результаты в очень

сильной степени зависят от изобретательности, опыта и знаний каждого исследователя. Никогда нельзя быть уверенным, что в абсолютно новых условиях эти грубые методы действительно дают искомого решение и с их помощью можно получить достоверные результаты. (Например, всегда ли монотонный профиль пограничного слоя является достаточно точным приближением?) Однако во многих случаях, особенно, когда анализируются турбулентные пограничные слои и другие сильные взаимодействия, по существу, невозможно использовать более строгие теоретические методы, и тогда моментно-интегральные методы становятся в высшей степени полезными. При дальнейшем изложении мы будем следовать работе Ротта и Левеллена [234].

Рассмотрим стационарное осесимметричное течение в таком же резервуаре. Исследование пограничного слоя, примыкающего к стенке, упрощается, если ввести в рассмотрение длину дуги  $s$ , которая *увеличивается* в направлении роста пограничного слоя. Сама поверхность описывается параметрически с помощью координат

$$r = R(s), \quad z = Z(s); \quad 1 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2.$$

Пусть в соответствии с обозначениями раздела 1.6

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (s, \theta, y); \quad (h_1, h_2, h_3) = (1, R(s), 1)$$

и

$$(q_1, q_2, q_3) = (q_s, v, q_y).$$

Тогда *размерные* уравнения пограничного слоя имеют вид

$$q_s \frac{\partial q_s}{\partial s} + q_y \frac{\partial q_s}{\partial y} - \frac{v^2}{R} \frac{dR}{ds} = -\frac{v_1^2}{R} \frac{dR}{ds} + \frac{\partial \pi_s}{\partial y}, \quad (3.6.1)$$

$$\frac{q_s}{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} + \frac{q_y}{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = \frac{\partial \pi_\theta}{\partial y}, \quad (3.6.2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} (R q_s) + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0. \quad (3.6.3)$$

Здесь  $y$  — координата, ориентированная по нормали к границе слоя;  $\pi_s, \pi_\theta$  — компоненты напряжения;

$$\Gamma = Rv,$$

а условия вне пограничного слоя, которые считаются заданными, обозначены индексом «1». *Размерные* обозначения используются потому, что в последующем анализе мы введем несколько различных масштабов; используемая здесь система координат — *инерциальная* или *лабораторная*.

Интегрируя каждое из этих уравнений по нормали от нуля до бесконечности, получаем

$$\frac{d}{ds} \left( R \int_0^{\infty} q_s^2 dy \right) - \int_0^{\infty} \frac{1}{R^2} \left( \frac{dR}{ds} \right) (\Gamma^2 - \Gamma_1^2) dy = -R \mathcal{L}_s^{(0)}, \quad (3.6.4)$$

$$\frac{d}{ds} \left( R \int_0^{\infty} q_s (\Gamma - \Gamma_1) dy \right) + \left( \frac{d\Gamma_1}{ds} \right) \int_0^{\infty} R q_s dy = -R^2 \mathcal{L}_0^{(0)}, \quad (3.6.5)$$

$$q_y |_{y=\infty} = q_{y1} = -\frac{1}{R} \frac{d}{ds} \left( R \int_0^{\infty} q_s dy \right), \quad (3.6.6)$$

где

$$\mathcal{L}_s^{(0)} = \mathcal{L}_s |_{y=0}.$$

Введем теперь некоторые приближения, для того чтобы свести эти уравнения к системе *обыкновенных* дифференциальных уравнений для средних характеристик, описывающих структуру пограничного слоя. Наиболее важными из этих характеристик являются: меридиональный перенос массы  $M(s)$  внутри слоя и толщина пограничного слоя  $\delta(s)$ . Определением  $M(s)$  служит следующее равенство:

$$M(s) = \int_0^{\infty} R(s) q_s dy, \quad (3.6.7)$$

смысл  $\delta(s)$  менее ясен.

Данные экспериментов в пограничном слое показывают, что после удаления от стенки на определенное расстояние  $\delta(s)$  наблюдаемые характеристики почти не испытывают изменений. Кроме того, в пределах этого расстояния зависимые переменные очень часто являются автомодельными, так как линейный масштаб, характеризующий общую геометрию, не подходит для анализа локальных явлений. Приближение, основанное на использовании этих наблюдений, дает

$$q_s = \frac{U}{F(1)} \frac{d}{d\zeta} F(\zeta) = \frac{M}{\delta R F(1)} \frac{d}{d\zeta} F(\zeta), \quad (3.6.8)$$

$$\Gamma = \Gamma_w + (\Gamma_1 - \Gamma_w) G(\zeta), \quad (3.6.9)$$

где

$$\zeta = y/\delta(s).$$

Здесь  $F$  и  $G$  тождественно равны нулю для  $\zeta \geq 1$ , а индекс «w» указывает, что значения соответствующих функций взяты на стенке. Для  $\zeta < 1$  функции выбираются произвольно, так чтобы воспроизвести реальное течение и упростить математику. Иначе говоря, здесь явно предполагается, что граничные условия на бесконечности могут быть удовлетворены с высокой степенью точности на конечном расстоянии, а профили скорости имеют заданный вид. Итак, условия записываются  $G(1) = 1$ ,  $G(0) = 0$ ,  $F(0) = 0$ .

Подставляя эти выражения в (3.6.4) и (3.6.5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для  $M$  и  $\delta$ :

$$\gamma_2 \frac{d}{ds} \left( \frac{M^2}{R\delta} \right) + \frac{\delta}{R^2} \frac{dR}{ds} [(\Gamma_1 - \Gamma_w)^2 \gamma_3 + \Gamma_w (\Gamma_1 - \Gamma_w) \gamma_4] = -R \mathcal{L}_s^{(0)}, \quad (3.6.10)$$

$$\frac{d}{ds} ((\Gamma_1 - \Gamma_w) M) - \gamma_1 M \frac{d}{ds} \Gamma_1 = \gamma_1 R^2 \mathcal{L}_\theta^{(0)}, \quad (3.6.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^{-1} &= \int_0^1 \frac{1}{F(\zeta)} \frac{dF}{d\zeta} (1 - G(\zeta)) d\zeta; \\ \gamma_2 &= \int_0^1 \left( \frac{1}{F(\zeta)} \frac{dF}{d\zeta} \right)^2 d\zeta; \\ \gamma_3 &= \int_0^1 (1 - G^2(\zeta)) d\zeta; \\ \gamma_4 &= 2 \int_0^1 (1 - G(\zeta)) d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.12)$$

Оставшееся уравнение используется для расчета нормального потока

$$q_y = -\frac{1}{R} \frac{d}{ds} M(s) \text{ при } y = \infty. \quad (3.6.13)$$

Вид функций напряжения  $\mathcal{L}_\theta^{(0)}$  и  $\mathcal{L}_s^{(0)}$  специально оставляют неопределенным, чтобы общую формулу можно было затем использовать для описания и ламинарного, и турбулентного течений. Законы сдвига при  $y = 0$ , полученные Роттом и Левелленом [234], имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_\theta^{(0)} &= \gamma_5 \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_w)^2}{R^2} \left( \frac{\nu R}{(\Gamma_1 - \Gamma_w) \delta} \right)^\mu, \\ \mathcal{L}_s^{(0)} &= \gamma_6 \frac{M (\Gamma_1 - \Gamma_w)}{R^2 \delta} \left( \frac{\nu R}{(\Gamma_1 - \Gamma_w) \delta} \right)^\mu, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.14)$$

где  $\mu = 1$  для ламинарного и  $\mu = 1/4$  (значение Блазиуса) для турбулентного потоков. Константы равны

$$\gamma_5 = \frac{d}{d\zeta} G(0), \quad \gamma_6 = \frac{1}{F(1)} \frac{d^2}{d\zeta^2} F(0)$$

для ламинарного и 0,0225 и  $\gamma_5/F(1)$  — для турбулентного потоков. Заметим, что вид  $\mathcal{L}_\theta^{(0)}$  и  $\mathcal{L}_s^{(0)}$  для ламинарного потока непосредственно следует из основных предположений.

В обычных примерах условия для потока на плоскости  $\Gamma_w$  и внутри невязкой внутренней области  $\Gamma_1$  считаются, как правило, известными, точно так же как и направление, в котором растет

пограничный слой. С помощью разумных гипотез определяются  $F(\xi)$  и  $G(\xi)$ , после чего находятся параметры  $\chi_i$ . Затем решаются (при необходимости численно) уравнения (3.6.10) и (3.6.11) относительно функций  $M(s)$  и  $\delta(s)$ , подчиненных соответствующим граничным условиям в начальной точке вязкого слоя, скажем,  $\delta(0) = 0$ ,  $M(0) = 0$ . Если выбор сделан правильно, полученные решения могут служить прекрасными приближениями.

В задачах о вращающихся течениях  $\Gamma_1(r)$ , как правило, неизвестна. Тогда, если определение  $\Gamma_1(r)$  является основной целью исследования, то в этом случае необходимо получить приближенные аналитические решения уравнений пограничного слоя, которые содержат эти функции явным образом. Для этого необходимо сделать дальнейшие упрощения.

Рассмотрим поток над неподвижной пластиной  $\Gamma_w = 0$  и предположим, что  $\Gamma_1(r) = \Gamma(r)$ . Решение (3.6.10) и (3.6.11) вблизи  $s = 0$  ( $\delta(0) = M(0) = 0$ ) может быть получено в виде рядов. Если

$$\left. \begin{aligned} \delta(s) &= s^\nu (\delta_0 + s\delta_1 + \dots) \\ M(s) &= s^\sigma (M_0 + sM_1 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.15)$$

и

$$\Gamma(s) = \Gamma_0 + s\Gamma_1 + \dots,$$

$$R(s) = R_0 + sR_1 + \dots,$$

то

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \left( \frac{l(\chi_1\chi_3)^2}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (2\sigma-1) R_0 (-R_0 R_1)^{\frac{1}{2}} (1-2\sigma) \left( \frac{\nu}{\Gamma_0} \right)^2 (1-\sigma), \\ M_0 &= (\chi_1\chi_5)^{2\sigma-1} l^{\sigma-1} \sigma^{-\sigma} (-R_0 R_1)^{1-\sigma} \Gamma_0^{2\sigma-1} \nu^2 (1-\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (3.6.16)$$

где

$$\sigma = \frac{2+\mu}{2(1+\mu)}, \quad \gamma = \frac{1}{2(1+\mu)}, \quad l = \frac{3+2\mu}{2+\mu} \frac{\chi_2}{\chi_3} + \frac{\chi_6}{\chi_1\chi_3\chi_5}.$$

В окрестности начальной точки толщина пограничного слоя связана с потоком следующим образом:

$$\delta^{2-\mu} = \frac{\chi_1\chi_5 l}{-R_1} \nu^\mu \left( \frac{R_0}{\Gamma_0} \right)^{1-\mu} M. \quad (3.6.17)$$

Это соотношение Ротт и Левеллен использовали для всего пограничного слоя, при этом они заменили постоянные  $R_0$ ,  $\Gamma_0$ ,  $R_1$  их локальными значениями  $R$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\frac{dR}{ds}$ . Таким образом,

$$\delta^{2-\mu} = \frac{\chi_1\chi_5 l}{-\frac{dR}{ds}} \nu^\mu \left( \frac{R(s)}{\Gamma_1(s)} \right)^{1-\mu} M. \quad (3.6.18)$$

В цитированной выше работе Ротта и Левеллена было показано, что только при таком степенном законе можно получить согласие с условиями автомодельности в начальной и конечной точках.

Уравнения (3.6.14) с учетом (3.6.18), которое фактически заменяет (3.6.7), теперь решаются в замкнутом виде. Таким образом,

$$M = \sigma^{-\sigma} (\chi_1 \chi_5)^{2\sigma-1} / \sigma^{-1} v^{2(1-\sigma)} \Gamma_1^{\chi_1-1} \left\{ \int_0^s \Gamma_1^{2-(\chi_1/\sigma)} \left( -R \frac{dR}{ds} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} ds \right\}^{\sigma}. \quad (3.6.19)$$

Приведенное уравнение все еще является слишком сложным для практического использования и поэтому хотелось бы иметь более простое приближенное соотношение между локальным значением  $M$  и  $\Gamma_1$ . Такую формулу можно получить для ламинарного потока над плоской пластиной путем интерполяции двух крайних случаев. Пусть:

$$\frac{1}{F(1)} \frac{dF}{d\xi} = 12\xi(1-\xi)^2, \quad G(\xi) = 2\xi - \xi^2, \quad (3.6.20)$$

так что  $\chi_1 = 2,5$ ,  $\chi_2 = 1,375$ ,  $\chi_3 = 0,467$ ,  $\chi_4 = 0,667$ ,  $\chi_5 = 2$ ,  $\chi_6 = 12$ . Тогда в соответствии с (3.6.19) потенциальный вихрь  $\Gamma_1 = \text{const} (= \Gamma_0)$  связан с потоком массы следующим образом:

$$M = 1,26 (\nu \Gamma_0)^{1/2} (R_0^{4/3} - R^{4/3})^{3/4}, \quad (3.6.21)$$

в то время как для состояния *твердого вращения*,  $\Gamma_1 = \Omega R^2$ ,

$$M = 1,26 \nu^{1/2} \frac{\Omega^{1/2} R^2}{R_0} (R_0^{4/3} - R^{4/3})^{3/4}. \quad (3.6.22)$$

Формула, включающая оба эти результата как предельные случаи, имеет вид

$$M = 1,26 \left( \frac{\nu}{\Gamma_0} \right)^{1/2} (R_0^{4/3} - R^{4/3})^{3/4} \Gamma_1. \quad (3.6.23)$$

Она будет использована в качестве основного соотношения между  $M$  и  $\Gamma_1$ , когда над неподвижной пластиной располагается вращательное течение.

Задача, в которой пластина вращается быстрее, чем жидкость, решается так же и здесь не рассматривается. Как правило, для того чтобы приближение оставалось верным,  $\Omega r^2 - \Gamma$  не должно менять знака. Если  $\Gamma_w = \Omega R^2$  и  $R = s$ , то определение ламинарного потока приводит к следующему приближенному соотношению:

$$M = 0,55 \left( \frac{\nu}{\Omega} \right)^{1/2} (\Omega R^2 - \Gamma_1). \quad (3.6.24)$$

Результирующие выражения (3.6.23) и (3.6.24) могут быть объединены, если мы хотим решить задачу о потоке между дисками в цилиндре, один из которых вращается, а другой остается неподвижным. При этом учитывается закон сохранения массы, который требует, чтобы суммарный радиальный поток между пластинами равнялся нулю. Перенос жидкости в каждом слое имеет порядок  $O(E^{1/2})$ , а во внутренней области только  $O(E)$ . (Этот весьма простой результат устанавливается совершенно формально в следующем разделе.)

Следовательно, в низшем приближении потоки в пограничных слоях должны уравнивать друг друга в каждой точке радиуса. Эта локальная склейка и детальный баланс определяют вероятное течение во внутренней области  $\Gamma_1$ . Приравнявая выражения для  $M$  (см. предыдущие уравнения), получим

$$\Gamma_1(r) = \frac{0,55\Omega r^2}{0,55 + 1,26 \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{4/3}\right)^{3,4}}, \quad (3.6.25)$$

где  $R_0 = a$  — радиус резервуара. Последняя формула означает, что вблизи центральной оси  $v_1 = 0,3\Omega r$ , что находится в прекрасном соответствии с решением задачи для бесконечных дисков и согласуется с экспериментальными результатами Мэксуорси [172] (рис. 3.14).

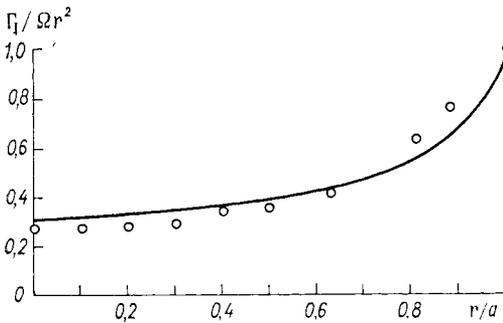


Рис. 3.14. Угловая скорость внутренней жидкости между двумя конечными заключенными в резервуар дисками, один из которых закреплен, а другой вращается [см. (3.6.25)]. Кружками отмечены экспериментальные точки Мэксуорси [172].

Дальнейшее развитие этих методов, их усовершенствование и модификации можно найти в цитированных работах.

### 3.7. Спинап

Слабая конвективная циркуляция, возбуждаемая вязкими пограничными слоями, является наиболее важным процессом, контролирующим спинап даже в нелинейном режиме. Преобладание этого механизма приводит к тому, что временной масштаб спинапа  $E^{-1/2}\Omega^{-1}$  оказывается характерным при всех обстоятельствах. Основное различие между спинапом в резервуаре, когда скорость вращения меняется от одного значения до другого и когда движение начинается из состояния покоя, заключается в роли углового момента. В последнем случае основная часть жидкости первоначально не вращается (спинап из состояния покоя) и поэтому влияние пограничных слоев должно привести к мгновенному отливу и приливу всей массы жидкости во внутренние области резервуара. Поскольку в этом случае выявляются новые особенности движения, он будет рассмотрен первым. Спиндаун к состоянию покоя не рассматривается, так как течение из-за неустойчивости становится турбулентным.

Если жидкость уже вращается, то для того чтобы изменить скорость вращения, необходимо приложить небольшой импульс. Усло-

вие сохранения углового момента требует, чтобы частица вращалась быстрее, когда она конвектирует внутрь; сопутствующее растяжение вихревых линий, вызванное эффектом пограничного слоя, увеличивает общую завихренность. Частица перемещается до тех пор, пока ее скорость и завихренность находятся на определенных уровнях. Очевидно, что эта нелинейная задача является непосредственным продолжением линейной задачи и поэтому можно ожидать только количественных изменений наблюдаемых особенностей движения.

Рассмотрим очень простую задачу о спине из состояния покоя. Симметричный резервуар, целиком заполненный жидкостью, в начальный момент времени находится в состоянии покоя, затем он мгновенно приводится во вращение вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Попытаемся найти аналитическое решение, описывающее процесс перехода к конечному состоянию твердого вращения.

С физической точки зрения течение развивается следующим образом. В течение нескольких первых оборотов, следующих за мгновенным стартом, на стенке резервуара образуются пограничные слои. Эти слои затем остаются существенно стационарными во всех критических фазах течения. Их основное назначение состоит в том, чтобы создать вторичное течение, вовлечь в него невращающуюся жидкость, привести ее во вращение и затем вернуть во внутреннюю область. Вращающаяся жидкость, поступающая из пограничных слоев, конвектирует по всей ширине резервуара, и этот процесс замыкается, когда вся жидкость, содержащаяся в пограничных слоях, полностью отливает и замещается другой.

*Безразмерные уравнения движения, в масштабах  $[\bar{L}, \Omega^{-1}, \Omega \bar{L}]$ , в цилиндрической инерциальной системе координат имеют вид:*

$$E^{1/2} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = - \frac{\partial P}{\partial r} + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{u}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.7.1)$$

$$E^{1/2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \left[ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right] + w \frac{\partial v}{\partial z} = E \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (3.7.2)$$

$$E^{1/2} \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + E \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.7.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0. \quad (3.7.4)$$

Здесь число Россби  $\epsilon$  полагается равным единице, а высота резервуара  $L$  принимается в качестве масштаба длины. Некоторые члены в этих уравнениях выпадают из-за симметрии, все функции считаются не зависящими от азимутального угла. Граничные условия на поверхности резервуара суть

$$u = v = r = w = 0, \quad (3.7.5)$$

в начальный момент времени  $u = v = w = 0$ .

Решение снова представляется в виде комбинации решений для пограничного слоя и почти невязкого внутреннего течения. Мы подробно рассмотрим движение только в невязкой внутренней области. Так как индуцируемая вторичная циркуляция должна иметь порядок  $O(E^{1/2})$ , то выражения для компоненты внутренней скорости и давления записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= E^{1/2} u_1(r, z, \tau) + \dots, \\ v &= v_0(r, z, \tau) + E^{1/2} v_1(r, z, \tau) + \dots, \\ w &= E^{1/2} w_1(r, z, \tau) + \dots, \\ P &= p = p_0(r, z, \tau) + E^{1/2} p_1(r, z, \tau) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.7.6)$$

Подстановка этих выражений в предыдущие уравнения показывает, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_0^2}{r} &= \frac{\partial p_0}{\partial r}, \\ 0 &= \frac{\partial p_0}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.7)$$

Таким образом, в этом приближении азимутальная скорость не зависит от высоты

$$v_0 = v_0(r, \tau). \quad (3.7.8)$$

Кроме того, из (3.7.2) находим, что

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + u_1 \left( \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right) + w_1 \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0,$$

откуда, в соответствии с (3.7.8),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (r v_0) + u_1 \frac{\partial}{\partial r} (r v_0) = 0. \quad (3.7.9)$$

Радиальная скорость также не зависит от вертикальной координаты. (Для установившихся течений из приведенного соотношения следует,  $u_1 = 0$ . Это доказывает, в частности, что во внутренней области  $u = O(E)$ . Отмеченный факт использовался в предыдущем разделе при исследовании (3.6.25).) Чтобы решить уравнение (3.7.9), необходимо знать точное соотношение между  $u_1$  и  $v_0$ , и его находят с помощью детального анализа пограничного слоя. Точное соотношение может быть получено только при строгих ограничениях, именно, в случае спинала, когда скорость вращения не слишком сильно изменяется от одного его значения к другому. Этот случай будет рассмотрен ниже. Этот способ нельзя использовать при изучении спинала из состояния покоя. В последнем случае может быть использован очень эффективный приближенный метод, предложенный Ведемейером [290]; указанный метод по своему духу и исполнению похож на моментно-интегральные методы предыдущего раздела.

Информация, содержащаяся в предыдущих главах, ясно показывает, что на всех основных фазах развития некоторых нестационар-

ных течений движение в пограничных слоях является почти стационарным. Многие результаты, полученные при исследовании стационарных пограничных слоев, могут быть почти с таким же успехом использованы при изучении нестационарных явлений после того, как жидкость совершила несколько первых оборотов. На этом основании все пограничные слои обычно считаются стационарными, что позволяет привлечь соответствующие данному случаю формулы, связывающие массоперенос в вязких слоях с невязкой вторичной циркуляцией. Таким же способом находится приближенная формула, связывающая  $u_1$  и  $v_0$ . При этом сначала рассматривается цилиндрический резервуар (поскольку об этой конфигурации известно больше всего). Затем исследование распространяется на произвольные осесимметричные области.

*Суммарный* радиальный перенос жидкости в пограничных слоях и невязкой внутренней области в любой момент времени и при  $r = \text{const}$  должен быть равен нулю. Это условие выражается с помощью следующего соотношения:

$$\int_0^1 u \, dz = 0,$$

которое получается в результате интегрирования уравнения (3.7.4) по вертикали от одного основания до другого. Радиальная компонента скорости, подобно всем другим, фактически состоит из трех слагаемых — радиальной скорости для невязкой внутренней области и для двух пограничных слоев

$$u = u_I(r, \tau) + \tilde{u}_B + \tilde{u}_T.$$

Нижними индексами «I», «B» и «T» отмечена принадлежность рассматриваемой функции соответственно к внутренней области и нижнему и верхнему пограничным слоям. В резервуаре указанной формы пограничные слои идентичны  $\tilde{u}_B = \tilde{u}_T$ , и поэтому после подстановки выражения для  $u$  в предыдущее соотношение получаем

$$u_I(r, \tau) + 2 \int_0^{\infty} \tilde{u}_B(r, \xi, \tau) \, d\xi = 0. \quad (3.7.10)$$

Однако перенос в пределах пограничного слоя связан с нормальным потоком в нем, и интегрирование уравнения неразрывности по пограничному слою дает

$$\frac{\partial}{\partial r} r \int_0^{\infty} \tilde{u} \, d\xi = -r \tilde{w}(r, \infty, \tau).$$

Для области, состоящей из двух неограниченных концентрических пластин,

$$\tilde{w}(r, \infty, \tau) = \tilde{w}(\infty, \tau).$$

Интегрируя предыдущее уравнение по радиусу в этом частном случае, имеем

$$\int_0^{\infty} \bar{u}(r, \zeta, \tau) d\zeta = -\frac{r}{2} \bar{w}(\infty, \tau). \quad (3.7.11)$$

Предполагается, что реальный нестационарный пограничный слой может быть локально аппроксимирован *стационарным* пограничным слоем, если предполагать одинаковые условия в каждый момент времени внутри области и на пластине. На рис. 3.4 *a* представлены результаты расчета, выполненного Роджерсом и Лэнсом [225] для установившегося режима. Они могут быть использованы для связи нормальной скорости в любой точке радиуса с отношением в той же точке скоростей вращения во внутренней области жидкости  $\Omega_I$  и на пластине  $\Omega$  (в первоначальном обозначении  $\Omega_f = \Omega_I$ ,  $\Omega_w = = \Omega$ ). Эта зависимость является почти линейной и задается в виде

$$-\bar{w}(\infty, \tau) = \kappa E^{1/2} \left(1 - \frac{\Omega_I}{\Omega}\right),$$

где константа  $\kappa$  находится подбором. Следовательно, (3.7.11) может быть приближенно переписано так:

$$\int_0^{\infty} \bar{u}(r, \zeta, \tau) d\zeta = \frac{1}{2} r \kappa E^{1/2} \left(1 - \frac{\Omega_I}{\Omega}\right).$$

Введем теперь второе основное предположение. Следуя Вейдмейеру [290], будем рассматривать последнюю формулу так же, как локальную аппроксимацию общего нестационарного случая, считая  $\Omega_I$  функцией  $r$  и  $\tau$ . Внутренняя скорость вращения  $\Omega_I$  определяется через внутреннюю азимутальную скорость  $s$  с помощью соотношения

$$\frac{\Omega_I}{\Omega} = \frac{v_I(r, \tau)}{r}.$$

Используя все эти соотношения, получаем

$$u_1(r, \tau) = -\kappa E^{1/2} (r - v_I),$$

или, имея в виду (3.7.6),

$$u_1 = -\kappa (r - v_0). \quad (3.7.12)$$

Это уравнение выражает искомую связь вторичной циркуляции с первоначальным вихрем, возникающим благодаря вязким пограничным слоям.

Подстановка (3.7.12) для  $u_1$  в (3.7.9) приводит к дифференциальному уравнению первого порядка в частных производных для азимутальной скорости

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \kappa \left(1 - \frac{v_0}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} (r v_0) = 0. \quad (3.7.13)$$

Ведемейер принимает  $\kappa$  равным 0,886, тогда как Ротт и Левеллен 1,10. По причинам, которые вскоре станут ясными, мы положим  $\kappa = 1$ . Решение этого уравнения, удовлетворяющего граничному условию

$$v_0 = a$$

на боковой стенке  $r = a (= r_0/L)$  и начальному условию  $v_0 = 0$ , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{1e^{2\tau} - \frac{a^2}{r}}{e^{2\tau} - 1} && \text{при } r \geq ae^{-\tau}, \\ v_0 &= 0 && \text{при } r \leq ae^{-\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.14)$$

Поверхность  $r = ae^{-\tau}$  описывает положение столба частиц жидкости на стенке в начальный момент времени и затем, когда он конвектирует внутрь. Эта поверхность отделяет вращающуюся жидкость, которая попадает во внутреннюю область, от невращающейся жидкости, которая стекает в пограничные слои. Азимутальная скорость как функция времени показана на рис. 3.15. Характерный временной масштаб спинапа остается равным  $E^{-1/2} \Omega^{-1}$ .

*Линейная задача*, соответствующая мгновенному, но бесконечно малому изменению угловой скорости системы, была полностью решена в разделе 2.6. В рассматриваемом случае осесимметричного спинапа безразмерная радиальная скорость  $u_1$  во вращающейся системе координат может быть определена непосредственно из (2.6.17):

$$u_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_0}{\partial \tau}.$$

Азимутальная компонента скорости [см. (2.6.7), (2.6.23) и (2.8.9)] для осесимметричной области произвольной формы принимает вид

$$\left. \begin{aligned} v_0(r, \tau) &= r [1 - \exp(-\Upsilon(r)\tau)]; \\ \Upsilon(r) &= \frac{\left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2\right)^{1/4} + \left(1 + \left(\frac{dg}{dr}\right)^2\right)^{1/4}}{f + g}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.15)$$

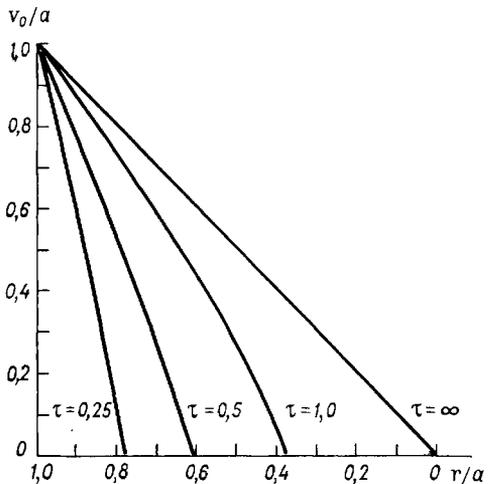


Рис. 3.15. Спинап из состояния покоя в цилиндрическом резервуаре. Внутренняя азимутальная скорость является функцией положения, время входит как параметр. координат может быть определена

Тогда значение радиальной компоненты скорости определяется мгновенной и бесконечно малой разностью скоростей вращения жидкости и резервуара и может быть представлено в форме

$$u_1 = -\frac{1}{2} \Upsilon(r) (r - v_0). \quad (3.7.16)$$

В прямом круговом цилиндре  $f = 1$ ,  $g = 0$ . Следовательно,

$$u_1 = -(r - v_0).$$

Это соотношение между компонентами безразмерной скорости идентично (3.7.12), когда  $\kappa = 1$ . В качестве рабочей гипотезы предполагается, что при больших значениях числа Россби безразмерное уравнение (3.7.16), соответствующее линейной теории, остается справедливым и в нелинейном случае. Поэтому подставляя (3.7.16) в (3.7.9), получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (rv_0) - \frac{1}{2} \Upsilon(r) (r - v_0) \frac{\partial}{\partial r} (rv_0) = 0. \quad (3.7.17)$$

В этом случае, так же как и в линейном, начальным условием является условие покоя, однако граничное условие должно быть соответствующим образом модифицировано. Если резервуар имеет боковую стенку, как, например, круговой цилиндр с коническим основанием, то условие сохраняется прежним. Однако в резервуарах другой формы, типичным примером которых является сфера, условие  $v = r$  можно использовать только в точке, где радиус принимает максимальное значение. Пограничные слои выталкивают жидкость наружу и жидкость, обладающая требуемым вращением, возвращается во внутреннюю область вблизи стенок резервуара, где нижний и верхний пограничные слои взаимодействуют друг с другом. Наблюдения спинапа в сфере обнаруживают в начальный момент времени появление турбулентного потока, направленного со стороны экватора. Этот поток затем очень быстро превращается в ламинарное течение того самого типа, который предсказывался теорией, например, в линейном случае — в возвратное течение.

Общее решение уравнения (3.7.17) имеет вид

$$\tau = 2 \int_r^a \frac{\xi}{\Upsilon(\xi) (\xi^2 - rv_0(r, \tau))} d\xi. \quad (3.7.18)$$

Если положить  $v_0 = 0$ , то с помощью этого выражения можно определить траекторию частицы вращающейся жидкости. Найти общее выражение для интеграла в (3.7.18) не тривиально, однако для сферы

$$f(r) = g(r) = (1 - r^2)^{1/2}, \quad a = 1$$

это можно сделать, и тогда имеем

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{4}{3} (1 - r^2)^{3/4} + (1 - rv_0)^{3/4} \ln \left[ \frac{(1 - rv_0)^{1/4} + (1 - r^2)^{1/4}}{(1 - rv_0)^{1/4} - (1 - r^2)^{1/4}} \right] + \\ & + 2(1 - rv_0)^{3/4} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{1 - r^2}{1 - rv_0} \right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

Неявное функциональное соотношение между  $\tau$  и  $v$  можно получить и для резервуаров иной формы, однако цилиндр с коническим основанием, вероятно, является особенно подходящим для экспериментальных целей.

Ведемейер получил экспериментальные данные, которые находятся в хорошем согласии с теоретическими результатами для цилиндрического резервуара. Это относится также и к турбулентным пограничным слоям, но они здесь рассматриваться не будут.

В разделе 1.1 был описан достаточно элементарно наблюдаемый вид ядра жидкости (см. рис. 1.4). Фотография показывает, что после резкого изменения скорости вращения резервуара в состоянии спинапа происходит перемещение светового фронта от внешней стенки через всю ширину резервуара. Перемещение «фронта», соответствующее движению характерной частицы, с очевидностью убеждает, что процессы в ядре потока совершенно не зависят от вертикальной координаты. Пограничные слои сверху и снизу изображаются в виде тонких темных горизонтальных полос, примыкающих к каждому основанию.

Совершенно аналогично может быть исследован нелинейный спинап из начального состояния твердого вращения. Ради удобства предположим, что скорость вращения резервуара изменяется от  $(1 - \varepsilon) \Omega$  до  $\Omega$  (здесь вводятся характерные масштабы  $\llcorner L, \Omega^{-1}, L \Omega \llcorner$ ). Тогда уравнение (3.7.13) при  $\kappa = 1$  все еще представляет собой приближенную формулу для азимутальной скорости в цилиндрическом резервуаре, однако граничные условия теперь необходимо заменить следующими:

$$v_0(r, 0) = (1 - \varepsilon)r, \quad v_0(a, \tau) = a.$$

Решение для той части жидкости, частицы которой первоначально находятся во внутренней области, а затем возвращаются туда после спинапа, имеет вид

$$v_0 = \frac{r}{1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{-2\tau}}.$$

Если кривую на рис. 3.4 аппроксимировать не (3.7.12), а несколько лучше, то мы должны получить точную формулу для  $v_0$ .

Другое решение задачи о нелинейном спинапе было получено Гринспенем и Вейнбаумом [97]. В указанной работе отличие угловой скорости от скорости твердого вращения задается сравнительно небольшим и поэтому данное исследование может рассматриваться как прямое продолжение работ по линейной теории. В формальном отношении анализ, выполненный в [97], является точным, однако для изучения спинапа из состояния покоя он не годится.

Исследуются движения в наполненном осесимметричном резервуаре, который первоначально вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\Omega$ . Затем скорость вращения импульсивно меняется до  $(1 + \varepsilon) \Omega$ , после чего жидкость переходит в новое состояние твердого вращения.

Удобно сформулировать эту задачу во *вращающейся* системе координат, имеющей угловую скорость  $\Omega \hat{\mathbf{k}}$ . В этой системе *безразмерные* уравнения движения (масштабы соответствующих функций равны  $\underline{\underline{L}}, \Omega^{-1}, \varepsilon \Omega \underline{\underline{L}}$ ) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ E^{1/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{q}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.20)$$

С помощью уравнения

$$\mathbf{q} = E^{1/2} \frac{\partial \chi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + v \hat{\boldsymbol{\theta}} - E^{1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \chi) \hat{\mathbf{k}} \quad (3.7.21)$$

введем функции тока. Тогда после исключения давления приходим к двум уравнениям для  $\chi$  и  $v$ :

$$\left( E^{1/2} G - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) v - \frac{\varepsilon}{r} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r v) - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r \chi) \right] - 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0, \quad (3.7.22)$$

$$\begin{aligned} E \left( E^{1/2} G - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) G \chi - \varepsilon \left[ E \frac{\partial \chi}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial r} (G \chi) - \frac{1}{r} G \chi \right) - \right. \\ \left. - \frac{E}{r} \frac{\partial}{\partial z} (G \chi) \frac{\partial}{\partial r} (r \chi) - 2 \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + 2 \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

где

$$G = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Метод решения аналогичен только что рассмотренному. Каждая зависимая переменная изображается в виде суммы членов, соответствующих пограничным слоям и невязкой области:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_I + \tilde{\mathbf{v}}_B + \tilde{\mathbf{v}}_T,$$

$$\chi = \chi_I + \tilde{\chi}_B + \tilde{\chi}_T.$$

Все функции представляются в форме ряда по степеням  $E^{1/2}$  и мы получаем последовательность нелинейных задач. Интерес, фактически, представляют только члены порядка  $E^{1/2}$ , и с практической точки зрения достаточно ограничиться двумя членами ряда. Основное внутреннее течение ( $E = 0$ ) описывается уравнениями

$$\frac{\partial v_I}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon}{r} \left( \frac{\partial \chi_I}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r v_I) - \frac{\partial v_I}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r \chi_I) \right) + 2 \frac{\partial \chi_I}{\partial z} = 0, \quad (3.7.24)$$

$$\left( 1 + \frac{\varepsilon v_I}{r} \right) \frac{\partial v_I}{\partial z} = 0, \quad (3.7.25)$$

откуда следует, что

$$v_I = v_I(r, \tau)$$

и

$$\frac{\partial \chi_I}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial v_I}{\partial \tau}}{2 + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_I)}. \quad (3.7.26)$$

Последние два уравнения в точности аналогичны (3.7.8) и (3.7.9) в новой координатной системе.

Поэтому исследование очень усложняется, и здесь можно привести только общее описание процедуры, целей, методов и результатов решения. В принципе анализ выполняется так же, как в линейной теории, однако теперь число Россби всегда должно входить в решение так, чтобы решение оставалось равномерно точным в течение всей фазы спинапа. Это же требование должно выполняться и для зависимости характеристик пограничного слоя от пространственных координат.

Уравнения пограничного слоя в низшем приближении являются стационарными, но содержат радиальные производные. Следовательно, нужно решить систему нелинейных уравнений в частных производных и поэтому предполагается, что величина  $\varepsilon$  достаточно мала. Задача сводится к решению шести трансцендентных уравнений для шести неизвестных (два для ядра и по два для каждого вязкого слоя), из которых получается одно уравнение, связывающее азимутальную скорость с ее временной производной:

$$\frac{\partial v_I}{\partial \tau} = F(r, \tau, v_I).$$

Требование равномерной точности решения приводит к необходимости ввести растянутую временную координату:

$$\tau = t + \varepsilon \tau_1(r, t) + \dots$$

и использовать методы, развитые Пуанкаре [207] и Лайтхиллом [145]. После того, как это было сделано, окончательное выражение для каждой переменной остается равномерно точным во всех областях. Вероятно, наиболее важными являются результаты для ядра жидкости. В этой области решение с точностью до членов  $O(\varepsilon^2)$  в течение времени спинапа имеет вид:

$$v_I(r, \tau) = r [1 - \exp(-\Upsilon(r)t)] + O(\varepsilon^2), \quad (3.7.27)$$

$$\tau = t + \varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{13}{40} \frac{r}{\Upsilon(r)} \frac{d}{dr} \Upsilon(r) \left(1 - \frac{v}{r}\right) t + \left[ \frac{4}{5\Upsilon(r)} + \frac{47}{280} \frac{r}{\Upsilon^2(r)} \frac{d}{dr} \Upsilon(r) + \frac{69}{140} \frac{r}{\Upsilon(r)} \frac{\frac{df}{dr} + \frac{dg}{dr}}{f+g} \right] \frac{v}{r} \right\}, \quad (3.7.28)$$

где  $\Upsilon(r)$  определена в (3.7.15). Решение для функции тока дается здесь только с точностью до  $O(\varepsilon)$ , так как выражение для следующего члена в общем случае оказывается чрезвычайно сложным (см. [97]):

$$\chi_I(r, \tau) = -\frac{\Upsilon(r) r z}{2} e^{-rt} + \frac{r}{2} \left[ \frac{f \left(1 + \left(\frac{dg}{dr}\right)^2\right)^{1/4} - g \left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2\right)^{1/4}}{f+g} \right] e^{-rt} + O(\varepsilon). \quad (3.7.29)$$

Решения для потока между дисками ( $f = 1, g = 0$ ) записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_{\tau} &= r(1 - e^{-2t}), \\ \gamma_{\tau} &= -r \left( z - \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - \varepsilon \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-2t} \right) \right] e^{-2t}, \\ \tau &= t + \varepsilon \left( -\frac{1}{2} t + \frac{2}{5} (1 - e^{-2t}) \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.7.30)$$

На рис. 3.16 приводится график зависимости азимутальной скорости от времени при  $E = 0,001$ , а также результаты численного

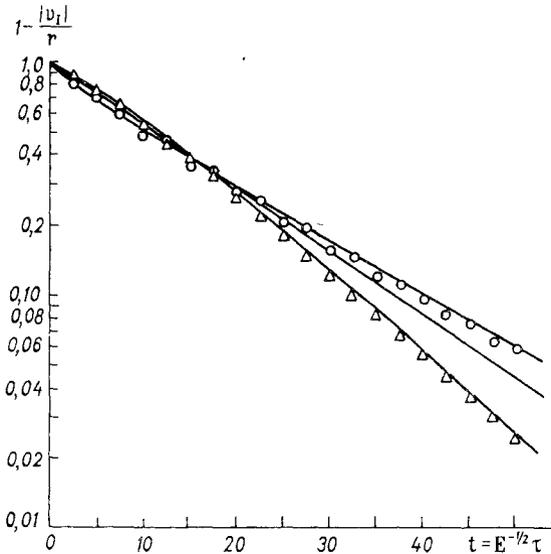


Рис. 3.16. Отклонение от состояния твердого вращения при нелинейном сдвиге между концентрическими бесконечными пластинами. Сплошные кривые получены из теории пограничного слоя (3.7.30); кружками отмечены результаты численного расчета неустановившегося течения по полным уравнениям при  $E = 0,001$ .  $\varepsilon = 0, \quad 0,5, \quad -0,5$  (по Пирсону [196]).

решения нестационарной задачи, полученные Пирсоном для той же самой области [196]. Как видно, оба приближенных решения находятся в прекрасном согласии друг с другом, подтверждая тем самым справедливость приближения пограничного слоя и точность численных расчетов. Расчеты указывают на существование небольших инерционных осцилляций, которые не были обнаружены теорией пограничного слоя.

Очевидно, что значительные изменения числа Россби вызывают в течение сдвига небольшие изменения движения жидкости. Это отчасти негативное заключение на самом деле означает, что в рассмотренных частных задачах нелинейные явления имеют меньшее значение, чем основные вязкие процессы.

Другое интересное заключение состоит в том, что кратное время затухания  $\tau_c$  оказывается существенно постоянным, не зависящим от  $\varepsilon$  в интервале  $|\varepsilon| < 0,5$  (при  $\tau = \tau_c$ ,  $v_1 = r(1 - e^{-1})$ ). Необходимо заметить, что это утверждение справедливо только для времени, отнесенного к начальной скорости вращения резервуара  $\Omega$ , т. е. для безразмерного времени. Если используется другое характерное время, то в этом случае необходимо ввести соответствующий пересчетный множитель, который обычно является функцией  $\varepsilon$ .

Хотя эксперименты Гринспена и Говарда [96] качественно подтверждают эти заключения, однако точных измерений до сих пор не имеется. Иначе было бы нетрудно сравнить теорию с экспериментом для любого резервуара подходящей формы. В этом смысле результаты, представленные на рис. 3.16, кажутся особенно для этого подходящими.

### 3.8. Некоторые эксперименты по нелинейным явлениям

В этом разделе описывается несколько экспериментов, которые предназначались специально для исследования влияния нелинейных процессов на столбы Тэйлора — Праудмена и вертикальные слои сдвига.

Хайд и Иббетсон [110] продолжили оригинальный эксперимент Тэйлора с целью получить больше количественных данных об образовании столба жидкости. Программа их исследований включала определение условия образования столбов, а также выявление зависимости формы и структуры столба от числа Россби и его связи с геометрией движущегося тела, создающего возмущение. К сожалению, в нашем распоряжении имеется только предварительный отчет о полученных результатах, и, следовательно, обсуждение всех этих вопросов будет коротким и неполным.

В одном эксперименте круговой цилиндр высотой  $H$  и диаметром  $L$  двигался с постоянной скоростью  $U$  вдоль основания большого вращающегося резервуара (радиуса  $r_0$ ). При увеличении числа Россби  $\varepsilon = U/Lr_0$  структура потока менялась от почти чисто столбчатой до той, которая имеет место, когда жидкость проникает в область над цилиндром (рис. 3.17). На этом рисунке около середины резервуара над телом отчетливо видны полосы. Линии тока по большей части являются существенно двухмерными.

Если число Россби еще больше увеличить, то нелинейные эффекты приведут к наклону этого столба и значительно изменят линии тока из-за образования сильного поперечного течения над преградой. Удивительно, но общий характер течения, изображенный на рис. 3.18, был предсказан Стюартсоном [245] при исследовании медленного нестационарного движения эллипсоида, перемещающегося в безграничной жидкости перпендикулярно к  $\Omega$ . По-видимому, это сходство явно нелинейного течения и предельного (при  $t \rightarrow \infty$ ) потока, описываемого линейной теорией, является случайным. Однако связь такого рода действительно существует

в том случае, когда тело движется вдоль оси вращения, поскольку можно показать, что уравнения, описывающие эти течения, аналогичны друг другу (см. раздел 4.6).

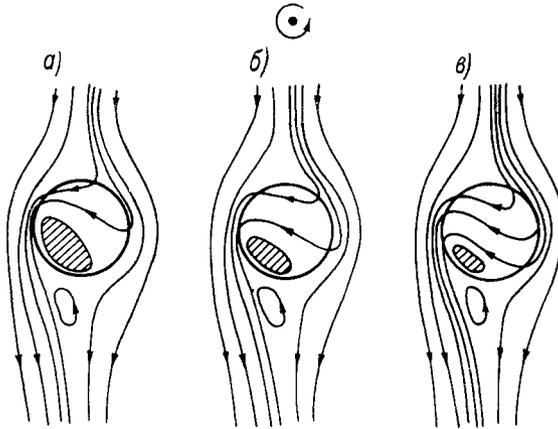


Рис. 3.17. Картина относительного течения около цилиндрического тела, движущегося перпендикулярно к оси вращения [110]. Значения чисел Россби равны:  $a - \varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $b - \varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-2}$ ,  $v - \varepsilon = 2,3 \cdot 10^{-2}$ .

Образование столба очень сильно зависит также от высоты препятствия, однако информации на этот счет слишком мало, чтобы можно было привести здесь какие-либо определенные данные.

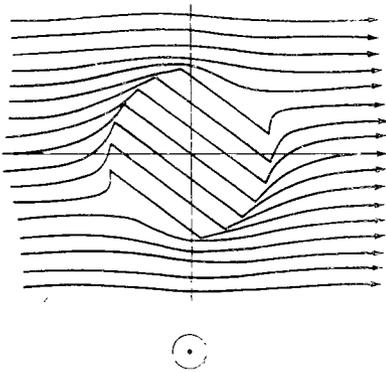


Рис. 3.18. Лнии тока, образующиеся при медленном равномерном движении сферы в направлении, перпендикулярном к оси вращения [245]. Горизонтальная плоскость не пересекает сферу.

Итак, необходимо определить как экспериментально, так и теоретически различные режимы потока, при которых наблюдаются или не наблюдаются столбы. При этом остается неопределенным точный экспериментальный критерий распознавания столбчатого течения.

Эксперименты Малкуса [170] показывают ряд необычных явлений, которые возникают вследствие нелинейного волнового взаимодействия в прецессирующей сфере. Задача о спиновере, в которой ось вращения заполненной сферы импульсивно отклоняется на малый угол  $\alpha$ , была рассмотрена в разделе 2.12 [см. (2.12.13) и

последующие уравнения]. Согласно между экспериментом и линейной теорией получилось хорошим, когда угол отклонения составляет

всего несколько градусов. Если  $\alpha$  увеличить до  $8^\circ$ , возникает новое явление, которое продолжает возрастать с дальнейшим увеличением угла. Это явление характеризуется частично образованием свободных слоев сдвига внутри жидкости, которые остаются почти совсем прямыми. Такое же явление наблюдается, когда ось вращения сферы прецессирует относительно заданного направления в пространстве. Прецессия может рассматриваться как последовательность малых импульсивных изменений угла  $\alpha$ .

Измерения скорости в прецессирующей сфере показывают, что в этом случае устанавливается стационарное двухмерное зональное течение, которое несколько раз меняет свое направление в промежутке  $0 \leq r \leq 1$ . Величина этой циркуляции, по-видимому, согласуется с предположением о том, что она образуется благодаря нелинейным явлениям. Нелинейные члены могут приводить к взаимодействию двух инерционных волн с частотами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , в результате чего появляются дополнительные волны с частотами  $\lambda_1 \pm \lambda_2$ . В частности, одиночная волна может взаимодействовать сама с собой и создавать стационарное зональное течение и колебание с частотой, равной удвоенной частоте первичной волны. Взаимодействие внутри пограничных слоев на критических широтах также может иметь большое значение (см. обсуждение на стр. 170).

Малкус [169] высказал предположение, что неустойчивости, образующиеся на этих слоях сдвига, могут играть важную роль в геофизических задачах, связанных с магнитным полем Земли. Чтобы подтвердить это мнение, необходимы дальнейшие исследования. Некоторые эксперименты по неустойчивости свободных слоев сдвига описываются в главе 6.

### 3.9. Большая угловая прецессия

Движение внутри прецессирующего сфероиды было изучено в разделе 2.13. Здесь задача рассматривается заново, но без ограничений, накладываемых линейной теорией. Эксперименты Малкуса с прецессирующими сферами описаны в предыдущем разделе.

Рассмотрим конфигурацию, показанную на рис. 2.9 (стр. 69). Ось вращения сфероиды выбрана так, чтобы она прецессировала около своего первоначального положения в пространстве при наклоне верхней части вращающегося столика на угол  $\alpha$ . Необходимо, чтобы угол наклона не был малым, в остальных условиях сохраняются прежними.

Введем систему координат такую, чтобы описываемое течение имело фиксированные оси симметрии  $\Omega$  и прецессии  $\omega$ . Эта система (обозначим ее  $E$ ) вращается с угловой скоростью  $\omega$ , но ее ось  $z$  совпадает с главной осью вращения тела  $\Omega$ . Такой выбор осей особенно полезен в том случае, когда тело является симметричным относительно  $\Omega$ , однако в этом случае оболочка кажется скользящей по поверхности заключенной в резервуар жидкости.

В терминах вектора скорости  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{q}_{\text{inert}} = \mathbf{u} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}$$

невязкие размерные уравнения движения в  $E$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + 2(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \\ + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}), \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.9.2)$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = \hat{\Omega} \mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\omega} = \omega (-\sin \alpha \hat{\mathbf{j}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{k}}) = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}$

Начальные условия, соответствующие импульсивному изменению направления  $\boldsymbol{\Omega}$  ( $\boldsymbol{\Omega}_+ = \boldsymbol{\Omega}$  при  $t = 0 +$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_- = \hat{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\omega}$  при  $t = 0 -$ ) могут быть выражены через вихрь, и тогда они записываются так:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u} = -2\Omega [\sin \alpha \hat{\mathbf{j}} + (1 - \cos \alpha) \hat{\mathbf{k}}]. \quad (3.9.3)$$

Кроме того, на поверхности

$$\frac{1}{a^2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{b^2} z^2 = 1$$

задается невязкое граничное условие  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ . (Импульсивное изменение положения резервуара не влияет на вихрь, хотя скорость должна быть немедленно скорректирована потенциальным течением, которое возникает в соответствии с требованиями, накладываемыми граничными условиями. Все это уже обсуждалось ранее на стр. 70.)

Хокинг [113] предположил, что, поскольку вихрь в начальный момент времени не зависел от пространственных переменных, то и впоследствии компоненты  $v$  останутся функциями только времени

$$v = (a^2 + b^2) A(t) \hat{\mathbf{i}} + (a^2 + b^2) B(t) \hat{\mathbf{j}} + 2a^2 C(t) \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.9.4)$$

Решения этого типа имеют большую историю, исчерпывающий обзор ранних работ был сделан Лэмбом [140]. Оказывается, что соответствующее выражение для  $\mathbf{u}$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = [-a^2 y C(t) + a^2 z B(t)] \hat{\mathbf{i}} + [a^2 x C(t) - a^2 z A(t)] \hat{\mathbf{j}} + \\ + [-b^2 x B(t) + b^2 y A(t)] \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

Уравнение неразрывности и пространственное граничное условие тогда автоматически удовлетворяются. Действуя на (3.9.1) оператором вихря и подставляя найденное соотношение в уравнение для  $\mathbf{u}$ , получаем следующие уравнения для неизвестных временных коэффициентов:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \frac{dA}{dt} = 2\omega \Omega \sin \alpha + ((a^2 - b^2) \Omega + 2\omega a^2 \cos \alpha) B + \\ + 2a^2 \omega \sin \alpha C + a^2 (a^2 - b^2) BC, \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

$$(a^2 + b^2) \frac{dB}{dt} = -((a^2 - b^2)\Omega + 2\omega a^2 \cos \alpha)A - a^2(a^2 - b^2)AC, \quad (3.9.7)$$

$$a^2 \frac{dC}{dt} = -\omega b^2 \sin \alpha A. \quad (3.9.8)$$

Начальные условия имеют вид

$$A(0) = 0, \quad B(0) = -\frac{2\Omega a}{a^2 + b^2} \sin \alpha, \quad C(0) = -\frac{\Omega}{a^2} (1 - \cos \alpha). \quad (3.9.9)$$

Скорость  $u$  также удовлетворяет общему уравнению движения, включающему вязкие члены, однако граничное условие прилипания нарушается.

Можно найти точное решение выписанной выше системы уравнений, но удобнее интегрировать эти уравнения численно, считая параметры системы заданными. Некоторые особые случаи следует, однако, прокомментировать.

В линейном случае, при малых  $\alpha$ ,  $C(t)$  оказывается очень близким к нулю, и поэтому все произведения  $BC$  и т. д. пренебрежимо малы. Тогда интегрирование легко выполняется, и решение представляет собой невязкий случай того решения, которое приводилось раньше в разделе 2.13. Более того, если множитель  $(a^2 - b^2)\Omega + 2\omega a^2 \cos \alpha$  равен нулю, то из (3.9.6) следует, что малом  $t$

$$A(t) = \frac{2\omega\Omega \sin \alpha}{(a^2 + b^2)} t.$$

Отсюда видно, что решение растет пропорционально времени и возникает линейный резонанс. Включение нелинейных членов ограничивает амплитуды, делая их конечными, и решения осциллируют во времени. Таким образом, если правильно учтены все члены, в нелинейном невязком случае неограниченных решений не существует.

При  $\alpha = 1/2\pi$  решение оказывается особенно простым, именно

$$A(t) = 0, \quad B(t) = B(0), \quad C(t) = C(0),$$

т. е. наблюдаемое течение в этой системе координат является чисто стационарным и описывается выражением (3.9.5). Вектор вихря остается постоянным и лежит на луче  $y = z$  при любых отрицательных значениях  $y$  и  $z$ .

Рисунок 3.19 показывает зависимость коэффициента  $A(t)$  от времени для различных наборов параметров, включая случай «резонанса». Остальные коэффициенты ведут себя аналогичным образом; типичный набор кривых приведен на рис. 3.20.

Отсутствие учета эффектов вязкости несколько ограничивает применимость полученного решения. Например, при малых эксцентриситетах, когда  $a - b = O(E^{1/2})$ , вязкие пограничные слои играют такую же роль в формировании движения, как и силы нормального давления, обусловленные влиянием оболочки. На самом деле экмановский слой представляет собой только передаточный механизм в прецессирующем сферическом резервуаре; невязкое

нелинейное решение для такого резервуара интерпретируется как твердое вращение вокруг собственной оси вращения. Отсутствие диссипации не позволяет описать дальнейшее развитие стационарного движения, хотя его начальное состояние задано точно.

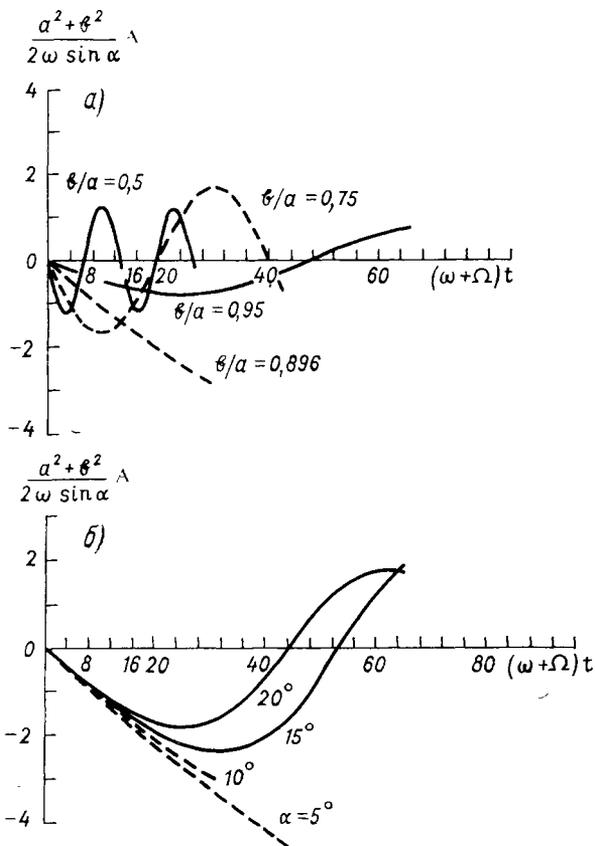


Рис. 3.19. Коэффициент  $A$  [см. (3.9.4)] как функция времени при различных значениях параметров.

$a$  — для четырех значений отношения осей  $b/a$  при  $\omega/\Omega = 0.1$  и  $\alpha = 10^\circ$ , включая «резонанс»  $b/a = 0.896$ ;  $b$  — для четырех значений угла наклона при  $\omega/\Omega = 0.1$ ,  $b/a = 0.896$ , включая «резонанс».

Эксперименты с прецессирующим сфероидом и линейная теория, обсуждавшаяся ранее в разделе 2.13, показывают, что во внутренней области действительно возникает стационарная компонента потока, обладающая постоянной завихренностью (относительно системы  $E$ ). Исследования нелинейных явлений в установившихся вязких задачах с учетом прецессии были начаты Буссе [30]. Его метод заключается в последовательном представлении возмущений в виде рядов по степеням чисел Экмана и Россби (аналогично тому, как это было сделано в разделе 3.7). Хотя предполагается, что внутреннее течение является течением с почти постоянной завихренностью, величина

и направление вектора вихря подлежат определению в процессе решения задачи. Таким же образом корректируется местоположение критических широт; показано, что они располагаются симметрично по отношению к главной оси вращения жидкости и несимметрично

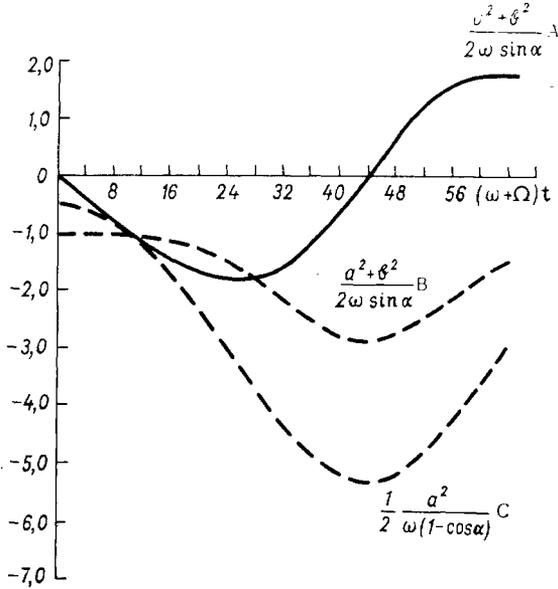


Рис. 3.20. Общее решение задачи с учетом прецессии для  $b/a = 0,896$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega/\Omega = 0,1$ .

относительно оболочки. Анализ очень сложен, однако формула, полученная для вектора вихря, в точности совпадает с выражением, соответствующим линейной теории, и, по-видимому, хорошо согласуется с предварительными экспериментальными данными Малкуса. Тем не менее, необходимо выполнить более детальное сравнение.

### 3.10. Вихревые течения и автомодельные решения

Метеорологические и океанографические явления побудили начать поиски точных решений уравнений Навье — Стокса, описывающих сильные вихри. Хотя исследованию вихревых течений и автомодельных решений посвящена обширная литература, но часто найденным частным решениям очень трудно приписать реальный физический смысл. Это является следствием того, что частные решения очень редко учитывают эффекты, возникающие благодаря наличию пространственных границ. Эти эффекты, в том числе пограничные слои и вторичные циркуляции, на самом деле являются основными во вращающейся жидкости, и ценность любого исследования однородной жидкости, которое не учитывает этих фундаментальных явлений, очень сомнительна.

Существуют особые случаи, и некоторые из них, такие, например, как решение Кармана, уже обсуждались в предыдущих разделах и поэтому рассматриваться здесь больше не будут. Тем, кто хочет изучить это направление исследований более тщательно, укажем на исчерпывающий обзор Дональдсона [52] и работу Трасдейла [272]. Для изучения и понимания сильных вихрей, встречающихся в природе, в этом разделе рассматриваются несколько примеров, которые, по-видимому, являются типичными и наиболее представительными для всего этого класса явлений.

Потенциальное течение

$$\mathbf{q} = -\Xi \hat{\mathbf{r}} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\Xi z \hat{\mathbf{k}} \quad (3.10.1)$$

является точным решением полных *размерных* уравнений движения в инерциальном пространстве [(1.2.1) и (1.2.2) при  $\boldsymbol{\Omega} = 0$ ]. Это выражение описывает осесимметричное течение с точкой стагнации. Параметр  $\Xi$  ( $\text{с}^{-1}$ ) характеризует возмущение. Хотя существует много вихрей данного типа, однако решение не является полностью удовлетворительным из-за того, что при  $r = 0$  имеет место сингулярность. Бюргерс [29] и Ротт [232] нашли следующее решение, учитывающее эту особенность:

$$\mathbf{q} = -\Xi r \hat{\mathbf{r}} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Xi r^2}{2\nu}\right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\Xi z \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.10.2)$$

Оно показывает, что в условиях равновесия вращающаяся жидкость перемещается по направлению к оси и течение является существенно вязким за пределами центрального ядра радиуса

$$r = \left( \frac{2\nu}{\Xi} \right)^{1/2}.$$

Конечно, на поверхности  $z = 0$  вязкость также играет важную роль и поэтому соотношение (3.10.2) имеет лишь ограниченное применение. В настоящее время имеется информация о природе и размерах вязкого ядра, устраняющего сингулярность на оси несжимаемого вихря. Ротт [233] нашел класс нестационарных решений, который включает также решение задачи о термической диффузии и для которого (3.10.2) является предельным случаем.

Более последовательный метод исследования вязких течений был создан Левелленом [143], который сумел придать своим многочисленным ранним работам вполне законченный вид. Его метод заключается в анализе возмущений относительно вихревого течения, имеющего более общую радиальную зависимость, чем та, которая соответствует твердому вращению. Однако предположение об автономности создает некоторую трудность при удовлетворении произвольных граничных условий.

Левеллен сводит задачу к безразмерному виду, используя  $L$ ,  $\Gamma_{\infty}$  и  $M$  при выборе масштабов длины, циркуляции  $\Gamma = r\psi$  и осесимметричной функции тока  $\psi$ , определяемой как

$$\mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \mathbf{w} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Здесь  $M$  представляет собой радиальный поток массы, он может быть несравнительно малым или связанным по величине с числом Экмана. Чтобы смоделировать атмосферные условия, радиальная скорость  $u$  должна приводиться к безразмерному виду иначе, чем  $v$ .

Безразмерное уравнение для функции тока в инерциальной системе координат имеет вид

$$\varepsilon ED^2\psi - \varepsilon^2 \left\{ r \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} D\psi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} D\psi \right\} - \frac{2}{r^2} \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0. \quad (3.10.3)$$

$$ED\Gamma - \frac{\varepsilon}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.10.4)$$

где

$$D = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

и

$$\varepsilon = M/L\Gamma_\infty, \quad E = \nu/\Gamma_\infty.$$

Все функции могут быть теперь представлены в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ ; однако Левеллен сначала полагает

$$E = \varepsilon/R_E$$

и выбирает в качестве независимого параметра радиальное число Рейнольдса  $R_E = M/\nu L$ , а не  $E$ . Переходя к отысканию частного класса решений, положим  $\eta = r^2$  и

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(\eta, z) \varepsilon^{2n},$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\eta, z) \varepsilon^{2n}.$$

Подставляя эти ряды в (3.10.3) и (3.10.4), получим

$$\Gamma_0 \frac{\partial \Gamma_0}{\partial z} = 0 \quad (3.10.5)$$

и

$$2R_E^{-1} \eta \frac{d^2 \Gamma_0}{d\eta^2} - \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{d\Gamma_0}{d\eta} = 0. \quad (3.10.6)$$

Следовательно, функция тока должна быть линейной функцией  $z$

$$\psi_0 = A_{00}(\eta) + zA_{01}(\eta) \quad (3.10.7)$$

(в решении Бюргера и Ротта  $\psi_0 = -z\eta$ ). При этом даже оказывается возможным задать граничные условия в двух точках оси, скажем  $z = 0$  и  $z = 1$ . Общий вид условий, которые могут быть использованы в качестве таковых на внешней границе экмановских слоев, следующий:

$$\psi_0(\eta, 0) = \tilde{\psi}_0(\eta) \quad (\tilde{\psi}_0(0) = 0),$$

$$\psi_0(\eta, 1) = \tilde{\psi}_1(\eta) \quad (\tilde{\psi}_1(0) = 0).$$

Таким образом, (3.10.7) и (3.10.6) переищутся в виде

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \tilde{\psi}_1(\eta) + [\tilde{\psi}_0(\eta) - \tilde{\psi}_1(\eta)] z, \\ 2R_E^{-1} \eta \frac{d^2 \Gamma_0}{d\eta^2} - [\tilde{\psi}_0(\eta) - \tilde{\psi}_1(\eta)] \frac{d\Gamma_0}{d\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

Интегрирование этого уравнения при условиях

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma_0 = \Gamma_\infty, \quad \Gamma_0(0) = 0$$

и произвольном задании функций  $\tilde{\psi}_0$  и  $\tilde{\psi}_1$  дает одно частное решение для  $\Gamma_0$ . На этой основе могут быть построены модели многих явлений.

При желании можно рассчитать члены любых более высоких порядков, и теория может быть обобщена [143] на случай, когда на стенках резервуара имеются вязкие пограничные слои. Таким способом (путем анализа возмущений относительно установившегося состояния вихревого потока, которое *не* является состоянием твердого вращения) была исследована задача о центрифуге с большой подачей массы (см. раздел 2.19). Однако качественный характер найденного течения во многих отношениях остается прежним.

Левеллен показал, что пограничные слои невозможно связать с внутренним течением, циркуляция которого  $\Gamma_0$  уменьшается с увеличением радиуса. Потенциальное течение  $\Gamma_0 = \text{const}$  очень слабо зависит от расстояния вдоль радиуса и его еще можно склеить с экмановским слоем, однако что будет, когда наведенная циркуляция  $\Gamma_0$  имеет неподходящее изменение вдоль радиуса, остается неясным и может послужить предметом дальнейших исследований.

Г Л А В А 4  
ДВИЖЕНИЕ  
В НЕОГРАНИЧЕННОЙ  
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

4.1. Классификация

В разделе 2.1 было выделено два класса движений вращающейся жидкости. Как следует из заглавия, в этой главе будут рассмотрены течения, которые образуются при движении тел через неограниченные вращающиеся жидкости. Прежде чем приступить к исследованию частных задач этого типа, полезно остановиться и подумать об обоснованности предположения о том, что вращающаяся жидкость имеет неограниченные размеры. Безусловно, это приближение является логичным во многих случаях и, вероятно, наиболее удобным при анализе стационарных вязких течений или неустановившихся движений в начальный период. Однако существуют ситуации, когда такая идеализация может послужить источником серьезных затруднений. Например, это имеет место при решении задач для невязких установившихся течений в линейном и нелинейном случаях, если стенки резервуара удалены на бесконечность. Часто в работах используется слишком много умозрительных предельных переходов ( $v \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow \infty$  и т. д.) и от их порядка может сильно зависеть имеют или нет смысл конечные результаты исследования. По этим причинам задачи указанного типа могут оказаться даже некорректными.

В предыдущих главах было определено установлено, что пристеночные пограничные слои контролируют основное невязкое течение. Степень их влияния является одной из наиболее интересных и важных особенностей этого явления, настолько важной, что всякий раз, когда ограничивающие стенки должны быть исключены из рассмотрения, требуется проявить особую осторожность.

4.2. Плоские инерционные волны

Тот факт, что небольшие возмущения в равномерно вращающейся несжимаемой жидкости могут распространяться в виде волновых движений, был установлен давно. Первые результаты в этой области принадлежат Кельвину [130]. Среди наиболее важных теоретических и экспериментальных исследований, появившихся с тех пор, следует отметить работы Фульцда [76], Лонга [153], Чандрасекара [39] и Филлипса [205]. Некоторые из этих работ обсуждались

выше в связи с инерционными волнами, которые возникают в жидкости, заключенной в резервуар, и общей теорией, изложенной в главе 2. Однако многие важные и наиболее характерные особенности распространения волн все еще остаются не изученными, и поэтому в настоящем разделе мы попытались собрать воедино или по крайней мере довести до числа наши знания о волновом движении во вращающейся жидкости. В последующем изложении мы будем придерживаться цитированной работы Филлипса.

Система *безразмерных* линейных невязких уравнений

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + 2\hat{\Omega} \times \mathbf{q} &= -\nabla p \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

имеет волновые решения вида

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= Re \mathbf{Q} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}, \\ p &= Re \Phi e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор;  $|\mathbf{k}|$  — волновое число;  $\lambda$  — частота (линейный масштаб  $L$  выбирается произвольно). Вид этого решения полностью аналогичен инерционным волнам внутри резервуара, но значительно проще его вследствие того, что  $\mathbf{Q}$  и  $\Phi$  теперь равны константам. Подстановка (4.2.2) в (4.2.1) приводит к соотношению, связывающему  $\lambda$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\Phi$  и  $\mathbf{k}$ . Например, уравнение неразрывности дает

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (4.2.3)$$

откуда следует, что вектор скорости перпендикулярен к направлению распространения и волна является поперечной. Этот тип движения возможен только в несжимаемой жидкости.

Из уравнения момента получаем

$$\lambda = \pm 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \pm 2 \cos \Theta, \quad (4.2.4)$$

где

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|,$$

а  $\Theta$  — полярный угол, измеряемый от оси вращения. Таким образом, частота зависит от направления, но не от величины волнового вектора. Более того, если  $\mathbf{v}$  представляет собой произвольный вектор, перпендикулярный  $\mathbf{k}$ , то

$$\mathbf{Q} = \pm \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} + i\mathbf{v} \quad (4.2.5)$$

и

$$\Phi = \frac{2}{|\mathbf{k}|} [\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} \pm i\hat{\Omega} \cdot \mathbf{v}]. \quad (4.2.6)$$

Следовательно, при действительном  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{q} = \pm \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}t) - \mathbf{v} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}t), \quad (4.2.7)$$

$$p = \frac{2}{|\mathbf{k}|} [\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}t) \mp \hat{\Omega} \cdot \mathbf{v} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}t)]. \quad (4.2.8)$$

Изменение в определении  $\mathbf{v}$  приводит эти уравнения к виду, установленному Филлипсом. Чтобы получить решения, учитывающие эффект вязких членов, необходимо всего лишь умножить каждое из предыдущих уравнений на множитель

$$\exp(-E|\mathbf{k}|^2 t).$$

Действительно, в этом случае результирующие выражения являются точными решениями полных нелинейных уравнений (см. [39]), однако теперь не выполняется принцип суперпозиции.

Фазовая скорость волн, перемещающихся в направлении  $\mathbf{k}$ , т. е. вдоль поверхностей, на которых величина  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \lambda t$  (здесь  $\lambda = +2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ ) сохраняет постоянное значение, имеет вид

$$\mathbf{c}_p = 2 \frac{\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.2.9)$$

Как видно, фазовая скорость обратно пропорциональна величине волнового вектора, а волны, в общем, являются дисперсионными, диссипативными и анизотропными. Длинные волны (случай малых  $|\mathbf{k}|$ ) распространяются наиболее быстро, а короткие — наиболее медленно. Это условие очень напоминает поверхностные волны в классической гидродинамике.

Групповая скорость  $\mathbf{c}_g$  представляет собой скорость переноса энергии и может быть определена с помощью расчета потока энергии. Существует исчерпывающая теория волн и переноса энергии [292], но нам понадобится только соотношение между групповой скоростью и частотой. Для волнового пакета вида  $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda(\mathbf{k})t)$  групповая скорость задается следующим образом:

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \lambda(\mathbf{k}) = \frac{\partial \lambda}{\partial k_1} \hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial k_2} \hat{\mathbf{i}}_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial k_3} \hat{\mathbf{i}}_3, \quad (4.2.10)$$

где  $\mathbf{k} = k_1 \hat{\mathbf{i}}_1 + k_2 \hat{\mathbf{i}}_2 + k_3 \hat{\mathbf{i}}_3$ . Во вращающейся жидкости

$$\lambda = 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 2 \frac{\Omega_1 k_1 + \Omega_2 k_2 + \Omega_3 k_3}{(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}}, \quad (4.2.11)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{c}_g = \frac{2}{|\mathbf{k}|} \hat{\Omega} - \mathbf{c}_p, \quad (4.2.12)$$

или, используя (4.2.9),

$$\mathbf{c}_g = \frac{2}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\Omega} \times \hat{\mathbf{k}}). \quad (4.2.13)$$

Этот результат показывает, что перенос энергии происходит под прямым углом к фазовой скорости. Волна, которая в соответствии с поверхностями постоянной фазы перемещается в одном направлении, фактически переносит энергию в перпендикулярном направлении.

Можно ожидать, что при исследовании отражения этих плоских волн от твердых границ можно будет обнаружить много дополнительных свойств. Филлипс [205] показал, что такое отражение влечет за собой изменение волнового числа и приводит к новому направлению переноса энергии, которое не удовлетворяет правилу «равного угла» (закон Снелла), типичному для недисперсионных систем. Пусть

$$\mathbf{q} = (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} + i\mathbf{v}) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}t) \quad (4.2.14)$$

описывает волну, падающую на бесконечную плоскость. Обозначим единичную нормаль, *направленную из жидкости*, через  $\hat{\mathbf{n}}$ . Удобно выбрать  $\mathbf{v}$  компланарным по отношению к  $\hat{\mathbf{k}}$  и  $\hat{\mathbf{n}}$ , и это может быть сделано без потери общности, поскольку мы можем распорядиться началом отсчета времени (фазой).

Тогда отраженная волна записывается в виде

$$\mathbf{q}' = (\pm \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}' + i\mathbf{v}') \exp i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \mp 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}'t). \quad (4.2.15)$$

Граничные условия на стенке  $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  требуют, чтобы нормальная составляющая скорости равнялась нулю

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}') = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} + i\mathbf{v}) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}t) + \\ & \pm \hat{\mathbf{n}} \cdot (\pm \hat{\mathbf{k}}' \times \mathbf{v}' + i\mathbf{v}') \exp i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \mp 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}'t) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Так как это соотношение справедливо для любого момента времени и в любой точке плоскости, то частоты и тангенциальные волновые числа обеих волн должны быть одинаковыми

$$\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \pm \hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \quad (4.2.17)$$

и

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}.$$

Последнее уравнение может быть преобразовано к более удобному виду с помощью соотношения

$$\mathbf{r} = -\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}),$$

которое имеет место потому, что  $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  служит определением плоскости. Отсюда

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{n}}) = 0.$$

Однако  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$  представляет собой произвольный тангенциальный вектор в граничной плоскости, а второй вектор должен быть тождественно равен нулю

$$\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.2.18)$$



равно  $\overline{OB}$  и  $\hat{k}$  — единичному вектору  $\overline{OG}$ . Построение идет в таком порядке.

I. Из уравнения (4.2.18) следует, что векторы  $k$  и  $k'$  должны иметь одинаковые проекции в плоскости отражения и эти проекции равны отрезку  $\overline{OJ}$ .

II. Из уравнения (4.2.17) следует, что векторы  $\hat{k}$  и  $\hat{k}'$  имеют одинаковую проекцию на  $\Omega_p$  — она изображается линией FA. Поток отраженной энергии будет направлен от стенки, если в этом уравнении выбирается знак минус;  $k'$  должно быть равно  $\overline{OS}$ , а  $k''$  —  $\overline{OH}$ .

III. Векторы  $v$  и  $v'$  ортогональны соответственно  $k$  и  $k'$ . Уравнение (4.2.20) требует, чтобы нормальные составляющие обоих векторов были равными по величине (OM). Пусть  $\overline{DO}$  будет  $v$ , тогда  $v'$  представляет собой направляющий отрезок  $\overline{OE}$ .

IV. Групповая скорость перпендикулярна  $k$ , а ее проекция в плоскости  $k$  и  $\hat{n}$  параллельна  $v$  и направлена вдоль  $\overline{DO}$ .

V. Соответствующая проекция групповой скорости отраженной волны направлена вдоль  $\overline{OE}$ .

Здесь описан процесс обратного отражения. Падающий и отраженный векторы потоков образуют равные углы с  $\Omega_p$ , а не с нормалью к плоскости  $\hat{n}$ , как в случае недисперсионных волн. Отражение вперед имеет место тогда, когда угол DOA больше угла AOL. Если оба угла равны, энергия отраженной волны переносится параллельно стенке и является соответственно намного более чувствительной к процессам вязкой диссипации. Волновой вектор  $k'$  в общем случае не равен  $k$  и при отражении может происходить рассеяние энергии на различных длинах волн. Падающая и отраженная волны должны иметь одинаковую частоту и одинаковую компоненту вектора  $k$  в плоскости границы.

На основании подобия треугольников DOE и ВОС получаем следующее равенство:

$$\frac{|v|}{|k|} = \frac{|v'|}{|k'|}.$$

Это равенство вместе с соотношением

$$\frac{1}{|k|^2} dk = \frac{1}{|k'|^2} dk'$$

можно использовать для установления того факта, что плотность энергии на единицу объема в пространстве волновых чисел

$$C(k) = \frac{1}{2} \sum_k^{\kappa \cdot d\kappa} |v|^2$$

при отражении остается неизменной.

Изучение отражений в вязкой жидкости и анализ режимов пограничных слоев (см. [205]) приводит к заключению, что при отражении происходит уменьшение амплитуды на величину порядка  $O(E^{1/2})$ ;

здесь в качестве масштаба длины  $L$  принята типичная длина волны. Таким образом, инерционный волновой пакет единичной амплитуды, отражающийся от одной стенки резервуара к другой, рассеивается через  $E^{-1}$  отражений, т. е. приблизительно за время  $E^{-1} \cdot \Omega^{-1}$ . Приведенные здесь оценки давно известны, однако исследование плоской волны дает новую интерпретацию диссипативного процесса. В одном случае это заключение является неверным. Если поток отраженной энергии параллелен плоской поверхности, то энергия может быть полностью поглощена. (В этом случае необходимо соблюдать осторожность, так как амплитуда отраженной волны также становится бесконечной.) Критический случай имеет место, когда

$$\Omega_p \cdot \hat{\mathbf{k}} = \pm \Omega_p \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.2.22)$$

или в терминах частоты

$$\lambda = \pm 2\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Это в точности то же самое условие для частоты и нормального вектора, которое было получено в теории инерционных колебаний в резервуаре для местоположения разрывов пограничного слоя. Таким образом, разрушение пограничного слоя на критических широтах связано здесь с полным поглощением плоских инерционных волн в пограничном слое. Более полное описание пограничного слоя при наличии разрывов с помощью инерционных волн нуждается в соответствующей теории. Теперь, кажется, мы имеем всю необходимую информацию о наиболее важных чертах механизма явления, чтобы предпринять попытку построить теорию этого явления.

### 4.3. Медленное движение вдоль оси вращения

В этом разделе мы рассмотрим задачу о простом нестационарном вращающемся течении, на основе которой можно будет выяснить особенности распространения инерционных волн и эволюцию установившегося состояния. Прежде всего попытаемся наглядно представить, как эти волны формируют тэйлоровские столбы; другие примеры будут обсуждаться позднее.

Конкретная конфигурация, использованная в этом анализе, представляет собой конечный диск радиуса  $r_0$ , который первоначально вращается вместе с неограниченной жидкостью как твердое тело. Затем диск перемещается перпендикулярно самому себе вдоль оси вращения, однако его угловая скорость не меняется. Движение может быть либо медленным движением вперед со скоростью  $U$ , либо колебанием малой амплитуды с частотой  $\lambda$  около своего первоначального положения. Последний случай будет рассматриваться в следующем разделе.

Теория для диска проще, чем для других геометрий, и столь же типична. Например, в этом случае можно получить детальное решение для медленного стационарного движения в вязкой среде [184].

содержательное асимптотическое приближение для импульсивного движения вперед и даже привести решение для квазистационарных колебаний в невязкой жидкости [192, 215, 216], которое имеет экспериментальное подтверждение [88, 193]. Кроме того, оба решения (неустановившееся невязкое и установившееся вязкое) для медленного течения хорошо согласуются с соответствующими предельными случаями  $t \rightarrow \infty$  и  $\nu \rightarrow \infty$ . Обобщение частных результатов на тела более произвольной формы будет обсуждаться по ходу исследования.

Соответствующие граничные условия для медленного движения диска вперед во *вращающейся* системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= U\hat{\mathbf{k}} \text{ при } r \leq r_0, z = Ut \text{ для } t \geq 0, \\ \mathbf{q} &\rightarrow 0 \text{ при } |r| \rightarrow \infty, \\ \mathbf{q} &\equiv \dot{0} \text{ для } t \leq 0. \end{aligned}$$

*Безразмерная* линейная краевая задача (число Россби равно бесконечно малой величине) с использованием масштабов  $\bar{r}_0, \Omega^{-1}, U\bar{r}$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + i2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p + E\nabla^2 \bar{\mathbf{q}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{k}}$  при  $r \leq 1, z = 0$  для  $t > 0$ ;  $\mathbf{q}$  равно нулю на бесконечности и  $\mathbf{q} \equiv 0$  для  $t < 0$ .

В невязком случае ( $E = 0$ ) достаточно задать  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$  на диске при  $t \geq 0$ . Сначала рассмотрим именно этот случай. Обозначим через  $(u, v, w)$  компоненты скорости в цилиндрической симметричной системе координат и введем осесимметричную функцию тока  $\psi$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4.3.1)$$

Преобразование Лапласа

$$\bar{\psi} = \int_0^{\infty} e^{-st} \psi \, dt = L\{\psi\}$$

приводит к следующему уравнению для изображения функции тока:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + \left(1 + \frac{4}{s^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} = 0, \quad (4.3.2)$$

которое подчиняется условию

$$\bar{w} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = \frac{1}{s} \text{ при } r \leq 1, z = 0. \quad (4.3.3)$$

Применяя к (4.3.2) преобразования Ханкеля, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение по  $z$ , общее решение которого,

симметричное относительно  $z$  и удовлетворяющее требованию отсутствия течения на бесконечности, имеет вид

$$\bar{\psi} = r \int_0^{\infty} A(\kappa) J_1(\kappa r) \exp[-\kappa |z| s (s^2 + 4)^{-1/2}] d\kappa.$$

Оно непосредственно следует из формулы обращения для преобразования Ханкеля. Функция  $A(\kappa)$  найдется, если удовлетворить оставшимся граничным условиям на плоскости  $z = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \kappa A(\kappa) J_0(\kappa r) d\kappa &= -\frac{1}{s} \quad \text{при } r \leq 1, \\ \int_0^{\infty} \kappa A(\kappa) J_1(\kappa r) d\kappa &= 0 \quad \text{при } r > 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

Эти интегральные уравнения встречаются в классической теории потенциала и их решение, полученное Титчмарчем [271, стр. 339], имеет вид

$$\kappa A(\kappa) = \frac{2}{\pi s} \left( \cos \kappa - \frac{\sin \kappa}{\kappa} \right). \quad (4.3.5)$$

Полное решение краевой задачи при  $z \geq 0$  тогда может быть переписано следующим образом:

$$\psi = \frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa} \left( \cos \kappa - \frac{\sin \kappa}{\kappa} \right) K(z, t, \kappa) d\kappa, \quad (4.3.6)$$

$$v = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} J_1'(\kappa r) \left( \cos^2 \kappa - \frac{\sin \kappa}{\kappa} \right) N(z, t, \kappa) d\kappa, \quad (4.3.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \exp[-\kappa z s (s^2 + 4)^{-1/2}] \right\}, \\ N &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} (s^2 + 4)^{-1/2} \exp[-\kappa z s (s^2 + 4)^{-1/2}] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

Конечно, эта задача может считаться решенной тогда, когда эти интегралы будут приведены к более удобному виду, и из них будет извлечена полезная информация. С этой целью рассмотрим первый интеграл в (4.3.8) и те преобразования, с помощью которых находится асимптотическое приближение для больших значений времени. Преобразование  $K$  имеет простой полюс в начале координат и две точки ветвления весьма простого вида в  $s = \pm 2i$ . Эти точки можно соединить конечным вертикальным отрезком и провести контур интегрирования вокруг этого отрезка. Если аккуратно

оценить эти контурные интегралы, то можно получить следующее выражение:

$$K = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^2 \frac{\cos yt}{y} \sin \left( \frac{kzy}{(4-y^2)^{1/2}} \right) dy,$$

где  $s = iy$  находится на мнимой оси. Введение новой переменной

$$\eta = \frac{yt}{(4-y^2)^{1/2}}$$

приводит это выражение к виду

$$K = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \left( \frac{2\eta}{(1+(\eta/t)^2)^{1/2}} \right) \frac{\sin b\eta}{\eta} \frac{d\eta}{(1+\eta^2/t^2)},$$

где

$$b = \frac{kz}{t} \tag{4.3.9}$$

входит как основной параметр. Следовательно, асимптотика при больших  $t$  и  $z$ , но умеренных  $b$  такова:

$$K \sim 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos 2\eta \frac{\sin b\eta}{\eta} d\eta.$$

С помощью простых тригонометрических соотношений последний интеграл можно переписать в виде суммы двух интегралов, каждый из которых имеет более простой вид:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta.$$

Тогда окончательно

$$K \sim S(2-b), \tag{4.3.10}$$

где  $S$  — единичная ступенчатая функция (см. стр. 99). Совершенно аналогично

$$N \sim \frac{1}{2} S(2-b). \tag{4.3.11}$$

Теперь легко получить приближения для малых значений времени, однако они содержат слишком мало информации, чтобы этим имело смысл заниматься.

Приведенные формулы могут быть интерпретированы в терминах известных свойств плоских волн. Требование  $b < 2$  становится понятней, если его переписать в виде

$$\frac{z}{\left(\frac{2}{k}\right)} < t, \tag{4.3.12}$$

так как

$$\frac{z}{k} = |c_g|$$

характеризует групповую скорость плоских волн с волновым числом  $k$ , фазовая скорость которых перпендикулярна оси вращения. Энергия этих волн быстрее всего распространяется вдоль оси вращения. Следовательно,  $z/(2/k)$  представляет собой время, за которое самое быстрое волновое возмущение с волновым числом  $k$  достигает вертикальной высоты  $z$ . Неравенство (4.3.12) означает, что, прежде чем волны с этим волновым числом достигнут заданного вертикального положения, должно пройти некоторое минимальное время.

Асимптотические решения для функции тока и компонент скорости находятся подстановкой формул для  $N$  и  $K$  в (4.3.6) и (4.3.7). Тогда

$$\psi \sim \frac{2r}{\pi} \int_0^{2t/z} \frac{J_1(kr)}{k} \times \\ \times \left( \cos k - \frac{\sin k}{k} \right) dk, \quad (4.3.13)$$

$$v \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{2t/z} J_1(kr) \times \\ \times \left( \cos k - \frac{\sin k}{k} \right) dk. \quad (4.3.14)$$

Эти выражения особенно удобны для численного интегрирования.

В целях наглядности течение лучше описывать в системе координат,двигающейся вместе с диском.

В этой системе скорость на бесконечности равна  $-\hat{k}$ , функция тока

$$\tilde{\psi}(r, z, t) = \frac{1}{2} r^2 + \psi(r, z, t), \quad (4.3.15)$$

а  $v$  остается неизменной. Рисунок 4.2 показывает мгновенные линии тока  $\tilde{\psi}$  около диска (по отношению к наблюдателю на диске). Здесь вертикальная координата определена следующим образом:  $z/2t$ ,

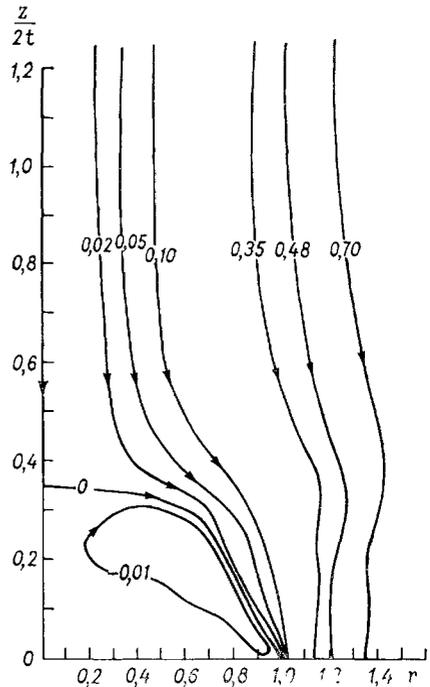


Рис. 4.2. Мгновенные линии тока, связанные с диском, который медленно движется вдоль оси вращения после импульсного старта. Пластина располагается на  $z = 0$ ,  $r \leq 1$ . Опережающий фронт является начальной фазой образования столба Тэйлора — Праудмена.

и поэтому, чтобы получить картину истинного движения, указанные на рисунке линии должны с течением времени непрерывно вытягиваться в направлении  $z$ . Следует отметить возникновение в потоке «точки застоя», широкий крутой фронт и обратное ячеистое течение позади него. Частица, расположенная над диском, в конце концов вовлекается в застойную зону, где она находится в течение длительного времени; основные колебания происходят позади фронта. Результирующее поле функции тока очень напоминает картину обте-

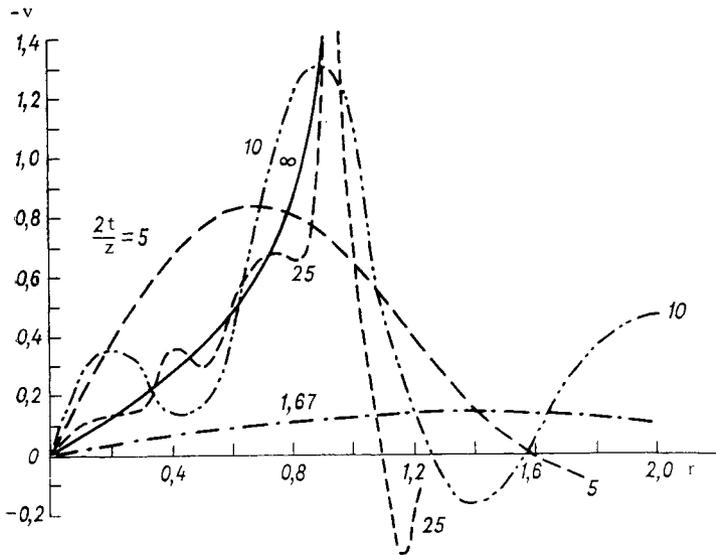


Рис. 4.3. Азимутальная скорость как функция радиуса при увеличивающихся значениях параметра  $2t/z$ . Когда столб окончательно сформировался, на цилиндрической поверхности  $r = 1$  образуется разрыв.

кания воображаемой преграды той же ширины, что и диск, но постоянно увеличивающейся по вертикали. Конечно, это и есть образование и развитие столба Тэйлора.

На рис. 4.3 изображена азимутальная скорость  $v$  как функция радиального расстояния для нескольких значений  $2t/z$ . Отчетливо виден разрыв скорости на вертикальной цилиндрической поверхности, ограничивающей диск. Эти два решения ясно показывают, что большим волновым числам, соответствующим размерным длинам волн порядка диаметра диска или меньше, соответствуют наибольшие возмущения в жидкости. Другими словами, длины волн, сравнимые с размерами препятствия, составляют важную часть спектра возмущений, возникающих при медленном движении тела.

Окончательное стационарное невязкое течение при  $t = \infty$  находится из асимптотических формул. В этом предельном случае все интегралы хорошо известны. Они имеют вид

$$\psi(r, z, \infty) = \psi_\infty = \begin{cases} -\frac{r^2}{2}, & r < 1, \\ \frac{1}{\pi} \left( (r^2 - 1)^{1/2} - r^2 \sin^{-1} \frac{1}{r} \right), & r > 1, \end{cases} \quad (4.3.16)$$

$$v_\infty = -\frac{2}{\pi} \frac{r}{(1-r^2)^{1/2}} S(1-r). \quad (4.3.17)$$

(Уравнения (4.3.15) используются при отыскании соответствующих формул для описания движения относительно упомянутой выше системы координат, скрепленной с диском.)

Жидкие частицы в столбе Тэйлора перемещаются вместе с диском и обладают вращением, которое не зависит от высоты. Частицы за пределами столба имеют обе (и продольную, и азимутальную) компоненты скорости, но вынуждены двигаться по цилиндрической оболочке, так как радиальная скорость равна нулю.

Появление разрывов  $v$  и  $\psi$  поперек боковой поверхности столба и на диске означает, что в этих областях важную роль играют вязкие процессы. На поверхности диска возникает экмановский слой, а вертикальный слой сдвига отделяет внутреннюю и внешнюю области жидкости. Полный анализ стационарной вязкой задачи (в которой рассматривалось только медленное течение) был выполнен Моррисоном и Морганом [184], но здесь он не приводится, потому что основные проявления воздействия вязкости уже достаточно понятны. Одно очень важное заключение их исследования состоит в том, что решение стационарной вязкой задачи совпадает с предельным стационарным решением нестационарной невязкой задачи при нулевом предельном значении вязкости  $E \rightarrow 0$ . В этом случае два предельных перехода  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  и  $\lim_{E \rightarrow 0}$  взаимозаменяемы.

Хотя до сих пор мы рассматривали только движение диска, тем не менее результаты для тел другой формы очень похожи на только что описанные. Более того, они фактически совпадают, когда цилиндры, ограничивающие диск и тела другой формы, — одинаковые. Степень совпадения в значительной мере определяется наличием медленно двигающейся преграды и формой ее теневой проекции на плоскость  $z = \text{const}$ . Стюартсон [243] решил задачу для медленно движущейся сферы (более ранние попытки принадлежат Грэйсу [89—91]), и хотя он пренебрег деталями временных изменений, все же исследование доказывает, что окончательное установившееся состояние идентично тому, которое создается диском того же радиуса. Выполненное Рейнольдсом [215] обобщение на случай осесимметричных тел правила подобия Моргана [181] для быстро меняющихся вынужденных колебаний (оно будет обсуждаться в следующем разделе) служит еще одним доказательством правильности этого общего заключения.

Формула, вытекающая из (4.2.8), показывает, что характерное время затухания для плоских инерционных волн равно в безразмерных единицах

$$t_c \doteq E^{-1}k^{-2}.$$

Оценку длины столба Тэйлора — Праудмена в неограниченной среде можно получить из расчета вертикального расстояния, на которое переносится энергия в основной части спектра волновых чисел за время  $t_c$ . Если принять, что энергия переносится волнами с новыми числами  $k \doteq 2$ , для которых групповая скорость имеет вид

$$|c_g| = \frac{2}{k} \doteq 1,$$

то высота, достигаемая за характерное время, будет равна

$$|c_g| t_c \doteq E^{-1},$$

или в размерных единицах  $E^{-1}r_0$  ( $r_0$  — радиус диска). Глубина проникновения оказывается очень большой по сравнению с размерами преграды. (Этот вывод был получен также Бретертоном [23], который детально изучил другое неустановившееся течение.) Нелинейные эффекты могут привести к другому значению глубины проникновения, существенно отличному от указанного выше.

Тэйлор [265] в своем оригинальном исследовании заметил, что в рассматриваемом им случае сферы центральные линии тока выходят из поверхности тела и привел формулу, связывающую появление столба с числом Россби. Он нашел, что столбчатое течение возникает, когда «шар движется со скоростью, меньшей чем один диаметр за один оборот системы», т. е.

$$\varepsilon = \frac{U}{r_0\Omega} < \frac{1}{\pi}.$$

Настоящая теория, в основе которой лежит предположение о медленном течении, конечно, не может подтвердить этот вывод. Однако можно получить качественную оценку, если рассчитать противотечение  $U$ , которое должно обеспечить фиксированное положение точки «застоя» на диске. Если мгновенная точка застоя может перемещаться вверх по потоку, то, по-видимому, отчетливо выраженный столб в конце концов будет образован. Эта точка движется с безразмерной скоростью  $0,675r_0\Omega$ , и, грубо говоря,  $U$  должно иметь ту же самую величину, чтобы точка застоя оставалась на прежнем месте. Это означает, что критическое число Россби равно  $0,675$ ; оно получилось завышенным более чем в два раза, но тем не менее это обнадеживает ввиду грубого характера расчета. В правильной теории должны учитываться нелинейные конвективные члены. Некоторые успехи в этом направлении уже имеются, однако мы на этом закончим обсуждение данного вопроса и вернемся к нему в разделе 4.6.

#### 4.4. Осциллирующее движение

Мы будем и дальше использовать диск в качестве характерной формы тела, поскольку в этом случае задача легко поддается полному анализу. Процессы, изученные с использованием такой конфигурации, если отвлечься от специфических деталей, имеют фундаментальный характер и применимы также для тел произвольной формы.

Возьмем ту же самую конфигурацию, что и в предыдущем разделе, но теперь диск должен возбуждать бесконечно малые колебания, нормальные к его поверхности и параллельные к  $\Omega$ .

Моррисон и Морган [184] решили эту задачу и нашли интегральное представление для квазистационарных колебаний в вязкой жидкости. Их предельное выражение с нулевой вязкостью совпадает с формулой, полученной позднее Рейнольдсом [216], который рассмотрел невязкую задачу с начальными данными. Однако в работе Рейнольдса точное решение линейной задачи выражается через простые известные функции.

Конечное состояние осциллирующего невязкого течения может быть найдено из уравнений движения, умноженных на экспоненциальную функцию времени. Этот классический прием требует введения условия излучения, чтобы получающаяся в результате задача была корректной. Поток энергии должен быть всегда направлен от диска, который является источником возмущения. Хотя это сделать просто, тем не менее может произойти путаница, если направления групповой и фазовой скоростей не совпадают. При решении нестационарной и вязкой задач эту трудность обычно обходят путем исключения нежелательных осциллирующих во времени членов. Тогда медленное течение вперед может быть представлено как частный случай, соответствующий предельному случаю нулевой частоты.

Обсуждение общего осциллирующего движения было начато в вводной главе [см. уравнения (1.3.3) и другие]; некоторые важные результаты, полученные там, оправдывают повторение. Напомним, что уравнение, описывающее пространственную зависимость давления, меняет свой тип при увеличении частоты. При  $\lambda < 2$  оно является гиперболическим и описывает волновое движение жидкости. В этом случае характеристической поверхностью является конус, заданный следующим образом:

$$r = \pm \left( \frac{4}{\lambda^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} z + \text{const.}$$

При  $\lambda > 2$  уравнение (1.3.7) становится эллиптическим. Оно очень похоже на уравнение Лапласа. В действительности совпадение является точным, так как положительный множитель  $1 - 4/\lambda^2$  может быть включен в вертикальную координату с помощью введения другого масштаба длины. Этот метод уже многократно использовался. Поэтому не удивительно, что существует закон подобия для быстротменяющихся вынужденных колебаний, который связывает осциллирующие решения при  $\lambda > 2$  с решениями, описывающими

установившиеся невращающиеся течения. Морган [181] нашел такое правило для тех дискообразных форм, а Рейнольдс [215] обобщил этот результат на более широкий класс осесимметричных тел, колеблющихся во вращающейся жидкости. Однако этот аспект задачи, по-видимому, является второстепенным, и по этой причине дальнейшее его обсуждение переносится в конец этого раздела после того, как мы закончим анализ гиперболического режима  $\lambda < 2$ .

Математическая формулировка задачи о вибрирующем диске аналогична приведенной в начале раздела 4.3, за исключением того, что невязкое граничное условие на диске (при  $r \leq 1, z = 0$ ) заменяется следующим:

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{k}} = Im S(t) \exp i\lambda t. \quad (4.4.1)$$

Вновь последовательно применяются преобразования Лапласа и Ханкеля, и дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям по вертикальной координате  $z$ . Они легко решаются, и окончательное решение, соответствующее осциллирующему течению, определяется с помощью обратных преобразований Лапласа и Ханкеля. Обратное преобразование Лапласа, по существу, сводится к вычислению вычета в простом полюсе  $s = i\lambda$ ; никаких попыток описать неустановившуюся эволюцию, как в последнем разделе, здесь не делается. Решение при  $\lambda < 2$  имеет следующий вид:

$$\psi = -\frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \kappa}{\kappa} - \cos \kappa \right) \sin \left( \frac{\lambda t}{2} - \left( \frac{4}{\lambda^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} z \kappa \right) \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa} d\kappa, \quad (4.4.2)$$

$$v = -\frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \kappa}{\kappa} - \cos \kappa \right) \times \\ \times \sin \left( \frac{\lambda t}{2} - \left( \frac{4}{\lambda^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} z \kappa \right) J_1(\kappa r) d\kappa. \quad (4.4.3)$$

Эти интегралы или подобные им затабулированы Эрдели [57], и в окончательные выражения для  $\psi$  и  $v$  входят только элементарные функции. Эти формулы легко находятся, но они слишком длинные, чтобы их стоило здесь воспроизводить. Мгновенные линии тока для двух моментов времени показаны на рис. 4.4. В течение одного периода колебания в различных областях имеют место различные течения: частицы непосредственно над пластиной двигаются синфазно с ней, тогда как в других областях в это время сохраняется состояние покоя. Ни одну из пространственных координат (ни  $r$ , ни  $z$ ) нельзя отождествить с временной координатой. Сингулярная характеристическая поверхность

$$r = 1 + \left( \frac{4}{\lambda^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} z, \quad r = \left| 1 - \left( \frac{4}{\lambda^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} z \right|$$

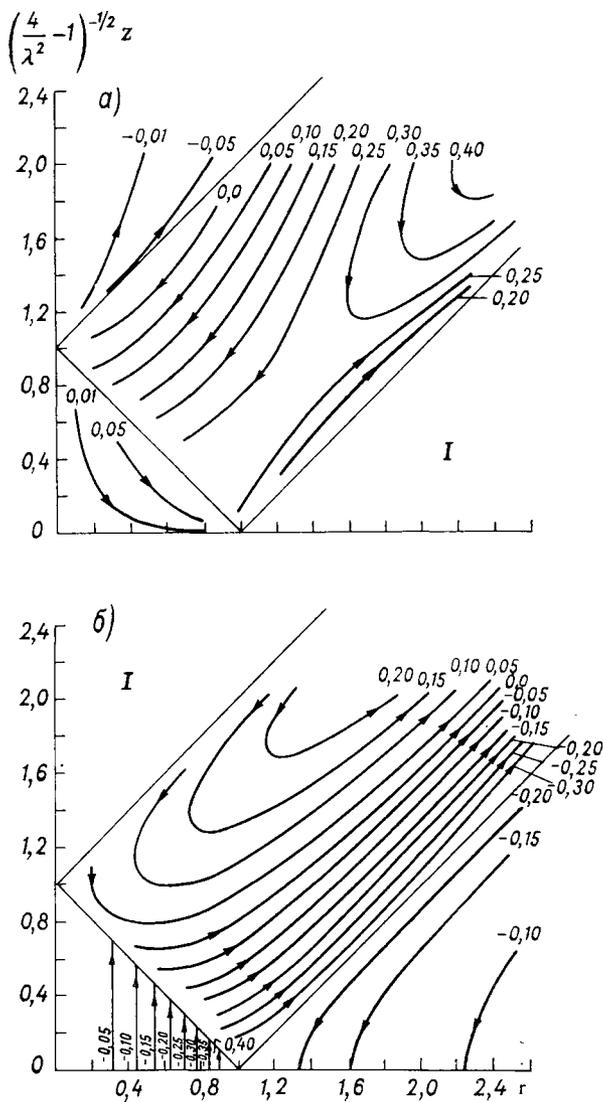


Рис. 4.4. Мгновенные линии тока около осциллирующего диска, иллюстрирующие разделение течения на отдельные области, ограниченные характеристическими конусами.

$\alpha$  — момент времени  $t = 0$  (соответствующий максимальному смещению пластины вниз);  
 $\beta$  — момент времени  $t = 1/2\pi$  (скорость пластины направлена вверх и имеет максимальное значение).

I — жидкость в покое.

разделяет четыре различные области течения в верхней полуплоскости, и взаимное приспособление потоков в различных областях осуществляется посредством тонких вязких слоев, расположенных вдоль поверхностей разрыва.

Скорость частицы не совпадает по фазе с колебаниями диска, вследствие того что поток энергии должен быть направлен наружу. За исключением случая, когда появляются сингулярные характеристики, картина течения получается очень сложной, особенно если мы имеем дело с дисперсионными волнами. Тем не менее критические поверхности можно наблюдать экспериментально, как это показано на рис. 1.3, а зависимость угла при вершине корпуса от частоты можно измерить. В этом отношении данные измерения очень хорошо согласуются с результатами теоретического расчета (см. [88]).

По-видимому, было бы желательнее рассмотреть вместо тела конечного размера особые точки, так как в этом случае формулы были бы несомненно проще. Однако оказывается, что в невязкой задаче необходимо ввести линейный масштаб, чтобы обеспечить сходимость интегралов к требуемому конечному виду. Введение реальной геометрии позволяет отделить волны, имеющие длины большие или меньшие, чем размер тела, и тем самым обеспечить естественное обрезание диапазона волновых чисел. Колебания с волновыми числами, не попадающими в пределы выделенного диапазона, вносят минимальный вклад в результирующую картину движения.

Упомянутая ранее задача о быстро меняющихся вынужденных колебаниях связана с невращающимся потоком. Если через  $\psi_i(r, z)$  обозначена функция тока невращающейся жидкости за диском, то для любого значения  $\lambda > 2$  выражение

$$\psi(r, z, t) = A\psi_i\left(r, \left(1 - \frac{4}{\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}}z\right) \sin \lambda t$$

является решением для вращающейся области. Морган показал, что этот результат справедлив для дискообразных тел, а Рейнольдс обобщил это заключение на случай любых осесимметричных тел, подверженных малым колебаниям. Если  $z = f(r)$  определяет фактическую форму тела, то для того, чтобы использовать закон подобия, необходимо найти соответствующее невращательное течение около искривленной поверхности

$$z = \left(1 - \frac{4}{\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}} f(r).$$

Хотя это соотношение несправедливо для значений  $\lambda < 2$ , два частных случая представляют собой исключение. Они отвечают нулевому значению любого множителя в последнем уравнении. Например, случай  $f(r) = 0$  соответствует диску инвариантной формы. Очевидно, что медленное движение тела вперед при  $\lambda = 0$  связывает тело любой формы с диском, имеющим в проекции ту же самую площадь поперечного сечения. Здесь вновь появляется указание

на то, что в том случае, когда мы имеем дело с установившимся широтным движением тела, значение имеет только вид проекции на плоскости  $z = \text{const}$ . При использовании этих результатов можно быть уверенным, что автомодельное решение является физически приемлемым. Поток энергии на больших расстояниях должен быть направлен от тела, и это может потребовать выполнения тщательного анализа соотношения фаз.

#### 4.5. Распространение волн в однородном течении

Важная, но во многих отношениях еще не решенная задача касается течения вращающейся жидкости за фиксированным телом. Она эквивалентна задаче о движениях тела в безграничной вращающейся жидкости. Особо рассмотрим случай, когда скорость течения на большом расстоянии вверх по потоку состоит из скорости твердого вращения  $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$  и скорости постоянного однородного течения  $\mathbf{U}$ , т. е.  $\mathbf{q}_{\infty} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{U}$ . Свойства волнового движения в этой области напоминают свойства плоских инерционных волн при  $\mathbf{U} = 0$ , которые были проанализированы в разделе 4.2.

Линейные невязкие уравнение движения, приведенные к безразмерному виду введением масштабов  $\llbracket L, \Omega^{-1}, U \rrbracket$ , были получены в разделе 2.2. Они записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \varepsilon \hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.1)$$

Здесь число Россби  $\varepsilon = U/\Omega L$  не обязательно мало и

$$\hat{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{U}, \quad \hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{\mathbf{\Omega}}{\Omega}.$$

Как и в (4.2.1), эти уравнения являются независимыми в любой частной декартовой системе координат. Однако для простоты мы примем  $\hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\mathbf{k}}$ .

Решение для плоских волн ищется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{Q} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t), \\ p &= \Phi \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в (4.5.1) приводит к соотношению

$$\lambda = \pm 2\hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \varepsilon \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.5.2)$$

а также соотношениям для фазовой и групповой скоростей

$$\mathbf{c}_p = \left( \pm 2 \frac{\hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\hat{\mathbf{k}}|} + \varepsilon \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.5.3)$$

$$\mathbf{c}_g = \pm \frac{2}{|\hat{\mathbf{k}}|} \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{\Omega}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \varepsilon \hat{\mathbf{U}}. \quad (4.5.4)$$

Эти формулы являются соответствующими обобщениями (4.2.4), (4.2.9) и (4.2.13). Смысл их ясен: волновые скорости увеличиваются за счет свободной конвекции поля, а частота изменяется на величину доплеровского сдвига.

Предположим, что  $\hat{U} = -\hat{\Omega}$ . Тогда энергия может передаваться вверх по потоку (т. е. против течения), если компонента групповой скорости в этом направлении положительна  $c_g \cdot \hat{\Omega} > 0$ . Это условие может быть переписано в виде

$$\frac{2}{\kappa} (1 - (\hat{\Omega} \cdot \hat{\kappa})^2) > \varepsilon \quad (\kappa = |\kappa|).$$

Очевидно, всегда существуют достаточно длинные волны, для которых это неравенство выполняется, или, иначе, волны с волновым числом  $\kappa$  не могут распространяться против однородного потока, когда

$$\varepsilon > \frac{2}{\kappa}.$$

Следовательно, если энергия частного возмущения сконцентрирована в ограниченном диапазоне волновых чисел, то очень небольшая ее часть может переместиться на большие расстояния вверх по потоку при условии, что противотечение является достаточно сильным. В случае вращающегося диска основная часть спектра приходится на  $\kappa > \pi$ . Эти волны не могут распространяться против течения, когда

$$\varepsilon > \frac{2}{\pi}.$$

Эта оценка соизмерима с полученной ранее. Конечно, приведенные выше критические значения волнового числа являются неточными, так как можно легко показать, что  $\kappa > 1/2\pi$  является более подходящим ограничением, однако представляется правдоподобным, что натекающий поток при некоторых значениях  $\varepsilon$ , близких к указанной величине, предотвращает появление большей части возмущений, возникающих при движении вверх по потоку.

Можно ожидать, что волны с волновым вектором (из промежутка между  $\kappa$  и  $\kappa + \Delta\kappa$ ), обусловленные локализованным осциллирующим возмущением с частотой  $\lambda$ , асимптотически концентрируются в радиальном направлении  $\mathbf{r}_g$ , которое ориентировано параллельно их групповой скорости  $c_g$ . С помощью тех же аргументов этот результат можно получить и для общего случая, но мы ограничимся анализом одного важного частного случая, когда

$$\hat{U} = -\hat{\Omega} = -\hat{\kappa}.$$

В этом случае течение направлено антипараллельно оси вращения. Такая ситуация соответствует равномерному движению тела вдоль  $\Omega$ .

Общие черты распространения волн можно выяснить на примере более или менее типичной краевой задачи для функции давления. Она включает неоднородное невязкое уравнение (2.2.4)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \nabla^2 p + 4 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = F(x, y, z) e^{-i\lambda t} \quad (4.5.5)$$

и граничные условия, согласно которым  $p$  и все ее производные равняются нулю на бесконечности. Правая часть (4.5.5), физический смысл которой уточнять не будем, характеризует локальный приток энергии, и мы предположим, что  $F$  является экспоненциально затухающей функцией  $\mathbf{r}$ . Решение требуется согласовать с условием излучения.

Пусть

$$p = \Phi(x, y, z) e^{-i\lambda t}, \quad (4.5.6)$$

так что

$$\left(i\lambda + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \nabla^2 \Phi + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = F(x, y, z).$$

Решение последнего уравнения может быть представлено через тройной интеграл Фурье

$$\Phi(x, y, z) = F\{\bar{\Phi}\} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{K}, \quad (4.5.7)$$

где  $\mathbf{k} = k_1 \hat{\mathbf{i}} + k_2 \hat{\mathbf{j}} + k_3 \hat{\mathbf{k}}$  и  $d\mathbf{K} = dk_1 dk_2 dk_3$ .

Кроме того, так как

$$F = F\{\bar{F}\},$$

то

$$\Phi = F \left\{ \frac{\bar{F}(\mathbf{k})}{\bar{G}(\mathbf{k})} \right\}, \quad (4.5.8)$$

где

$$\bar{G}(\mathbf{k}) = (\lambda + \varepsilon k_3)^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - 4k_3^2, \quad (4.5.9)$$

является действительной функцией своих аргументов. Контурные интегралы в (4.5.7) выбираются в соответствии с условием излучения. Лайтхилл [147] использовал метод стационарной фазы при выводе асимптотических представлений для многократных интегралов подобного типа, встречающихся во всех задачах анизотропного волнового движения. Результаты этого исследования были использованы при решении рассматриваемой задачи Нигэмом и Нигэмом [190]. Они показали, что асимптотическое решение вида (4.5.6), удовлетворяющее условию излучения, может быть записано так:

$$p \sim \frac{4\gamma^2}{|\mathbf{r}|} e^{-i\lambda t} \sum \frac{A\bar{F} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{|\nabla_{\mathbf{k}} \bar{G}| \sqrt{C}}, \quad (4.5.10)$$

когда  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  вдоль любого заданного луча (назовем его  $\mathbf{r}_g$ ). Сумма  $\Sigma$  берется по всем точкам ( $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ) на поверхности  $\bar{G} = 0$ , нормаль к поверхности считается параллельной  $\mathbf{r}$  и

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \bar{G}}{(\partial \bar{G} / \partial \lambda)} < 0. \quad (4.5.11)$$

Этот результат показывает, что гауссовская кривизна  $C$  не равна нулю в каждой из точек, в которых  $A = \pm i$ , тогда  $C < 0$ ;  $A = \pm 1$ , тогда  $C > 0$ , а поверхность  $\bar{G} = 0$  является выпуклой в направлении  $\pm \nabla \bar{G}$ . Мы не будем обсуждать детали анализа и отсылаем интересующихся к цитированной статье Нигэма и Нигэма. Нам будет интересовать только физическая и геометрическая интерпретация общего результата, а также качественное описание процесса распространения волн. Частные задачи решаться здесь не будут.

Если приравнять нулю уравнение (4.5.9) для поверхности волновых чисел, то оно станет идентичным соотношению между частотой и компонентами волновых чисел, которое было получено ранее [см. (4.5.2)] при анализе плоских волн. Другими словами, при заданной частоте волновой вектор удовлетворяет соотношению

$$\bar{G}(\mathbf{k}, \lambda) = 0.$$

Кроме того,  $-(\nabla_{\mathbf{k}} \bar{G}) / (\partial \bar{G} / \partial \lambda)$  действительно является групповой скоростью для волн с частотой  $\lambda$ , поскольку

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa_1} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa_2} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa_3} \hat{\mathbf{k}},$$

и на основании правила дифференцирования неявной функции получаем

$$-\left( \frac{\partial \bar{G} / \partial \kappa_i}{\partial \bar{G} / \partial \lambda} \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa_i}.$$

Таким образом, нормаль к поверхности волновых чисел параллельна вектору групповой скорости  $\mathbf{c}_g$ . Условия, использованные при выводе асимптотической формулы (4.5.10), означают, что доминирующий эффект в заданном радиальном направлении  $\mathbf{r}_g$  создается волнами, групповые скорости которых имеют то же самое направление. Дополнительное условие (4.5.11) гарантирует, что поток энергии всегда направлен, как и должно быть, от источника возмущения.

Поверхность волновых чисел является поверхностью вращения относительно  $\kappa_3$  или оси  $z$ ; ее проекция на плоскость  $\kappa_1, \kappa_2$  показана на рис. 4.5 для  $\lambda < 2$ . Стрелки указывают направление групповой скорости, которая легче всего определяется отображением поверхности волновых чисел для двух близких значений  $\lambda$ . Поскольку  $\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \lambda$ , то вектор групповой скорости всегда ориентирован по направлению к поверхности с большим значением  $\lambda$ .

Различные виды волн и способы их распространения можно изучить, анализируя поверхность постоянной фазы

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t = P. \quad (4.5.12)$$

с помощью асимптотического решения в различные моменты времени. Волна с вектором  $\mathbf{k}$ , скажем в точке  $p_2$  на рисунке, вносит вклад в асимптотическое решение только вдоль направления, которое параллельно вектору ее групповой скорости  $\mathbf{c}_g$ . Пусть  $P_j = P + \lambda t_j$  в момент  $t = t_j$ ; к этому времени энергия в этом диапазоне

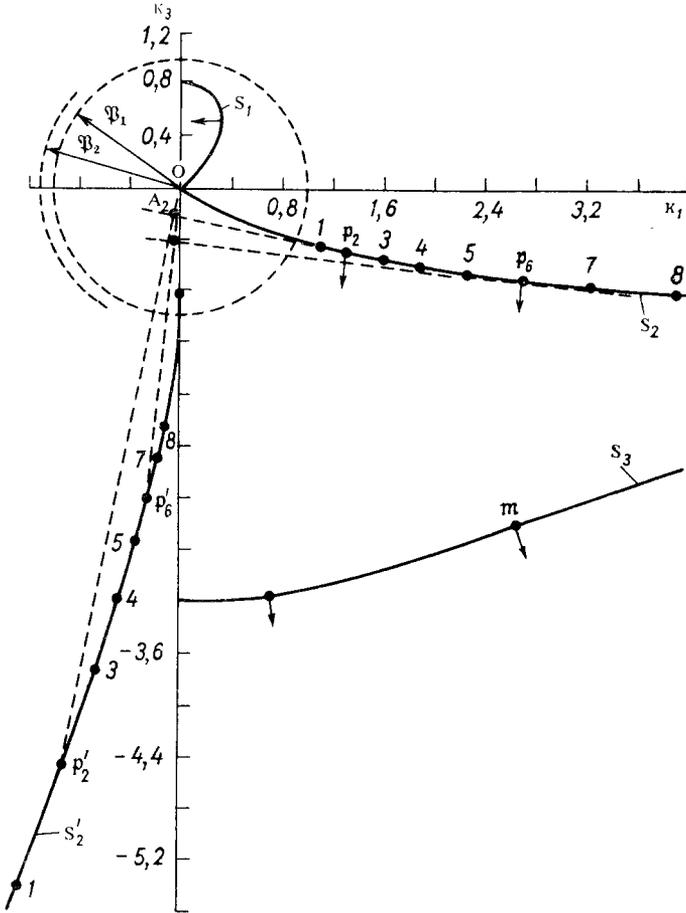


Рис. 4.5. Жирными сплошными линиями показаны три разветвления поверхности волновых чисел при  $\lambda = 1,2$ ,  $\varepsilon = 1,0$ . Приводится построение поверхности постоянной фазы  $S_2$  (тонкие линии). Точка  $m$  является точкой перегиба.

волновых чисел должна быть перенесена в направлении, соответствующем  $\mathbf{c}_g$ , на расстояние

$$r = \frac{P_j}{|\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}|}. \quad (4.5.13)$$

Здесь  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}$  имеет смысл проекции  $\mathbf{k}$  на прямую, параллельную  $\mathbf{c}_g$ , и обозначается отрезком  $A_2O$ . Расстояние, которое волна проходит

за время  $t_1$ , находится отображением отрезка  $A_2O$  на сферу радиуса  $\sqrt{P_1}$  (на рисунке —  $\overline{Op'_2}$ ). Образ поверхности волновых чисел, получаемый обращением в эту сферу, называется взаимно полярной поверхностью. Тем же способом определяется направление, в кото-

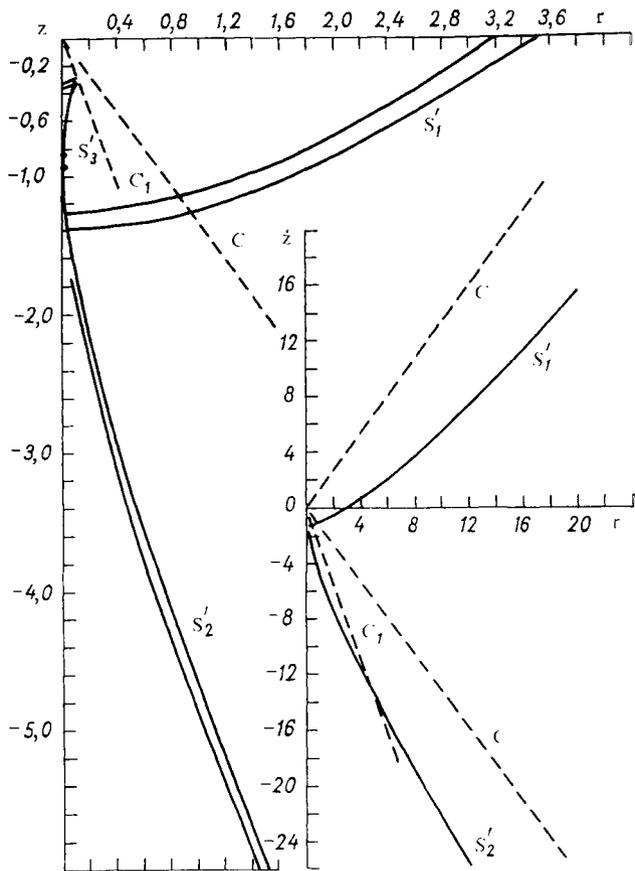


Рис. 4.6. Поверхности постоянной фазы в два близких момента времени. На вставке эти поверхности изображены в мелком масштабе. Здесь  $\lambda = 1,2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = 1,1$ . Точки пиков совпадают с конусом  $C_1$ .

ром каждая волна вносит свой основной вклад. Геометрическое место всех этих точек составляет поверхность постоянной фазы (она показана на рис. 4.6). Изменение амплитуды вдоль этой поверхности зависит от конкретной вынуждающей функции  $F(x, y, z)$ .

Можно различить три волновые системы, каждая из которых соответствует различным ветвям поверхности волновых чисел. Поверхность  $S_1$  образует поверхность  $S'_1$ . Ей отвечают волны, распро-

строящиеся по течению и против течения, но которые всегда лежат внутри конусов  $C$ , заданных уравнением

$$r = \pm \left( \frac{4}{\lambda^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} z.$$

Эти конусы являются характеристическими поверхностями при отсутствии противотечения ( $\varepsilon = 0$ ), они были изучены в разделе 4.3. Поверхность  $S_2$  (ее образ показан как  $S_2'$ ) соответствует системе волн, которые распространяются вниз по течению и целиком заключены в ограничивающий конус. Наконец, поверхность  $S_3$  создает заостренную в вершине волну. Она перемещается вниз по течению и заключается в другом конусе  $C$ , который представляет собой геометрическое место точек этих волновых выступов. Этот особый вид волн возникает из-за того, что поверхность  $S_3$

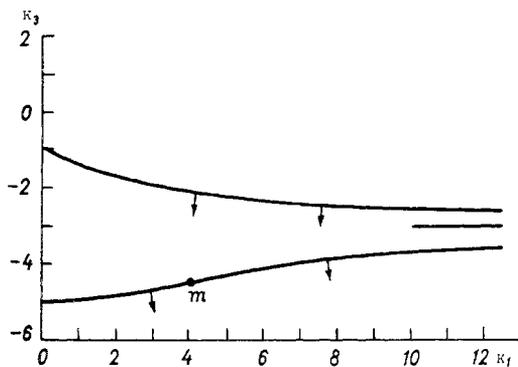


Рис. 4.7. Две ветви поверхности волновых чисел для  $\lambda = 3$ ,  $\varepsilon = 1$ .

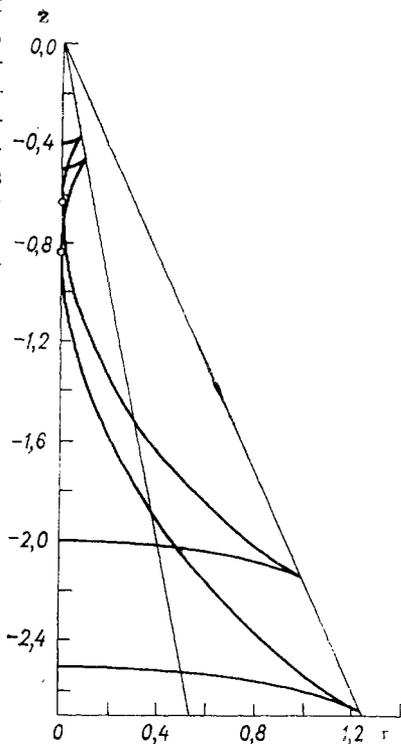


Рис. 4.8. Поверхности постоянных фаз (жирные линии) для  $\lambda = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  и  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 2,5$ . Тонкие линии являются геометрическим местом пиков. Обе системы волн перемещаются только вниз по течению.

содержит кривую нулевой кривизны, проекцией которой на плоскость  $k_2 = 0$  является точка  $m$ .

Интересно заметить, что при отсутствии течения и  $\varepsilon = 0$  поверхности  $S_1$  и  $S_2$  обращаются в конусы  $C$ , тогда как  $S_3$  вырождается в точку в начале координат. Совершенно так же можно рассмотреть случай  $\lambda > 2$ , для которого частота возбуждения по абсолютной величине больше чем  $2\Omega$ . Поверхность волновых чисел, кривые нулевой кривизны и поверхности постоянной фазы показаны на рис. 4.7 и 4.8. В этом случае существуют только две системы волн, причем обе с заостренными вершинами. Каждая из них распростра-

няется вниз по течению. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  или  $\lambda \rightarrow \infty$  эти поверхности вырождаются в точку в начале координат; в указанном предельном случае движение можно сравнить с потенциальным течением в несжимаемой жидкости.

Задача с начальными условиями может быть представлена с помощью суперпозиции этих волн на всех частотах, или, иначе, интегралом Фурье, зависящим от времени. Однако реальные задачи, в которых рассматриваются тела конечных размеров, перемещающиеся во вращающейся жидкости с равномерной скоростью, требуют задания подходящих граничных условий. Последние отнюдь не всегда являются очевидными. Эта важная задача пока еще не решена полностью. Ее предварительный анализ будет выполнен в следующих двух разделах.

#### 4.6. Движение вдоль оси вращения с умеренными скоростями

Тэйлор [265, 266] экспериментально подтвердил существование столбчатого движения во вращающейся жидкости и установил некоторые параметрические соотношения, которые, по-видимому, характеризуют этот режим течения. Например, он показал, что для создания ударного течения при движении сферы, перемещающейся *вдоль* оси вращения, требуется, чтобы выполнялось условие:  $\varepsilon < 1/\lambda$ . При больших значениях числа Россби наблюдаются отклонения от двухмерного режима течений. По существу те же результаты были позднее получены Лонгом [155], который использовал тело, состоящее из комбинации полусферы и конуса. Лонг пришел к заключению, что при больших числах Россби происходит образование системы волн в направлении течения; при очень малых значениях  $\varepsilon$  впереди тела наблюдался столб (Лонг не обнаружил столба позади тела ни при каких значениях  $\varepsilon$ ).

Рисунок 4.9 является примером движения, которое удается видеть благодаря окрашенным волоскам, помещенным в жидкость. Указанные эксперименты послужили толчком для многих теоретических исследований по определению точных условий разделения различных форм движения. В итоге были достигнуты некоторые успехи в понимании физической природы явления, однако окончательных результатов количественного характера так и не было получено. Причины этого будут изложены в следующем разделе.

Задача о медленном движении ( $\varepsilon = 0$ ), рассмотренная в разделе 4.3, показывает, что при образовании столба Тэйлора основная часть возмущения порождается волнами, имеющими длины порядка диаметра тела. По-видимому, столб не может образоваться, если эти волны сносятся вниз по потоку течением, скоростью которого превышает групповую скорость волн. На этом основании грубые первоначальные оценки критического числа Россби, соответствующего верхнему пределу диапазона существования столбчатого движения (см. разделы 4.3 и 4.5), показывают, что  $\varepsilon \doteq 2/\lambda$ .

Волновое движение типа изученного Лонгом не имеет теоретического обоснования в рамках приближения «медленного движения».

Однако анализ, выполненный в последнем разделе, позволяет учесть конвективные и инерционные члены в уравнениях движения. Там было показано, что в однородных потоках образуется три системы волн; две из них включают волны, которые распространяются только вниз по течению, тогда как третья содержит волновое движение в любом направлении. Эти результаты позволяют объяснить волновое движение позади препятствия, но в то же время они ставят вопросы, связанные с отсутствием возмущения перед телом при больших числах Россби. Как мы уже видели, достаточно длинные волны всегда могут проникнуть далеко вверх против течения. Следовательно, в этой области должно возникнуть некоторое возмущение, хотя его суммарный эффект может быть малым, вероятно даже пренебрежимо малым, если основные волны, создаваемые телом, сносятся назад или быстро затухают.

Важнейшее значение имеет вопрос о характере граничных условий вверх по потоку. Другой вопрос возникает при попытке корректно поставить краевую задачу при наличии многочисленных волн, распространяющихся вдоль потока. Однако этот вопрос будет обсуждаться позже. Необходимо с самого начала отдавать себе отчет в том, что неограниченное движение уже представляет собой в высшей степени идеализированную ситуацию. Задание в пределе  $E \rightarrow 0$ , что эквивалентно отсутствию вязкости, может только ухудшить положение. Ограничивающие горизонтальные стенки и экмановские слои, эффект которых до сих пор считался существенным во всех задачах, теперь отодвинуты на бесконечность, так же как и боковые поверхности. Влияние этих допущений необходимо тщательно оценить, поскольку весьма вероятно, что различные встречающиеся здесь предельные переходы не являются взаимозаменяемыми.

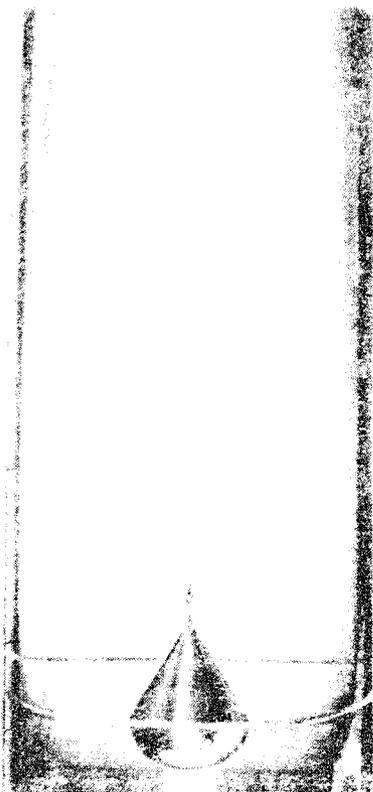


Рис. 4.9. Однородное течение вращающейся жидкости около тела, состоящего из комбинации полусферы и конуса [155]. Темные прожилки указывают, что волны распространяются вниз по течению. Радиус трубы  $r_0$  равен 14,5 см, радиус сферы 3,8 см, вертикальная скорость направлена вверх по потоку  $U = 0,276\Omega r_0$ .

Часто используют предположение о том, что имеется класс установившихся продольных течений, в которых на значительном расстоянии от тела вверх по потоку отсутствуют какие-либо возмущения. Указанное предположение сразу же устраняет возможность появления столбчатого движения. При этом иногда исходят из следующих двух соображений. Первое из них состоит в том, что ранее описанные эксперименты, по-видимому, не подтверждают существования движения вверх по потоку, за исключением экстремально малых значений  $\epsilon$ . (Последняя из цитированных выше работ заставляет сомневаться в этом выводе.) Второе соображение основывается на отдаленной аналогии с гидродинамическими поверхностными волнами, вызванными перемещающейся пульсацией давления, когда волны возникают только вниз по потоку. Рассмотрим сначала последний аргумент.

Волны в глубоком океане образуют дисперсионную систему волн с любыми скоростями распространения. Условие стационарности для скорости распространения возмущения приводит к неопределимой математической задаче, для которой возможны волны, соизмеримые по длине с размерами океана. Дополнительное предположение о том, что волны не перемещаются вверх по потоку, является достаточным, чтобы обеспечить единственность решения, как это обычно принято в физике. Это означает отставание волн от препятствия, что и наблюдается. Фазовая скорость основных генерируемых волн равна скорости распространения возмущения, однако их групповая скорость составляет только половину этой скорости и имеет то же направление. Этого достаточно для того, чтобы волны затухали позади тела. Решение может быть также получено как предельный случай нестационарной задачи с начальными условиями или, наоборот, введением в стационарные уравнения небольшой вязкой диссипации. В этом нет противоречия, и, следовательно, отпадают сомнения в справедливости решения.

Волны во вращающейся жидкости являются анизотропными и дисперсионными; их энергия может более эффективно распространяться в направлении оси вращения и вызывать появление двухмерного или столбчатого движения. Существование столбчатого течения подтверждает также тот факт, что при некоторых обстоятельствах волны опережают тело и изменяют условия на бесконечности. В этом отношении более уместна аналогия между вращающейся и стратифицированной жидкостью. Кроме того, пока не было показано, что решения, основанные на предположении об отсутствии возмущения вверх по потоку, следуют из уравнений для неустановившегося движения или являются предельным случаем решения уравнений вязкого течения, когда вязкость исчезает. Напротив, исследование неустановившегося течения, выполненное Траструмом [274], которое кратко обсуждалось выше, свидетельствует о том, что результирующее течение на самом деле включает двухмерную геострофическую компоненту, простирающуюся до бесконечности в обоих направлениях. Ее структура зависит от начальных условий и временных изменений. Расхождение между теоретиче-

скими и экспериментальными данными требует объяснения. В связи с этим необходимо заметить, что до сих пор не имеется точных измерений во всей жидкости. Лонг не привел никаких данных, касающихся введения краски прямо над телом, где эффекты столбчатой структуры должны быть наиболее заметными. Несомненно, необходимо выполнить серию более определенных экспериментов и недавние неопубликованные результаты Т. Бенжамина действительно показывают столбчатые образования в обоих направлениях, т. е. перед телом и за ним.

Вероятно, гипотеза об отсутствии возмущений вверх по потоку является недостаточно корректной, и тело, введенное в поток, всегда в какой-то степени влияет на условия на бесконечности. Однако она может быть и, вероятно, на самом деле является превосходным *приближением* в широком диапазоне параметров, так как энергия, переносимая вверх по течению, составляет только небольшую часть общего количества генерируемой энергии. Поэтому решения, полученные на основании указанного приближения, могут оказаться важными и интересными.

Теория, развитая Тэйлором [265], Лонгом [155], Франкелем [70] и Сквайром [238], касается *установившихся нелинейных* вращательных течений. В этом случае предпочтительно использовать размерные уравнения движения, записанные в *инерциальной системе координат*. В безразмерном виде уравнения записываются короче. Мы будем придерживаться обозначений, введенных Сквайром.

Пусть  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  является произвольной ортогональной системой координат с метрическими коэффициентами  $h_1, h_2, h_3$ . Далее пусть  $q_1, q_2, q_3$  — соответствующие компоненты скорости. Рассмотрим теперь только установившиеся осесимметричные течения и обозначим через  $\xi_2$  азимутальный угол относительно оси симметрии, так что  $h_2 = r$ . Тогда все переменные не зависят от угла  $\xi_2$ , и общая функция тока  $\Psi$  может быть определена следующим образом:

$$h_2 q_1 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_3}, \quad h_2 q_3 = - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1}. \quad (4.6.1)$$

Так же как и в разделе 3.6, введем циркуляцию

$$\Gamma = h_2 q_2. \quad (4.6.2)$$

Подстановка этих выражений в основные невязкие уравнения движения [т. е. в (1.2.2) при  $\Omega = 0$ ] позволяет получать некоторые важные выводы. Например, из стационарного уравнения сохранения импульса для  $\xi_2$ -компоненты следует, что

$$\frac{\partial (\Psi, \Gamma)}{\partial (\xi_1, \xi_3)} = 0.^1$$

<sup>1</sup> Якобиан определяется следующим образом:

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Отсюда при заданных условиях циркуляция зависит только от функции тока

$$\Gamma = \Gamma(\Psi). \quad (4.6.3)$$

Азимутальная компонента стационарного уравнения вихря может быть записана так:

$$2\Gamma \frac{\partial(\Gamma, h_2)}{\partial(\xi_1, \xi_3)} - h_2 \frac{\partial(\Psi, D\Psi)}{\partial(\xi_1, \xi_3)} + 2D\Psi \frac{\partial(\Psi, h_2)}{\partial(\xi_1, \xi_3)} = 0, \quad (4.6.4)$$

где

$$D\Psi = \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_3} \right) \right], \quad (4.6.5)$$

а различные компоненты вихря определяются в виде

$$v_1 = -\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_3}, \quad v_2 = \frac{1}{h_2} D\Psi, \quad v_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_1}.$$

Анализ можно существенно упростить, если принять, что  $\xi_1 = \text{const}$  является поверхностью постоянной  $\Psi$ , другими словами,

$$\Psi = \Psi(\xi_1). \quad (4.6.6)$$

Тогда  $\Gamma$  и  $\Psi$  не зависят от  $\xi_3$ ,  $q_1$  равно нулю по определению, а (4.6.4) сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} D\Psi - \frac{2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_3} \left( D\Psi + \Gamma \frac{d\Gamma}{d\Psi} \right) = 0$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$D\Psi + \Gamma \frac{d\Gamma}{d\Psi} = r^2 A(\Psi) = r v_2 + \Gamma \frac{d\Gamma}{d\Psi}, \quad (4.6.7)$$

где  $A$  — произвольная функция.

Другой важный результат следует из анализа уравнения сохранения импульса для  $\xi_3$ -компоненты, именно,

$$q_2 v_1 - q_1 v_2 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial H}{\partial \xi_3},$$

где

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (q_2^2 + q_3^2)$$

обозначает общее «давление». Вводя функцию тока и используя (4.6.6), имеем

$$H = H(\Psi). \quad (4.6.8)$$

Таким образом, общее «давление» является функцией  $\Psi$ , т. е. в конечном счете мы получили теорему Бернулли.

Если циркуляция очень мала, то (4.6.7) сводится к уравнению, описывающему симметричные течения с завихренностью (и потенциальные течения, если вихрь равняется нулю). Этот вопрос обсуждался Лэмбом [140].

С другой стороны, когда циркуляция велика, имеются две возможности. Во-первых,  $\Gamma d\Gamma/d\Psi$  может быть большим по сравнению с  $rv_2$ , и в этом случае приближенно

$$\Gamma \frac{d\Gamma}{d\Psi} = r^2 A(\Psi).$$

Поскольку  $\Gamma$  и  $A$  зависят только от  $\Psi$ , то это выражение означает, что

$$\Psi = \Psi(r). \quad (4.6.9)$$

Функция тока не зависит от вертикальной координаты и поэтому можно ожидать возникновения столбчатого движения. Конечно, это и есть теорема Тэйлора — Праудмена, записанная в лабораторной системе координат. Во-вторых, может случиться так, что оба указанных члена соизмеримы по величине. Тогда уравнение (4.6.7) будет очень напоминать уравнение Гельмгольца, часто встречающееся в классической теории волн. В этом случае во вращающейся жидкости будет наблюдаться волновое движение. Выбор произвольной функции  $A(\Psi)$  зависит от специфики рассматриваемой задачи. Пусть скорость жидкости на большом расстоянии вверх по потоку складывается из постоянной скорости однородного потока вдоль линии симметрии и скорости твердого вращения относительно этой оси. (Вновь нужно помнить, что это предположение может оказаться несостоятельным.) Асимптотически

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sim (r, \theta, z)$$

и

$$\mathbf{q} \sim \Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} - U \hat{\mathbf{k}},$$

так что

$$(q_1, q_2, q_3) \sim (0, \Omega r, -U).$$

Эти условия вверх по потоку могут быть выражены следующим образом:

$$\Gamma = \Omega r^2, \quad \Psi = \frac{1}{2} U r^2, \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2,$$

или, что то же самое,

$$\Gamma = 2 \frac{\Omega}{U} \Psi, \quad H = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 + 2 \frac{\Omega^2}{U} \Psi. \quad (4.6.10)$$

Последние равенства устанавливают связь между  $\Gamma$ ,  $H$  и  $\Psi$  вдоль всех линий тока, начинающихся на бесконечности вверх по течению. Теперь, ради удобства, перейдем от произвольной декартовой системы координат к цилиндрической. Уравнения (4.6.7) тогда можно записать в виде

$$D\Psi + 4 \frac{\Omega^2}{U^2} \Psi = 2r^2 \frac{\Omega^2}{U},$$

где

$$D = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Отклонение от однородного потока целесообразнее описывать с помощью возмущений функции тока

$$\tilde{\psi} = \Psi - \frac{Ur^2}{2},$$

которые удовлетворяют уравнению

$$D\tilde{\psi} + 4 \frac{\Omega^2}{U^2} \tilde{\psi} = 0.$$

Замечательно, что сформулированная гипотеза сводит систему нелинейных уравнений в частных производных к одному линейному уравнению для функции тока. Теперь должно быть ясно, почему эта теория заслуживает и пользуется таким вниманием.

Запишем приведенное выше уравнение в *безразмерном* виде

$$D\tilde{\psi} + \frac{4}{\varepsilon^2} \tilde{\psi} = 0. \quad (4.6.11)$$

Здесь использованы обычные характерные масштабы

$$\llbracket L, \Omega^{-1}, U \rrbracket$$

и введено обозначение  $\varepsilon = U/\Omega L$ . В частности,  $\frac{1}{2} UL^2$  является масштабом для самой функции тока.

Очевидно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  возникает несообразность, ибо граничные условия вверх по потоку больше не совместимы с существованием препятствия. Интересно отметить, что, хотя при выводе (4.6.11) не было сделано никаких приближений, оно тем не менее идентично уравнению, которое было получено с помощью линеаризации, основанной на подстановке Озина. Этот факт говорит о том, что исследования, использующие подобного рода подстановку, заслуживают доверия.

Волновое движение, изображенное на рис. 4.9, аналогично решению (4.6.11), соответствующему цилиндрическому резервуару. Если безразмерный радиус трубы  $a$  равен  $r_0/L$  (здесь  $L$  — радиус тела), то сепарабельные решения могут быть найдены в форме

$$rJ_1\left(\frac{\xi_n}{a}, \frac{r}{a}\right) \exp\left[i\left(\frac{4}{\varepsilon^2} - \left(\frac{\xi_n}{a}\right)^2\right)^{1/2} z\right],$$

где  $J_1(\xi_{n1}) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

При  $\frac{4}{\varepsilon^2} < \left(\frac{\xi_{11}}{a}\right)^2$  решения экспоненциально растут в одном направлении и затухают — в другом, когда  $|z| \rightarrow \infty$ . В этом случае суперпозиция всех таких мод в решении задачи о течении около произвольного тела должна описывать движение, которое очень похоже на потенциальное течение. Однако, если

$$\frac{4}{\varepsilon^2} > \left(\frac{\xi_{n1}}{a}\right)^2,$$

Тогда некоторые из этих натуральных мод представляют собой волновое движение в продольном направлении. Первый случай волнового движения имеет место, когда

$$\varepsilon \leq \frac{2a}{\xi_{11}},$$

где  $\xi_{11} = 3,8317$ . Если число Россби удовлетворяет этому неравенству, то длина волны возмущения равна

$$\frac{2\pi}{k} = 2\pi \left( \frac{4}{\varepsilon^2} - \left( \frac{\xi_{11}}{a} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (4.6.12)$$

В безразмерном виде эти соотношения записываются так:

$$\frac{U}{\Omega r_0} < \frac{2}{\xi_{11}}; \quad \frac{2\pi}{k} = 2\pi \left( \frac{4\Omega^2}{U^2} - \left( \frac{\xi_{11}}{r_0} \right)^2 \right)^{-1/2}.$$

При построении рис. 4.9 были использованы следующие значения:  $r_0 = 14,5$  см,  $U/\Omega r_0 = 0,276$ ; теоретическая длина волны 14,79 см. На большом расстоянии позади препятствия эта волна должна характеризовать основную часть возмущения. Измеренное значение длины волны совпадает с теоретически предсказанным.

Чтобы найти решение задачи о течении около препятствия, требуется рассмотреть суперпозицию всех возможных мод и удовлетворить всем граничным условиям, в том числе условию отсутствия волнового движения вверх по потоку. Это не простая задача, так как фундаментальные решения, удовлетворяющие описанным условиям, очень трудно построить. Заметного успеха в этом направлении добился Стюартсон, который получил решение уравнения (4.6.11), подчиненное заданным условиям, в случае потока за сферой, помещенной в безграничный резервуар.

Используемый им метод заключается в определении класса решений, которые удовлетворяют всем граничным условиям, за исключением тех, которые задаются на поверхности единичной сферы. Эти функции, каждая из которых подразумевает отсутствие течения вверх по потоку, имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{2m}(r, \Theta) = r^{1/2} (1 - \mu^2) & \left\{ J_{-\frac{1}{2} - 2m} \left( \frac{2r}{\varepsilon} \right) \frac{d}{d\mu} P_{2m}(\mu) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(4j+3)(2j)!(2m+1)! J_{2j-\frac{3}{2}} \left( \frac{2r}{\varepsilon} \right) \frac{d}{d\mu} P_{2j+1}(\mu)}{j!(j+1)!m!(m-1)!(m-j+1)(2j-2m+1)2^{2j+2m-1}} \right\} \quad (4.6.13) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{2m-1}(r, \Theta) = r^{1/2} (1 - \mu^2) & \left\{ J_{\frac{1}{2} - 2m} \left( \frac{2r}{\varepsilon} \right) \frac{d}{d\mu} P_{2m-1}(\mu) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(4j-5)(2j-1)!(2m)! J_{2j-\frac{5}{2}} \left( \frac{2r}{\varepsilon} \right) \frac{d}{d\mu} P_{2j}(\mu)}{j!(j-1)!m!(m-1)!(m+j+1)(2j-2m+3)2^{2j+2m-1}} \right\}, \quad (4.6.14) \end{aligned}$$

где  $\gamma$  и  $\Theta$  — сферические координаты,  $\mu = \cos \Theta$  и  $P_m(\mu)$  — полином Лежандра. Обе (и нечетная, и четная) функции могут быть записаны так:

$$\tilde{\psi}_i = (1 - \mu^2)^{1/2} \left\{ J_{-i - \frac{1}{2}} \left( \frac{2r}{\varepsilon} \right) \frac{d}{d\mu} P_i(\mu) - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} J_{j - \frac{1}{2}} \left( \frac{2r}{\varepsilon} \right) \frac{d}{d\mu} P_j(\mu) \right\}, \quad (4.6.15)$$

где коэффициенты находятся путем сравнения этого и предшествующих уравнений. Общее решение представляется в следующем виде:

$$\tilde{\psi} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \tilde{\psi}_i(\mu, \Theta). \quad (4.6.16)$$

Остается только определить неизвестные постоянные Фурье. Коэффициенты находятся с помощью граничного условия на поверхности сферы  $r = 1$

$$\tilde{\psi} = -r^2 = -(1 - \mu^2).$$

(Здесь  $r$  — цилиндрическое.) Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \tilde{\psi}_i(1, \Theta) = -(1 - \mu^2).$$

однако согласно (4.6.15) это соотношение эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \delta_{ij} J_{-\frac{1}{2}-j} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) + \alpha_{ij} J_{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right] \frac{d}{d\mu} P_j(\mu) = -1,$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Набор функций  $(1 - \mu^2) (d/d\mu) P_j(\mu)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  является полным в промежутке  $|\mu| < 1$ , а свойство ортогональности полиномов Лежандра используется для того, чтобы получить систему

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[ \delta_{ij} J_{-\frac{1}{2}-j} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) + \alpha_{ij} J_{\frac{1}{2}+j} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right] = -\delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.6.17)$$

Эта бесконечная система линейных уравнений для коэффициентов решается численно. Стюартсон приводит следующую таблицу результатов:

$\varepsilon$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
2	0,903	0,01	—	—	—
1	2,08	0,35	0,01	—	—
$\frac{2}{3}$	3,81	2,48	0,34	0,15	—
$\frac{1}{2}$	3,82	10,92	4,36	1,09	0,12

После исследования свойств численного решения и определения коэффициентов Стюартсон пришел к выводу о том, что решение перестает существовать при значениях  $\varepsilon$ , меньших чем  $\varepsilon = 0,347$ . В этой точке граничные условия вверх по потоку оказываются явно несостоятельными в том смысле, что они не учитывают цилиндрической компоненты течения, которая имеет место в данном случае. Полученное критическое число Россби очень близко к экспериментальному значению Тэйлора, однако это согласие может быть случайным, поскольку сопротивление увеличивается на два порядка, когда  $\varepsilon$  меняется от 1 до  $1/2$ . В этом диапазоне значений  $\varepsilon$  режим потока становится весьма неустойчивым. Это свидетельствует о том, что при данных значениях  $\varepsilon$  имеет место также ударное течение. Более того, есть указания, что при *всех* значениях  $\varepsilon$  появляются какие-то две размерности. Следовательно, столбчатое течение существует при  $\varepsilon < 0,347$ , весьма вероятно при  $\varepsilon < 0,5$  и очень вероятно при всех больших значениях  $\varepsilon$ .

Модификации, связанные с учетом замкнутых областей, таких как область внутри цилиндра, вероятно, меняют скорее количественные, чем качественные аспекты решения. Если двухмерность движения всегда присутствует, то его анализ в областях различных конфигураций почти ничего не может добавить. С другой стороны, если это не так, то должна существовать определенная связь между формой резервуара (радиус трубы) и числом Россби, с помощью которой можно было бы разграничить волновой и столбчатый режимы квижений. Это было бы очень интересно с чисто теоретической точки зрения, однако первая возможность кажется более вероятной.

#### 4.7. Зависимость от времени

Полное уравнение для осесимметричной функции тока имеет вид [ср. с (2.2.4) для давления]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} - ED\right)^2 D\tilde{\psi} + 4 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} = 0. \quad (4.7.1)$$

Это уравнение вместе с обычными вязкими напряжениями и начальными условиями составляет корректно поставленную краевую задачу. Частная задача для медленного невязкого течения ( $\varepsilon = E = 0$ ) также является корректной, если число пространственных граничных условий уменьшено до одного (для нормальной компоненты скорости), так как уравнение (4.7.1) в этом случае будет иметь только второй порядок.

Здесь мы обсудим движение вдоль оси вращения, соответствующее  $E = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ . Уравнение (4.7.1), которое тогда сведется к уравнению четвертого порядка в частных производных, является, по-видимому, промежуточным между двумя предыдущими случаями. Необходимо соблюдать некоторую осторожность при постановке подходящих граничных условий. (Напомним, что волновое движение вдоль оси вращения в невязком потоке, которое изучалось раньше

в разделе 4,6, состоит из трех различных волновых систем. Только одна из них характеризует волны, распространяющиеся вверх по потоку, тогда как остальные две включают волны, перемещающиеся вниз по потоку.)

Стюартсон [250] и Траструм [274] использовали для решения (4.7.1) метод преобразований. Этот метод приводит к сложным алгебраическим соотношениям для параметров преобразования, которые необходимо рассортировать, прежде чем заниматься преобразованием обратных интегралов. Пока еще не решена ни одна из задач с начальными условиями для потока около тела при  $\varepsilon \neq 0$ ,  $E = 0$ .

Френкель [70] и Траструм нашли решения для потока в цилиндрической трубе, на поверхности которой в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, располагается кольцевой источник. В потоке не имеется никаких препятствий и вертикальная координата  $z$  изменяется от плюс до минус бесконечности вдоль любой осевой линии в жидкой области. Вопрос о характере и числе граничных условий обходится заданием условия равенства нулю всех переменных и их производных на бесконечности. Хотя эти решения являются несколько искусственными, тем не менее они имеют много интересных черт. Френкель рассмотрел случай стационарного движения, используя точное уравнение движения (4.6.11) и предположение об отсутствии возмущений вверх по потоку. Траструм решил задачу с начальными условиями, в основу которой было положено уравнение (4.7.1). Соотношение этих двух теорий уже обсуждалось выше. Наиболее существенное различие заключается в том, что стационарное течение, образовавшееся из нестационарного потока, имеет дополнительную двухмерную или геострофическую компоненту. Таким образом, столбчатое движение, отфильтрованное с помощью гипотез стационарных теорий (см. раздел 4.4), естественно вытекает из решения задачи с начальными условиями. Кроме того, структура геострофического течения оказывается зависящей от начальных условий и от того, каким образом достигается конечное состояние.

Хотя последнее слово еще не сказано, по-видимому, образование столбов является особенностью, внутренне присущей вращательному течению, и его нельзя игнорировать. Зато предположение об отсутствии возмущений вверх по потоку нужно рассматривать только как приближение, справедливое для определенных ситуаций.

УРАВНЕНИЯ,  
ОСРЕДНЕННЫЕ ПО ГЛУБИНЕ.  
МОДЕЛИ ОКЕАНИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

5.1. Введение

В этой главе рассматриваются движения вращающейся жидкости, которые помогают понять крупномасштабную циркуляцию океана. По большей части здесь подчеркиваются исследования созданных в *лаборатории* течений, которые воспроизводят явления, наблюдаемые также и в океане. Мы не намерены и не пытаемся дать в этой главе полное описание планетарных движений жидкости. Однако теория предыдущих глав сформулирована в таком виде, что привлекательно сравнить ее прямо с фундаментальной и неоднократно изучавшейся моделью океана. Польза первой и ограничения последней тогда станут очевидными.

5.2. Уравнения, осредненные по глубине

Рассмотрим стационарную вынужденную циркуляцию замкнутого объема вращающейся жидкости при очень незначительном изменении глубины и без замкнутых геострофических контуров. На рис. 5.1 показан бассейн такого типа, он является частью сферического кольца. Хотя очертания бассейна могут быть произвольными, боковые стенки предполагаются для простоты вертикальными. Движение создается воздействием напряжения, приложенного к верхней поверхности жидкости (ветер), или путем задания скорости этой поверхности, как в большинстве ранних работ. Движение от вращения диска в усеченном цилиндре раздела 2.20, которое является собой в какой-то степени типичную задачу, уже продемонстрировало некоторые поразительные параллели между лабораторной и планетарной циркуляцией. Разумеется, информация, полученная при этом, послужит для планирования и обоснования последующей процедуры.

*Безразмерные* уравнения движения есть

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \varepsilon \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{q}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

а граничные условия состоят в задании скорости или напряжения трения на верхней поверхности  $\Sigma_T$  и  $\mathbf{q} = 0$  на всех прочих поверх-

ностях. Имеется по крайней мере три отдельные области, где характер решения может заметно различаться. Это экмановские слои на верхней и нижней границах, невязкая внутренняя часть и пограничный слой, прилегающий к боковой стенке. С учетом этого представим скорость и давление в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_I + \tilde{\mathbf{q}}_L, \\ p &= \bar{p} + p_I + \tilde{p}_L, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

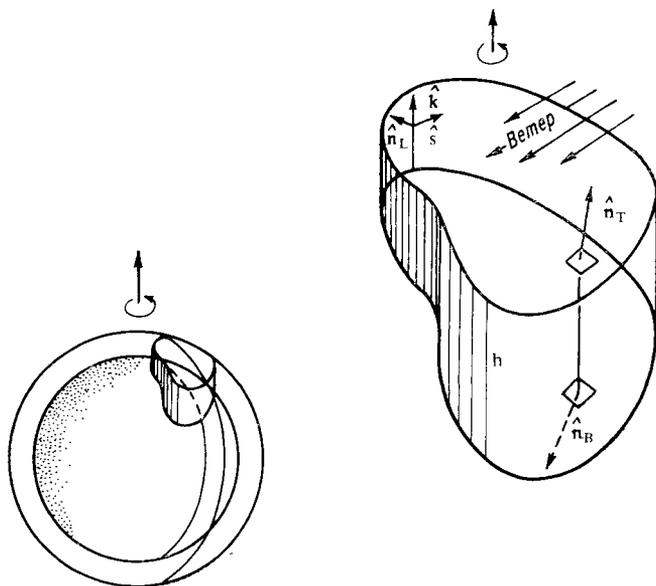


Рис. 5.1. Океанический бассейн без замкнутых географических контуров. Боковые стенки вертикальны, а верхняя поверхность подвержена «напряжению ветра». Бассейн, как показано на рисунке, может быть частью сферического кольца.

не обязательно подразумевая одинаковый порядок относительных величин всех слагаемых. Если бы мы поступали, как прежде, то следовало бы произвести серию формальных преобразований и решить задачу последовательно. Однако такой общий подход является слишком громоздким, если не непрактичным, так как имеется три малых параметра  $\varepsilon$ ,  $E$ ,  $\alpha = |\nabla h|$ , и требуется более гибкая процедура.

Формулируется приближенная теория, которая может соответствовать первому шагу асимптотической последовательности. Появляющиеся здесь переменные можно отождествить с членами низшего порядка соответствующих разложений для разных районов, и они упоминаются как таковые. Принятие определенной терминологии (член низшего порядка, первичная неизвестная и т. д.) дей-

ствительно ограничивает наши затруднения при возрастающем формализме, и здесь не должно быть сомнения.

Главным объектом исследования является теория движения вне экмановских слоев. Их можно исключить из рассмотрения, поскольку известно действие этих слоев на движение внутренней части — индуцированный поток массы на границах. Уравнение (2.17.3) дает граничное условие для  $\mathbf{q}_I$  на поверхности, движущейся с относительной скоростью  $U$  единичной величины. Нелинейная поправка к этой формуле с самого начала исключается, так как  $\varepsilon$  предполагается малым. Такое же граничное условие налагается на  $\mathbf{q}_I + \tilde{\mathbf{q}}_I$  в любом слое на боковой стенке, если его толщина много больше, чем  $E^{1/2}$ .

Задание поверхностного напряжения на  $\Sigma_T$  (масштабированного множителем  $\varepsilon E^{1/2} \rho \Omega^2 L$ ) равносильно тому, что

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.2.3)$$

при  $\zeta = 0$  есть известная функция в задаче  $\mathcal{A}_2$  (стр. 43); величина этого напряжения такая же, как на движущейся плоскости. Последующее обсуждение ограничено движениями, возбуждаемыми этим способом. Из решения для экмановского пограничного слоя на  $\Sigma_T$  следует, что нормальный поток на этой поверхности есть

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_I = -\frac{1}{2} E^{1/2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \left\{ \frac{\Pi}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}} \right\}. \quad (5.2.4)$$

Частная задача, решенная в разделе 2.20, показала, что топография накладывает жесткие ограничения на движение во внутренней области; стационарная скорость здесь есть  $O(E^{1/2})$ , если сосуд не содержит замкнутых геострофических контуров. Отсюда прямо следует, что нормальный приток в придонный экмановский слой может быть только  $O(E)$ , так как  $U_B = 0$ ; условие для скорости на дне является в основном геометрическим:

$$\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{q}_I = 0 \quad \text{на } \Sigma_B.$$

Мы заключаем, что *придонный экмановский слой оказывает пренебрежимо малое воздействие на основную циркуляцию во всех задачах о стационарном вынужденном движении.*

При наименьшем порядке по  $\varepsilon$  и  $E$  скорость во внутренней области является геострофической

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_I = -\nabla p_I$$

и

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_I = 0$$

Как  $\mathbf{q}_I$ , так и  $p_I$  в этом приближении не зависят от вертикальной координаты, но она появляется вновь в поправках более высокого порядка.

Граничные условия для внутреннего течения, следующие из расчета экмановского пограничного слоя, можно объединить с уравнениями движения, если ввести осредненную по глубине скорость течения во внутренней области. Пусть

$$\mathbf{q}_I + w_I \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{h} \langle \mathbf{q}_I \rangle = \frac{1}{h} \int_{-g}^f \mathbf{q}_I dz. \quad (5.2.5)$$

Важно заметить, что  $\mathbf{q}_I(x, y)$  есть как раз горизонтальная компонента вектора внутренней скорости. Интегрирование по вертикали уравнения неразрывности для внутренней области от придонного до поверхностного экмановского слоя дает соотношение

$$\nabla \cdot h \mathbf{q}_I = -\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{q}_I - \mathbf{n}_B^E \cdot \mathbf{q}_I.$$

Нормальный поток на  $\Sigma_B$  в этом приближении есть по существу нуль и поэтому просто

$$\tilde{\nabla} \cdot h \mathbf{q}_I = -\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{q}_I. \quad (5.2.6)$$

Здесь  $\tilde{\nabla}$  — горизонтальный градиент

$$\tilde{\nabla} = \nabla - \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{q}_I = -\frac{1}{2} E^{1/2} \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{T} = -\frac{1}{2} E^{1/2} \mathbf{n}_T \cdot \nabla \times \left\{ \frac{\mathbf{T}}{\hat{\mathbf{n}}_T \cdot \hat{\mathbf{k}}} \right\}. \quad (5.2.7)$$

Так как в сущности

$$\mathbf{q}_I = \mathbf{q}_I - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_I,$$

уравнение для момента можно записать так:

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_I = -\tilde{\nabla} p_I \quad (5.2.8)$$

и затем разрешить его относительно горизонтальной компоненты скорости

$$\mathbf{q}_I = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\nabla} p_I.$$

Отсюда

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{q}_I = 0, \quad (5.2.9)$$

и это позволяет свести (5.2.6) к

$$\mathbf{q}_I \cdot \tilde{\nabla} h = \frac{1}{2} E^{1/2} \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{T}. \quad (5.2.10)$$

Любые два из трех уравнений (5.2.6), (5.2.9) и (5.2.10) можно взять в качестве независимой системы. Действительно, компонента скорости, перпендикулярная к изолиниям рельефа дна, находится с помощью соотношения (5.2.10), где уже подразумевалось, что ее

величина имеет порядок  $O(E^{1/2}|\tilde{\nabla}h|)$ ; соотношение (5.2.9) используется для отыскания тангенциальной компоненты вместе с вычислением бокового пограничного слоя. Эта процедура применялась в разделе 2.20.

Уравнение для давления  $p_1$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\nabla} p_1 \times \tilde{\nabla} h = -E^{1/2} \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{T} \quad (5.2.11)$$

завершает описание поля течения во внутренней зоне.

Продолжим теперь развитие теории пограничного слоя на боковых стенках. Он может иметь вязкий или инерционный характер, но в обоих случаях  $\tilde{\mathbf{q}}_L$ , очевидно, больше, чем  $\mathbf{q}_L$ . Точный линейный анализ движения в сосуде с вращающимся диском [см. соотношение (2.20.21)] показал, что  $\tilde{p}_L$  и горизонтальные компоненты скорости  $\tilde{\mathbf{q}}_L$  по существу не зависят от высоты, но что  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_L$  меняется линейно по  $z$ . Действительно, вертикальная компонента скорости должна меняться с высотой, чтобы допустить растяжение вихревых линий при переносе элемента жидкости поперек изолиний глубины.

Теперь на основании предыдущей работы можно сделать предположение, подлежащее подтверждению *a posteriori* о том, что горизонтальные компоненты скорости в пограничном слое у боковой стенки не зависят от высоты по отношению к наименьшему порядку всех параметров. Давление в таком случае почти гидростатическое и поперек слоя претерпевает изменения по величине, которые создают эффект лишь второго порядка. Вертикальная компонента скорости — линейная функция  $z$  с тем же самым порядком точности. Ниже будет показано, что структура этого пограничного слоя согласуется с формой линейного, невязкого внутреннего течения.

Приложенное на поверхности напряжение предполагается не изменяющимся заметно поперек бокового пограничного слоя, и такое же условие накладывается на полную глубину  $h$ , хотя ее продольные изменения существенны.

Пусть

$$\tilde{\mathbf{q}}_L + \tilde{w}_L \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{h} \int_{-g}^z \tilde{\mathbf{q}}_L dz.$$

Соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_L + \tilde{\mathbf{q}}_L + \tilde{w}_L \hat{\mathbf{k}}, \quad p = p_1 + \tilde{p}_L,$$

подставим теперь в уравнения момента. Если сохранить только важные члены — те, которые не пренебрежимы по сравнению с другими при масштабировании в пограничном слое, — то уравнение для горизонтальных компонент скорости в пограничном слое приближенно запишется так:

$$\varepsilon (\mathbf{q}_L + \tilde{\mathbf{q}}_L) \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{q}}_L + 2\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{q}}_L = -\tilde{\nabla} \tilde{p}_L + E \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{q}}_L. \quad (5.2.12)$$

Здесь использованы уравнения, описывающие движение во внутренней области.

Правильная форма уравнения неразрывности для вертикального пограничного слоя есть

$$\tilde{\nabla} \cdot h \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{L}} = 0. \quad (5.2.13)$$

В рассматриваемых задачах циркуляции, которые замыкаются через экмановский и боковой пограничные слои, малы по сравнению с основным внутренним движением, если  $E^{1/2} \ll |\tilde{\nabla} h| \ll 1$ , и эти условия предполагаются имеющими место.

Явного введения функции давления (и его изменения) можно избежать, если это желательно, с помощью уравнения завихренности. Если

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{L}},$$

то отсюда прямо следует, что уравнение для этой компоненты есть

$$(\mathbf{q}_{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{L}}) \cdot \tilde{\nabla} \left( \frac{2 - \varepsilon \tilde{v}_{\mathbf{L}}}{h} \right) = \frac{E}{h} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v}_{\mathbf{L}}. \quad (5.2.14)$$

Это можно интерпретировать, как версию теоремы Эртеля, раздел 1.5. Отсюда, если  $E = 0$ , то потенциальный вихрь  $\frac{2 - \varepsilon \tilde{v}_{\mathbf{L}}}{h}$  сохраняется при движении частицы внутри пограничного слоя.

Введение в (5.2.14) функции тока пограничного слоя

$$h \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\nabla} \tilde{\psi}_{\mathbf{L}} = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\psi}_{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{k}},$$

дает единственное уравнение для пограничного слоя

$$-\hat{\mathbf{k}} \cdot \left( \frac{h}{2} \tilde{\nabla} p_{\mathbf{I}} + \tilde{\nabla} \tilde{\psi}_{\mathbf{L}} \right) \times \tilde{\nabla} \left( \frac{2 + \varepsilon \tilde{v} \cdot \frac{1}{h} \tilde{\nabla} \tilde{\psi}_{\mathbf{L}}}{h} \right) = \frac{E}{h} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_{\mathbf{L}}. \quad (5.2.15)$$

Здесь употреблено соотношение между  $\mathbf{q}_{\mathbf{I}}$  и  $\nabla p_{\mathbf{I}}$  и записана только главная часть вязкого члена ( $\tilde{\nabla} = \nabla$ , так как  $z$  не входит явно). Задача теперь состоит в том, чтобы найти решения (5.2.11) и (5.2.15), удовлетворяющие на боковых стенках условию

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{L}} + \mathbf{q}_{\mathbf{I}} = 0. \quad (5.2.16)$$

Теперь уравнения для наибольших и важнейших компонент скорости течения в каждой области установлены и поставлена корректная краевая задача. Однако вместо того, чтобы разделять проблему таким образом, можно сформулировать теоретическую модель в терминах комбинированной осредненной по глубине скорости

$$Q + W \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{h} \int_{-g}^{\xi} (\mathbf{q}_{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{L}}) dz = \mathbf{q}_{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{L}} + (w_{\mathbf{I}} + \tilde{w}_{\mathbf{L}}) \hat{\mathbf{k}}. \quad (5.2.17)$$

Необходимо только сохранить все члены, которые предполагаются главными *повсюду* в резервуаре. Например, подходящая форма уравнения неразрывности есть

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{h}Q = -\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{q}_I = \frac{1}{2} E^{1/2} \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{T}, \quad (5.2.18)$$

Правая часть этого выражения является решающей для внутренней области, где  $Q \cong q_I$ , но полностью пренебрежима в пограничном слое, когда  $Q \cong q_L + q_I$ . Уравнение для момента можно заменить на

$$\varepsilon Q \cdot \tilde{\nabla} Q + 2\hat{\mathbf{k}} \times Q = -\tilde{\nabla} p + E \tilde{\nabla}^2 Q \quad (5.2.19)$$

и уравнение для вертикальной компоненты завихренности переписывается в виде

$$Q \cdot \tilde{\nabla} \left( \frac{2 + \varepsilon v}{h} \right) = -\frac{2 + \varepsilon v}{2h^2} E^{1/2} \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{T} + \frac{E}{h} \tilde{\nabla}^2 v. \quad (5.2.20)$$

Очевидно, что если пренебречь членами, умноженными на  $\varepsilon$  и  $E$ , (5.2.20) сводится к (5.2.10). С другой стороны, все члены, в которых появляется ротор «напряжения»  $\mathbf{T}$ , не имеют значения в боковом пограничном слое, и тогда уравнения точно переходят в (5.2.12) и (5.2.14). Заметим, что приложенное напряжение входит в эти уравнения в форме распределенных *источников жидкости*. Не все члены предыдущих уравнений существенны, но все существенные члены представлены в них. В специальных исследованиях точный анализ пограничного слоя в безразмерных переменных будет сводить формулировку к едва достаточному минимуму.

Скорость жидкости  $Q$  во внутренней области есть  $O(E^{1/2} \alpha^{-1})$ , так как движение стационарно и не существует замкнутых геострофических контуров. Нарушение каждого из этих условий приводит в общем к тому, что внутренний поток становится по величине единичным. Теорию осредненного по глубине движения можно еще развивать при этих условиях, если сохраняются квазигеострофичность, т. е. изменение со временем очень медленное.

Нестационарное движение этого типа было рассмотрено в разделе 2.16, как спинал в усеченном цилиндре. Главный вывод состоял в том, что низкочастотные волны Россби возникают как компенсация затухания чисто геострофической моды. Этот результат претендует на роль общей закономерности.

*Медленное* изменение квазигеострофического потока следует на самом деле характеризовать долгим масштабом времени  $\tau \Omega^{-1}$  и масштабами  $[\mathbf{L}, \tau \Omega^{-1}, \varepsilon \Omega \mathbf{L}]$ . В этом случае уравнение для момента (5.2.1) необходимо дополнить безразмерным членом  $\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}$ . Большой безразмерный параметр  $\tau$  часто связывают с изменением глубины  $|\nabla h|$ , и эта связь ясно показана в разделе 2.16, где  $\tau = 1/\alpha$ ,  $\alpha$  — малый угол наклона.

Построение квазистационарной осредненной по глубине модели, как и раньше, продолжается с теми же основными предположениями.

Хотя приложенное на поверхности напряжение может теперь медленно изменяться со временем, индуцированный поток массы из экмановского слоя вычисляется при стационарных условиях. Однако нулевой порядок скорости во внутренней области означает, что вклады придонного и верхнего экмановских слоев имеют одну и ту же величину и должны быть включены в анализ. Осредненное по глубине уравнение неразрывности есть

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{h}Q = -\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{q}_I - \mathbf{n}_B \cdot \mathbf{q}_I,$$

и, в частности,

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{h}Q = \frac{E^{1/2}}{2} \{ \mathbf{n}_T \mathbf{T} + \mathbf{n}_B \tilde{\nabla} \times [(\tilde{\mathbf{n}}_B \times Q - Q) |\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \hat{\mathbf{k}}|^{-1/2}] \}. \quad (5.2.21)$$

В боковом пограничном слое снова пренебрежем неоднородностью. Пересмотренная форма (5.2.20) будет такова:

$$\frac{1}{\tau h} \frac{\partial v}{\partial t} + Q \cdot \tilde{\nabla} \frac{2 + \varepsilon v}{h} = - \frac{(2 + \varepsilon v)}{2h^2} E^{1/2} \{ \quad \} + \frac{E}{h} \tilde{\nabla}^2 v. \quad (5.2.22)$$

Скобки заключают то же выражение, что и в предыдущем уравнении. Теорема Эртеля вновь получается отсюда, если положить  $E = 0$ ; потенциальная завихренность частицы сохраняется при отсутствии диссипации.

Рассмотрим важный класс задач, касающихся затухания некоторого начального возмущения в области, описанной в начале раздела. Для определенности примем

$$h = h_0 + \frac{1}{\tau} d(x, y), \quad (5.2.23)$$

где  $h_0$  — константа, и положим

$$\varepsilon, E^{1/2} \ll \frac{1}{\tau} \ll 1.$$

Упорядочивание параметров  $\varepsilon$ ,  $E$  и  $\tau$  означает, что (5.2.22) во внутренней части приближенно заменяется на

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2}{h_0} Q \cdot \tilde{\nabla} d = 0. \quad (5.2.24)$$

Хотя принятая форма дна не допускает существования замкнутых геострофических кругов, скорость во внутренней области все же остается близкой к геострофической

$$\mathbf{q}_I = Q = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\nabla} p_I.$$

Подстановка этого выражения в (5.2.24) дает фундаментальное соотношение для  $p_I$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\nabla}^2 p_I - \frac{2}{h_0} \tilde{\nabla} d \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\nabla} p_I) = 0. \quad (5.2.25)$$

Подходящее граничное условие на боковой стенке состоит в том, чтобы нормальная компонента скорости равнялась нулю. Это та же задача о волнах Россби, которая встречалась в разделе 2.16.

Если в уравнениях движения сохранены конвективные члены, то создается основание для аналитического изучения нелинейного взаимодействия волн Россби. Численное решение полной граничной задачи для осредненного по глубине движения, состоящей из (5.2.18) и (5.2.20) и необходимых граничных условий, осуществимо, и результаты современных исследований приведены ниже.

Если с какой-нибудь целью движение масштабируется против обывновения через  $\Omega^{-1}$ , то перед  $\nabla d$  в (5.2.24) и (5.2.25) должен появляться множитель  $1/\tau$ . Эта форма уравнений применена в разделе 5.5.

### 5.3. Океанические модели

Океан для наших целей представляет собой очень тонкий слой радиально стратифицированной жидкости, покрывающей часть поверхности большой сферы. Момент внутри этого жидкого слоя создается приложенным к его поверхности напряжением или неравномерным нагреванием.

Стратификация жидкости, предполагаемая незначительной, является существенным свойством, так как это означает, что направление гравитационной силы (но не просто направление вектора вращения) важно для всей сферической поверхности. В результате компонента  $\Omega$  вдоль нормали  $\hat{n}$  к поверхности входит в теорию как ключевой фактор. Жесткое геометрическое ограничение движения однородной жидкости постоянной плотности, подобное тому, которое имеется для сферического кольца небольшой толщины, также придает особое значение нормальному направлению.

Другое следствие как стратификации, так и ограничивающей геометрии есть преобладание нормальной к сфере компоненты абсолютного вихря

$$\mathbf{r} \cdot (2\Omega + \mathbf{v}).$$

Роль, которую в связи с этим играет стратификация, можно установить прямо из теоремы Эртеля (1.5.11), где  $S$  отождествляется с равновесным полем плотности  $\rho_e(\mathbf{r})$ . В этом случае вектор  $\nabla \rho_e$  почти параллелен  $\mathbf{r}$ , и это означает, что в несжимаемой недиссипативной среде величина  $\frac{1}{\rho_e} \nabla \rho_e \cdot (2\Omega + \mathbf{v})$  сохраняется при движении жидкой частицы.

Описанное выше геометрическое ограничение также приводит к подобному заключению. Это можно показать на примере теории движения в сферическом кольце, которая основана на приближении, включающем отношение толщины кольца к радиусу и близость частицы к экватору. Ограничения такого типа на выбор расстояния и положения необходимо возникают вследствие того, что хотя

геометрия может оказывать огромное влияние на движение однородной жидкости, полностью отвергнуть тот основной факт, что ось вращения является единственным реальным направлением, невозможно. Ввиду этого ожидается, что противоречия между моделью с постоянной плотностью, где вместо  $\Omega$  берется  $(\Omega \cdot \hat{r}) \hat{r}$ , и точной теорией будут в некоторой мере зависеть от степени близости оси вращения и нормали к поверхности. Геометрическое ограничение более действительно при уменьшении толщины слоя жидкости, но теория мелкой воды, построенная путем интегрирования уравнений, осредненных вдоль радиального направления, не может быть одинаково справедливой на всей сфере. Однако иногда может случиться, что в районах, где этот тип теории перестает быть верным, ее пользу и уместность еще можно обосновать с помощью аргументов, апеллирующих к стратификации реального океана.

Будем и дальше сосредоточивать внимание прежде всего на точном анализе вращающихся потоков, созданных в лаборатории, и на приложимости полученных результатов к океанографии. Сравнение проводится между осредненной по глубине теорией, развитой в последнем разделе, и подобным же образом построенными современными океаническими моделями. При этом общая критическая оценка этих моделей самих по себе (их точности, справедливости и т. д.) не входит в нашу задачу.

В формулировке наиболее широко изученной модели крупномасштабной циркуляции в однородном океане присутствуют только компоненты скорости, касательные к сфере и осредненные по глубине океана (толщине сферического кольца). Поскольку изменения с глубиной исключены, вихрь касательного напряжения ветра входит в уравнения как массовая сила  $F$ . Коэффициент турбулентной вязкости  $\nu^*$  обычно заменяет  $\nu$ . Уравнения модели для осредненного по глубине тангенциального вектора скорости  $Q_0$ <sup>1</sup> есть

$$\vec{\nabla} \cdot H Q_0 = 0, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_0 + Q_0 \cdot \vec{\nabla} Q_0 + 2\Omega \cos \Theta \hat{r} \times Q_0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu^* \vec{\nabla}^2 Q_0 + F \quad (5.3.2)$$

где  $H$  — истинная глубина океана,  $\Omega \cos \Theta \hat{r}$  — компонента  $\Omega$  в направлении нормали к сфере  $\hat{r}$ ,  $\vec{\nabla}$  — поверхностный градиент; все переменные являются функциями положения точки на сфере. Полное обоснование вывода этих уравнений можно найти в работах Моргана [183], Кэрриера и Робинсона [36], Фофонова [67] и Стомела [255]. Их формальный вывод должен включать анализ возмущений с подходящими ограничениями, наложенными на глубину океана, положение и т. д., но это не входит в наши намерения. Однако следует отметить, что незначительность глубины океана

<sup>1</sup> Здесь осредненная по глубине скорость отличается от той, которая фигурирует в разделе 5.2, так как течение внутри экмановских слоев включено в ее определение.

по отношению и к горизонтальным размерам типичных планетарных движений, и к радиусу Земли является необходимым требованием, лежащим в самой основе вывода. Формулировка раздела 5.2, которая также использует осреднение по глубине, не ограничена тонкими слоями жидкости, но вместо этого требует, чтобы общее изменение глубины было мало, т. е.  $E^{1/2} \ll |\tilde{\nabla}h| \ll 1$ . Это — важное отличие, особенно для планирования и проведения лабораторных экспериментов, воспроизводящих явления в океане.

В безразмерной форме с масштабами  $[H_0, \Omega^{-1}, U]$  уравнения (5.3.1) и (5.3.2) есть

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{H}Q_0 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} Q_0 + \varepsilon Q_0 \cdot \tilde{\nabla} Q_0 + \mathbf{f} \hat{\mathbf{r}} \times Q_0 &= -\tilde{\nabla} p + E \tilde{\nabla}^2 Q_0 + \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3)$$

где  $\mathbf{f} = 2 \cos \Theta$ ,  $\varepsilon = U/\Omega H_0$ ,  $E = \nu^*/\Omega H_0^2$ . Характерная скорость  $U$  выбрана так, чтобы рассматривать движение, вызванное приложенным к поверхности напряжением единичной безразмерной величины;  $H_0$  — типичная глубина океана. Решение этих уравнений должно удовлетворять заданным начальным условиям и граничным условиям на береговой линии, окружающей океанический бассейн.

Существенные особенности связи этой системы уравнений с системой предыдущего раздела можно легко раскрыть, рассматривая стационарное свободное невязкое движение. Например, на основании теоремы Эртеля о завихренности для уравнений стационарной модели

$$Q_0 \cdot \tilde{\nabla} \left( \frac{\mathbf{f} + \varepsilon v_0}{H} \right) = 0. \quad (5.3.4)$$

(Величина  $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f} \hat{\mathbf{r}}$  опущена, так как радиус Земли очень велик по сравнению с глубиной океана.) Уравнение (5.3.4) нужно сравнить с невязкой версией (5.2.20):

$$Q \cdot \tilde{\nabla} \left( \frac{2 + \varepsilon v}{h} \right) = 0. \quad (5.3.5)$$

Мера точности и справедливости океанической модели определяется тем, до какой степени оба эти уравнения совпадают. Сравнение такого рода проделал Веронис [279, 280].

Оба предыдущих уравнения выражают в некотором смысле закон сохранения вихря. Так как расстояние  $H$ , разделяющее концентрические сферы (см. рис. 5.9, стр. 245), мало по сравнению с радиусом сферы  $a$ , то до тех пор, пока  $h/a \ll \cos \Theta$  (условие, исключаящее экваториальные широты), имеет место следующая приближенная формула:

$$\frac{H}{a} \cong \frac{h}{a} \cos \Theta + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \cong \frac{h}{a} \cos \Theta.$$

Но тогда компоненту вихря в (5.3.5) можно записать так:

$$\frac{2 + \varepsilon v}{h} \cong \frac{2 \cos \Theta + \varepsilon v \cos \Theta}{H} \cong \frac{\mathbf{f} + \varepsilon v \cos \Theta}{H}.$$

Это очень близко к форме (5.3.4). Следовательно, два уравнения приблизительно эквивалентны, если  $v \cos \Theta$  и  $Q \cdot \bar{v}$  близки к  $v_0$  и  $Q_0 \cdot \bar{v}$  соответственно. Эти величины совпадают в точности лишь на полюсах, и приближение ухудшается по мере увеличения угла между векторами нормали к поверхности сферы  $\hat{r}$  и угловой скорости вращения  $\Omega$ . Ошибка равна  $O(H/a)$  на большей части сферы, за исключением полосы около экватора (см. [279]).

*Важно отметить, что  $1/h$  в теории осредненных по глубине лабораторных течений играет ту же роль, что и параметр Кориолиса в океанической модели.* Следовательно, аналогия между уравнениями раздела 5.2 и уравнениями модели океана в действительности имеет скорее динамическую, чем геометрическую основу. Океанические явления можно изучать в лаборатории путем такого подбора топографии резервуара, чтобы правильно воспроизводилось изменение силы Кориолиса с широтой. Для многих задач нет надобности создавать контейнер, геометрически подобный океану, например сферическое кольцо с малым отношением толщины к радиусу. Конечно, течения в таком кольце интересны сами по себе, но сейчас это несущественно.

В предположении, что уравнения модели верны и применимы к реальному океану, становится ясно, почему многие течения, изученные в главе 2, могут иметь столь близкое отношение к явлениям большого масштаба. Усеченный цилиндрический сосуд, полная глубина которого изменяется линейно, моделирует параметр Кориолиса в форме

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \beta y, \quad (5.3.6)$$

где  $y$  — декартова координата параллели. Эта формула для нормальной компоненты планетарного вихря является основным допущением, на котором основано приближение  $\beta$ -плоскости в океанографии. Спинал в цилиндре, который был вызван переносом завихренности волнами Россби, имеет наиболее вероятным аналогом в океанографии переход от одной стационарной океанической циркуляции к другой. Сезонные изменения могут приводить к этому на определенных частях планеты.

В задаче об усеченном цилиндре (раздел 2.20) наклон дна моделирует изменение силы Кориолиса с широтой на поверхности Земли, а сдвиг, создаваемый верхним диском, действует подобно «напряжению ветра». Боковой пограничный слой, формирующийся на половине периметра бассейна, динамически аналогичен Гольфстриму, и показательно, что отрыв этого течения от Атлантического побережья тоже может быть воспроизведен. Многие макроскопические особенности океанической циркуляции присутствуют в этом простом эксперименте. В самом деле, Фон-Аркс [286, 287], Фоллер и Фон-Аркс [64], Стоммел, Аронс и Фоллер [257] и Фульц [77] применили этот важный принцип для проведения множества впечатляющих опытов, часть из которых уже была рассмотрена (см. стр. 114). Кажется убедительным, что об основных динамических

процессах многое можно узнать в контролируемых условиях лабораторных экспериментов. Причем существенным моментом является соблюдение правильной динамической аналогии, используя изменение полной глубины для моделирования функции  $f$ .

#### 5.4. Стационарные циркуляции и инерционные пограничные слои

Анализ, проведенный в разделе 2.20, вполне типичен для всех исследований стационарных потоков в закрытых бассейнах с незамкнутыми изобатами. По этой причине другие вязкие задачи этого типа не будут решены.

Решения линеаризованных уравнений «вязкой» модели океанической циркуляции, принадлежащих к тому же классу, среди прочих были получены Стоммелом [254], Манком [185] и Манком и Карриером [186]. Противоречия между этими теоретическими предсказаниями и наблюдениями в океане привели Стоммела к предположению о том, что нелинейные процессы в большей мере, чем «вязкие», ответственны за формирование больших океанических течений.

Теория нелинейных или инерционных пограничных слоев, развитая Чарни [40] и Морганом [183], обеспечивает разумную точность описания Гольфстрима вблизи береговой линии. Нелинейные процессы кажутся также преобладающими, когда течение покидает границу и становится свободной инерционной струей [289]. Исчерпывающие обзоры всего предмета даны Стоммелом [256] и Фофоновым [67].

Исключительная важность нелинейных процессов в океанографии побуждает к исследованию инерционных пограничных слоев во вращающихся сосудах с жидкостью. Ранее было продемонстрировано соответствие между теорией, относящейся к лабораторным движениям, и той, которая связана с геофизическими процессами. Будем иметь в виду к тому же довольно общую конфигурацию, типа показанной на рис. 5.1, и осредненные по глубине уравнения (5.2.18), (5.2.19) и (5.2.20).

Пограничные слои являются «гвоздем» вырожденных задач о возмущениях, в которых члены с высшими производными содержат малый параметр. Теория вязкого пограничного слоя проистекает из того факта, что  $E$  мал. Однако даже если число Экмана нуль, например, в (5.2.15), оставшиеся члены с высшими производными все еще будут умножены на малое число Россби  $\epsilon$ . Отсюда следует, что невязкая нелинейная теория в этом смысле является также вырожденной, и существование пограничного слоя можно ожидать там, где конвективные члены становятся так же важны, как и остальные. Если  $E$  и  $\epsilon$  оба малы, но не равны нулю, то структура некоторого пограничного слоя будет сочетать в себе черты вязкого и инерционного пограничных слоев в зависимости от относительной величины двух параметров.

Циркуляция во внутренней области предполагается известной; задача состоит в том, чтобы найти *инерционный* пограничный слой, соответствующий заданному внутреннему режиму. В действительности оба режима оказывают друг на друга сильное влияние, и точное определение внутреннего течения (обычно это произвольная неизвестная функция) зависит от свойств пограничного слоя, и наоборот. Нелинейная задача существенно более сложна для решения, чем соответствующая линейная задача с вязкостью, хотя там и тут используются сходные методы теории сингулярных возмущений. Помимо вопросов, требующих большего искусства и изобретательности, могут возникнуть принципиальные трудности. Например, стационарные невязкие нелинейные задачи могут быть не одинаково корректны повсюду в области решения. Это возможно вследствие того, что произвольное напряжение ветра будет обычно возбуждать завихренность в жидкости, которая не может быть сбалансирована при отсутствии вязкости. Стационарное состояние не может существовать в такой ситуации, если нигде в океаническом бассейне не происходит диссипация (или приложенное напряжение не имеет очень специального вида). Очевидно, инерционные эффекты не могут преобладать повсюду в океане; диссипация же важна не только в определенных зонах, но существенна для движения и баланса завихренности в целом. Эти выводы подтверждаются численными работами Брайена [28] и Верониса [282]. В таком случае имеется достаточное основание изучать только локальную структуру инерционного потока, не пытаясь определить поля течений целиком.

Намного менее серьезная трудность состоит в невозможности удовлетворить граничному условию отсутствия скольжения для строго инерционной теории. Этому требованию отвечает очень тонкий вязкий подслой внутри инерционного слоя.

Уравнение невязкого инерционного слоя для возмущения функции тока пограничного слоя  $\psi_L$  следует из (5.2.15):

$$-\hat{\mathbf{k}} \cdot \left( \frac{h}{2} \tilde{\nabla} p_1 + \tilde{\nabla} \psi_L \right) \times \tilde{\nabla} \left( \frac{2 + \varepsilon \tilde{\nabla} \cdot \frac{1}{h} \tilde{\nabla} \psi_L}{h} \right) = 0. \quad (5.4.1)$$

По предположению,  $p_1$  есть известная функция и распределение полной глубины  $h$  не носит характера пограничного слоя.

Инерционный пограничный слой существует, так как кое-где должны возникать быстрые изменения относительной завихренности, если элемент жидкости вынужден преодолевать сильное влияние топографии и совершать замкнутый круговорот. Таким образом, относительная завихренность  $\varepsilon \tilde{\nabla} \cdot (h^{-1} \tilde{\nabla} \psi_L)$  равна единице в пограничном слое и это вместе с тем означает, что его безразмерная толщина есть  $\varepsilon^{1/2}$  если  $\psi_L$  сама порядка  $O(1)$ .

Пусть  $\hat{\mathbf{n}}_L$  — внешняя единичная нормаль к боковой стенке и  $\hat{\mathbf{s}}$  — касательный к ней единичный вектор, так что  $\hat{\mathbf{s}}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_L$  и  $\hat{\mathbf{k}}$  образуют правую ортогональную триаду, показанную на рис. 5.1. (Дуга длины  $s$  возрастает в направлении часовой стрелки по периметру

бассейна.) Далее, пусть  $\zeta$  — координата в пограничном слое, определяемая соотношением

$$\hat{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla \cong -\varepsilon^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

По предположению, только  $\tilde{\psi}_L$  меняется с  $\zeta$ , и (5.4.1) можно свести к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_L}{\partial s} + \frac{h}{2} \frac{\partial P_I}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{h} \left\{ 2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_L}{\partial \zeta^2} \right\} \right) - \\ & - \frac{\partial \tilde{\psi}_L}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{h} \left\{ 2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_L}{\partial \zeta^2} \right\} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Внутреннее давление и глубина есть заданные функции  $s$  на боковой границе, при  $\zeta = 0$ , и мы можем написать

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{2} \frac{\partial P_I}{\partial s}.$$

С помощью этого преобразования (5.4.2) можно переписать в виде якобиана

$$\partial \left( \frac{1}{h} \left\{ 2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_L}{\partial \zeta^2} \right\}, \tilde{\psi}_L + \phi \right) / \partial (\zeta, s) = 0$$

и однократно проинтегрировать его

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_L}{\partial \zeta^2} + \frac{2}{h} = F(\tilde{\psi}_L + \phi). \quad (5.4.3)$$

Здесь  $F$  — произвольная функция, которую можно оценить при  $\zeta = \infty$ , так как  $\tilde{\psi}_L$  — функция пограничного слоя и  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_L = 0$ .

Отсюда следует, что

$$F(\phi) = \frac{2}{h}, \quad (5.4.4)$$

где  $\phi$  и  $h$  — функции одного только  $s$ . Теперь можно установить необходимые условия существования инерционного пограничного слоя. Если переписать (5.4.3) в виде

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_L}{\partial \zeta^2} = F(\tilde{\psi}_L + \phi) - F(\phi),$$

то при большом  $\zeta$

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_L}{\partial \zeta^2} \cong \left( \frac{d}{d\phi} F(\phi) \right) \tilde{\psi}_L. \quad (5.4.5)$$

Функция  $\tilde{\psi}_L$  имеет характер, присущий пограничному слою, — экспоненциальное затухание при большом  $\zeta$ , — только, если

$$\frac{d}{d\phi} F(\phi) > 0, \quad (5.4.6)$$

и это неравенство является критерием существования инерционных слоев. Легко выразить его через полную глубину и величину скорости внутреннего горизонтального течения на стенке. Эквивалентное выражение есть

$$(\hat{\mathbf{n}}_L \cdot \mathbf{q}_I) \frac{dh}{ds} < 0. \quad (5.4.7)$$

Оно имеет простой смысл. Например, если  $h$  убывает с возрастанием  $s$ , то для поддержания инерционного слоя требуется приток массы из внутренней области. Кроме того, смена знака у производной от  $h$  приводит к изменению в направлении вектора скорости, иначе слой не может быть непрерывным вдоль стенки. В таком случае инерционное течение может стать переменным по времени и/или отделиться от границы и превратиться в свободную инерционную струю. Разумеется, некоторые из процессов, исключенных при этих выкладках, способны оказать сильное влияние в окрестности предсказанной точки отделения и позволить струе продолжать двигаться вдоль границы, несмотря ни на какие трудности. Численные исследования, о которых рассказано в разделе 5,5, показывают, что подобное возможно и действительно происходит. При определенных ситуациях вполне достаточно вязких процессов, чтобы предотвратить отрыв струи.

Соотношение (5.4.5) показывает, что ширина  $\delta_i$  инерционного пограничного слоя равна

$$\frac{\delta_i}{L} = \frac{1}{h} \left( \frac{\varepsilon}{dF} \right)^{1/2} = \left| \frac{\varepsilon \mathbf{q}_I \cdot \hat{\mathbf{n}}}{2 \frac{dh}{ds}} \right|^{1/2}, \quad (5.4.8)$$

где  $\mathbf{q}_I \cdot \hat{\mathbf{n}}$  — величина нормальной компоненты внутренней скорости на краю пограничного слоя, нормированная на  $\varepsilon L$ .

Анализ океанической модели [92] привел к такому же критерию, как тот, который дан выше, за исключением того, что вместо  $1/h$  в него вошли параметр Кориолиса  $f$  (или  $f/H$ , если  $H$  изменяется поперек пограничного слоя). Так как  $f$  увеличивается с широтой, т. е. является возрастающей функцией  $s$  на западной стороне океанического бассейна, внутренняя скорость должна быть направлена к западной береговой линии, чтобы удержать здесь инерционную струю. Точно так же скорость должна быть направлена от восточной границы. Интересно отметить, что Гольфстрим отделяется от берега там, где течение внезапно выходит на глубокую воду вблизи м. Хаттерас. В этом месте глубина океана возрастает вдоль пути течения быстрее, чем параметр Кориолиса, и производная от  $f/H$  меняет знак. Таким образом, отрыв происходит в том же месте, где простой критерий нарушается локальным изменением топографии. Курисио покидает берег при таких же условиях, но не вполне ясно, не является ли это согласие чисто случайным. Вероятно, отделение течений от берега чувствительно к изменениям топографии (или наоборот), но причины этого, возможно, более сложны, чем те, которые вытекают из теории единственного однородного слоя жидкости.

Лабораторные эксперименты, поставленные с целью использовать все преимущества близкой теоретической аналогии между  $f$  и  $1/h$ , могут быть не оценены при решении этих вопросов. Было бы не слишком трудно построить сосуд, глубина которого изменялась бы так, чтобы вызвать отделение инерционного течения. Можно было бы затем внимательно учесть все факторы, контролирующие процесс, в надежде извлечь новые идеи и стимулы для дальнейших теоретических исследований. В этом духе предприняли исследование пограничных слоев в закрытом бассейне Стоммет, Аронс и Фоллер [257]. Они были получены исключительно интересные результаты, которые кратко описаны в разделе 2.19.

Эксперимент с усеченным цилиндром, обсуждавшийся в разделе 2.20, имеет то же самое обоснование. При очень малых значениях числа Россби в потоке по существу такое, каким его предсказывает линейная теория. По мере увеличения  $\epsilon$  центр внутреннего круговорота резко сдвигается от стенки в направлении течения пограничного слоя. При дальнейшем увеличении  $\epsilon$  положение центра вихря изменяется мало, но пограничный слой становится сильно нелинейным и отделяется целиком от стенки, проникая во внутреннюю область в виде широкого устойчивого меандрирующего потока. В конце концов наблюдался режим, при котором меандры начинают флукутировать, и вихри (волны Россби) пересекают эту часть бассейна, тогда как повсюду вокруг сохраняется стационарное движение.

По мере того как нелинейные процессы начинают преобладать над вязкими, структура западного пограничного слоя должна приближаться к структуре инерционного течения, хотя предельная форма, возможно, не достижима. Согласно (5.4.7) инерционный слой может развиваться вдоль западной стенки, только если течение внутренней области направлено к ней, а это возможно при описанном выше движении главного вихря.

Численные решения родственных теоретических задач, представленные в разделе 5.6, воспроизводят все важные качественные особенности этого эксперимента.

Инерционный и вязкий пограничные слои, видимо, всегда появляются преимущественно на одной и той же стороне бассейна, хотя они не обязательно совпадают. (Последний обычно несколько перекрывает первый.) Это связано с характером волнового движения в бассейне и, в особенности с различием скоростей распространения и степеней рассеивания длинных и коротких волн. Например, «западная» граница служит источником коротких волн Россби, которые быстро разрушаются, а выступающий вязкий пограничный слой является зоной, в которой эти волны вовсе диссипируют. Полное обсуждение волновой интерпретации вязкого и инерционного пограничных слоев дано в следующем разделе.

Восточный пограничный слой выносит массу воды во внутреннюю область и, как следствие этого, должен непрерывно питаться мощным источником жидкости. Это может происходить, если западное течение переходит прямо в восточную струю, либо если строго

меридиональное течение (вдоль изобат) переносит массу через весь бассейн с одной стороны на другую. В обоих случаях круговой поток замыкается медленной западной океанической циркуляцией.

Интенсивное течение, идущее вдоль границы, которая является изобатой, также подчиняется соотношениям (5.4.3) или (5.4.5). В этом случае функция  $dF(\phi)/d\phi$  постоянна вдоль этой границы и необходимо положительна, если пограничный слой существует. Однако это условие нельзя прямо свести к критерию (5.4.7), не имея большей информации о решении для внутренней области.

Фофонов [66] изучил класс свободных нелинейных стационарных циркуляций, для которых безразмерные уравнения движения являются однородными вариантами (5.2.18) и (5.2.20):

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{h}Q = 0, \quad (5.4.9)$$

$$Q \cdot \tilde{\nabla} \left( \frac{2 + \varepsilon v}{h} \right) = 0. \quad (5.4.10)$$

Отсутствие напряжения ветра устраняет трудности, которые, как отмечено ранее, связаны с генерацией и рассеиванием завихренности. Введение функции тока

$$\tilde{\mathbf{h}}Q = \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\nabla} \psi$$

позволяет проинтегрировать уравнение вихря, в результате чего получается

$$\frac{\varepsilon}{h} \tilde{\nabla} \cdot \frac{1}{h} \tilde{\nabla} \psi + \frac{2}{h} = F(\psi). \quad (5.4.11)$$

(Постоянство потенциальной завихренности вдоль линий тока было использовано таким же образом в главе 4 для получения точных нелинейных решений.) Уравнение пограничного слоя (5.4.3) есть специальный случай этого общего соотношения. Функцию  $F(\psi)$  можно определить исходя из природы свободного внутреннего течения, предполагая, разумеется, что решение описывает поведение пограничного слоя. Поток во внутренней области направлен вдоль изобат, так как

$$F(\psi_I) = \frac{2}{h},$$

и эта формула совпадает с (5.4.4) на границе. Критерий существования инерционного слоя вдоль границы с постоянной глубиной можно теперь записать так:

$$\frac{dI}{d\psi_I} F(\psi_I) = \frac{2}{h^3} \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\nabla} h}{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{g}_I} > 0.$$

Следовательно, направление касательного потока вдоль внешнего края меридионального инерционного слоя тесно связано с градиентом глубины. Внутренний поток, который поддерживает такую меридиональную струю, симметрично совмещается с инерционными

пограничными слоями у других границ на той же широте (при той же величине  $h$ ). Таким образом, может существовать *свободная* нелинейная мода, в которой масса медленного западного движения океана полностью возвращается через инерционные пограничные слои. Фофонов вычислил некоторые такие «естественные» решения для

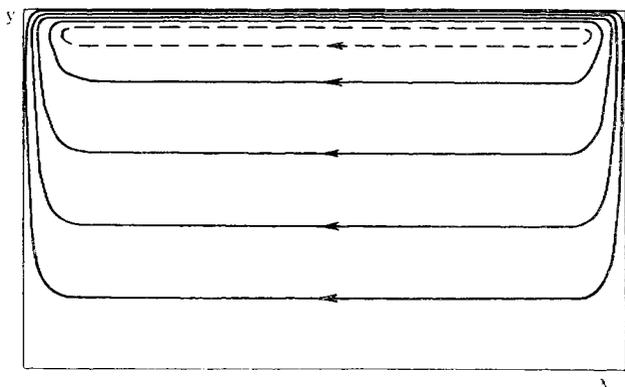


Рис. 5.2. Линии тока свободного течения в однородном океане, вычисленные Фофоновым [66]. Циркуляция замкнута в этом случае зональной струей вдоль северной границы.

прямоугольного бассейна в специальном случае, когда  $F$  есть линейная функция  $\psi$ . Одна такая картина показана на рис. 5.2. Система течений замыкается северной или южной струей или обеими вместе в зависимости от конкретной формы  $F$ . Нелинейные численные решения для ветровой циркуляции (см. раздел 5.6) воспроизводит картины течений, сильно напоминающие эту.

### 5.5. Волны Россби (часть вторая)

Рассмотрим контейнер, полная глубина которого есть линейная функция одной пространственной координаты

$$h = 1 - \alpha y. \quad (5.5.1)$$

Здесь  $\alpha$  — малое число, а ось  $y$  направлена к северу с тем, чтобы  $1/h$  было возрастающей функцией  $y$ , так же как параметр Кориолиса растет с широтой. Боковые стенки образуют вертикальный цилиндр, пересечение которого с плоскостью  $z = \text{const}$  есть простой замкнутый контур произвольной формы.

Анализ волнового движения в усеченном цилиндре показывает, что вдобавок к ординарным инерционным волнам возбуждается новый класс волн очень низкой частоты, компенсирующий потерю чисто геострофической моды. Частоты этих волн Россби пропорциональны «углу»  $\alpha$ ; каждая собственная функция не зависит от

плоскости  $xy$  представляет собой волну, распространяющуюся с востока на запад.

В этом разделе вновь обсуждаются волны Россби, но с более общей точки зрения, в меньшей степени связанной с конкретной формой контейнера. Прежде всего рассматриваются плоские волны, и обсуждение проводится так же, как в разделе 4.2 для обычных инерционных волн.

Уравнение (5.2.25) для давления во внутренней области допускает, как это отмечено выше, медленное изменение со временем. Если согласно (5.2.23) выбрать

$$\tau = 1, \quad h_c = 1, \quad d = -\alpha y,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p + 2\alpha \hat{\mathbf{j}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla p) = 0. \quad (5.5.2)$$

(Заметим, что здесь не использованы масштабы  $[L, \Omega^{-1}, \varepsilon \Omega L]$ . Масштаб времени не связан с фактором  $\alpha$ , который появляется затем прямо как множитель собственной частоты, как это было в разделе 2.16.)

Плоские волны

$$p = \Phi \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t),$$

при

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y,$$

являются решениями уравнения (5.5.2), когда

$$\lambda = \frac{-2k_1 \alpha}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (5.5.3)$$

Если  $k_1$  для удобства взять положительным, то  $\lambda$  — отрицательно. Для данной частоты возможные горизонтальные волновые числа в пространстве волновых чисел лежат на окружности радиуса  $|\alpha/\lambda|$  с центром в  $(-\alpha/\lambda, 0)$  (см. рис. 5.3 а). Тот факт, что  $-k_1$  и  $\lambda$  имеют одинаковый знак, свидетельствует о том, что волновая картина, изображаемая в виде линий равных фаз, всегда перемещается на запад, в направлении убывания  $x$ . Вычисление фазовой скорости дает

$$\mathbf{c}_p = - \frac{2k_1 \alpha}{(k_1^2 + k_2^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (5.5.4)$$

Подобным же образом групповая скорость

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \lambda$$

есть

$$\mathbf{c}_g = 2\alpha \frac{k_1^2 - k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \hat{\mathbf{i}} + 4\alpha \frac{k_1 k_2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \hat{\mathbf{j}}, \quad (5.5.5)$$

и это означает, что энергия переносится на запад в «длинных» волнах  $k_2^2 > k_1^2$  и на восток в «коротких» волнах  $k_1^2 > k_2^2$ . Хотя фазовая

скорость направлена к западу, распространение энергии этим не ограничено: оно зависит от длины волны. Это является важной причиной предпочтительного формирования пограничных слоев у западной границы океанического бассейна. Мы кратко коснемся этого.

Фазовая и групповая скорости пропорциональны соответственно отрезкам  $\overline{BO}$  и  $\overline{AB}$  волновой полярной диаграммы. В частности,  $c_g$  всегда направлена от центра окружности  $A$ . Для волновых векторов, лежащих на дуге  $OD$ , энергия переносится к западу, так же как и линии постоянной фазы.

Отражение ординарных инерционных волн от твердой стенки обнаруживает несколько необычные особенности (см. раздел 4.2), и волны Россби не являются исключением из этого правила. Волна Россби, переносящая энергию к границе плоскости  $x = 0$ , отражается, как волна Россби с другим волновым вектором, групповая скорость которой направлена теперь от границы.

Если давление в падающей и отраженной волнах представить в виде

$$A \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t),$$

$$A' \exp i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \lambda' t),$$

то условие отсутствия нормальной компоненты скорости при  $x = 0$  влечет за собой

$$k_2 A \exp i(k_2 y - \lambda t) + k_2' A' \exp i(k_2' y - \lambda' t) = 0. \quad (5.5.6)$$

Это значит, что

$$\lambda = \lambda', \quad k_2 = k_2', \quad A = -A'. \quad (5.5.7)$$

Другими словами, частоты обеих волн совпадают

$$\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{k_1'}{k_1'^2 + k_2'^2},$$

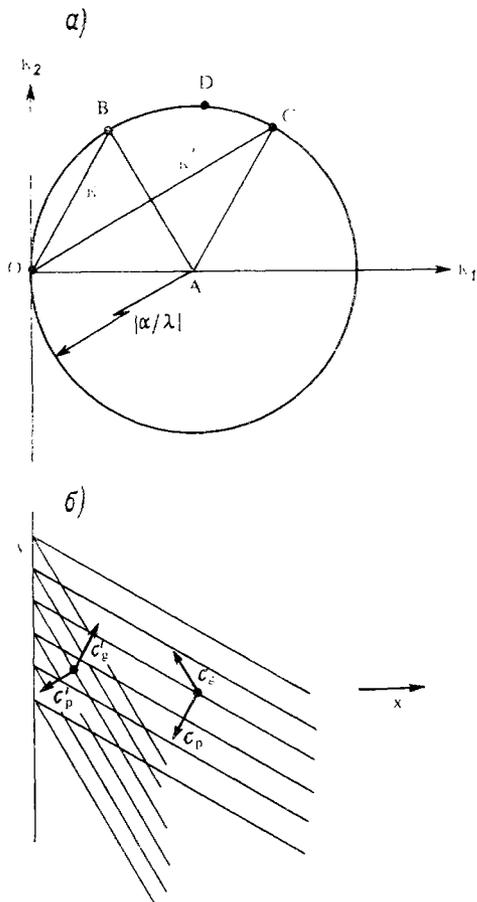


Рис. 5.3. *a* — плоскость волновых векторов для плоских волн Россби согласно (5.5.3); *b* — отражение плоских волн от стенки  $x = 0$ , показаны фазовые и групповые скорости.

так как являются компонентами фазовых скоростей, параллельных стенке.

Полное графическое изображение векторов  $k'$ ,  $c_g$  и  $c_p$  выполнить не так просто, как это было сделано в разделе 4.2, но это хорошо помогает при определении направления разных векторов [159]. Если на рис. 5.3  $a$   $OB$  представляет собой вектор падающей волны, так что  $c_p$  и  $c_g$  параллельны  $BO$  и  $AB$ , то вектор отраженной волны есть  $OC$ , а  $c_p'$  и  $c_g'$  пропорциональны  $CO$  и  $AC$ . Отраженный поток энергии направлен наружу, и векторы групповых скоростей составляют равные углы с нормалью к стенке. Таким образом, направление потока энергии, но не его фаза, меняется, как обычно, т. е. углы падения и отражения равны.

Волновая энергия, переносимая к западу (на рисунке — влево), отражается в виде более коротких волн, так чтобы отраженный поток энергии был направлен прочь от стенки. Точно так же короткая волна должна отражаться от восточной стенки в виде длинной волны. Следовательно, западная граница действует как источник коротких волн, тогда как длинные волны образуются на восточной границе. Но короткие волны очень чувствительны к действию вязкости и быстро диссипируют. Вследствие этого проявление вязких процессов будет более заметно в районах, где эти волны возникают; это и есть тот механизм, который лежит в основе формирования вязкого западного пограничного слоя. Педлоски [199] показал, что характерную ширину как вязкого, так и инерционного пограничных слоев можно вычислить, исходя из известных свойств волн Россби.

Групповая скорость коротких волн  $k_1^2 \gg k_2^2$  приближенно равна

$$c_g \cong \frac{2\alpha}{k_1^2} \hat{i};$$

скорость их затухания экспоненциальна  $e^{-st}$ , а  $s$  можно оценить из основного уравнения для момента, если вязкость  $E\bar{V}^2$  сбалансировать ускорением  $\partial/\partial t$ . Это значит, что

$$s \doteq E k_1^2,$$

т. е. короткие волны затухают в безразмерном масштабе времени  $E^{-1}k_1^{-2}$  (см. стр. 177). Пусть волна, амплитуда которой убывает в  $e^{-1}$  раз на расстоянии  $\delta_0 \doteq \frac{1}{k_1}$ , близком к одной длине волны от стенки, определяет зону диссипации — пограничный слой. Это расстояние за время затухания проходит пакет энергии, перемещающийся с групповой скоростью. Таким образом,

$$\frac{1}{k_1} \doteq \frac{\delta_0}{L} \doteq \frac{|c_g|}{s},$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta_0}{L} \doteq \left(\frac{E}{\alpha}\right)^{1/3}.$$

Это та же самая толщина вязкого пограничного слоя, которая была определена при анализе стационарного движения в усеченном цилиндре.

Чтобы на западной границе имелся инерционный пограничный слой, поток из внутренней области должен быть направлен к этой границе. Короткие волны, генерируемые на западной стенке, могут проникать обратно во внутреннюю область, только если их групповая скорость больше скорости подходящего течения. Другими словами, полная групповая скорость, увеличенная за счет конвекции<sup>1</sup>, должна иметь положительную горизонтальную компоненту,

$$(c_g + \epsilon q_1) \cdot \hat{i} > 0,$$

чтобы избежать ловушки на границе. Захваченные волны вносят вклад в формирование *инерционного* пограничного слоя, и самые длинные из них определяются, если в предыдущем соотношении заменить неравенство на равенство:

$$\frac{2\alpha}{k_1^2} = -\epsilon q_1 \cdot \hat{i}.$$

Это дает толщину пограничного слоя

$$\frac{\delta_i}{L} = \frac{1}{k_1} \cdot \left( \frac{-\epsilon q_1 \cdot \hat{i}}{\alpha} \right)^{1/2}.$$

Эта оценка согласуется с (5.4.8).

Волны Россби в замкнутом бассейне, пожалуй, легче иногда определить наложением плоских волновых решений. Однако поучительнее связать общую задачу с задачей о колебаниях мембраны (см. [159]). Для этого положим

$$p = P(x, y) \exp \left[ -i \left( \frac{\alpha}{\lambda} x + \lambda t \right) \right] \quad (5.5.8)$$

и после подстановки в (5.5.2) найдем

$$\tilde{\nabla}^2 P + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} P = 0. \quad (5.5.9)$$

Граничное условие на боковой поверхности

$$P = 0.$$

Это показывает, что волну Россби можно рассматривать как экспоненциальную несущую волну (бегущую к западу), модулированную амплитудной функцией  $P$ , которая сама есть решение классической краевой задачи. Очевидно, что все, что известно о колебаниях мембраны, приложимо к океанографической проблеме. Какое-то решение можно сразу отождествить с волной Россби, но может быть не менее важно вполне овладеть приложениями всех имеющихся приближенных методов и техники анализа.

<sup>1</sup> Имеются в виду конвективные члены. — Прим. ред.

Волны Россби в прямоугольном контейнере  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  связаны с собственными модами мембраны

$$P_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

причем

$$\lambda_{nm} = \pm \frac{\alpha}{x} \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{-1/2}.$$

Кроме того, если  $(x', y')$  — система координат, полученная из системы  $(x, y)$  поворотом осей на фиксированный угол, то

$$P_{nm}(x', y') \exp \left[ -i \left( \frac{\alpha}{\lambda_{nm}} x + \lambda_{nm} t \right) \right]$$

есть волны Россби в новой системе при условии, что глубина задана выражением (5.5.1).

Это относительно прямой способ решения общей задачи с начальными условиями в прямоугольном бассейне. Он уже использовался для усеченного цилиндра, и, так как результаты почти одинаковы, обсуждение этой частной задачи здесь опущено.

Наложение двух волн порождает вследствие наличия нелинейных конвективных членов добавочные волны с частотами, равными сумме и разности частот исходных волн. В частности, реакция на нулевой частоте развивается от единственной волны, взаимодействующей с самой собой, и она может составить значительную часть полной стационарной циркуляции. Обсуждение стационарных инерционных течений требует учета всего спектра колебаний приложенного к поверхности ветрового напряжения, а не только его среднего значения. Нелинейная реакция на осциллирующую вынуждающую функцию в прямоугольном бассейне рассмотрена Педлоски [198], Веронисом [283], Веронисом и Морганом [285] и Лонге-Хиггинсом [159].

Линейное изменение полной глубины  $h$  соответствует следующей аппроксимации для зависимости параметра Кориолиса от широты:

$$f = f_0 + \beta y.$$

Она часто используется в уравнениях океанических моделей [см. (5.3.4)] и составляет существенную часть приближения  $\beta$ -плоскости, которое требует также, чтобы  $\beta y$  было пренебрежимо мало по сравнению с  $f_0$ . Обоснованность результатов, полученных на этой основе, и их применимость в океанографии были объектом многих исследований [159, 162, 279, 280], но они не имеют непосредственного отношения к нашей теме. Однако определенные математические аспекты слишком интересны, чтобы их игнорировать. Например, Лонге-Хиггинс нашел общий класс невынужденных, линейных, невязких решений системы (5.3.3) при  $f = 2\cos \Theta$  для океана, сплошь покрывающего поверхность сферы. Их можно прямо сравнить с решениями уравнений для  $\beta$ -плоскости, и таким путем оценить эффект сферической кривизны и относительную точность метода  $\beta$ -плоскости. (Уравнения (5.3.3) уже осреднены по глубине

и, строго говоря, неприменимы целиком ко всей сфере, так как это приближение вблизи экватора проблематично.)

Пусть  $\hat{N} = 1$ ,  $\hat{f} = 2 \cos \Theta$  и нормированный радиус сферы —  $a$ . Из уравнения неразрывности следует, что

$$Q_0 = a \vec{\nabla} \times [\psi(\theta, \Theta, t) \hat{r}] = - \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta};$$

тогда линейное невязкое уравнение для радиальной компоненты вихря есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0. \quad (5.5.10)$$

Ограниченные решения этого уравнения записываются в виде

$$\Psi_{nm} = P_n^m(\cos \Theta) \exp \left[ i m \left( \theta + \frac{2}{n(n+1)} t \right) \right] \quad (5.5.11)$$

и представляют собой волны, которые все движутся к западу относительно вращающейся системы координат. (На самом деле, нет необходимости в том, чтобы полярная ось системы  $(\theta, \Theta)$  совпадала с осью вращения. Решения могут относиться к произвольной системе  $(\theta', \Theta')$ , ось которой вращается с относительной угловой скоростью  $-2/[n(n+1)]$ . Однако обсуждение ограничено здесь рамками естественной координатной системы  $(\theta, \Theta)$ .)

Очень интересной особенностью решений Лонге-Хиггинса является захват волн Россби в приэкваториальной полосе. Если обратить внимание на волны с очень большим  $n$ , и для которых  $m/n$  не стремится ни к нулю, ни к единице при  $n \rightarrow \infty$ , то обнаружится, что асимптотические формы сферических гармоник заметно различаются в зависимости от условия

$$\sin \Theta \cong \frac{m}{n}.$$

В случае  $\sin \Theta > m/n$  формула указывает на колебательные изменения вихря с изменением  $\Theta$ , но при  $\sin \Theta < m/n$  возможно лишь экспоненциальное затухание. Следовательно, волны эффективно захватываются в экваториальном поясе; широты, ограничивающие этот пояс, есть радиальные каустики. Рисунок 5.4 изображает волновые картины в трех случаях:  $a - m \neq n$ ;  $b - m = 0$ ;  $c - m = n$ .

Хотя предыдущий анализ касается модельных уравнений, кажется вероятным, что удержание инерционных мод вблизи экватора является общей особенностью движения в сферическом кольце. Стерн [242] и Бретертон [22] показали, что это действительно так. Некоторые интересные выводы, вытекающие из этих исследований, обсуждаются в разделе 5.8.

Среди многих авторов, занимавшихся изучением волн Россби в геофизическом аспекте, следует упомянуть Маргулеса [171],

Гаурвица [100, 101], Россби [231], Раттри и Чарнелла [211] и Филлипса [203] (который приводит обширную библиографию).

Отчет об экспериментах Фульда и Френзена [80] и Френзена [71], касающихся инерционных волн в сферическом кольце, помещен в последнем разделе этой главы.

Очень простая демонстрация волн Россби во вращающемся цилиндрическом кольце со свободной поверхностью дана Иббетсоном и Филлипсом [124]; теоретический анализ можно найти у Фил-

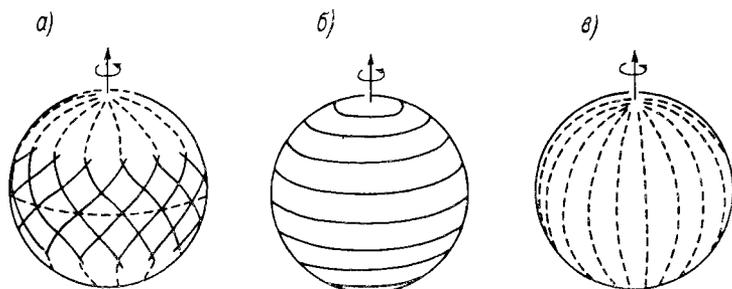


Рис. 5.4. Волновые картины на поверхности сферы по (5.5.12).

*a* — удержанные волны Россби для общего случая  $m \neq n$  [159],  
*б* —  $m = 0$ , синусоидальные волны на большей поверхности; *в* —  $m = n$ ,  
 «волны» ограничены экватором.

лица [204]. Среди различных классов поверхностных волн, которые можно возбудить в таком сосуде, есть один, который точно соответствует волнам низкой частоты, изученным в этом параграфе. Волны генерируются колеблющейся лопастью, фиксированной на определенном азимуте; исследуется изменение результирующего возмущения при изменении частоты возбуждения. Хотя фаза всегда распространяется на запад, направление групповой скорости зависит от частоты так, как это было установлено раньше. Экспериментальные результаты хорошо коррелируют с теорией, фотографии волн с одной или с другой стороны от лопасти при разных значениях частоты поразительны. Дальнейшее обсуждение этого интересного эксперимента опущено, так как его теоретическая формулировка стоит как-то за пределами того общего развития теории, которое проводится здесь.

## 5.6. Численные исследования

Большинство современных численных исследований основано на уравнениях океанической модели, предварительно упрощенных с помощью приближения  $\beta$ -плоскости (5.3.6). Глубина океана обычно берется постоянной,  $\hat{\mathbf{k}}$  направлено вертикально, и все зависимые переменные являются функциями декартовых координат  $(x, y)$ , которые отсчитываются к востоку и к северу соответственно. В этом случае градиент  $\nabla$  и горизонтальный градиент  $\tilde{\nabla}$  можно исполь-

зовать как равнозначные. Уравнения сохранения массы и вертикальной компоненты вихря вытекают из (5.3.3)

$$\vec{\nabla} \cdot Q_0 = 0, \quad (5.6.1)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \varepsilon Q_0 \cdot \vec{\nabla} v_0 + \beta \hat{j} \cdot Q_0 = E \vec{\nabla}^2 v_0 + \hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times F. \quad (5.6.2)$$

Скорость и завихренность можно выразить через функцию тока  $\psi_0(x, y)$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \hat{k} \times \vec{\nabla} \psi_0, \\ v_0 &= \vec{\nabla}^2 \psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.3)$$

Три перечисленных уравнения образуют систему, решение которой должно удовлетворять соответствующим граничным условиям, обычно однородным. Вынуждающую функцию можно выбрать произвольно.

Граница океанического бассейна чаще всего задается в виде прямоугольника или фигуры, образованной перпендикулярными отрезками прямых. Это дает возможность выбрать простейшую вычислительную сетку. Память доступной вычислительной машины строго ограничивает размеры ячеек сетки. Техника изменения сетки, когда требуется повышенная точность (например, в пограничных слоях), развита еще не полностью.

Умение быстро и точно решать нелинейную краевую задачу дает возможность проводить содержательные численные эксперименты. Этим способом можно количественно оценить относительное значение различных процессов в широком диапазоне параметров, который недоступен аналитическим методам. Информация, получаемая при таких исследованиях, часто приводит к усовершенствованию модели как в физическом, так и в математическом отношении.

Одно важное заключение, вытекающее из анализа полного уравнения, состоит в том, что вязкая диссипация в какой-либо части бассейна является существенным механизмом для *всех задач* о «ветровой» циркуляции.

Брайен [28] рассматривал прямоугольный бассейн  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , находящийся под действием силового поля

$$\hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times F = -\beta \sin \frac{\pi}{2} y. \quad (5.6.4)$$

(Параметр  $\beta$  можно исключить, переопределив характерное время и полагая  $\varepsilon' = \varepsilon/\beta$ ,  $E' = E/\beta$ . В таком случае можно просто положить  $\beta = 1$  и прямо решать (5.6.1) и (5.6.2).)

В действительности нужно (но не легко) сделать  $E$  настолько малым, чтобы инерционный пограничный слой был намного шире вязкого. На рис. 5.5 *a* показаны осредненные по времени результаты четырех расчетов при уменьшении  $E$  и фиксированном  $\varepsilon$ . По мере того как значение инерционных членов возрастает, центр главного

круговорота смещается к северу (см. обсуждение на стр. 227). Вторичный круговорот образуется в верхнем углу; с восточной стороны главного потока возникает противотечение. Движения жидкости в пограничном слое и во внутренней области становятся более неразделимыми друг от друга, даже несмотря на то, что приближение

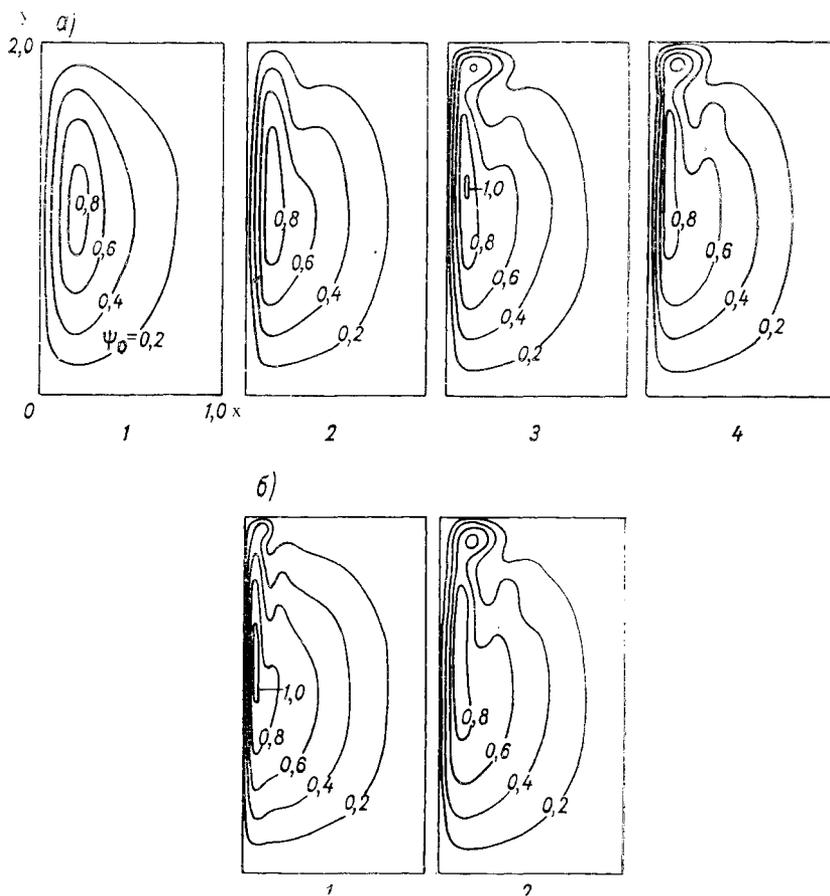


Рис. 5.5. Осредненная по времени функция тока  $\psi_0$  в прямоугольном бассейне, находящемся под действием синусоидального напряжения ветра (5.6.4) [28].

$a$  —  $\varepsilon = 1,28 \cdot 10^{-3}$ , число Экмана уменьшается: 1 —  $E = \varepsilon/5$ ; 2 —  $E = \varepsilon/20$ ; 3 —  $E = \varepsilon/40$ ; 4 —  $E = \varepsilon/60$ ; б — число Россби возрастает от  $\varepsilon = 0,32 \cdot 10^{-3}$ ,  $E = \varepsilon/60$  (1) до  $\varepsilon = 1,28 \cdot 10^{-3}$ ,  $E = \varepsilon/60$  (2).

пограничного слоя остается справедливым на большей части бассейна. Рисунок 5.5 б показывает, как при возрастании числа Россби усиливается вторичный круговорот и инерционное противотечение. Главное течение не отрывается от стенки, однако к северу от критической широты появляются движущиеся вихри. Эффект вязкости, хотя он и ослаблен, является критическим, и каждая линия тока проходит через область интенсивной диссипации.

Веронис [281, 282] упростил численную задачу, приняв в уравнении момента закон сопротивления:  $-EQ_0$  вместо  $E\tilde{\nabla}^2 Q_0$  (т. е.  $-Ev_0$  вместо  $E\tilde{\nabla}^2 v_0$  в (5.6.2)). Число граничных условий должно быть соответственно уменьшено, и с помощью такой модификации модели можно изучать сильно нелинейный режим.

Веронис рассматривает квадратный океанический бассейн  $0 \leq x, y \leq \pi$ , находящийся под действием ветрового напряжения

$$\hat{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = -\beta \sin x \sin y, \quad (5.6.5)$$

которое соответствует повышенному давлению в центре области. Параметр  $\beta$  вновь можно исключить, переопределяя  $\varepsilon$  и  $E$  и полагая  $\beta = 1$ .

Стационарная *линейная* задача для этого простого закона влекущей силы такова:

$$E \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = -\sin x \sin y, \quad (5.6.6)$$

причем  $\psi_0 = 0$  на границе. Решение, данное Стоммелом [254], есть

$$\psi_0 = \frac{\sin y}{1+4E^2} \left[ 2E \sin x + \cos x + \frac{1}{e^{\pi s_1} - e^{-\pi s_2}} \left\{ (1 + e^{\pi s_2}) e^{s_1 x} - (1 + e^{\pi s_1}) e^{s_2 x} \right\} \right], \quad (5.6.7)$$

где

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm (1+4E^2)^{1/2}}{2E}. \quad (5.6.8)$$

Для пограничного слоя имеет место приближенная формула

$$\psi_0 = (1 + \cos x - 2e^{-x/E}) \sin y. \quad (5.6.9)$$

На рис. 5.6 а показаны линии тока при  $E = 0,05$ .

Предельные стационарные решения нелинейной задачи с начальными условиями были получены численно. Подробности здесь привести невозможно, а результаты изображены на рис. 5.6 и 5.7. Графики расположены в порядке возрастания значения нелинейности, и на рис. 5.7 б толщина инерционного пограничного слоя в восемь раз больше толщины вязкого слоя.

Центр основного круговорота (зона высокого давления) смещается к северу по мере усиления нелинейных эффектов. Возрастающий к северу градиент давления стремится прижать течение к границе, и в этом месте отмечается интенсификация. Южная часть течения ослабевает и превращается в более широкий поток, так как давление здесь уменьшается. По мере возрастания нелинейных эффектов формируется струя вдоль северного и, в конце концов, также и вдоль восточного берега. На этой стадии решение напоминает свободную моду, найденную Фофоновым [66], см. стр. 229.

Так как частица жидкости в западном пограничном слое движется к северу, ее относительная завихренность уменьшается, компенсируя увеличение планетарного вихря. Колебания в северо-

западном углу развиваются из-за того, что под влиянием инерции частица проскакивает широту, на которой она должна была бы вновь войти во внутреннюю область с пренебрежимо малой относительной завихренностью. Частица возвращается в это равновесное положение, проходя через район интенсивной диссипации, где происходит надлежащее согласование уровня относительной завихренности. Типичное положение зон положительной и отрицательной завихренности показано на рис. 5.7 б, который соответствует рис. 5.6 в и г.

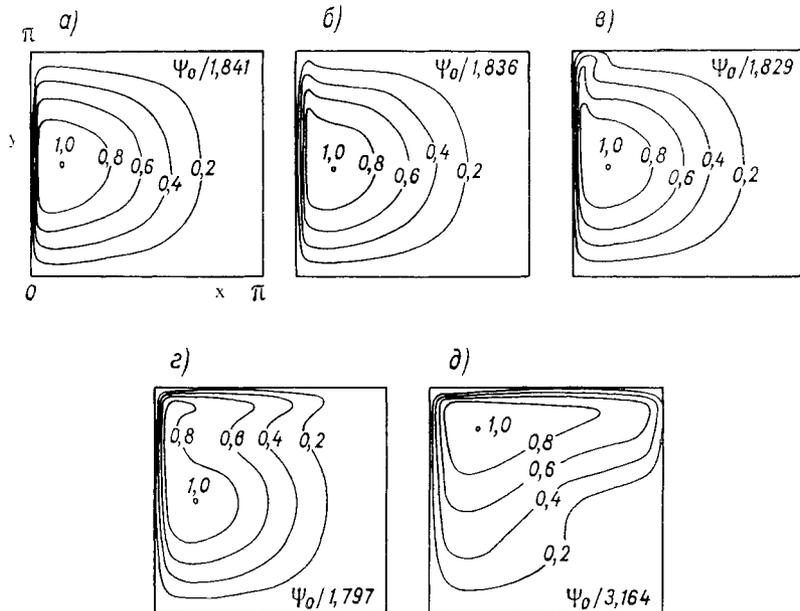


Рис. 5.6. Линии тока при увеличении числа Россби.

а —  $\sqrt{\varepsilon} = 0,001$ ,  $E = 0,05$ ; б —  $\sqrt{\varepsilon} = 0,003$ ,  $E = 0,05$ ; в —  $\sqrt{\varepsilon} = 0,05$ ,  
 $E = 0,05$ ; г —  $\sqrt{\varepsilon} = 0,1$ ,  $E = 0,05$ ; д —  $\sqrt{\varepsilon} = 0,1$ ,  $E = 0,025$ .

Так как из северного пограничного слоя происходит истечение массы, то, по-видимому, осцилляции можно приписать выходу, распространению и проникновению во внутреннюю область волн Россби, образующихся на западной стенке (см. стр. 223 и [179]).

Отрыв от берега не наблюдается ни в одном из этих расчетов<sup>1</sup>. Действительно, происходит совсем обратное; картина предельной циркуляции (рис. 5.7. а) содержит интенсивные инерционные струи на трех сторонах границы и очень похожа на свободную моду. Было

<sup>1</sup> В связи с этим нужно отметить, что расчеты Брайена не так далеко простираются в область нелинейного режима, чтобы позволить сделать серьезные выводы о чисто инерционной струе. С другой стороны, простая модель Верониса по самой своей структуре (усеченные уравнения с невозмущенными начальными условиями) может помешать установлению какого-либо стационарного состояния, которое не являлось бы решением типа Фофонова. Вопрос об инерционной струе и об отрыве все еще открыт.

бы интересно рассмотреть влияние изменения топографии океанического бассейна, чтобы установить, могут ли они вызвать принудительный отрыв. Работа в этом направлении выполняется.<sup>1</sup>

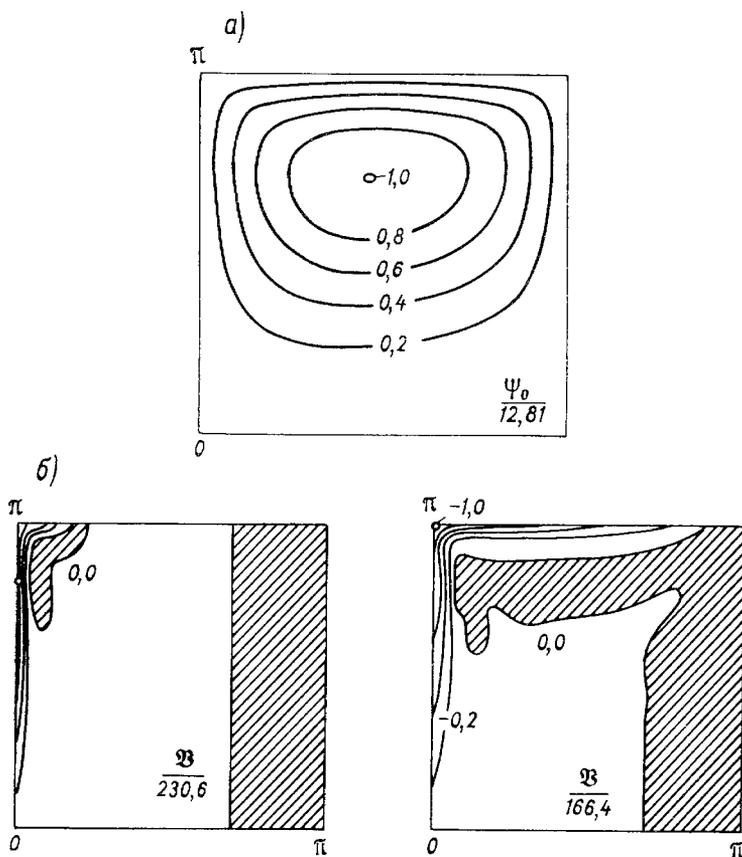


Рис. 5.7. *a* — линии тока сильно нелинейного движения:  $\varepsilon = 0,2$ ,  $E = 0,025$ ; *b* — районы положительной (заштрихованы) и отрицательной завихренности, соответствующие циркуляции, показанной на рис. 5.6, *з* и *д*.

Ниилер [191] аналитически исследовал задачу о вынужденной циркуляции. Его процедура включает подходящее масштабирование уравнений движения и разложение по степеням параметра, связанного с числом Экмана. Свободная мода Фофонова возникает как естественный резонанс к приложенному напряжению. Кроме того, решение более высокого порядка дает условия циркуляции, которые устраняют неопределенность чисто инерционной теории (произвольная функция  $F(\psi)$ ).

Влияние топографии на свободную инерционную струю было изучено Уорреном [289] в связи с меандрированием Гольфстрима.

<sup>1</sup> См. Каменкович.

Если путь течения, а не его структура, представляет главный интерес, то можно построить совсем простую теорию, которая дает неожиданно хорошие результаты.

Предполагается, что узкое течение несет постоянный поток массы и что радиус кривизны течения очень велик по сравнению с его шириной. В пренебрежении действием вязкости уравнение движения сводится к уравнению сохранения потенциального вихря

$$\frac{v_0 + f}{H} = F(\psi_0). \quad (5.6.10)$$

Завихренность в меандрирующей струе, радиус кривизны которой велик, можно выразить через кривизну линии тока  $C$ . Если  $(\xi_1, \xi_2, z)$  — «естественные» ортогональные координаты и  $\xi_2$  постоянно на линии тока, то это выражение принимает вид

$$v_0 \cong CQ_0 \frac{\partial Q_0}{\partial \xi_2}, \quad (5.6.11)$$

где  $Q_0$  — скорость течения. Уравнение (5.6.10) можно переписать так:

$$CQ_0 + \frac{\partial Q_0}{\partial \xi_2} + f = HF(\psi_0). \quad (5.6.12)$$

Простейшее приближение получается, если отнести последнее уравнение к центральной линии тока  $\bar{\psi}_0$ , определяемой соотношением  $(\partial/\partial \xi_2) Q_0 = 0$ . Это эквивалентно предположению об однородности условий поперек течения. Если  $(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$  — координаты  $\bar{\psi}_0$  и на каждой линии тока  $Q_0 H = M$  (сохранение массы), то (5.6.12) очень близко к

$$\bar{C}M + fH = \bar{H}^2 F(\bar{\psi}_0), \quad (5.6.13)$$

где

$$\bar{H} = \bar{H}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\bar{C} = \left( \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} \right) \left( 1 + \left( \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)^2 \right)^{-3/2}.$$

Функция  $F(\bar{\psi}_0)$  оценивается при нулевой кривизне, т. е. в точке перегиба. Более уточненные уравнения такого же типа можно получить путем соответствующего осреднения поперек потока. Известные характеристики течения можно затем ввести и использовать так, как это обычно делается в методах интегральных моментов. В этом заключается сущность процедуры Уоррена.

Глубина океана есть заданная функция координат, и численное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения (5.6.13), типичного для целого класса уравнений, является сравнительно простым делом. Результаты Уоррена применяются к условиям Гольфстрима, и расчеты находятся в хорошем согласии с большинством примеров наблюдавшихся в действительности меандров (рис. 5.8). Это совершенно строгое доказательство того, что свободный поток контролируется рельефом дна.

Если возросший градиент давления стремится усилить северную часть течения, обусловленную нелинейными взаимодействиями, но противодействующий градиент глубины или какой-нибудь другой эффект отрывает ее от береговой черты, то свободная струя, чтобы двигаться к северу, должна найти благоприятные топографические

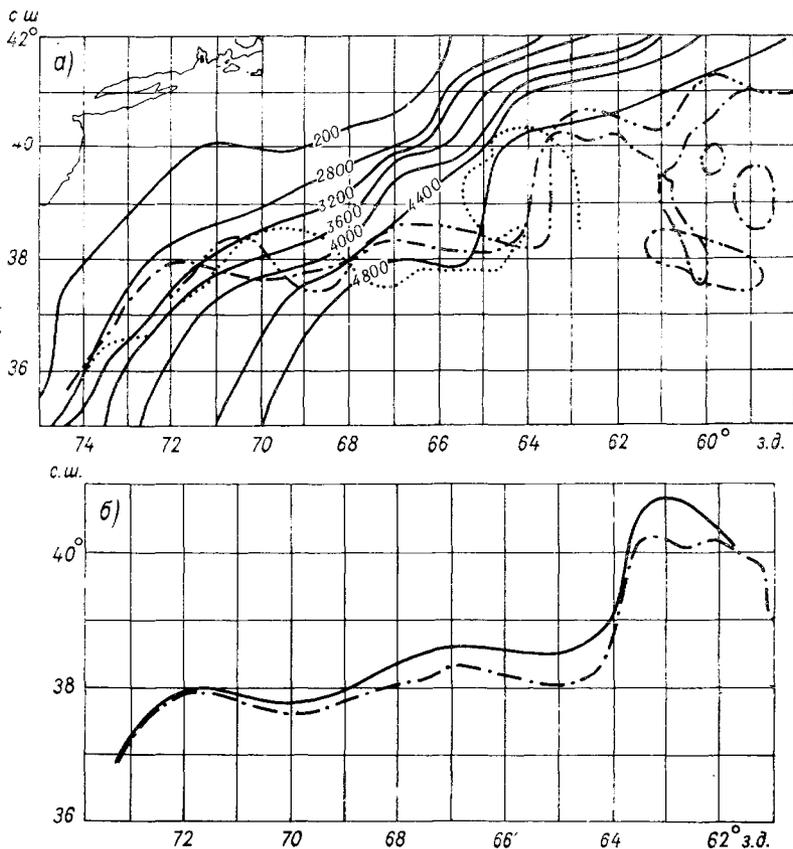


Рис. 5.8. а — три наблюдавшихся пути Гольфстрима, наложенные на smoothed изобаты (сплошные линии); б — сравнение пути течения с численным решением Уоррена [289] (толстая сплошная линия).

условия. В свободной струе, текущей на север, так что большие глубины находятся к востоку, происходит увеличение либо средней скорости, либо ширины, чтобы поток массы сохранялся неизменным при движении по мелководью. Каждое из этих изменений приводит к нарушению равновесия (сила Кориолиса начинает превосходить локальный градиент давления), и это заставляет поток вернуться на более глубокую воду. Смещаясь на большие глубины, течение испытывает обратную тенденцию по тем же причинам: градиент давления превышает силу Кориолиса. Градиент глубины стремится

стабилизировать движение потока, направленного к северу, но создает при этом меандры около равновесной глубины. Медленный дрейф к востоку на большие глубины диктуется сохранением завихренности.

Расчеты свободной нестационарной струи и анализ меандров, наблюдаемых в лабораторных условиях, в настоящее время не завершены.

### 5.7. Течение между концентрическими сферами

Движения жидкости во вращающемся сферическом кольце были объектом большого количества исследований, проводившихся в надежде на то, что они имеют много общего с атмосферной и океанической циркуляцией. До тех пор, пока зазор кольца мал по сравнению с радиусом, течения действительно аналогичны многим решениям задач для однородных жидкостей. Примеры, соответствующие этому, уже были представлены: дальнейшие содержатся в этом разделе. (Следует учесть, что течение между концентрическими сферами привлекательно и интересно само по себе.) Опыт работы с ними, кажется, способен убедить в том, что более высокая оценка вероятности успеха связана с экспериментальными усилиями, а не с теоретическими исследованиями. Чисто динамические аналогии геофизических движений отчасти проще потому, что при этом удается избежать аналитических трудностей, связанных исключительно с геометрией области.

Движение между концентрическими сферами заметно отличается от движения внутри одной сферы. Полная вертикальная глубина является разрывной функцией цилиндрического радиуса в первом случае, но не в последнем, и это оказывает определенное влияние на природу инерционных мод. Например, невязкая геострофическая мода терпит разрыв на поверхности вертикального цилиндра, описанного около внутренней сферы. Не будет слишком неожиданным, если некоторые из инерционных волн также имеют особенности. Явных формул для всех собственных мод в сферическом кольце не существует. Преобразование Брайена (стр. 62) — существенный шаг в решении задачи для сферического контейнера — здесь не приложимо, и вследствие этого об инерционных волнах известно очень мало<sup>1</sup>. Однако узкие кольца геометрически несколько проще

<sup>1</sup> Некоторые из сферических мод, описываемых выражением (2.12.7), свойственны также любым сферическим кольцам. Эти подклассы соответствуют набору индексов  $n = k + 1$ ; моды и собственные значения их суть

$$\Phi = zr^k e^{ik\theta}, \quad \lambda = \frac{2}{k+1} \quad \text{для } k \geq 2.$$

Для больших  $k$  эти моды по существу ограничены экваториальной зоной; их фазовые скорости такие же, как у захваченных инерционных волн, обсуждавшихся на стр. 236. В. В. Р. Малкус отмечает, что эти особые решения удовлетворяют также полным нелинейным уравнениям, а также и тем, которые учитывают радиальную стратификацию.

для анализа. Стерном [242] и Бретертоном [22] было показано, что в этом случае имеется класс инерционных волн, удерживаемых в окрестности экватора. Они соответствуют захваченным волнам Россби, найденным Лонге-Хиггинсом (см. раздел 5.3).

Захват волн качественно был описан Бретертоном в терминах теории лучей, и его представление следует ниже. Эта теория строга верна для длин волн  $2\pi/k$ , меньших, чем расстояние  $H$ , разделяющее

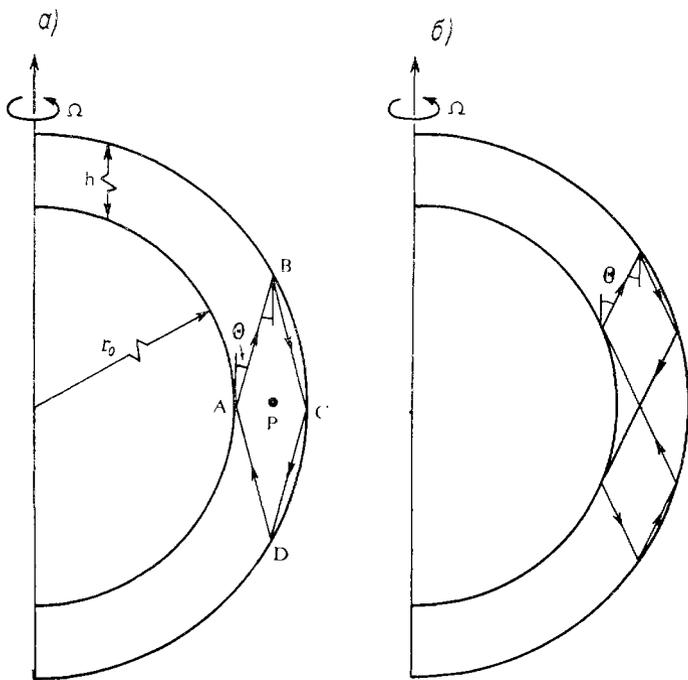


Рис. 5.9. *a* — пути лучей для волны Россби наимизшего порядка, уловленной вблизи экватора [22]; *б* — мода более высокого порядка.

сферы, т. е.  $kH \gg 1$ . Вследствие этого сферическая кривизна в азимутальном направлении относительно невелика, и локально анализ сравним с тем, который был выполнен для концентрических цилиндров (рис. 5.9 *a*). Мы продолжим обсуждение этой более простой формы контейнера.

Свойства бегущей инерционной волны перечислены в разделе 4.2, и многие результаты, полученные там для потока энергии и проч., будут использованы теперь. Особенно пригодятся следующие выводы: направление луча всегда параллельно местной групповой скорости; групповая скорость перпендикулярна волновому вектору; угол между направлением луча и осью вращения сохраняется при отражении волны от границы (см. рис. 4.1).

Мода наимизшего порядка описывается лучом ABCD на рис. 5.9 *a*; более сложная мода показана на рис. 5.9 *б*. Луч AB, образующий

угол  $\Theta$  с осью вращения, указывает направление распространения энергии плоской волны, волновой вектор которой перпендикулярен к лучу. Кроме того, частота этой плоской волны, согласно (4.2.11), равна

$$\lambda = 2\Omega \cdot \hat{\mathbf{k}} = 2\Omega \sin \Theta \quad (5.7.1)$$

в размерных единицах. Этот луч испытывает многократное отражение в точках В, С и D от внешней границы и возвращается в исходную точку А. Угол  $\Theta$  с вертикальной осью остается одним и тем же для каждого отрезка луча.

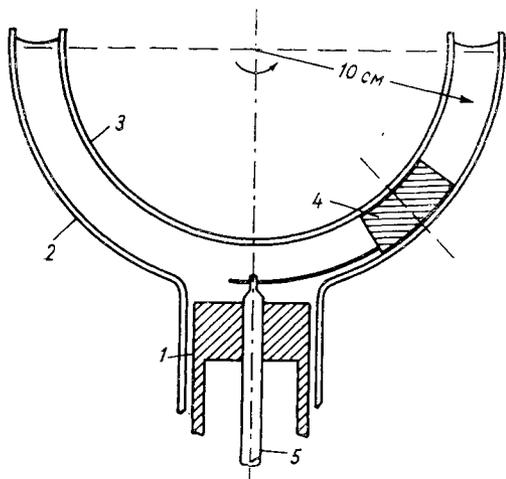


Рис. 5.10. Схема прибора для изучения течения за препятствием в сферическом кольце. 1 — опорная ось, 2 — внешний сосуд, 3 — внутренний сосуд, 4 — круглое препятствие, 5 — внутренняя ось.

доказать, что это возможно, вычислим время пробега по контуру и период волны. Первое пропорционально  $kH (H/r_0)^{-1/2} \Omega^{-1}$ , если последний имеет порядок  $(H/r_0)^{-1/2} \Omega^{-1}$ . Так как  $kH \gg 1$ , то очень небольшое изменение волнового числа способно изменить время пробега на несколько полных периодов. Можно легко найти соответствующие значения  $k$ , при которых волна будет возвращаться точно с начальной фазой, что и означает существование захваченных инерционных мод.

Серии экспериментов по возбуждению волн Россби в сферическом кольце были выполнены Фульцем [72, 73], Фульцем и Лонгом [82], Лонгом [154], Френзенем [71] и Фульцем и Френзенем [80]. Основной прибор, показанный на рис. 5.10, состоял из двух жестко скрепленных концентрических стеклянных полусфер. Различные препятствия, расположенные в зазоре между сферами, были связаны с отдельной ведущей рукояткой, так что они могли поворачиваться со скоростью, отличной от скорости контейнера. Относительные движения, возбуждаемые таким образом, были видны благодаря

Наибольшее проникновение волн к северу (расстояние ВР) приблизительно равно  $(Hr_0)^{1/2}$ , если  $H \ll r_0$ . Следовательно, частота инерционной волны, по (5.7.1), есть

$$\lambda = \Omega \left( \frac{H}{r_0} \right)^{1/2}.$$

Все эти соотношения согласуются с аналитическими результатами Стерна [242].

До сих пор требовалось только, чтобы луч описывал замкнутую линию. Кроме того, волна должна возвращаться в точку А со своей начальной фазой, если она является частью подлинной моды. Чтобы

взвеси из белых частиц. Препятствия обычно имели форму круговых цилиндров со сферическими основаниями, охватывающими до  $20^\circ$  широты. Высота препятствий менялась от половины до полного зазора между сферами.

Вращая препятствия медленнее, чем сферы, генерировали относительный западный поток позади них, тогда как более быстрое вращение приводило к возникновению восточного движения. Так как волны Россби дрейфуют на запад, попутный западный поток может задерживать эти волны, бегущие вниз по течению, замораживая возмущения в стационарной форме. Относительный восточный перенос выделяет встречные волны.

Френзен [71] суммировал интересные особенности, наблюдавшиеся в западном потоке позади препятствия, которое имело диаметр  $20^\circ$  и занимало весь зазор на широте  $30$ ,  $45$  и  $60^\circ$ . В низших широтах наблюдались сильные стационарные волны в направлении по течению (см. рис. 5.11). По-видимому, амплитуда волны должна быть больше диаметра препятствия, и в первом гребне возникает небольшой замкнутый антициклон. В средних широтах ( $45^\circ$ ) наблюдалась такая же картина, но с меньшей амплитудой и без обратного вихря. В высоких широтах ( $60^\circ$ ) какая-либо *стационарная волновая картина неразличима*. Вместо этого развивается серия движущихся циклонических вихрей, каждый из которых образуется на препятствии и в конце концов достигает примерно такого же, как оно, диаметра.

Относительное восточное движение не создает волновой картины. В этом случае препятствие увлекает вперед в своем движении всю жидкость, и в широтной полосе, занятой цилиндром, возникает слабое течение. Такой же результат был получен, когда тело не сплошь заполняло зазор между стенками сосуда.

Фульц и Френзен повторили эти эксперименты с меридиональным барьером от полюса до экватора высотой, равной половине глубины. Для западного течения результаты качественно подобны тем, которые были получены с цилиндрическим препятствием. Однако восточное течение, пройдя над барьером, резко сворачивает к северу и образует затем изгиб. Картина повторяется на всем пути вокруг сферы (см. рис. 5.12). Имеют ли изгибы какое-нибудь отношение к захваченным волнам Россби, неизвестно.

Получить с приемлемой подробностью решение какой-либо из этих задач исключительно трудно и сложно. Волны, нелинейные взаимодействия, инерционные пограничные слои у края и еще кое-где внутри области, весьма сложная геометрия — поистине целая гамма феноменальных и сложных последствий вращения. Неудивительно поэтому, что прогресс на теоретическом фронте оказался несколько замедленным. Начало развитию теории было положено Лонгом [154], который рассмотрел основные следствия сохранения завихренности при изучении поля течения.

Пусть уравнения движения записаны в системе координат, фиксированной на препятствии, которое вращается с частотой  $\Omega_0$ . Скорость вращения кольца равна  $\Omega = \Omega_0 (1 + \epsilon)$  и положительность  $\epsilon$

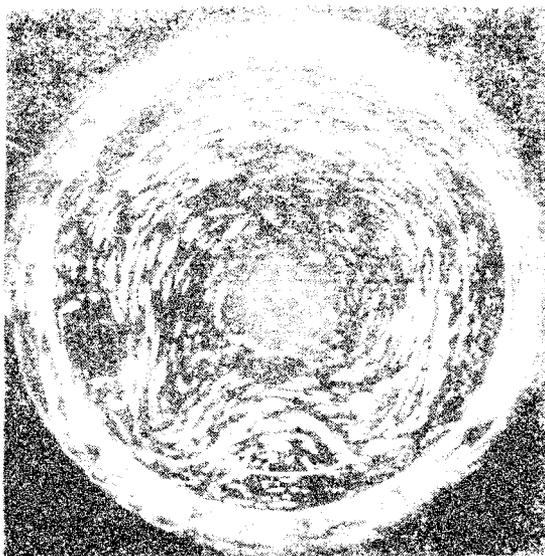
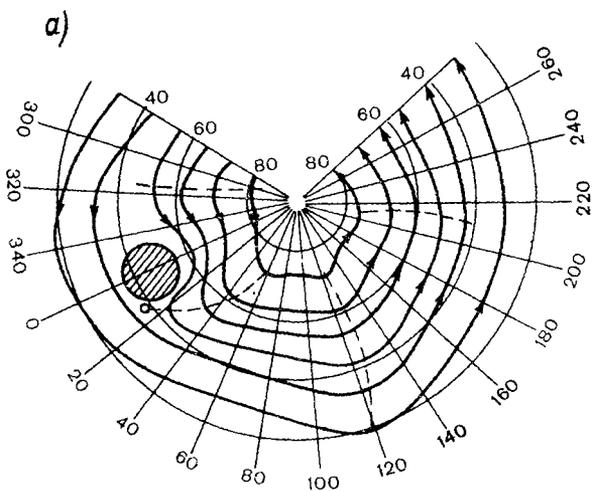


Рис. 5.11. *a* — линии тока, построенные по моментальной фотографии четырех волн, возбужденных западным потоком позади препятствия на  $30^\circ$  широты при  $\varepsilon = 0,078$ ; *b* — пять волн при  $\gamma = 0,063$ .

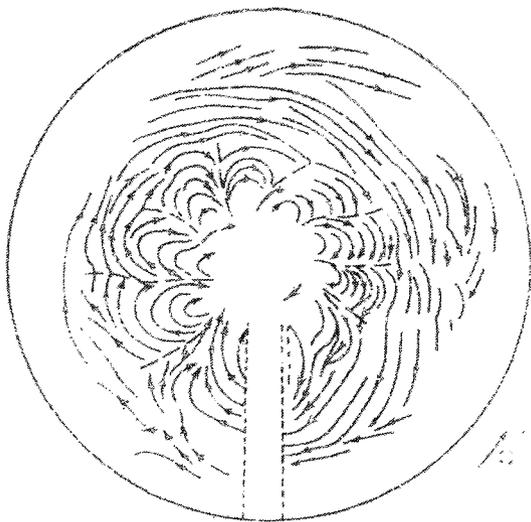


Рис. 5.12. Мгновенная фотография медленного восточного течения относительно барьера от полюса до экватора высотой в половину глубины. Ось вращения направлена вверх.

означает существование западного относительного ветра. Радиус внутренней полусферы  $r_0$  взят в качестве характерной длины, так что масштабы равны  $\llbracket r_0, \Omega_0^{-1}, \varepsilon \Omega_0 r_0 \rrbracket$ . Из соображений простоты и поскольку это лишь предварительное исследование, в качестве основы для дискуссии использованы уравнения раздела 5.3. Для постоянной ширины зазора  $H$  они таковы:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q} &= 0, \\ \mathbf{Q} \cdot \tilde{\nabla} (\varepsilon v + \mathbf{f}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.7.2)$$

где  $\mathbf{Q}$  — тангенциальный вектор скорости, осредненный по  $H$ , а  $\tilde{\nabla}$  — поверхностный градиент. После введения функции тока

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{r}} \times \tilde{\nabla} \psi, \quad (5.7.3)$$

систему можно проинтегрировать один раз и получить обычный закон сохранения

$$\varepsilon \tilde{\nabla}^2 \psi + \mathbf{f} = F(\psi). \quad (5.7.4)$$

Нельзя определить произвольную функцию  $F(\psi)$ , если не учитываются эффекты вязкости. Это постоянный источник трудностей, и, как и прежде в разделах 4.6 и 5.4, «разумный» выбор делается так, чтобы некоторый класс решений можно было изучать с наибольшей простотой. Обращение к условиям, заданным «выше по течению», еще менее надежно, чем в задачах для однородного течения (глава 4), так как в этом случае линии тока образуют замкнутые окружности. Пусть, однако,

$$\psi = \psi_\infty - \tilde{\psi},$$

где  $\psi_\infty = -\cos \Theta$  есть невозмущенная функция тока (при отсутствии препятствия). Если предположить, что *течение невозмущено вдоль некоторого меридиана*, где  $\tilde{\psi} = 0$ , то отсюда следует

$$F(\psi_\infty) = 2(1 + \varepsilon) \cos \Theta, \quad (5.7.5)$$

или

$$F(y) = -2(1 + \varepsilon)y.$$

Тогда уравнение для возмущения функции тока принимает вид

$$\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \Theta^2} + 2 \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \tilde{\psi} = 0. \quad (5.7.6)$$

Решения этого уравнения имеют волнообразный характер для относительного западного течения (при  $\varepsilon > 0$ ) и характер пограничного слоя при  $\varepsilon < 0$ . Задача полностью аналогична той, которая изучалась Фофоновым [66] для океанической циркуляции (см. раздел 5.3).

Сферические гармоники  $P_{n-1}^m(\cos \Theta) e^{im\theta}$  являются решениями уравнения (5.7.6), если  $\varepsilon$  положительно и

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (5.7.7)$$

Для полунария условие на экваторе есть  $\psi = 0$ , так что  $n - m = 2k - 1$  и тогда

$$\varepsilon = \frac{2}{(m - 2k)(m - 2k - 2)}. \quad (5.7.8)$$

Это соотношение между числом Россби и меридиональным волновым числом инерционных волн было экспериментально подтверждено Фульнером и Фрейзенем [80] (см. рис. 5.13). Волны, соответствующие  $k = 0$ , являются преобладающими.

Решение задачи для восточного ветра, которое должно включать пограничные слои, не имело успеха. Эта интересная проблема

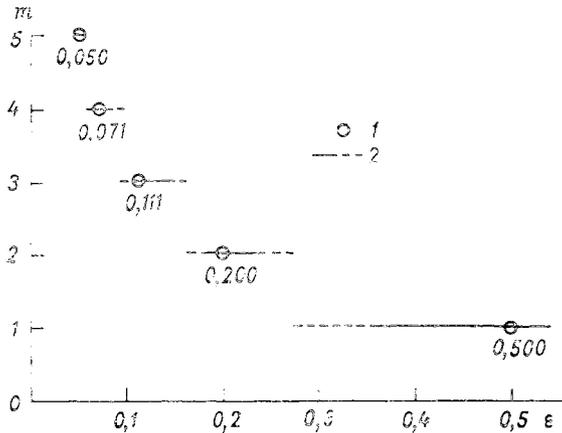


Рис. 5.13. Результаты экспериментальной проверки [80] (5.7.8), выражающего соотношение числа Россби  $\varepsilon$  и волнового числа  $m$  при  $k = 0$ . 1 — стационарные значения, 2 — разброс наблюдений.

должна быть сильна для методов и информации, доступных в настоящее время. Теоретический прогресс в этом направлении гарантирован, и надежда на успех вполне обоснована.

Численное исследование задачи для сферического кольца, выполненное Пирсоном, кратко описано в разделе 3.5. По-видимому, нет оснований, чтобы не применить такую же технику и с тем же успехом для тонкого сферического кольца. Поведение жидкости вблизи экватора, когда внутренняя сфера вращается, должно представлять значительный теоретический интерес и может даже пролить некоторый свет на динамику экваториального течения Кромвелла (см. [132, 133, 223]).

Открытие течения Кромвелла стимулировало многие теоретические и экспериментальные исследования. В экспериментах Бэйкера и Робинсона [4] жидкость в закрытом бассейне, представляющем собой секцию сферического кольца, увлекается вращением граничных сфер с разными скоростями. По отношению к оси вращения

бассейн может занимать различное положение между сферическими поверхностями; в частности он может помещаться так, что экватор пересекает его. В этом приборе наблюдались многие океанические явления, включая западный пограничный слой, широкую геострофическую циркуляцию в открытой части океана и экваториальное противотечение.

Кэрриер [34] рассмотрел экваториальный поток, управляемый вязкими процессами в кольце с очень малым зазором Н. Его анализ показал, что эти процессы стремятся только исказить профиль скорости, по видимому, так, что возникают поверхностное течение и подповерхностное противотечение.

Предстоит еще много раскрыть относительно течений в экваториальном районе в продолжение исследований на всех трех фронтах — численном, экспериментальном и аналитическом. Поэтому настоящий раздел приходится оставить не совсем законченным; его цель достигнута, если открытые проблемы и направления текущих исследований получили, по крайней мере, частичное освещение.

## УСТОЙЧИВОСТЬ

## 6.1. Введение

Установившееся вязкое ламинарное течение жидкости является устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, если все эти возмущения затухают в пределе до нуля, и основное течение при этом не изменяется. И, наоборот, это течение является неустойчивым, если влияние любого малого возмущения приводит к образованию или другого ламинарного течения, или турбулентности. (Более общее понятие устойчивости, которое применимо к нестационарным течениям или к возмущениям конечной амплитуды, нам не потребуется.)

В этой главе мы ограничимся в основном анализом бесконечно малой устойчивости течений жидкости, исследованных в предыдущих разделах. Соответственно все, что выходит за рамки этого анализа, будет либо упоминаться кратко, когда это необходимо, либо полностью опускаться. Это относится также и к тем вопросам, которые хотя и имеют касательство к теме данной главы, но были подробно изложены в литературе. К числу последних принадлежат исследования устойчивости вращающихся жидкостей в следующих случаях: между концентрическими цилиндрами, при подогреве снизу, в магнитном поле, в самогравитирующей среде. Анализ большей части этих вопросов можно найти в работе Чандрасекара [39] (см. также [140] и [165]). Работы Линя [152], Стюарта [259] и Дразина и Говарда [53] цитируются для полноты библиографии по гидродинамической устойчивости.

Хотя сфера нашего анализа несколько ограничена, тем не менее она включает большое разнообразие интересных и важных случаев неустойчивости, которые могут встречаться при самых обычных условиях. Некоторые из этих случаев достаточно изучены и поняты. Другие, основной механизм которых не совсем ясен, представлены здесь в обзоре по общей неустойчивости.

## 6.2. Критерий Рэлея

Очень простой тип невязкой вращательной неустойчивости создается в осесимметричном течении при нарушении баланса между центробежной силой и силой радиального градиента давления.

Впервые он был рассмотрен Рэлеем [214], однако наилучшее физическое описание его было дано позднее Карманом [129].

Предположим, что осесимметричное возмущение появляется в невязкой области вращающейся жидкости, где действуют только что упоминавшиеся силы.

Допустим далее, что элементы жидкости радиуса  $r_0$  и  $r_1$ , причем  $r_1 > r_0$ , взаимодействуют друг с другом благодаря возмущению. Тогда течение по своей природе является устойчивым, если силовое поле стремится вернуть частицы в их первоначальное положение, и неустойчивым — во всех остальных случаях.

Поскольку угловой момент сохраняется, то частица, которая первоначально находилась в  $r_1$  и имела абсолютную скорость  $v_1$ , перемещаясь в  $r_0$ , приобретает скорость  $(r_1/r_0) v_1$ . Центробежная сила  $(r_1 v_1^2/r_1)$  противоположна силе равновесного давления, имеющей величину  $v_0^2/r_0$ . Таким образом, если

$$\frac{v_0^2}{r_0} > \frac{r_1^2 v_1^2}{r_0^3},$$

то суммарная сила, оказывающая влияние на частицу, направлена радиально внутрь жидкости и действует так, чтобы восстановить первоначальное невозмущенное движение. С другой стороны, основное течение является неустойчивым, если

$$(r_0 v_0)^2 < (r_1 v_1)^2. \quad (6.2.1)$$

В этом случае из-за отсутствия баланса сил возникают слабые отклонения. Следовательно, критерий Рэля (6.2.1) утверждает, что стационарное ламинарное движение является неустойчивым, когда *квадрат* абсолютной циркуляции относительно оси вращения уменьшается с увеличением цилиндрического радиуса. Математический вывод этого условия был дан Сингом [260] и рассмотрен в [152].

Критерий Рэля имеет первостепенную важность в теории устойчивости для движений жидкости между концентрическими цилиндрами, которые вращаются с различными скоростями. (Хотя вязкость ответственна за установление первоначального течения, однако при анализе устойчивости она играет вспомогательную роль в очень широком диапазоне параметров.) Эта задача впервые была изучена Тэйлором [267] как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения. С тех пор появилось большое число статей; их неполный список приводится в [39] и [53]. Линейная теория устойчивости является достаточно полной. Окончательные эксперименты Коулса [45], по-видимому, завершили это частное направление, создав стимул для дальнейших теоретических исследований нелинейных аспектов этой проблемы.

Здесь будут описаны (и притом кратко) только несколько результатов этих исследований. Все известные в настоящее время данные приводятся на рис. 6.1, заимствованном из работы Коулса. Данные

классифицированы по числам Экмана, которые определяются следующим образом:

$$E_0 = \frac{\nu}{\Omega_0 r_0^2}, \quad E_1 = \frac{\nu}{\Omega_1 r_1^2},$$

где  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  — скорости вращения двух цилиндров радиусом  $r_0$  и  $r_1$ , причем  $r_0 > r_1$ . Согласно критерию Рэлея, неустойчивость должна иметь место при

$$E_0 > E_1,$$

т. е. слева от пунктирной линии на рисунке. Однако вязкие процессы стремятся стабилизировать течение, тем самым модифицируя это

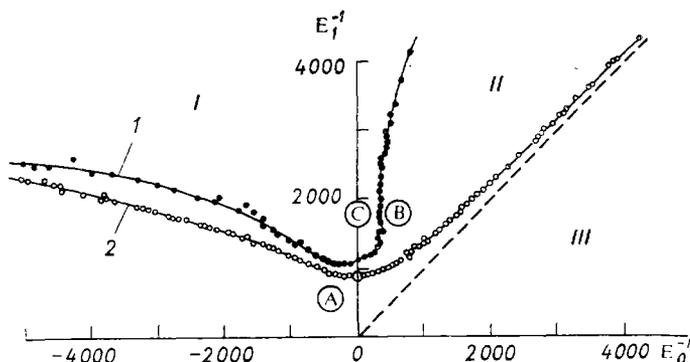


Рис. 6.1. Различные режимы кругового течения Куэтта по данным визуальных наблюдений (неровные цилиндры,  $r_0/r_1 = 1,135$ ;  $\nu = 0,11 \text{ см}^2/\text{с}$ ) [45]. Числа Экмана  $E_0$ ,  $E_1$  определены в тексте. Буквы в кружках относятся к фотографиям на рис. 6.2.

I — двойное периодическое течение, II — монопериодическое течение, III — непериодическое течение; 1 — вторая граница, 2 — тейлоровская граница.

условие, особенно при больших положительных значениях  $E_0$ . Фактически неустойчивость сначала наблюдается вдоль тейлоровской границы и имеет вид тороидальных вихревых ячеек, которые расположены вдоль продольной оси на равных расстояниях друг от друга. Структура этой периодической волны не меняется в азимутальном направлении. Совпадение экспериментальной и теоретической границ устойчивости является достаточно точным для всех практических целей. Вторая граница неустойчивого (и определенно нелинейного) режима отделяет волны, которые укладываются два раза вдоль окружности, от одиочных или непериодических волн. Возможно появление и более высоких мод, а для достаточно больших  $E_1^{-1}$  наблюдается переход в турбулентность. Фотографии потока при условиях, соответствующих точкам А, В и С на рис. 6.1, показаны на рис. 6.2. По мере уменьшения числа Экмана для внутреннего цилиндра течение переходит от полной устойчивости через ряд состояний неустойчивости, обусловленных возбуждением

гармоник более высокого порядка, к окончательному турбулентному режиму. Энергия от низких частот непрерывно передается к высоким частотам путем сложного нелинейного взаимодействия гармоник.

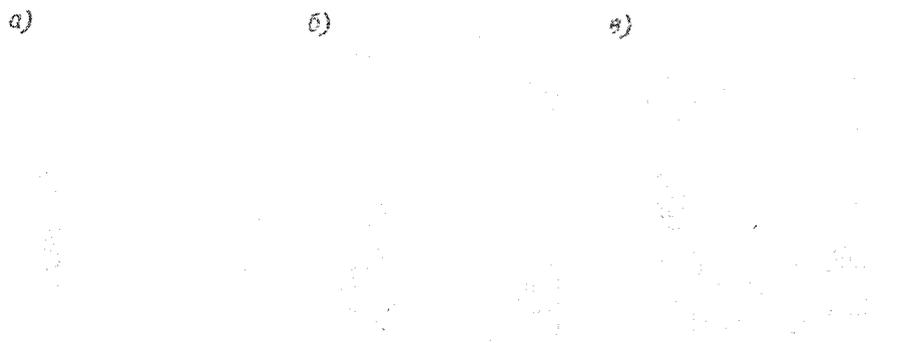


Рис. 6.2. Фотографии течения между цилиндрами [45] при условиях, указанных на рис. 6.1.

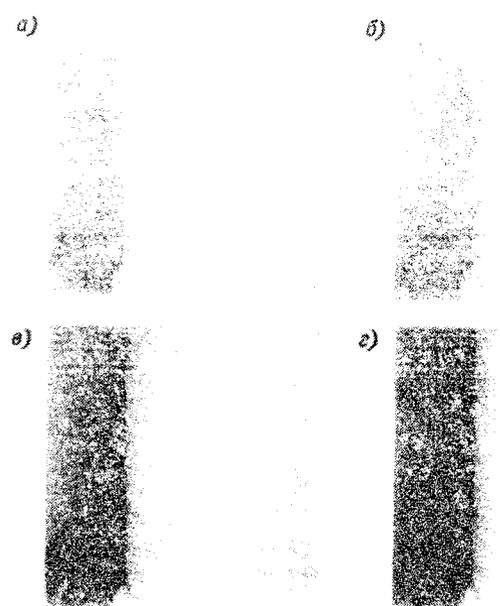


Рис. 6.3. Неустойчивость, наблюдаемая на вертикальной поверхности цилиндра во время спиндауна. Фотография а соответствует начальному состоянию твердого вращения, фотографии б—г — неустановившемуся режиму.

Такой механизм передачи энергии является типичным для волновых процессов.

Большую часть этих явлений можно заметить в экспериментах при наличии спиндауна, когда число Россби больше некоторого

малого критического значения. Простой качественный эксперимент, иллюстрирующий эти явления, может быть проделан с помощью установки, описанной в разделе 1.1. Именно жидкость, которая вращается внутри прямого кругового цилиндра как твердое тело, освещается открытой лампой, что дает возможность видеть взвешенные частицы алюминия на большей части вертикальной стенки. Скорость вращения резервуара импульсивно уменьшается, и за несколько оборотов устанавливаются регулярные тэйлоровские вихри (рис. 6.3). Они развиваются, образуя более сложную картину (последняя утрачивает осевую симметрию), и в конечном счете разрушаются, когда достигается новое состояние твердого вращения.

Связь этих видов волн с неустойчивостью, которая возникает при движении между концентрическими цилиндрами, по-видимому, ясна, хотя детальных исследований подобной связи проделано не было. Жидкость в пограничных слоях на боковой стенке фактически заключена между твердой внешней оболочкой и внутренним «цилиндром», представляющим собой невязкое ядро, которое в течение рассматриваемого короткого промежутка времени вращается почти устойчиво с первоначальной частотой. Ширина этого «кольца» жидкости увеличивается со временем, что означает соответствующее изменение относительных различий двух чисел Экмана. Однако изменение характера неустойчивости со временем, как это видно из рис. 6.3, связано с другими причинами.

Развитие неустойчивого и, возможно, турбулентного течения в пограничном слое может приводить к появлению невязких инерционных мод. Если частоты неустойчивых мод меньше, чем  $2\Omega$ , то возмущение может удаляться от стенок резервуара. Рисунок 6.4 соответствует рис. 6.3 в, но получен при освещении внутренней области целевым пучком света. Около боковой стенки ясно видны зона неустойчивости и характеристические конусы, последние имеют своей вершиной возмущение и пронизывают невязкое ядро. Эти особенности, по-видимому, связаны с одной частотой возбуждения, наиболее вероятно, с частотой неустойчивой моды, доминирующей в пограничном слое. Приведенные здесь соображения требуют обоснования, однако необходимо подчеркнуть, что главное уже сделано.

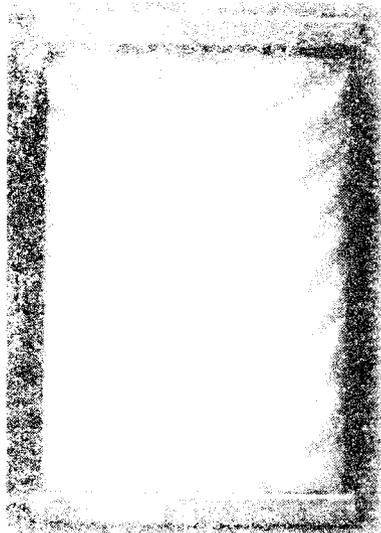


Рис. 6.4. Возмущения на стенке, возникающие при наличии импульсивного спиндауна. Возмущения распространяются через жидкую среду. Характеристические конусы, наблюдаемые внутри области, создаются, очевидно, за счет возбуждения одной определенной частоты. Эта фотография соответствует случаю в рис. 6.3.

При корректных условиях механизм распространения волн допускает существование локально неустойчивого или турбулентного течения, которое влияет на всю жидкость, заключенную в резервуар. По-видимому, это вызвано влиянием неустойчивого экмановского слоя, изучением которого мы теперь займемся.

### 6.3. Устойчивость экмановского слоя: эксперименты

Течение в цилиндрическом кольце, внутренние и внешние стенки которого являются соответственно стоком и источником, рассматривалось в разделе 2.19. Там было показано, что массообмен осуществляется только внутри пограничных слоев. Относительное внутреннее течение представляет собой геострофический потенциальный вихрь, величина которого связана с суммарным стоком формулой (2.19.39). Кроме того, горизонтальный экмановский пограничный слой при  $z = 0$  ( $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$ ) является бездивергентным, и его структура определяется формулой (2.6.12):

$$\bar{\mathbf{q}} = [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_i \sin (E^{-1/2}z) - \mathbf{q}_i \cos (E^{-1/2}z)] e^{-E^{-1/2}z}. \quad (6.3.1)$$

Устойчивость этого экмановского слоя, создаваемого описанным выше образом, была изучена экспериментально Фоллером [62], Фоллером и Кейлором [63] и Татро и Молле-Кристенсеном [261]. Фоллер проводил исследования в гидравлическом лотке со свободной поверхностью, причем течение определялось визуально по движению пятен краски от кристаллов перманганата. Татро и Молле-Кристенсен использовали в качестве рабочей среды воздух, помещенный в полностью закрытое цилиндрическое кольцо; очень точные измерения скорости были получены с помощью набора проволочных термоанемометров, введенных в поток.

Мы обсудим только результаты экспериментальных измерений Татро и Молле-Кристенсена. Такой выбор объясняется тем, что, во-первых, их устройство в точности совпадает с теоретической моделью, рассмотренной раньше. (Физические размеры кольца следующие: высота 3 дюйма, внешний радиус — 36 дюймов, внутренний радиус — 3 дюйма.) Во-вторых, их измерения, без сомнения, являются самыми точными на сегодняшний день.

В основе экспериментального метода Татро и Молле-Кристенсена лежат измерения скорости потока с помощью проволочного термоанометра, сигнал которого поступает на регистрирующий прибор. Главная цель исследования состояла в изучении создаваемого в ходе эксперимента устойчивого ламинарного течения и сравнении результатов измерений с теорией. Они заметили, что, так же как и для геострофического течения, результаты измерений при конечном числе Россби всегда несколько меньше теоретически предсказываемых и объяснили это расхождение влиянием нелинейности. Поскольку структура пограничного слоя очень сильно зависит от

локального внешнего течения, то проблема устойчивости характеризуется числами Россби и Рейнольдса, определяемыми через локально измеренные величины

$$\varepsilon = \frac{V_I}{\Omega r}, \quad R_E = \frac{\delta V_I}{\nu}. \quad (6.3.2)$$

Здесь  $V_I$  — относительная азимутальная составляющая скорости внутреннего течения;  $\delta$  — локальное значение толщины пограничного слоя, которое рассчитывается по данным о высоте  $z$  для максимума радиальной скорости

$$\delta = \frac{4z}{\pi}.$$

Компонента  $V_I$  может быть связана с потоком массы на внешней стенке; линеаризованная форма этого соотношения дается формулой (2.19.39). Однако в этом нет реальной необходимости, даже несмотря на то, что при изменении мощности источника  $S$  фактически устанавливаются различные течения.

В лабораторных экспериментах  $S$  увеличивается путем бесконечно малых приращений, при этом все прочие условия остаются фиксированными. Измерения напряжения производятся в нескольких точках слоя для каждой скорости потока, одна из таких записей показана на рис. 6.5 а. При относительно небольших значениях  $S$  запись выглядит совсем ровной, но при некотором значении  $S$  появляется осцилляция. Наименьшее значение скорости потока, при котором наблюдается осцилляция, берется в качестве критической точки. Измеряются также  $V_I$  и  $\delta$  и затем определяются критические значения  $\varepsilon$  и  $R_E$ .

Результаты этих экспериментов (см., например, рис. 6.5 а, б) убедительно показывают, что с пограничным слоем связаны два различных типа неустойчивости. В соответствии с порядком, в котором

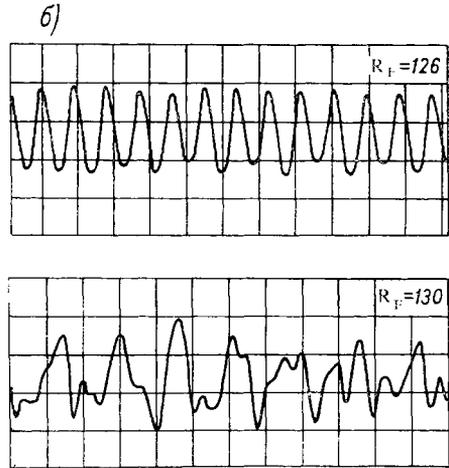
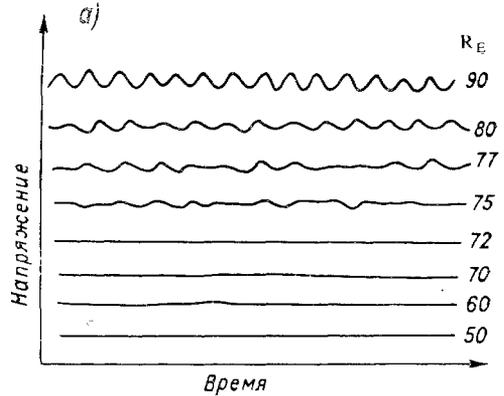


Рис. 6.5. а — регистрация напряжения тока термоанемометром, полученная Татро и Молде-Гристенсеном [261], показывающая появление неустойчивости и волны класса А. б — форма волны претерпевает второе изменение при  $R_E = 126$ , которое соответствует образованию мод класса В.

они появляются, мы назовем их неустойчивостями класса А и класса В.<sup>1</sup> Волны обоих семейств образуют последовательности движущихся в горизонтальной плоскости вихрей, расположение которых зависит от толщины пограничного слоя. Волны класса А аналогичны тем, которые наблюдали Фоллер и Кейлор [63], они показаны на рис. 6.6. Эти волны всюду ориентированы под углом  $0 \div 8^\circ$  к геострофическому течению; длина волн меняется между 258 и 336; фазовая скорость составляет примерно  $0,16V_1$  и направлена по радиусу внутрь. На рис. 6.7 приводится зависимость критического числа Рейнольдса от числа Россби, которая может быть аппроксимирована следующей приближенной формулой:

$$R_E^{(A)} = 56,3 + 58,4\epsilon^{(A)}. \quad (6.3.3)$$

Волны этого семейства развиваются первыми и очень чувствительны к величине  $\epsilon$ . С увеличением  $\epsilon$  влияние возмущения уже не ограничивается пределами пограничного слоя и распространяется на всю внутреннюю область (рис. 6.8), как это было в случае, изображенном

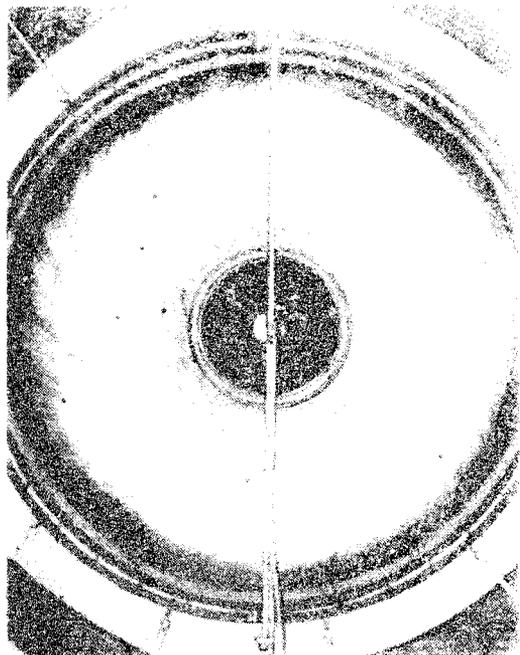


Рис. 6.6. Фотография Фоллера и Кейлора [63], на которой видны волны класса А и турбулентность при малых радиусах.

на рис. 6.4. Поскольку первоначальная частота возмущения больше  $2\Omega$ , то нелинейное взаимодействие волн внутри пограничного слоя, приводящее к образованию волн более низкой частоты, может быть ответственным за возбуждение внутренней области.

Волны класса В составляют с геострофическим течением угол, близкий к  $14,6^\circ$ . Длина волны равна 11,86, а фазовая скорость  $0,034V_1$ , причем она направлена внутрь по радиусу. Критическое число Рейнольдса и число Россби очень слабо связаны друг с другом. Их зависимость можно представить в виде

$$R_E^{(B)} = 124,5 + 3,66\epsilon^{(B)}. \quad (6.3.4)$$

<sup>1</sup> В литературе встречаются иные названия. Они были даны с учетом порядка, в котором были открыты эти типы неустойчивости. Так, тип I Фоллера — это класс В, а тип II — класс А.

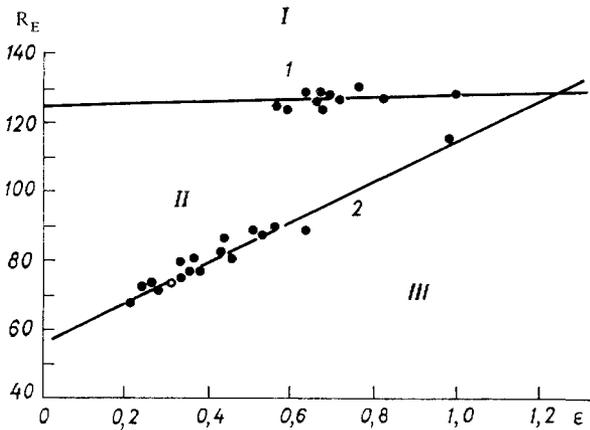
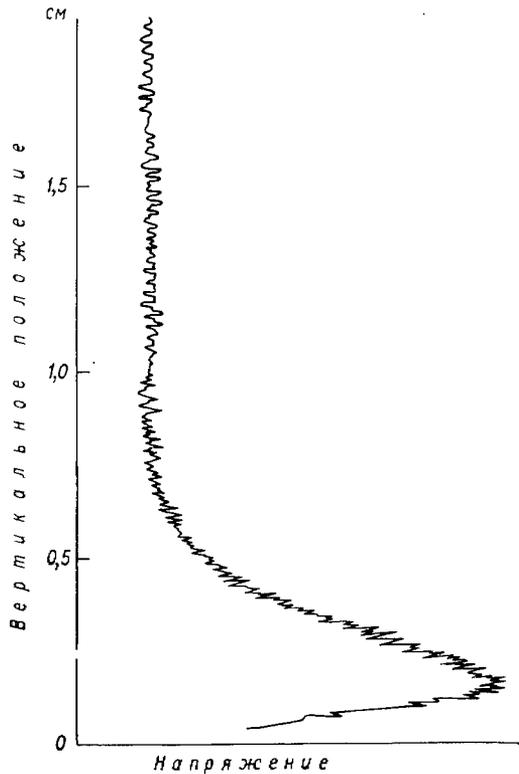


Рис. 6.7. Критическое число Рейнольдса как функция числа Россби для неустойчивых колебаний классов А и В [261].

I — неустойчивость классов А и В, II — неустойчивость класса А, III — устойчивость.  $1 - R_E^{(B)} = 124,5 + 3,66 \varepsilon^{(B)}$ .

$$2 - R_E^{(A)} = 56,3 + 58,4\varepsilon^{(A)}.$$

Рис. 6.8. Регистрации напряжения тока термоанемометром на разных высотах, иллюстрирующие проникновение или распространение возмущения внутрь области [261].



Семейство этих волн показано на рис. 6.9 *a*, а оба семейства вместе — на рис. 6.9 *б*. Положение этих семейств волн в пространстве схематически представлено на рис. 6.10.

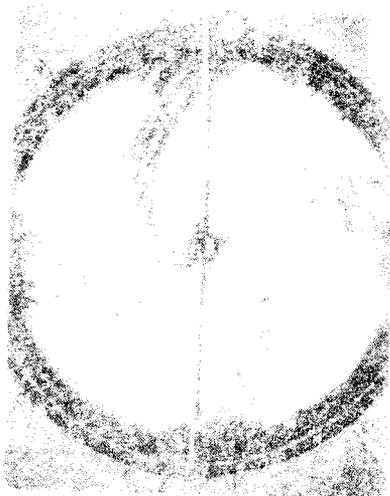


Рис. 6.9. Волны класса В, которые наблюдали Фоллер и Кейлор [63] (*a*), и класса А, перемежающиеся волнами класса В (*б*).

зуют тонкий кольцевой слой окрашенной жидкости на нижнем основании (см. рис. 6.15 *a*). При спиндауне эта окрашенная жидкость поступает во внутреннюю область благодаря стоку из экмановского слоя и за несколько оборотов проходит несколько гряд волн (рис. 6.15 *б*). Отнести эти волны к какому-либо определенному классу (А или В) трудно. Они быстро растут и приводят к тому, что за время спиндауна окрашивается тонкая линза жидкости почти

Анализ перехода к турбулентному режиму пока еще остается неполным. Предварительные наблюдения показывают, что турбулентность, по видимому, появляется внезапно и что переход к турбулентному режиму может зависеть от эволюции различных видов волн [63].

Тот факт, что оба типа неустойчивости зависят только от локальной скорости внешнего потока, означает, что они присущи всем вращающимся пограничным слоям и их появление связано не только с наличием сингулярности в частных конфигурациях. Это подтверждается исследованиями кармановского пограничного слоя на диске, вращающемся в неподвижном воздухе (см. [99, 237, 269]). Заметим, кстати, что последняя цитируемая работа представляет собой первое полное экспериментальное и теоретическое исследование волн класса В.

Сравнительно легко показать, что неустановившийся экмановский слой может стать неустойчивым при спиндауне или при спиндауне. Кристаллы перманганата, опущенные вблизи стенок цилиндрического резервуара, вращающегося с постоянной скоростью, обра-

круглой формы на основании резервуара. Этот «диск» отделяется от внешней стенки кольцом чистой жидкости, толщина которого увеличивается по мере приближения к вертикальной поверхности цилиндра (остальные картинки рис. 6.15 относятся к эксперименту со стратифицированной жидкостью. Он будет коротко обсуждаться дальше). При спинапе может иметь место тот же самый тип неустойчивости, но техника визуального наблюдения должна быть слегка изменена.

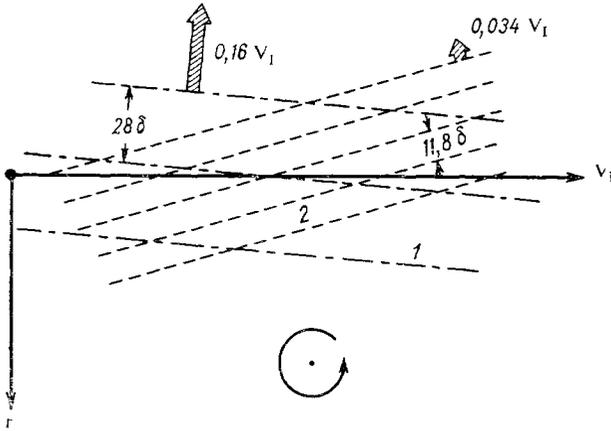


Рис. 6.10. Диаграмма двух классов неустойчивостей, иллюстрирующая измеренные длины волн, фазовые скорости и ориентацию волновых фронтов.  
1 — волны класса А, 2 — волны класса В.

Если число Рейнольдса, определенное в (6.3.2), выразить через число Экмана, то можно получить грубый, но общий критерий возникновения неустойчивости. Пусть  $\varepsilon = (V_1/\Omega L)$  и  $\delta = (\nu \Omega)^{1/2}$ , тогда

$$R_E = \varepsilon E^{-1/2},$$

где, как обычно,  $E = \nu/\Omega L^2$ . Согласно (6.3.3), первое проявление неустойчивости пограничного слоя можно ожидать, когда

$$\varepsilon E^{-1/2} = 56. \quad (6.3.5)$$

При  $\varepsilon = 0,1$  и  $1$ ,  $E = 4 \cdot 10^{-6}$  и  $4 \cdot 10^{-4}$ . Эти оценки показывают, что вращающиеся течения остаются ламинарными для очень малых значений числа Экмана. Тем самым оправдывается широкое использование теории ламинарного пограничного слоя.

#### 6.4. Устойчивость экмановского слоя: теория

Вернемся теперь к теоретическому обсуждению типов неустойчивости, описанных в предыдущем разделе. Поскольку пространственный и временной масштабы рассматриваемого явления тесно

связаны с толщиной пограничного слоя, то для приведения уравнений движения к безразмерному виду удобно использовать следующие характерные масштабы:

$$\left[ \left( \frac{\nu}{\Omega} \right)^{1/2}, \left( \frac{\nu}{\Omega} \right)^{1/2} (\varepsilon \Omega L)^{-1}, \varepsilon \Omega L \right].$$

В этом случае основные уравнения будут содержать только один параметр — число Рейнольдса  $R_E = \varepsilon E^{-1/2}$ . Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ R_E \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \right) + 2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{q}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1)$$

Устойчивость стационарного ламинарного движения  $\mathbf{q}_l(\mathbf{r})$ , удовлетворяющего (6.4.1) и всем заданным граничным условиям, можно установить, анализируя рост любого малого возмущения  $\varepsilon \mathbf{q}'(\mathbf{r}, t)$ , накладываемого на основное течение. Если скорость и давление представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_l(\mathbf{r}) + \varepsilon \mathbf{q}'(\mathbf{r}, t), \\ p &= p_l(\mathbf{r}) + \varepsilon p'(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

то после подстановки этих выражений в (6.4.1) и линеаризации уравнений относительно малого амплитудного параметра  $\varepsilon$  получаем

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q}' &= 0, \\ R_E \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}' + \mathbf{q}_l \cdot \nabla \mathbf{q}' + \mathbf{q}' \cdot \nabla \mathbf{q}_l \right) + 2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}' &= -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{q}'. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

Отклонения скорости должны удовлетворять однородным граничным условиям, которые вместе с предыдущими уравнениями составляют задачу линейной теории устойчивости. Требуется определить, имеет ли эта однородная система натуральные моды, которые растут со временем. Если мы найдем такие моды, то это будет означать, что основное течение является неустойчивым, так как тогда небольшие возмущения фонового шума должны получать энергию из основного течения. Может случиться, что эти возмущения так усилятся, что их уже нельзя будет описывать в рамках линейной теории. В результате взаимодействия возмущений и основного течения может образоваться новое устойчивое ламинарное течение или может произойти смена режимов течения — ламинарное течение станет турбулентным. (Чтобы удостовериться в неустойчивости движения, достаточно найти только одну неустойчивую моду. Можно показать, что движение является устойчивым, когда любой возможный тип малого возмущения в конечном счете затухает до нуля.)

Механизм передачи энергии от установившегося течения к возмущению можно пояснить с помощью уравнения энергии

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_E \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}' dV + R_E \int \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{q}' \times \nabla \times \mathbf{q}' dV + \\ + \int (\nabla \times \mathbf{q}') \cdot (\nabla \times \mathbf{q}') dV = 0, \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

которое следует из (6.4.2). Здесь первый член представляет собой скорость изменения со временем полной кинетической энергии возмущения; последний — скорость диссипации энергии возмущения за счет вязкости. Оставшийся член интерпретируется как скорость передачи энергии от основного потока к возмущениям благодаря напряжению Рейнольдса. Если бы не было последнего из упомянутых факторов, то не существовало бы источника энергии для вторичных течений, и все возмущения в конце концов затухали бы. Однако напряжение Рейнольдса приводит к эффектам, которые противодействуют влиянию диссипации, если  $Re$  достаточно велико (больше некоторой критической величины) и составляющие скорости имеют такие фазы, чтобы знак второго интеграла в (6.4.3) был положительным.

Переходя к анализу устойчивости экмановского слоя, допустим, что жидкость является полубесконечной и ограничена одной плоской стенкой. Экспериментальные результаты показывают, что наблюдаемая неустойчивость зависит в основном от *локальных* условий в потоке, и это используется как упрощающее предположение. Будем считать, что локальная скорость потока во внутренней области остается постоянной по величине и составляет направление  $\hat{\theta}$ . Неустойчивость пограничного слоя характеризуется существованием двумерных вихревых валов, поэтому горизонтальные координаты удобно ориентировать так, чтобы ось  $x$  была направлена вдоль вала, а ось  $y$  — поперек него. Направление  $\hat{\theta}$  локальной оси  $x$  получается поворотом вектора внутренней скорости (см. рис. 6.10) в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) на угол  $\alpha$ :

$$\hat{\theta} = \cos \alpha \hat{i} - \sin \alpha \hat{j}.$$

По отношению к цилиндрическим координатам локальная координата  $x$  направлена по окружности при малых  $\alpha$ , а координата  $y$  — по радиусу (она увеличивается с уменьшением  $r$ ). Тогда общее выражение для профиля скорости в ламинарном пограничном слое будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 = u_1 \hat{i} + v_1 \hat{j} = [\cos \alpha - e^{-z} \cos(\alpha + z)] \hat{i} - \\ - [\sin \alpha - e^{-z} \sin(\alpha + z)] \hat{j}. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Этот профиль неустойчив в этом движении, что и представляет главный интерес.

(Заметим, что в (6.3.1)  $\mathbf{q}_1 = \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_1$ .)

Природа наблюдаемых возмущений оправдывает представление решения в виде плоских волн, не зависящих от координаты  $x$ . В этом случае уравнение неразрывности позволяет ввести функцию тока, определяемую как

$$v'' = \frac{\partial \Psi'}{\partial z}, \quad w' = - \frac{\partial \Psi'}{\partial y}. \quad (6.4.5)$$

Предположим далее, что возмущение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u' (y, z, t) &= U(z) \exp ik(y - ct), \\ \psi' (y, z, t) &= \Psi(z) \exp ik(y - ct). \end{aligned} \right\} \quad (6.4.6)$$

Подстановка этих выражений в уравнении движения и вихря для  $x$ -й компоненты приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \kappa^2 U + 2 \frac{d\Psi}{dz} - ikR_E \left[ (v_l - c) U - \Psi \frac{du_l}{dz} \right] = 0, \quad (6.4.7)$$

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right)^2 \Psi - ikR_E \left[ (v_l - c) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) \Psi - \Psi \frac{d^2 v_l}{dz^2} \right] - 2 \frac{dU}{dz} = 0. \quad (6.4.8)$$

Граничные условия на плоскости записываются следующим образом:

$$U = 0, \quad \Psi = \frac{d\Psi}{dz} = 0. \quad (6.4.9)$$

На бесконечности, т. е. на внешнем крае пограничного слоя, ставится условие затухания до нуля составляющих скорости возмущения. Лилли [150] полагает, что на внешнем крае пограничного слоя выполняются условия обращения в нуль напряжения трения

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial v'}{\partial z} = 0$$

и вертикальной скорости,  $w' = 0$ . Эти условия совместимы с предыдущим и, вероятно, особенно хорошо оправдываются при симметричных движениях во внутрь области, примером которых может служить течение между концентрическими дисками.

Уравнения (6.4.7) и (6.4.8) с граничными условиями представляют собой задачу на собственные значения, в которой в данном случае фазовая скорость  $c$  является характеристическим числом.  $\Psi$  и  $V$  имеют смысл собственных функций, а  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $R_E$  — параметров. Для каждой натуральной моды  $c$  является однозначной комплексной функцией основных параметров. Если бы, как и ожидалось, мнимая часть  $c$  была положительной для одной или нескольких из этих мод, то это означало бы, что эти моды растут и волна становится неустойчивой. Поверхность нейтральной устойчивости

$$\text{Im}c(\alpha, \kappa, R_E) = 0 \quad (6.4.10)$$

образует границу между устойчивым и неустойчивым режимами потока, критическое число Рейнольдса, при котором впервые появляется неустойчивость, равно наименьшему абсолютному значению числа  $R_E$  на этой поверхности. Определение этого числа и связанных с ним величин  $\alpha$  и  $\kappa$  представляют главную цель исследования неустойчивости.

Существование неустойчивости при достаточно больших значениях числа Рейнольдса приводит к необходимости использования асимптотических методов при анализе (6.4.7) и (6.4.8). Эти уравнения для низшего порядка приближения, соответствующего  $R_E = \infty$ , записываются в виде

$$U = \frac{\Psi}{v_l - c} \frac{du_l}{dz}, \quad (6.4.11)$$

$$(v_l - c) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) \Psi - \Psi \frac{d^2 v_l}{dz^2} = 0. \quad (6.4.12)$$

Уравнения оказываются не связанными между собой, так как в этом предельном случае вращательные эффекты полностью подавляются. Наша задача сводится к классической задаче о невязкой неустойчивости, подробно описанной в [152].

Необходимое условие появления невязкой неустойчивости было получено Рэлеем [212]. Если (6.4.12) и комплексно сопряженные с ним уравнения умножить соответственно на  $\Psi^+/(v_l - c^*)$  и  $\Psi/(v_l - c)$ , затем второе уравнение вычесть из первого и результирующее выражение проинтегрировать по вертикали от поверхности до дна, то мы будем иметь

$$(Imc) \int_{z_B}^{z_T} \frac{\Psi \Psi^+}{(v_l - c)(v_l - c^*)} \frac{d^2 v_l}{dz^2} dz = 0 \quad (6.4.13)$$

(все остальные члены, появляющиеся при интегрировании, исключаются за счет граничных условий). Если  $Imc > 0$ , то подынтегральное выражение не может быть положительным во всем интервале значений  $z$ , и это означает, что в некоторой внутренней точке

$$\frac{d^2 v_l}{dz^2} = 0. \quad (6.4.14)$$

Следовательно, неустойчивое ламинарное течение обязательно должно иметь точку перегиба. (Это заключение нельзя получать для устойчивых течений, когда  $Imc < 0$ , по причинам, связанным с появлением точки поворота и свойствами предела  $R_E \rightarrow \infty$ .) Необходимо, чтобы рассматриваемое течение было пределом реального вязкого потока (см. Лин [152]). Фьортофт [65] обобщил это условие, показав, что в точке перегиба  $|(d/dz) v_l|$  должна иметь максимум.

Нижеследующее объяснение физической природы невязкой неустойчивости было дано Лином ([151] [152]) на основе понятия о вихревых нитях. Предположим, что  $(d/dz) v_l$  не меняет знака (пусть она увеличивается с ростом  $z$ ), тогда любой элемент жидкости, перемещающийся вниз, будет иметь избыточную завихренность по сравнению с окружающим параллельным сдвиговым потоком. Это происходит потому, что течение считается невязким. Другие элементы жидкости, которые на рис. 6.11 располагаются справа от этого вихря, вследствие этого будут смещаться вверх в области большей завихренности. Соответственно те элементы жидкости, которые находятся

слева, смещаются вниз, так что суммарный эффект перераспределения вихрей должен привести к возникновению движения, направленного вверх вдоль первоначальной нити. (Аналогичное заключение будет иметь место также тогда, когда данный элемент жидкости обладает относительным дефицитом завихренности.) Таким образом, нить возвращается в свое равновесное положение, что свидетельствует об устойчивости движения. Однако когда  $(d/dz) v_i$  имеет экстремум, то переход элементов жидкости через экстремум не влечет за собой появления ни избытка, ни дефицита завихренности. В этом случае процесс восстановления первоначального движения несколько ограничен, причем настолько, что течение не обязательно остается устойчивым, что может сопровождаться ростом возмущений. В этом заключается смысл необходимого условия неустойчивости, указанного в (6.4.14).

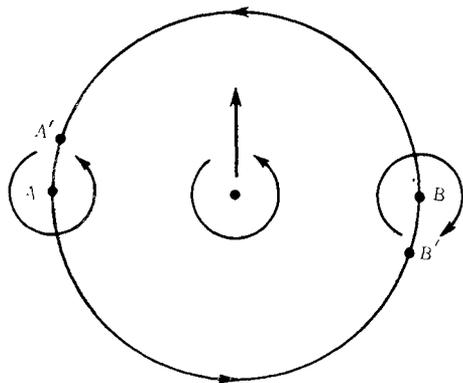


Рис. 6.11. Вихревая нить, центр которой смещен вниз при равномерном сдвиге. В этом случае происходит увеличение завихренности, что заставляет элементы А и В двигаться, как это показано на рисунке. Модифицированное распределение завихренности имеет тенденцию к возвращению центра нити в его первоначальное положение.

Профили скорости в экмановском слое, показанные на рис. 2.1, имеют много точек перегиба, в каждой из которых может возникнуть неустойчивость. Заметим, что при малых  $\alpha$  компонента  $v_i$  совпадает с радиальной составляющей скорости на круглой пластине и вертикальный профиль этой компоненты определяет появление неустойчивых волн. Первая точка перегиба, ближе всего лежащая к пластине, наиболее четко выражена. Выполненный Стюартом [99] анализ невязкой неустойчивости, генерируемой в этой области, приводит к результатам, которые хорошо согласуются с данными наблюдений волн класса В. Теоретическое значение угла ориентации составляет  $13,5^\circ$ , соответствующее экспериментальное значение  $14,6^\circ$ , однако волновое число наиболее неустойчивой моды получается слишком большим. Вязкость, очевидно, оказывает незначительное влияние на величину  $\alpha$ , но, по-видимому, играет весьма существенную роль при выборе  $k$ . Если в (6.4.8) опустить последний член, то это уравнение сведется к уравнению Орра — Зоммерфельда, и численные расчеты Лилли [150] подтверждают, что волны класса В в общем описываются этим классическим уравнением.

При анализе невязкой неустойчивости мы ничего не говорили о волнах класса А, которые обязаны своим происхождением более сложному взаимодействию сил Кориолиса и сдвига, приводящему к опрокидыванию волн. Стерн [241] установил возможность появле-

ния такой неустойчивости, которая получает свою энергию из негеострофической составляющей основного течения, а Лилли с помощью исключительно простого анализа явно показал, что неустойчивые волны связаны с силой Кориолиса; подобная неустойчивость была названа им «параллельной» неустойчивостью. Она исчезает при больших числах Рейнольдса, когда силы Кориолиса и сдвига почти

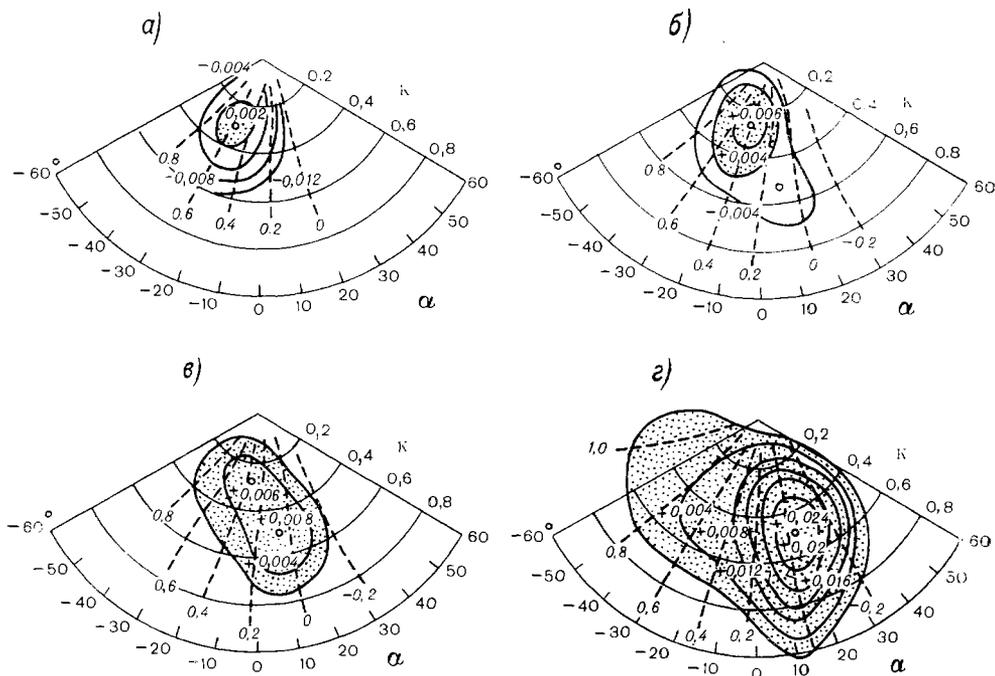


Рис. 6.12. Скорости роста  $k J m c$  (сплошные линии) и фазовые скорости (пунктирные линии) самых неустойчивых мод в зависимости от волнового числа  $k$  и угла ориентации  $\alpha$ .

$a - R_E = 65$ ;  $b - R_E = 0$ ;  $c - R_E = 150$ ;  $d - R_E = 500$ . Штриховкой отмечены области неустойчивости, а кружки пределяют положение максимальной скорости роста (по Лилли [150]).

не взаимодействуют между собой. Другой очень простой теоретический пример появления неустойчивости класса А, приведенный Стюартом в частном сообщении, можно получить, если в (6.4.7) и (6.4.8) подставить  $v_l = 0$  и  $(d/dz) u_l = \text{const}$ , а затем определить параметрические условия, при которых осциллирующие решения в бесконечной области  $|z| < \infty$  оказываются ограниченными.

При  $\Psi = e^{-i\mu z}$  из (6.4.7) и (6.4.8) непосредственно следует, что

$$-i\kappa c = \frac{1}{R_E} \left[ -(\mu^2 + \kappa^2 \pm \left( \frac{2\mu\kappa R_E \frac{du_l}{dz} - 4\mu^2}{\mu^2 + \kappa^2} \right)^{1/2}) \right],$$

откуда скорость роста будет положительной, если

$$R_E > \frac{4\mu^2 + (\mu^2 + \kappa^2)^3}{2\mu\kappa \frac{d\mu}{dz}}$$

Эта модель очень хорошо иллюстрирует тесную связь между составляющей скорости по окружности и волнами класса А, а также убывание до нуля показателя возрастания при увеличении  $R_E$ .

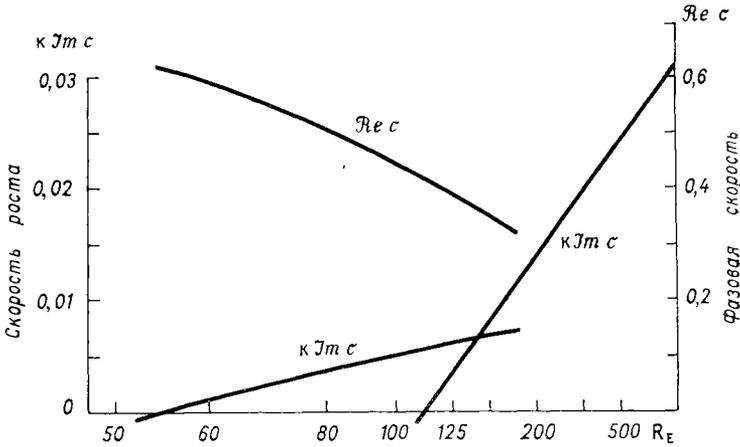


Рис. 6.13. Максимальные скорости роста и соответствующие фазовые скорости наиболее неустойчивых мод в зависимости от числа Рейнольдса [150]. Две прямые линии связаны с двумя классами неустойчивости экмановского слоя.

Численные решения общей краевой задачи, полученные Фоллером и Кейлором [63] и Лилли [150], подтверждают существование двух различных классов неустойчивых волн. Вихри класса В возникают в первой точке перегиба профиля радиальной скорости; возмущения класса А появляются в основном за счет постоянного сдвига азимутальной составляющей скорости и сосредоточены значительно ближе к пластине. Эти и другие результаты находятся в хорошем количественном согласии с экспериментальными данными.

Лилли выполнил большое число расчетов полной системы уравнений, включающей уравнения (6.4.7) и (6.4.8), а также граничные условия (6.4.9) и

$$\Psi = \frac{d^2\Psi}{dz^2} = \frac{dU}{dz} = 0$$

при  $z = \infty$ . Результаты этих расчетов приводятся на рис. 6.12. Первая диаграмма, на которой изображено плоское сечение поверхностей постоянного  $Im\sigma$  ( $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $R_E$ ) при  $R_E = 65$ , показывает области устойчивости и неустойчивости (последние заштрихованы) и точку максимальной скорости роста. Эти частные результаты расчетов соответствуют возмущениям класса А. Остальные рисунки в 6.12

(им соответствуют  $R_E = 110, 150, 500$ ) свидетельствуют о последовательном сдвиге зоны неустойчивости в сторону положительных углов и малых фазовых скоростей. Оба отмеченных факта являются признаком появления мод класса В. При больших числах Рейнольдса волны второго класса станут полностью преобладающими. На рис. 6.13 показаны максимальные скорости роста и соответствующие фазовые скорости наиболее неустойчивых решений как функции  $R_E$ . Моды класса А появляются при критическом значении  $R_E = 55$ , а моды класса В — на более поздней стадии, когда  $R_E = 110$ . Очевидно, что теория находится в хорошем согласии с экспериментом.

## 6.5. Вертикальные слои сдвига

Устойчивость нестационарных пристеночных пограничных слоев обсуждалась в разделе 6.2 для иллюстрации физического смысла критерия Рэлея. Там было показано, что наблюдаемые возмущения имеют форму, которая очень напоминает правильные горизонтальные ряды волн, образующиеся между вращающимися концентрическими цилиндрами.

Свободные вертикальные слои сдвига также чувствительны к неустойчивости, источником которой могут быть точки перегиба локального профиля тангенциальной составляющей скорости. Хайд [108] изучал неустойчивость свободных слоев сдвига, окружающих внутренний диск, который вращается со скоростью, слегка отличной от скорости внешней оболочки. При увеличении разности скоростей указанный слой становится неустойчивым. Если частота вращения диска превышает частоту резервуара, то на слое сдвига появляются симметрично расположенные вертикальные (двухмерные) ряды вихрей. Рисунок 6.14, на котором приводится сделанная сверху фотография резервуара, показывает четыре таких волны. Этот слой становится также неустойчивым, когда диск вращается медленнее, чем резервуар, но возмущение имеет иную (более неправильную) и не так резко очерченную форму.

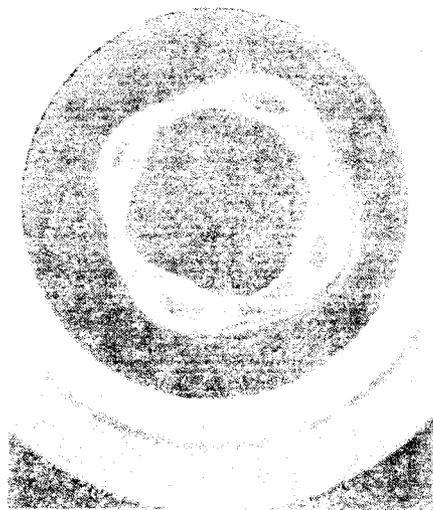


Рис. 6.14. Симметричный пример вертикальных вихрей, образующихся в слое сдвига вокруг диска, который вращается немного медленнее, чем окружающая жидкость. Эта фотография, принадлежащая Хайду [108], была сделана в направлении сверху вниз.

Упомянутое исследование свидетельствует о том, что неустойчивость возникает, когда число Россби превышает определенное критическое значение (последнее может зависеть от положения диска). Неустойчивость этого рода была изучена Бассом [31]. Здесь мы представим основные результаты этого до сих пор неопубликованного исследования в более общем виде.

Если все переменные приведены к безразмерному виду с использованием масштабов  $\llbracket L, \Omega^{-1}, \varepsilon \Omega L \rrbracket$ , то уравнения для возмущений [см. (6.4.2)] примут вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q}' &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}' + \varepsilon [\nabla(\mathbf{q}_l \cdot \mathbf{q}') + (\nabla \times \mathbf{q}_l) \times \mathbf{q}' + (\nabla \times \mathbf{q}') \times \mathbf{q}_l] + \\ &+ 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}' = -\nabla p' + E \nabla^2 \mathbf{q}', \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$

причем  $\mathbf{q}' = 0$  на  $\Sigma$ .

Рассмотрим сначала движение внутри прямого кругового цилиндра, предположим, что основной режим движения характеризуется чисто зональным ламинарным течением

$$\mathbf{q}_l = V(r) \hat{\theta}. \quad (6.5.2)$$

Поскольку общая глубина остается постоянной, то в резервуаре могут существовать геострофические течения самой разнообразной формы, отличающейся от той, которая была рассмотрена ранее. Взаимодействие этих течений может привести к созданию неустойчивости. Чтобы исследовать эту возможность, примем  $\varepsilon = R_E E^{1/2}$ ,  $t = E^{-1/2} \tau$  и представим все переменные в виде рядов по  $E^{1/2}$ , т. е.

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}'_0(r, \tau) + E^{1/2} \mathbf{q}'_1 + \dots + \tilde{\mathbf{q}}'_0 + \dots \quad (6.5.3)$$

После этого пределаем все преобразования, описанные в разделе 2.6. Тогда выражение, которое соответствует, например, (2.6.17), может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{q}'_1 = \frac{z}{2} \nabla \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}'_0 + R_E [(\nabla \times \mathbf{q}_l) \times \mathbf{q}'_0 + (\nabla \times \mathbf{q}'_0) \times \mathbf{q}_l] \right\} + \mathbf{A}(x, y), \quad (6.5.4)$$

где  $\mathbf{A}$  — произвольная функция. Удовлетворяя граничным условиям [см. (2.6.13)] на основаниях цилиндра (при  $z = 0$  и  $z = 1$ ), получаем уравнение для  $\mathbf{q}'_0$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}'_0 + R_E \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{q}_l) \times \mathbf{q}'_0 + \\ + (\nabla \times \mathbf{q}'_0) \times \mathbf{q}_l] + 2\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{q}'_0 = 0, \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

где на вертикальной боковой стенке  $\mathbf{q}'_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ . Если предположить, что возмущение имеет следующий вид:

$$\mathbf{q}'_0 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla [\varphi e^{i(m\theta - c\tau)}], \quad (6.5.6)$$

то подстановка этого выражения в предыдущее уравнение приводит к уравнению для  $q$ , в котором  $s$  имеет смысл собственного значения. Эту задачу изучал Басс; он получил хорошее согласие с экспериментальными данными Хайда, когда  $q_l$  моделирует структуру свободного  $E^{1/4}$ -слоя сдвига.

Рассмотрим далее случай, когда общая глубина изменяется мало, но значительно больше, чем на величину толщины слоя Экмана. Пусть основаниям цилиндра соответствуют значения  $z = 1$  и  $z = -\alpha d(x, y)$ .

Возникновение неустойчивости обычно сопровождается растяжением и наклоном вихревых линий (см. также [291]), которые могут быть вызваны либо за счет подсоса в экмановском слое, как в предыдущем случае, либо за счет чисто топографических и инерционных эффектов, как в настоящем примере. Для исследования этого типа невязкой неустойчивости геострофического течения вернемся к (6.5.1) и положим  $E = 0$ ,  $\varepsilon = R_E \alpha$ . Кроме того, будем считать, что

$$q' = (Q'_0 + \alpha Q'_1 + \dots) \exp i t (\alpha \lambda^{(1)} + \alpha^2 \lambda^{(2)} + \dots).$$

Дальнейший анализ проводится так же, как это было сделано в разделе 2.16. Здесь  $Q'_0$  — одна из геострофических мод в прямом круговом цилиндре, специальный вид которой определяется краевой задачей для  $Q'_1$ . Выражение которое соответствует (2.16.8), имеет вид

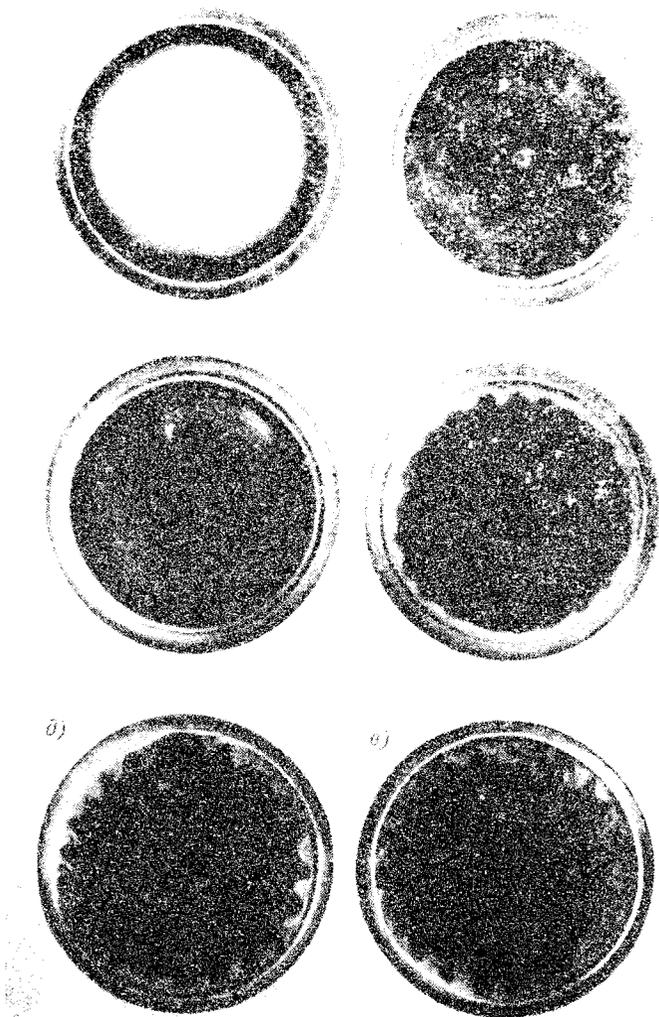
$$Q'_1 = \frac{1}{2} i \lambda^{(1)} (z-1) \nabla \times Q'_0 + \frac{1}{2} R_E (z-1) \nabla \times [(\nabla \times q_l) \times Q'_0 + (\nabla \times Q'_0) \times q_l] + A(x, y). \quad (6.5.7)$$

Согласно граничным условиям на основаниях цилиндра скорость  $Q'_0 = \frac{1}{2} \hat{k} \times \nabla \Phi'_0$  должна быть решением уравнения

$$i \lambda^{(1)} \hat{k} \cdot \nabla \times Q'_0 + R_E \hat{k} \cdot \nabla \times [(\nabla \times q_l \times Q'_0 + (\nabla \times Q'_0) \times q_l] - 2 \nabla d \cdot Q'_0 = 0, \quad (6.5.8)$$

подчиненного условию  $Q'_0 \cdot \hat{n} = 0$  на боковой стенке. Это уравнение в точности аналогично (6.5.5), отличен только механизм растяжения вихревой линии (последние члены в левых частях соответствующих уравнений).

В разделе 2.16 было показано, что многообразие геострофических течений, которые могут существовать в цилиндре, несколько ограничено, когда нижняя поверхность слегка наклонена. Например, возмущение, определяемое (6.5.6), в новой конфигурации превратилось бы в волну Россби. Поэтому можно ожидать, что неустойчивость, которая обнаруживается при учете вязкости, связана в искривленной области с волной Россби. В частности, пусть  $d = d(r)$  и  $\Phi'_0 = \varphi(r) e^{im\theta}$ , т. е. волна Россби в точности соответствует (6.5.6). Подставляя эти выражения в (6.5.8), получаем задачу на собственные значения для  $\varphi$  и  $\lambda^{(1)}$ , которые определяют свойства неустойчивости. Аналогичные уравнения широко используются в метеорологии; обзор



**Рис. 6.15.** Определенный слой жидкости. На рис. *a* виден тонкий слой жидкости вблизи основания вращающегося цилиндрического резервуара, заполненного устойчиво стратифицированным раствором воды и соли. Во время спиндауна (*б*) в экмановском слое наблюдаются волны. Тяжелая окрашенная жидкость образует тонкий круговой диск (*в*). Он отделяется от стенки более легкой прозрачной жидкостью, которая переносится сверху вниз вдоль границы. В течение короткого времени на диске развиваются волны (*г—е*) и происходит полное перемешивание.

исследований в этой области вместе с обширной библиографией был выполнен Дрхзином и Говардом [53].

Резюмируя изложенное, отметим, что для резервуара постоянной глубины критическое число Рейнольдса кратно отношению  $\epsilon/E^{1/2}$ , а фазовая скорость возмущения пропорциональна  $E^{1/2}$ . В резервуаре со слабо меняющейся глубиной критическое число Рейнольдса зависит от  $\epsilon/\alpha$ , а фазовая скорость возмущения пропорциональна  $\alpha$ . Когда изменение глубины немалое, то либо критическое число оказывается кратным  $\epsilon$ , либо длина волны возмущения становится слишком короткой для того, чтобы можно было пренебречь членами вязкого сдвига.

Столбы Тэйлора — Праудмена чрезвычайно чувствительны к изменению режима течений, а на поверхности этого столба может иметь место неустойчивость только что описанного типа. Более того, когда число Россби внешней области превышает некоторое очень малое критическое значение, столб не может оставаться неизменным по отношению к возмущению, которое его создало. В этом случае столб после того, как он наклонится, может оторваться от препятствия, затем преобразуется в систему продольных вихрей, мигрирующих по резервуару.

В заключение укажем, что прецессия сфероида образует свободные внутренние поверхности сдвига, устойчивость которых может иметь некоторое значение при установлении геомагнитного поля в ядре Земли. По-видимому, ясно, что дальнейшие исследования устойчивости этого частного течения и фактически всех линейных движений, обсуждавшихся раньше и обладающих внутренними сдвигами, могут привести к самым неожиданным и важным последствиям.

## 6.6. Стратифицированные жидкости

Нестационарное движение стратифицированной жидкости, по-видимому, заведомо склонно к неустойчивости всех видов. Простой качественный пример (пример спиндауна) ясно демонстрирует это.

Стратифицированная жидкость (соль, растворенная в воде) находится в почти равновесном состоянии внутри цилиндрического резервуара, вращающегося с постоянной скоростью. Для образования кольца окрашенной жидкости на дне резервуара (рис. 6.15 а) бросим около краев его несколько кристаллов перманганата, затем уменьшим скорость вращения резервуара. Тогда, чтобы заместить жидкость, поступающую во внутреннюю область из экмановского слоя (рис. 6.15 б, в), окрашенная вода устремится к центру основания.

Обычная неустойчивость экмановского слоя легко наблюдается в течение нескольких полных оборотов, следующих за импульсивным изменением скорости вращения. На рис. 6.15 г окрашенная жидкость образует правильный цилиндрический диск на нижнем основании цилиндра. Этот диск отделен от внешней стенки кольцом чистой воды, которая переносится сверху. Если бы жидкость была однородной, то описанная картина движения сохранилась бы в течение длительного

времени и менялась бы только за счет диффузионных процессов. Однако окрашенная жидкость тяжелее неокрашенной во внешнем кольце (эта ситуация аналогична той, которая встречается в гравитационном поле, когда более тяжелая жидкость располагается над легкой). Здесь центробежная сила играет роль силы тяжести. Такое движение является неустойчивым, и в течение нескольких минут оно, по-видимому, преобразуется в волны Рэлея — Тэйлора, модифицированные за счет вращения ([213, 268], см. также [39], рис. 6.15 з). Эти волны проявляются все более отчетливо (см. рис. 6.15 д), пока на основании цилиндра не произойдет полного перемешивания. Почти аналогичная картина наблюдается и в случае спинава. Тяжелая жидкость переносится вверх по вертикальному цилиндру в первоначальной стадии неустановившегося движения, а затем она под влиянием силы тяжести проваливается вниз. Проявление неустойчивости того же типа можно наблюдать также в стационарных вынужденных течениях.

Мы не будем анализировать этот тип разрушения. Главное, что мы здесь хотели подчеркнуть, — это необходимость соблюдения крайней осторожности при исследовании ламинарных течений стратифицированной жидкости. Неустойчивость внутри пограничных слоев может оказывать влияние на перемешивание жидкостей разной плотности и тем самым в корне изменять обычный ход развития течения. Обоснованность и применимость ламинарных течений вращающихся стратифицированных жидкостей в этом случае должна быть тщательно проверена. Вместе с тем не подлежит сомнению, что для решения вопросов, возникающих при исследовании этой специфической устойчивости, необходимо затратить дополнительные усилия.

## 6.7. Термическая конвекция во вращающемся кольце

Этот раздел следует рассматривать только как введение к достаточно изученной, но в настоящее время все еще интенсивно развивающейся области исследования. Хотя здесь не делается попыток дать полное изложение проблемы, но мы надеемся, что даже этот краткий обзор некоторых достигнутых к настоящему времени результатов послужит основанием и толчком для дальнейших исследований.

Конечная цель исследований в этой области состоит в том, чтобы понять, каким образом атмосферная циркуляция переносит солнечное тепло из экваториальных широт в полярные области. Простая лабораторная модель, предназначенная для изучения этого сложного процесса, состоит из вращающегося с постоянной скоростью, наполненного жидкостью цилиндрического кольца (рис. 6.16), на вертикальных стенках которого поддерживается различная, но постоянная температура. Горизонтальными основаниями могут служить термические изоляторы. Создаваемая радиальная разность температуры  $T_0 - T_1 > 0$  в грубом приближении соответствует условиям

на экваториальных и полярных широтах, как это показано на рис. 6.16.

Экспериментальные работы, в которых использовались устройства этого типа, были начаты Фульцем и Хайдом и развиты их студентами и сотрудниками (см. [21, 68, 74, 75, 103, 105, 217, 218]).

Обычный способ исследования состоит в изменении либо разности температур, либо скорости вращения. Поскольку рассматриваемая конфигурация и заданные граничные условия симметричны относительно оси вращения, то в этом случае, по крайней мере при определенном наборе параметров, должно существовать симметричное

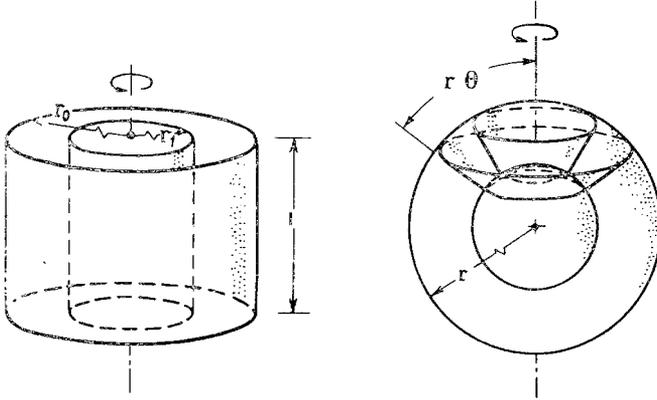


Рис. 6.16. Схематическое изображение кольцевых установок. Справа показана кольцевая область в атмосфере. На вертикальных стенках кольца поддерживается постоянная температура, горизонтальные основания изолированы. Установка вращается с равномерной скоростью.

ламинарное течение. Это спиральное течение показано на рис. 6.17 *а, б*, которые были заимствованы из работы Хайда [105]. Однако по мере увеличения скорости вращения или разности температур это симметричное движение становится неустойчивым и образуется несколько отдельных несимметричных течений. Любое из них включает почти стационарные, медленно дрейфующие волны и связанное с ними струйное течение (рис. 6.17 *в — е*). Струя представляет собой весьма узкое быстрое течение, обладающее большим градиентом температуры в поперечном направлении. Количество волн увеличивается с увеличением  $\Omega$ , но, в конце концов, устанавливается колебание (рис. 6.17 *ж*), которое в свою очередь переходит в ряд несимметричных вихрей, показанных на рис. 6.17 *з*. В процессе эволюции движения можно выделить четыре определенных режима: симметричное течение, стационарные волны, неустойчивое колебание, несимметричное течение. Визуальные данные и записи температур показывают, что волновая картина распространяется почти на всю глубину жидкости. Горизонтальная скорость и температура во внутренней области меняются почти линейно с высотой (см. стр. 120, 121), и, конечно, существует небольшая циркуляция,

возникающая за счет заданной разности температур. В связи с этим важно отметить, что вторичное течение может сформировать основное поле температур, которое будет заметно отличаться от чисто статического распределения. Это означает, что нелинейные процессы, в частности

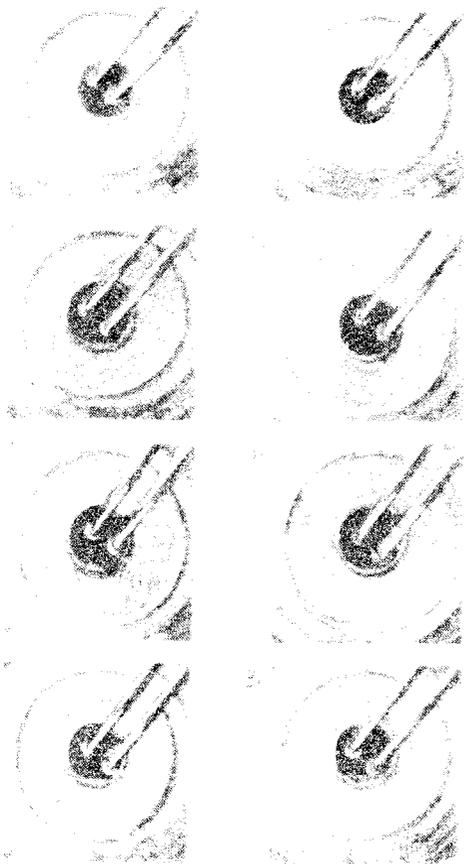


Рис. 6.17. Фотографии Хайда [105] различных типов неустойчивости, наблюдавшихся в установке (рис. 6.16).

*а* и *б* — симметричное спиральное течение, *в* — *г* — различные волновые области; *ж* — режим колебаний, *з* — образец несимметричных вихрей.

конвективный перенос, по-видимому, играют важную роль при установлении основного состояния.

Представляется, что наиболее эффективные способы передачи тепла сильно зависят от скорости вращения и разности температур. К ним принадлежит обычная теплопроводность и (или) конвективный перенос тепла посредством сильного течения, которое вызывает поступление или отдачу тепла в зависимости от того, направлено ли это течение от горячей поверхности к холодной или наоборот. Оба эти течения имеют аналоги в циркуляции атмосферы. Например, симметричное течение может быть отождествлено с пассатами около экватора, но что совершенно замечательно, так это аналогия внутренней струи с атмосферным струйным течением в средних и высоких широтах. Лоренц [163] установил, что эти лабораторные волновые течения действительно похожи на течения, которые рассматриваются в связи с большими вихрями

(или циклонами) в атмосфере (см. также [41]). (Часто для обозначения этих возмущений используются метеорологические термины «бароклинные волны» и «бароклинная неустойчивость».) И опять весьма просто задуманный эксперимент оказался в состоянии воспроизвести явление глобального значения.

Ближайшей целью экспериментальных и теоретических исследований является изображение различных режимов течения и определение условий, при которых они существуют. К счастью, эти во-

просы совершенно ясны, и их можно воспроизвести в лабораторных условиях. Однако сравнение экспериментальных данных разных исследователей является нетривиальной задачей, поскольку существует большое число независимых безразмерных параметров, которые могут быть выбраны произвольно. Довольно неожиданно, что для этой цели достаточно иметь всего два «универсальных» параметра, если кинематическая вязкость и число Прандтля исследуемых сред одинаковы. В частности, Фульц [79] показал, что в этом случае результаты различных экспериментов (см. [68]) ложатся на единственную кривую нейтральной устойчивости в плоскости, координатами которой являются

$$\frac{gL}{(r_0 - r_1)^2} \frac{\Delta\rho}{\rho\Omega} \quad \text{и} \quad \frac{4\Omega^2 (r_0 - r_1)^4}{\nu^2} \left( \frac{r_0 - r_1}{L} \right)^{1/2}$$

(см. рис. 6.18). При изменении  $\nu$  мы получаем семейство кривых, и в этом случае охарактеризовать все течения с помощью только двух параметров не представляется возможным.

Область устойчивости симметричного течения может быть разделена на верхнюю и нижнюю зоны, которые отличаются друг от друга различными механизмами подавления волновых возмущений. Согласно Лоренцу [163, 164], в верхней зоне стабилизация движений происходит главным образом за счет работы сил плавучести в основном потоке, тогда как в нижней зоне — за счет вязкой диссипации.

Отказ от линейности при анализе различных волновых режимов в области неустойчивости представляет собой сложную задачу. Типичное движение в этой области может подвергаться воздействию нестационарных течений волновых колебаний с различными волновыми числами и эффектами гистерезиса, связанными с переходом от одного волнового числа к другому. Переходные кривые, изображенные на рис. 6.19, были получены Фульцем [79] путем медленного увеличения разности температур при сохранении постоянного значения  $\Omega$ ; увеличение контраста температур продолжалось до тех пор, пока не произошло изменение волнового числа. Аналогичное семейство переходных кривых, слегка смещенных из-за эффектов гистерезиса, соответствует условиям медленного уменьшения температуры. (Можно также медленно изменять скорость вращения, но, по-видимому, изменение температуры — наилучший способ изучения спектра волновых колебаний.)

К моменту образования беспорядочного движения волновое число в этой частной конфигурации становится равным семи. Однако значение максимального волнового числа определенно связано с размерами резервуара. Хайд [103, 105] установил на основании своих экспериментальных данных, что  $k_{\max}$  в точности равно ближайшему целому числу от  $2,05 \frac{(r_0 + r_1)}{(r_0 - r_1)}$ , тогда как приближенное значение минимального волнового числа, которое обычно можно получить в резервуаре, оценивается из  $k_{\max} - k_{\min} \leq 5$ , но это скорее эмпирическое правило, чем строгое утверждение.

Теоретические работы этого направления имеют те же самые цели, что и экспериментальные исследования. Основная трудность здесь заключается в невозможности достаточно точного определения состояния основного течения, которое необходимо знать при исследовании устойчивости. Не удивительно поэтому, что существующие

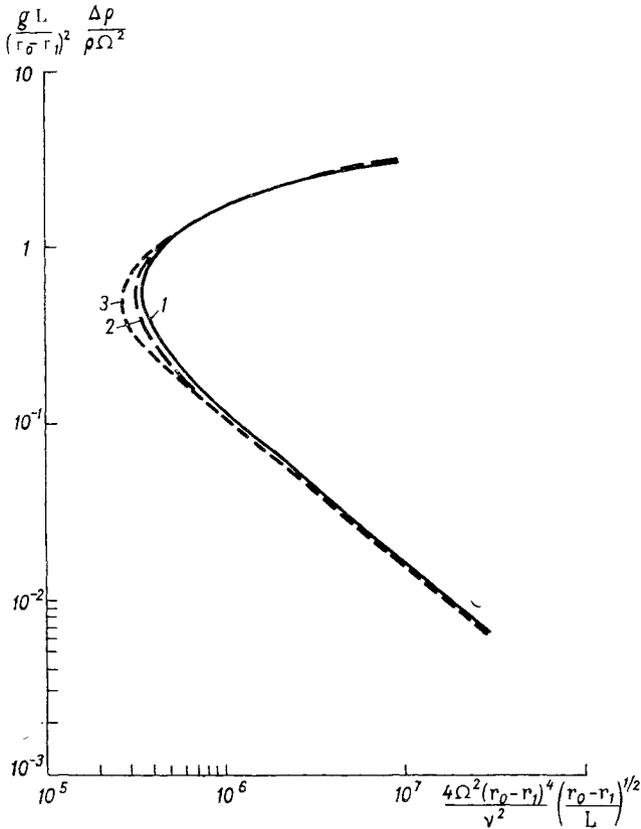


Рис. 6.18. Данные различных экспериментов Фоулиса и Хайда [68] определяют единственную кривую нейтральной устойчивости в плоскости координат, которые указаны на рисунке.

1 —  $L = 14$  см,  $r_0 - r_1 = 2,54$  см,  $\nu = 1,01 \times 10^{-2}$  см<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>; 2 —  $L = 10$  см; 3 —  $L = 5$  см.

теории дают достоверное качественное описание механизма неустойчивости, в то время как количественное согласие с экспериментом все еще остается весьма плохим.

В большинстве экспериментальных работ поля скоростей и температуры являются существенно нелинейными. Это трудно преодолимый барьер для теоретиков, поскольку даже исследование чисто линейной задачи (см. раздел 2.21) оказывается далеко не простым делом, которое к тому же еще не завершено (см. [224] и [123]).

В свете этих трудностей представляется естественным, что анализ устойчивости основывается на использовании сравнительно грубого описания начального распределения скорости и температуры. При необходимости аппроксимацию профилей этих характеристик можно

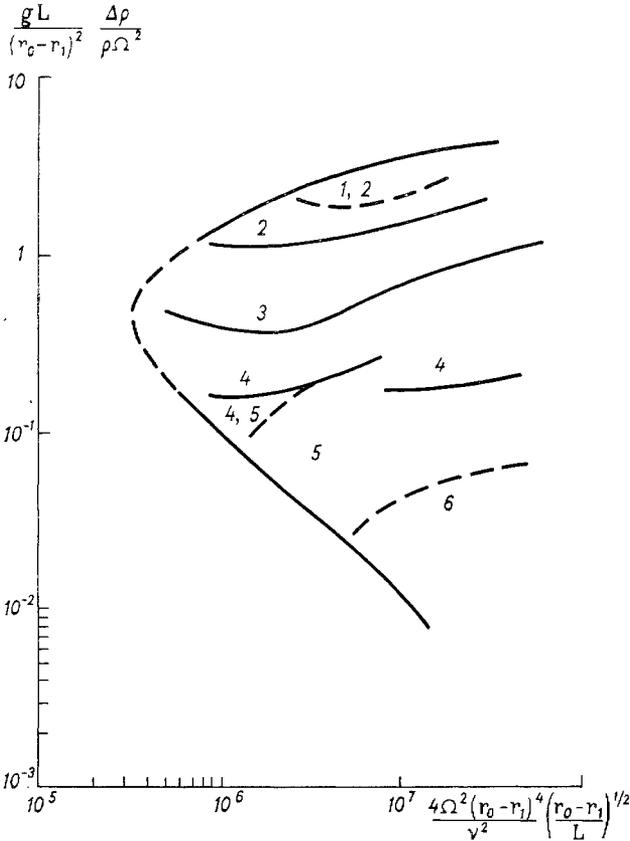


Рис. 6.19. Экспериментальные результаты Фульца [79] в кольцевых областях  $r_0 = 4,898$  см,  $r_1 = 2,442$  см,  $L = 13,00$  см. В области неустойчивости отмечены различные волновые режимы, указано число наблюдаемых волн. Спектр получен путем уменьшения положительной разности температур.

улучшить. Идеализированные модели этого типа были предложены Куо [138, 139], Брайндли [25], Лоренцом [164] и Барсилоном [6] (см. также [54]); однако, если пытаться устранить расхождение с экспериментом, то можно ожидать появления еще более сложных теоретических моделей.

Некоторые важные результаты можно легко получить, если постулировать, что поле температуры во внутренней области изменяется линейно и в вертикальном, и в радиальном направлении.

Тогда скорость также будет линейной функцией  $z$  (см. стр. 122). В этом случае исследование устойчивости внутреннего течения дает возможность получить общий качественный вид кривой нейтральной устойчивости, изображенной на рис. 6.18, а также формулу для числа наблюдаемых волн (см. [6]).

Если жидкие частицы двигаются между поверхностями постоянного давления и температуры, то высвобождается потенциальная энергия. Большая часть энергии, перешедшей к возмущению, диссипирует в вязких пограничных слоях. Этот процесс должен учитываться в любом реалистическом описании устойчивости потока. Выполненный в [6] анализ устойчивости включает диссипацию в экмановских слоях, но попытка оценить влияние вертикальных слоев сдвига до сих пор не увенчалась успехом. Это влияние может оказаться очень важным в общем энергетическом балансе. Однако здесь многое зависит также от удачного подбора зависимости вертикального градиента температуры во внутренней области от заданной горизонтальной разности температур.

Дэвис [50] и Роджерс [227, 228] пошли по другому пути и получили точные решения невязких нелинейных уравнений движения, похожие на решения уравнений для струй. Эти решения содержат много интересной информации и позволяют определить волновое число, если известен приток тепла. Обычно формируются такие волновые образования, которые переносят максимальное количество тепла. Хотя решения этого типа необходимы для решения нелинейной задачи устойчивости, все равно нужно еще много потрудиться, прежде чем удастся связать внутренний режим с течением на боковых стенках.

Все эти проблемы находятся в стадии активных разработок. Поэтому, по-видимому, уместно будет закончить книгу чистой страницей и предоставить будущим событиям самим написать на ней свою собственную историю.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ <sup>1</sup>

1. Aldridge K. D. and Toomre A. Axi-symmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 37, p. 307—323 (c. 65).
2. Arons A. B., Ingersoll A. P. and Green T. Experimentally observed instability of a laminar Ekman flow in a rotating basin. — «Tellus», 1961, vol. 13, p. 31—39.
3. Arons A. B. and Stommel H. A  $\beta$ -plane analysis of free periods of the second class in meridional and zonal oceans. — «Deep-Sea Res.», 1956, vol. 4, p. 23—31.
4. Baker D. J. and Robinson A. R. A homogeneous  $\beta$ -plane ocean model — experiment and theory. — Report of International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Symposium on Rotating Fluid Systems. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 26, p. 4—8 (c. 251).
5. Banks W. H. H. The boundary layer on a rotating sphere. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1965, vol. 18, p. 443—454 (c. 144).
6. Barcilon V. Role of the Ekman layers in the stability of the symmetric regime obtained in a rotating annulus. — «J. Atmos. Sci.», 1964, vol. 21, p. 291—299 (c. 284).
7. Barcilon V. Stability of a non-divergent Ekman layer. — «Tellus», 1965, vol. 17, p. 53—68.
8. Barcilon V. On the motion due to sources and sinks distributed along the vertical boundary of a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 27, p. 551—560 (c. 103).
9. Barcilon V. and Pedlosky J. Linear theory of rotating stratified fluid motions. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 29, p. 1—17 (c. 124).
10. Batchelor G. K. Note on a class of solutions of the Navier — Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. — «Quart. J. Mech. Appl. Meth.», 1951, vol. 4, p. 29—41 (c. 130).
11. Benjamin T. B. and Barnard B. J. S. A study of the motion of a cavity in a rotating liquid. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 19, p. 193—209.
12. Benton E. R. Laminar boundary layer on an impulsively started rotating sphere. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 23, p. 611—624.
13. Benton E. R. On the flow due to a rotating disk. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 24, p. 781—800 (c. 130).
14. Benton G. S. and Boyer D. Flow through a rapidly rotating conduit of arbitrary cross-section. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 26, p. 69—80.
15. Bjernes V. and Solberg H. Zellulare Trägheitswellen und Turbulence. — «Avhandl. Norsk Vid. Akad. Nat.», 1929, kl. 7, S. 1—16 (c. 79).
16. Bödewadt U. T. Die Drehströmung über festem Grunde. — «Z. angew. Math. Mech.», 1940, 20, H. 5, S. 241—253 (c. 130).
17. Bolin B. Studies of the general circulation of the atmosphere. — «Advances Geophys.», 1952, vol. 1, p. 87—118.

---

<sup>1</sup> В скобках указаны страницы книги, где упоминается приведенная в списке работа.

18. Bondi H. and Lyttleton R. A. On the dynamical theory of the rotation of the earth. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1948, vol. 44, p. 345—359.
19. Bondi H. and Lyttleton R. A. On the dynamical theory of the rotation of the earth. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1953, vol. 49, p. 498—515.
20. Bowden F. P. and Lord R. G. Aerodynamic resistance to a sphere rotating at high speed. — «Proc. Roy. Soc.», 1963, A 271, p. 143—153 (c. 145).
21. Bowden M. and Eden H. F. Thermal convection in a rotating fluid annuals: temperature, heat flow and flow field observations in the upper symmetrical regime. — «J. Atmos. Sci.», 1964, vol. 22, p. 185—195 (c. 277).
22. Bretherton F. P. Low frequency oscillations trapped near the equator. — «Tellus», 1964, vol. 16, p. 181—185 (c. 235).
23. Bretherton F. P. The time-dependent motion due to a cylinder moving in an unbounded rotating or stratified fluid. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 28, p. 545—570 (c. 188).
24. Bretherton F. P., Carrier G. F. and Longuet-Higgins M. S. Report of the I. U. T. A. M. Symposium on Rotating Fluid Systems. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 26, p. 393—410.
25. Brindley J. Stability of flow in a rotating viscous incompressible fluid subject to differential heating. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1960, A, 253, p. 1—25 (c. 281).
26. Brunt D. The dynamics of revolving fluid on a rotating earth. — «Proc. Roy. Soc.», 1921, A 99, p. 397—402.
27. Bryan G. H. The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1889, A 180, p. 187—219.
28. Bryan K. A numerical investigation of a non-linear model of a wind-driven ocean. — «J. Atmos. Sci.», 1963, vol. 20, p. 594—606 (c. 224).
29. Burgers J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. — «Advances in Applied Mechanics», 1948, vol. 1, p. 197—199. Academic Press, New York (c. 172).
30. Busse F. H. Shear flow instabilities in rotating systems. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 33, p. 577—589.
31. Busse F. H. Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 33, p. 739—751 (c. 272).
32. Campbell G. A. and Foster R. M. Fourier integrals for practical applications. D. Van Nostrand Co., New York.
33. Carrier G. F. Boundary layer problems in applied mathematics. — «Comuns. Pure and Appl. Math.», 1954, vol. 7, p. 11—17 (c. 123).
34. Carrier G. F. Some effects of stratification and geometry in rotating fluids. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 23, p. 145—172 (c. 252).
35. Carrier G. F. Phenomena in rotating fluids. — Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. (H. Görtler, editor), p. 69—87. Springer, Berlin (c. 113).
36. Carrier G. F. and Robinson A. R. On the theory of the wind-driven ocean circulation. — «J. Fluid Mech.», 1962, vol. 12, p. 49—80 (c. 220).
37. Cartan E. Sur les petites oscillations d'une masse fluid. — «Bull. Sci. Math.», 1922, vol. 46, p. 317—152, 356—369 (c. 51).
38. Chandrasekhar S. The thermal instability of a rotating fluid sphere heated within. — «Phil. Mag.», 1957, vol. 2, p. 845—858.
39. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. The Clarendon Press, Oxford (c. 175).
40. Charney J. G. The Gulf Stream as an inertial boundary layer. — «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1955, vol. 41, p. 731—740 (c. 223).
41. Charney J. G. On the theory of the general circulation of the atmosphere. The Atmosphere and the Sea in Motion (B. Bolin, editor), 1959, p. 178—193. Rockefeller Inst. Press, New York (c. 278).
42. Charney J. G. and Drazin P. G. Propagation of planetary-scale disturbances from the lower into the upper atmosphere. — «J. Geophys. Research», 1961, vol. 66, p. 83—109.
43. Charney J. G. and Eliassen A. A numerical method for predic-

- ting the perturbations of the middle latitude westerlies. — «Tellus», 1949, vol. 1, p. 38—54.
44. Cochran W. G. The flow due to a rotating disc. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1936, vol. 30, p. 365—375 (c. 132).
  45. Coles D. Transition in circular Couette flow. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 21, p. 385—425 (c. 254).
  46. Crabtree L. F., Küchemann D. and Sowerby L. Three-dimensional boundary layers. Chapter 8 of *Laminar Boundary Layers* (L. Rosenhead, editor). Oxford University Press, London.
  47. Crossley A. F. On the motion of a rotating circular cylinder filled with viscous fluid. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1928, vol. 24, p. 480—488.
  48. Davies D. R. On the calculation of eddy viscosity and heat transfer in a turbulent boundary layer near a rapidly rotating disk. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1959, vol. 12, p. 211—221.
  49. Davies T. V. The forced flow due to heating of a rotating fluid. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1956, A 249, p. 27—67.
  50. Davies T. V. On the forced motion due to heating of a deep rotating liquid in an annuals. — «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 5, p. 593—621 (c. 282).
  51. Dean W. R. Note on the motion of an infinite cylinder in rotating viscous liquid. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1954, vol. 7, p. 257—262.
  52. Donaldson C. Du P. and Sullivan R. D. Behaviour of solutions of the Navier — Stokes equation for a complete class of three-dimensional vortices. *Proc. Heat Transfer and Fluid Mech.*, 1960. (c. 172).
  53. Drazin P. G. and Howard L. H. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. — «Advances in Applied Mechanics», 1966, vol. 9, p. 1—85. Academic Press, New York (c. 253).
  54. Eady E. T. Long waves and cyclone waves. — «Tellus», 1949, vol. 1, p. 33—52 (c. 281).
  55. Ekman V. W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. — «Ark. Mat. Astr.», 1905, vol. 2, p. 1—52.
  56. Emshie A. G., Bonner F. T. and Peck L. G. Flow of a viscous liquid on rotating disk. — «J. Appl. Phys.», 1958, vol. 29, p. 858—862.
  57. Erdelyi A. *Tables of integral transforms*. Mc. Graw-Hill, New York, 1953.
  58. Ertel H. Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. — «Meteorologische Zeitschrift», 1942, Bd. 59, S. 277—281.
  59. Ertel H. and Rossby C. G. A new conservation theorem of hydrodynamics. — «Geofisica Pura e Appl.», 1949, vol. 14, p. 189—193.
  60. Fadnis B. S. Boundary layer on rotating spheroides. — «Z. angew. Math. Phys.», 1954, Bd. 5, S. 156—163.
  61. Faller A. J. Further examples of stationary planetary flow patterns in bounded basins. — «Tellus», 1960, vol. 12, p. 159—171 (c. 113).
  62. Faller A. J. An experimental study of the instability of the laminar Ekman boundary layer. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 15, p. 560—576 (c. 258).
  63. Faller A. J. and Kaylor R. E. A numerical study of the instability of the laminar Ekman boundary layer. — «J. Atmos. Sci.», 1966, vol. 23, p. 466—480 (c. 258).
  64. Faller A. J. and Von Arx W. S. The modeling of fluid flow on a planetary scale. — *Proc. 7th Hydraulics Conf.*, State University of Iowa, p. 53—70 (c. 222).
  65. Fjortoft N. R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability of laminar flow and for the baroclinic circular vortex. — «Geophys. Publ.», 1950, vol. 17, p. 1—52 (c. 267).
  66. Fofonoff N. P. Steady flow in a frictionless homogeneous ocean. — «J. Mar. Res.», 1954, vol 3, p. 254—262 (c. 228).
  67. Fofonoff N. P. Dynamics of ocean currents. Chapter 3 of «*The Sea*», I (M. N. Hilli, editor), 1962. InterscienceI, New York (c. 220).

68. Fowlis W. W. and Hide R. Thermal convection in a rotating annulus of liquid: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regime. — *J. Atmos. Sci.*, 1965, vol. 22, p. 541—558 (c. 279).
69. Fox J. Boundary layers on rotating spheres and other axisymmetric shapes. NASA, TN D-2491, 1964 (c. 144).
70. Fraenkel L. E. On the flow of a rotating fluid past bodies in a pipe. — *Proc. Roy. Soc.*, 1956, A 233, p. 506—526 (c. 203).
71. Frenzen P. Westerly flow past an obstacle in a rotating hemispherical shell. — *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 1955, vol. 36, p. 204—210 (c. 236).
72. Fultz D. Experimental studies of a polar vortex. I. — *Tellus*, 1950, vol. 2, p. 137—149 (c. 246).
73. Fultz D. Experimental studies related to atmospheric flow around obstacles. — *Proc. 1st. Int. Meeting on Alpine Meteorol.*, 1950, vol. 17, p. 3—4 (c. 246).
74. Fultz D. Experimental analogies to atmospheric motions. *Compendium of Meteorology*, 1951, p. 1235—1248, Am. Meteorol. Soc., Boston (c. 277).
75. Fultz D. A survey of certain thermally and mechanically driven fluid systems of meteorological interest. *Fluid Models in Geophysics*. — *Proc. 1st. Symposium on the Use of Models in Geophysical Fluid Dynamics*, J. Hopkins Univ., 1953, pp. 27—63 (c. 277).
76. Fultz D. A note on overstability and the elastoid-inertia oscillations of Kelvin, Solberg and Bjerkness. — *J. Meteorol.*, 1959, vol. 16, p. 199—208 (c. 175).
77. Fultz D. Developments in controlled experiments on large-scale geophysical problems. — *Advances in Geophys.*, 1961, vol. 7, p. 1—103 (c. 222).
78. Fultz D. An experimental view of some atmospheric and oceanic behavioural problem. — *Trans. N. Y. Acad. Sci.*, 1962, vol. 24, p. 421—446.
79. Fultz D. Spectrum of thermal convection in a rotating annulus. Report of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Symposium on Rotating Fluid Systems. — *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 26 (c. 279).
80. Fultz D. and Frenzen P. A note on certain interesting ageostrophic motions in rotating hemispherical shell. — *J. Meteorol.*, 1955, vol. 12, p. 332—338 (c. 236).
81. Fultz D. and Kaylor R. The propagation of frequency in experimental baroclinic waves in a rotating annular ring. *The Atmosphere and the Sea in Motion* (B. Bolin, editor), 1959, p. 359—371, Rockefeller Inst. Press, New York.
82. Fultz D. and Long R. R. Two-dimensional flow around a circular barrier in a rotating spherical shell. — *Tellus*, 1951, vol. 3, p. 61—68 (c. 246).
83. Fultz D., Long R. R., Owens G. W., Bohan W., Kaylor R. and Weil J. Studies of thermal convection in a rotating cylinder with some implications for large-scale atmospheric motions. — *Meteorol. Monogr.*, 1959, vol. 4, p. 1—104.
84. Fultz D. and Murty T. S. A three-dimensional vortex instability in rotating fluids. — *Proc. of the 11th Int. Congr. Appl. Mech.* (H. Görtler, editor), 1964, p. 1022—1029, Springer, Berlin.
85. Glauert M. B. A boundary layer theorem with applications to rotating cylinders. — *J. Fluid Mech.*, 1957, vol. 2, p. 89—99.
86. Goldstein S. (editor). *Modern developments in fluid dynamics*. Clarendon Press, Oxford, 1938 (c. 22).
87. Görtler H. Einige Bemerkungen über Strömungen in rotierenden Flüssigkeiten. — *Z. angew. Math. Mech.*, 1944, 24, S. 210—214.
88. Görtler H. On forced oscillations in rotating fluids. — 5th *Midwestern Conf. on Fluid Mech.*, p. 1—10 (c. 182).
89. Grace S. F. Free of a sphere in a rotating liquid parallel to the axis of rotation. — *Proc. Roy. Soc.*, 1922, A 102, p. 89—111 (c. 187).
90. Grace S. F. Free motion of a sphere in a rotating liquid at right angle to the axis of rotation. — *Proc. Roy. Soc.*, 1923, A 104, p. 278—301 (c. 187).
91. Grace S. F. A spherical source in a rotating liquid. — *Proc. Roy. Soc.*, 1924, A 113, p. 46—77 (c. 187).

92. Greenspan H. P. A criterion for the existence of inertial boundary layers in oceanic circulation. — «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1962, vol. 48, p. 2034—2039.
93. Greenspan H. P. A note concerning topography and inertial currents. — «J. Mar. Res.», 1963, vol. 23, p. 147—154.
94. Greenspan H. P. On the transient motion of a contained rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 21, p. 673—696 (c. 61).
95. Greenspan H. P. On the general theory of contained rotating fluid motions. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 22, p. 449—462.
96. Greenspan H. P. and Howard L. N. On a time dependent motion of a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 17, p. 385—404 (c. 36).
97. Greenspan H. P. and Weinbaum S. On non-linear spin-up of a rotating fluid. — «J. Math. and Phys.», 1963, vol. 44, p. 66—85 (c. 161).
98. Gregory N. and Walker W. S. Experiments on the effect of suction on the flow due to a rotating disk. — «J. Fluid Mech.», 1960, vol. 9, p. 225—234.
99. Gregory N., Stuart J. T. and Walker W. S. On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1955, A 248, p. 155—199 (c. 262).
100. Haurwitz B. The motion of atmospheric disturbances. — «J. Mar. Res.», 1940, vol. 3, p. 35—50 (c. 236).
101. Haurwitz B. The motion of atmospheric disturbances on the spherical earth. — «J. Mar. Res.», 1940, vol. 3, p. 254—267 (c. 236).
102. Hide R. Fluid motion in the earth's core and some experiments on thermal convection in a rotating liquid. Fluid Models in Geophysics. Proc. 1st Symposium on the Use of Models in Geophysical Fluid Dynamics. J. Hopkins Univ., 1953, p. 101—116.
103. Hide R. Some experiments on thermal convection in a rotating liquid. — «Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.», 1953, vol. 79 (c. 277).
104. Hide R. The character of the equilibrium of a heavy viscous, incompressible, rotating fluid of variable density I and II. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1956, vol. 9, p. 22—34, 35—50.
105. Hide R. And experimental study of thermal convection in a rotating liquid. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1958, A 250, p. 441—478 (c. 277).
106. Hide R. The viscous boundary layer at the free surface of a rotating baroclinic fluid. — «Tellus», 1964, vol. 16, p. 523—529.
107. Hide R. Review article on the dynamics of rotating fluids and related topics in geophysical fluid dynamics. — «Bull. Am. Meteorol. Soc.», 1966, vol. 47, p. 873—885.
108. Hide R. Detached shear layers in a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 29, p. 39—60 (c. 271).
109. Hide R. On source-sink flows in a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 32, p. 737—764 (c. 103).
110. Hide R. and Ibbetson A. An experimental study of Taylor Columns. — «Icarus», 1966, vol. 5, p. 279—290 (c. 165).
111. Hocking L. M. The stability of a rigidly rotating column of liquid. — «Mathematika», 1960, vol. 7, p. 1—9.
112. Hocking L. M. An almost inviscid geostrophic flow. — «J. Fluid Mech.», 1962, vol. 12, p. 129—134.
113. Hocking L. M. On the unsteady motion of a rotating fluid in a cavity. — «Mathematika», 1965, vol. 12, p. 97—106 (c. 168).
114. Hocking L. M. and Michael D. H. The stability of a column of rotating liquid. — «Mathematika», 1959, vol. 6, p. 25—32.
115. Høiland E. On horizontal motion in a rotating fluid. — «Geophys. Publ.», 1950, vol. 17, p. 1—26.
116. Høiland E. Discussion of a hyperbolic equation relating to inertia and gravitational fluid oscillations. — «Geophys. Publ.», 1962, vol. 24, p. 211—227.
117. Holopainen E. O. On the effect of friction in baroclinic waves. — «Tellus», 1961, vol. 13, p. 363—367.
118. Holton J. R. The influence of viscous boundary layers on transient

- motions in a stratified rotating fluid. Part 1. — «J. Atmos. Sci.», 1965, vol. 22, p. 402—411 (c. 128).
119. H o u g h S. S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1895, A 186, p. 469—506 (c. 65).
  120. H o w a r d L. N. Fundamentals of the theory of rotating fluids. — «J. Appl. Mech.», 1963, vol. 30, p. 481—485.
  121. H o w a r d L. N. and D r a z i n P. G. On instability of parallel flow of inviscid fluid in a rotating system with variable Coriolis parameter. — «J. Math. and Phys.», 1964, vol. 18, p. 83—99.
  122. H o w a r t h L. Note on the boundary layer on a rotating sphere. — «Phil. Mag.», 1951, vol. 42, p. 1308—1315 (c. 144).
  123. H u n t e r C. The axisymmetric flow in a rotating annulus due to a horizontally applied temperature gradient. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 27, p. 753—778 (c. 280).
  124. I b b e t s o n A. and P h i l l i p s N. A. Some laboratory experiments on Rossby waves with application to the ocean. — «Tellus», 1967, vol. 19, p. 81—88 (c. 236).
  125. J a i n M. K. Flow of a non-Newtonian liquid near a rotating disk. — «Appl. Sci. Research», 1961, A 10, p. 410—418.
  126. J a c o b s S. J. The Taylor column problem. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 20, p. 581—591 (c. 115).
  127. J a c o b s S. J. On stratified flow over bottom topography. — «J. Mar. Res.», 1965, vol. 22, p. 223—235.
  128. K á r m á n Th. V. Über laminare und turbulente Reibung. — Z. angew. Math. Mech. 1, 1921, 233—251 (c. 130).
  129. K á r m á n Th. V. Some aspects of the turbulence problem. Proc. 4th Int. Cong. Appl. Mech. Cambridge, 1934, p. 54—59 (c. 148).
  130. K e l v i n L o r d. Vibrations of a columnar vortex. — «Phil. Mag.», 1880, vol. 10, p. 155—168 (c. 79).
  131. K i n g W. S. and L e w e l l e n W. S. Boundary-layer similarity solutions for rotating flows with and without magnetic interaction. — «Phys. Fluids», 1964, vol. 7, p. 1674—1680 (c. 138).
  132. K n a u s s J. A. Equatorial current systems. Chapter 10 of «The Sea, II», (M. N. Hill, editor), 1963. Interscience, London (c. 251).
  133. K n a u s s J. A. Further measurements and observations on the Cromwell current. — «J. Mar. Res.», 1966, vol. 24, p. 205—240 (c. 251).
  134. K r e i t h F., R o b e r t s L. G., S u l l i v a n J. A. and S i n h a S. N. Convection heat transfer and flow of rotating spheres. — «Int. J. Heat and Mass. Transfer», 1963, vol. 6, p. 881—895. (c. 145).
  135. K r e i t h F., T a y l o r J. F. and C h o n g J. P. (1959). Heat and mass transfer from a rotating disk. — «J. Heat. Transfer», 1959, vol. 81, p. 95—105.
  136. K u d l i c k M. D. On transient motions in a contained rotating fluid. Ph. D. Thesis, Math. Dept., M. I. T., 1966 (c. 113).
  137. K u o H. L. On convective instability of a rotating fluid with a horizontal temperature contrast. — «J. Mar. Res.», 1955, vol. 14, p. 14—32.
  138. K u o H. L. Energy-releasing processes and stability of thermally driven motions in a rotating fluid. — «J. Meteorol.», 1956, vol. 13, p. 82—101 (c. 281).
  139. K u o H. L. Further studies of thermally driven motions in a rotating fluid. — «J. Meteorol.», 1957, vol. 14, p. 553—558 (c. 281).
  140. L a m b H. Hydrodynamics. Cambridge University Press., 1932 (c. 168).
  141. L a n c e G. N. and R o g e r s M. H. The axially symmetric flow of a viscous fluid between two infinite rotating disks. — «Proc. Roy. Soc.», 1962, A 266, p. 109—121 (c. 130).
  142. L e w e l l e n W. S. A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation. — «J. Fluid Mech.», 1962, vol. 14, p. 420—432 (c. 113).
  143. L e w e l l e n W. S. Linearized vortex flows. A. I. A. A. Journ., 1965, vol. 3, p. 91—98 (c. 172).
  144. L e w e l l e n W. S., R o s s D. H. and R o s e n z w e i g M. L. Confined vortex flows with boundary-layer interaction. A. I. A. A. Journ., 1964, vol. 2, p. 2127—2133.

145. Lighthill M. J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. — «London Math. Soc.», 1949, vol. 40, p. 1179—1204 (c. 163).
146. Lighthill M. J. An elementary reasoned account of the general circulation of the atmosphere. — «Phil. Mag.», 1954, vol. 45, p. 1154—1162.
147. Lighthill M. J. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1960, A 252, p. 397—430 (c. 195).
148. Lighthill M. J. Boundary layer theory. Chapter 2 of Laminar Boundary Layers (L. Rosenhead, editor). Oxford University Press, 1963 (c. 22).
149. Lighthill M. J. Dynamics of rotating fluids: a survey. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 26, p. 411—431.
150. Lilly D. K. On the instability of the Ekman boundary layer. — «J. Atmos. Sci.», 1966, vol. 23, p. 481—494 (c. 266).
151. Lin C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Parts I, II, III. — «Quart. Appl. Math.», 1945, vol. 3, I, p. 117—142; II — p. 218—314; III — p. 277—301.
152. Lin C. C. The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press, 1955 (c. 253).
153. Long R. R. A theoretical and experimental study of the motion and stability of certain atmospheric vortices. — «J. Meteorol.», 1951, vol. 8, p. 207—221 (c. 175).
154. Long R. R. The flow of a liquid past a barrier in a rotating spherical shell. — «J. Meteorol.», 1952, vol. 9, p. 187—199 (c. 246).
155. Long R. R. Steady motion around a symmetrical obstacle moving along the axis of a rotating liquid. — «J. Meteorol.», 1953, vol. 10, p. 197—202 (c. 200).
156. Long R. R. Note on Taylor's 'Ink Walls' in a rotating fluid. — «J. Meteorol.», 1954, vol. 11, p. 247—249.
157. Long R. R. Sources and sinks at the axis of a rotating fluid. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1956, vol. 9, p. 385—393.
158. Long R. R. Vortex motion in a viscous fluid. — «J. Meteorol.», 1958, vol. 15, p. 108—112.
159. Longuet-Higgins M. S. Planetary waves in a rotating sphere. — «Proc. Roy. Soc.», 1964, A 279, p. 446—473 (c. 232).
160. Longuet-Higgins M. S. On group velocity and energy flux in planetary wave motions. — «Deep-Sea Res.», 1964, vol. 11, p. 35—42.
161. Longuet-Higgins M. S. The response of a stratified ocean to stationary or moving wind-systems. — «Deep-Sea Res.», 1965, vol. 12, p. 923—973.
162. Longuet-Higgins M. S. Planetary waves on a hemisphere bounded by meridians of longitude. — «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1966, A 260, p. 317—350 (c. 234).
163. Lorenz E. N. A proposed explanation for the existence of two regimes of flow in a symmetrically heated cylindrical vessel. Fluid Models in Geophys. Proc. 1st Symposium on the Use of Models in Geophysical Fluid Dynamics. J. Hopkins Inst., 1953, p. 73—80 (c. 278).
164. Lorenz E. N. Simplified dynamic equations applied to the rotating basin experiments. — «J. Atmos. Sci.», 1962, vol. 19, p. 39—51 (c. 279).
165. Lyttleton R. A. The stability of rotating liquid masses. Cambridge University Press, 1953 (c. 253).
166. Mack L. M. The compressible viscous heat-conducting vortex. — «J. Fluid Mech.», 1960, vol. 8, p. 284—292.
167. Mack L. M. The laminar boundary layer on a disk of finite radius in a rotating flow. Part 1. T. R. 32—224, J. P. L., Cal. Tech., 1962 (c. 148).
168. Mack L. M. The laminar boundary layer on a disk of finite radius in a rotating flow. Part 2. T. R. 32—366, J. P. L., Cal. Tech., 1963 (c. 148).
169. Malkus W. V. R. Hydromagnetic planetary waves. — «Fluid Mech.», 1967, vol. 28, p. 794—802 (c. 167).
170. Malkus W. V. R. and Busse F. Zonal flows in precessing spheroids. Report of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics.

- Symposium on Rotating Fluid Systems. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 26 (c. 166).
171. Margules M. Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale (II. Teil). Sitz. der Math.-Naturwiss. Klasse, Kais. Akad. Wiss., Wien, 1893, 102, S. 11—56 (c. 235).
  172. Maxworthy T. The flow between a rotating disk and a coaxial, stationary disk. Space Programs Summary, 1964, 4, Sec. 327, 37—47. J. P. L., Cal. Tech. (c. 154).
  173. Mestel L. Meridian circulation in stars. Chap. 9 of Stars and Stellar Systems, 1965, VIII (G. P. Kuiper, editor). Chicago University Press.
  174. Mihaljan J. M. A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid. — «Astrophys. J.», 1962, vol. 136, p. 1126—1133.
  175. Miles J. W. Free surface oscillations in a rotating liquid. — «Phys. Fluids», 1959, vol. 2, p. 297—305.
  176. Miles J. W. The cauchy — Poisson problem for a rotating liquid. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 17, p. 75—88.
  177. Miles J. W. Free surface oscillations in a slowly rotating liquid. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 18, p. 187—194.
  178. Miles J. W. and Ball F. K. On free-surface oscillations in a rotating paraboloid. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 17, p. 257—266.
  179. Moore D. W. Rossby waves in ocean circulation. — «Deep-Sea Res.», 1963, vol. 7, p. 79—93 (c. 240).
  180. Moore F. K. Three-dimensional boundary layer theory. — «Advances in Appl. Mech.», 1956, vol. 4, p. 160—244. Academic Press, New York.
  181. Morgan G. W. A study of motions in a rotating liquid. — «Proc. Roy. Soc.», 1951, A 206, p. 108—130 (c. 187).
  182. Morgan G. W. Remarks on the problem of slow motions in a rotating fluid. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1953, vol. 49, p. 362—364.
  183. Morgan G. W. On the wind-driven ocean circulation. — «Tellus», 1956, vol. 7, p. 301—320 (c. 220).
  184. Morrison J. A. and Morgan G. W. The slow motion of a disc along the axis of a viscous rotating fluid. — «Tech. Rep.», 1956, vol. 8, D. A. M. Brown University (c. 98).
  185. Munk W. H. On the wind-driven ocean circulation. — «J. Meteorol.», 1950, vol. 7, p. 79—93 (c. 223).
  186. Munk W. H. and Carrier G. F. The wind-driven circulation in ocean basins of various shapes. — «Tellus», 1950, vol. 2, p. 158—167 (c. 223).
  187. Munk W. H. and MacDonald G. J. F. The rotation of the earth. A Geophysical Discussion. Cambridge University Press, 1960.
  188. Nigam S. D. Growth of boundary layer on a rotating sphere. — «Z. angew. Math. Phys.», 1953, vol. 4, p. 221—223 (c. 146).
  189. Nigam S. D. (1954). Note on the boundary layer on a rotating sphere. — «Z. angew. Math. Phys.», 5, 151—155 (c. 146).
  190. Nigam S. D. and Nigam P. D. Wave propagation in rotating liquids. — «Proc. Roy. Soc.», 1962, A 266, p. 247—256 (c. 195).
  191. Niiler P. P. On the theory of wind-driven ocean circulation. — «Deep-Sea Res.», 1966, vol. 13, p. 597—606 (c. 241).
  192. Oser H. Erzwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten. — «Arch. Ratl. Mech. Anal.», 1957, Bd. I, S. 81—96 (c. 182).
  193. Oser H. Experimentelle Untersuchung über harmonische Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten. — «Z. angew. Math. Mech.», 1958, Bd. 38, S. 386—394 (c. 182).
  194. Payne R. B. Calculations of unsteady viscous flow past a circular cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1958, vol. 4, p. 81—86.
  195. Pearson C. E. A computational method for viscous flow problems. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 21, p. 622—641.
  196. Pearson C. E. Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 21, p. 623—633 (c. 130).

197. Pearson C. E. Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating concentric spheres. — «J. Fluid. Mech.», 1967, vol. 28, p. 323—336 (c. 147).
198. Pedlosky J. A study of the time-dependent circulation. — «J. Atmos. Sci.», 1965, vol. 22, p. 267—272 (c. 234).
199. Pedlosky J. A note on the western intensification of the oceanic circulation. — «J. Mar. Res.», 1965, vol. 23, p. 207—209 (c. 232).
200. Pedlosky J. Spin-up of a stratified fluid. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 28, p. 463—480 (c. 128).
201. Pedlosky J. and Greenspan H. P. A simple laboratory model for the oceanic circulation. — «J. Fluid. Mech.», 1967, vol. 27, p. 291—304 (c. 84).
202. Peube J. L. and Kreith F. Flow of an incompressible fluid between parallel rotating disks. — «J. de Mecanique», 1966, vol. 5, p. 261—286.
203. Phillips N. A. Geostrophic motion. — «Rev. Geophys.», 1963, vol. 1, p. 123—171 (c. 236).
204. Phillips N. A. Elementary Rossby waves. — «Tellus», 1965, vol. 17, p. 295—301 (c. 236).
205. Phillips O. M. Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves. — «Phys. Fluids», 1963, vol. 6, p. 513—520 (c. 175).
206. Picha K. G. and Eckert E. R. G. Study of the air flow between coaxial disks rotating with arbitrary velocities in an open or enclosed space. Proc. 3rd U. S. Nat. Cong. on Appl. Mech., 1958, p. 791—798 (c. 143).
207. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. I. Chapter 3, Gauthier — Villais, Paris (c. 163).
208. Poincaré H. Sur la précession des corps déformables. — «Bull. Astronomie», 1910, vol. 27, p. 321—356 (c. 51).
209. Proudman I. The almost rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. — «J. Fluid Mech.», 1956, vol. 1, p. 505—516 (c. 98).
210. Proudman J. On the motion of solids in liquids possessing vorticity. — «Proc. Roy. Soc.», 1916, A 92, p. 408—424.
211. Rattray M. and Charnell R. L. Quasi-geostrophic free oscillations in enclosed basins. — «J. Mar. Res.», 1966, vol. 24, p. 82—102 (c. 236).
212. Rayleigh Lord. On the stability, or instability of certain fluid motions. — «Proc. London Math. Soc.», 1880, vol. 11, p. 57—70 (Scientific papers, 1, p. 474—487, Cambridge University Press) (c. 267).
213. Rayleigh Lord. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. — «Proc. London Math. Soc.», 1833, vol. 14, p. 170—177 (Scientific papers, 2, p. 200—207, Cambridge University Press).
214. Rayleigh Lord. On the dynamics of revolving fluids. — «Proc. Roy. Soc. London», 1917, A 93, p. 148—154 (Scientific papers, 6, p. 447—453, Cambridge University Press) (c. 254).
215. Reynolds A. Forced oscillations in a rotating liquid (I). — «Z. angew. Math. Phys.», 1962, 13, S. 460—468 (c. 182).
216. Reynolds A. Forced oscillations in a rotating liquid (II). — «Z. angew. Math. Phys.», 1962, Bd. 13, S. 561—572 (c. 182).
217. Riehl H. and Fultz D. Jet stream and long waves a steady rotating dishpan experiment: structure of the circulation. — «Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.», 1957, vol. 83, p. 215—231 (c. 277).
218. Riehl H. and Fultz D. The general circulation in a steady rotating dishpan experiment. — «Quart. J. Roy. Meteor. Soc.», 1958, vol. 84, p. 389—417 (c. 277).
219. Roberts P. H. and Stewartson K. On the stability of a MacLaurin spheroid of small viscosity. — «Astr. J.», 1963, vol. 137, p. 777—790.
220. Roberts P. H. and Stewartson K. Motion of a liquid in a spheroidal cavity. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1963, vol. 61, p. 279—288 (c. 73).
221. Robinson A. R. The symmetric of a rotating fluid differentially heated in the horizontal. — «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 5, p. 599—620 (c. 280).

222. R o b i n s o n A. R. On two-dimensional inertial flow in a rotating stratified fluid. — «J. Fluid Mech.», 1960, vol. 9, p. 321—332.
223. R o b i n s o n A. R. An investigation into the wind as a cause of the equation current. — «J. Mar. Res.», 1966, vol. 24, p. 179—204 (c. 251).
224. R o g e r s M. H. The forced flow of a thin layer of viscous fluid on a rotating sphere. — «Proc. Roy. Soc.», 1954, A 224, p. 192—208.
225. R o g e r s M. H. and L a n c e G. N. The rotating symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. — «J. Fluid Mech.», 1960, vol. 7, p. 617—631 (c. 130).
226. R o g e r s M. H. and L a n c e G. N. The boundary layer on a disc of finite radius in a rotating fluid. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1964, vol. 17, p. 318—330 (c. 136).
227. R o g e r s R. H. The structure of the jet-stream in a rotating fluid with a horizontal temperature gradient. — «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 5, p. 41—59 (c. 282).
228. R o g e r s R. H. The effect of viscosity near the cylindrical boundaries of a rotating fluid with a horizontal temperature gradient. — «J. Fluid Mech.», 1962, vol. 14, p. 25—41 (c. 282).
229. R o s e n h e a d L. (editor). Laminar boundary layers. Oxford University Press, 1963.
230. R o s e n z w e i g M. L., L e w e l l e n W. S. and R o s s D. H. Confined vortex flows with boundary layer interaction. — «A. I. A. A. Journ.», 1964, vol. 2, p. 2127—2133.
231. R o s s b y C. G. Relation between variations in the intensity of the semi-permanent centres of action. — «J. Mar. Res.», 1939, vol. 2, p. 38—55 (c. 84).
232. R o t t N. On the viscous core of a line vortex. — «Z. angew. Math. Phys.», 1958, 9, S. 543—553 (c. 172).
233. R o t t N. On the viscous core of a line vortex. II. — «Z. angew. Math. Phys.», 1959, Bd. 10, S. 73—81 (c. 172).
234. R o t t N. and L e w e l l e n W. S. Boundary layers and their interactions in rotating flows. — «Progress in Aeronaut. Sci.», 1966, vol. 7, p. 11—44 (c. 133).
235. S c h l i c h t i n g H. Boundary layer theory. McGraw-Hill, New York, 1955.
236. S c h u l t z - G r u n o w F. (1935). Der Riebungswiderstand rotierender scheiben in Gehäusen. — «Z. angew. Math. Mech.», 1935, Bd. 15, S. 191—204 (c. 146).
237. S m i t h N. H. Exploratory investigations of laminar boundary layer oscillations on a rotating disc. N. A. C. A. T. N., 1227 (c. 262).
238. S q u i r e H. B. Rotating fluids. Survey in Mechanics (G. K. B a t c h e l o r, editor), 1936, p. 139—161. Cambridge University Press (c. 203).
239. S o b o l e v S. L. Motion of a symmetric top with a cavity filled with fluid. — «Zn. Prikl. Mekh.», 1960, Bd. 3, S. 20—55.
240. S p i e g e l E. A. and V e r o n i s G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. — «Astrophys. J.», 1960, vol. 131, p. 442—447 (c. 20).
241. S t e r n M. E. Instability of Ekman flow at large Taylor number. — «Tellus», 1960, vol. 12, p. 399—417 (c. 268).
242. S t e r n M. E. Trapping of flow frequency oscillations in an equatorial 'boundary layer'. — «Tellus», 1963, vol. 15, p. 246—250 (c. 235).
243. S t e w a r t s o n K. On the slow motion of a sphere along the axis of a rotating fluid. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1952, vol. 48, p. 169—177 (c. 187).
244. S t e w a r t s o n K. A weak spherical source in a rotating fluid. — «Quart. J. Math. Appl. Mech.», 1953, vol. 6, p. 45—49.
245. S t e w a r t s o n K. On the slow motion of an ellipsoid in a rotating fluid. — «Quart. J. Math. Appl. Mech.», 1953, vol. 6, p. 141—162 (c. 165).
246. S t e w a r t s o n K. On the flow between two rotating coaxial disks. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1953, vol. 49, p. 33—41 (c. 130).
247. S t e w a r t s o n K. On the free motion of an ellipsoid in a rotating liquid. — «Quart. J. Math. Appl. Mech.», 1954, vol. 7, p. 231—246.
248. S t e w a r t s o n K. On almost rigid rotations. — «J. Fluid Mech.», 1957, vol. 3, p. 17—26 (c. 98).

249. Stewartson K. On rotating laminar boundary layers. Freiburg Symposium Boundary Layer Research, 1957, p. 59—71 (c. 130).
250. Stewartson K. On the motion of a sphere along the axis of a rotating fluid. — «Quart. J. Math. Appl. Mech.», 1958, vol. 11, p. 39—51 (c. 210).
251. Stewartson K. On the stability of a spinning top containing liquid. — «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 5, p. 577—592.
252. Stewartson K. On almost rigid rotations. Part 2. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 26, p. 131—144 (c. 103).
253. Stewartson K. and Roberts P. H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 17, p. 1—20 (c. 73).
254. Stommel H. The westward intensification of wind-driven ocean current. — «Trans. Am. Geoph. Union», 1948, vol. 29, p. 202—206 (c. 213).
255. Stommel H. A survey of ocean current theory. — «Deep-Sea Res.», 1957, vol. 4, p. 149—184 (c. 220).
256. Stommel H. The Gulf Stream. University of Calif. Press, Berkeley, 1960 (c. 223).
257. Stommel H., Arons A. B. and Faller A. J. Some examples of stationary planetary flows. — «Tellus», 1958, vol. 10, p. 179—187 (c. 113).
258. Stuart J. T. On the effects of uniform suction on the steady flow due to a rotating disk. — «Quart. J. Math. Appl. Mech.», 1954, vol. 7, p. 446—457.
259. Stuart J. T. Hydrodynamic stability. Chapter 9 in «Laminar Boundary Layers» (L. Rosenhead, editor). Oxford University Press, 1963 (c. 253).
260. Synge J. L. The stability of heterogeneous fluids. — «Trans. Roy. Soc. Canada», 1933, vol. 27, p. 1—18 (c. 254).
261. Tatro P. R. and Møllø-Christensen E. L. Experiments on Ekman layer instability. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 28, p. 531—544 (c. 258).
262. Taylor G. I. Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational. — «Proc. Roy. Soc.», 1916, A 93, p. 99—113.
263. Taylor G. I. Experiments with rotating fluids. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1921, vol. 20, p. 326—329.
264. Taylor G. I. Experiments with rotating fluids. — «Proc. Roy. Soc.», 1921, A 100, p. 114—121.
265. Taylor G. I. The motion of a sphere in rotating liquid. — «Proc. Roy. Soc.», 1922, A 102, p. 180—189 (c. 188).
266. Taylor G. I. Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. — «Proc. Roy. Soc.», 1923, A 104, p. 213—218 (c. 200).
267. Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. — «Phil. Trans. Soc.», 1923, A 223, p. 289—343 (c. 254).
268. Taylor G. I. The instability surface when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. «Proc. Roy. Soc.», 1950, A 201, p. 192—196.
269. Theodorsen T. and Regeir A. Experiments on rotating plates, rods and cylinders at high speeds. N. A. C. A. T. N., 1947, 793 p. (c. 262).
270. Thiriot K. H. Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über rötierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungszustandes. — «Z. angew. Math. Mech.», 1940, Bd. 20, S. 1—13 (c. 130).
271. Titchmarsh E. C. Introduction to the theory of Fourier integrals. Clarendon Press, Oxford, 1937.
272. Truesdell C. The kinematics of vorticity. Indiana Press, Indiana, 1954 (c. 172).
273. Truesdell C. Proof that Ertel's vorticity theorem holds in average for any medium suffering no tangential acceleration on the boundary. — «Geofisica Pura e Appl.», 1954, vol. 19, p. 167—169 (c. 22).
274. Trustrum K. Rotating and stratified fluid flow. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 19, p. 415—432.
275. Turner J. S. The constraints imposed on tornado-like vortices by the top and bottom boundary conditions. — «J. Fluid Mech.», 1966, vol. 25, p. 377—400 (c. 114).

276. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. Academic Press, New York, 1964.
277. Veronis G. On the transient response of a  $\beta$ -plane ocean. — «J. Oceanog. Soc. Japan», 1958, vol. 14, p. 1—5.
278. Veronis G. An approximate theoretical analysis of the equatorial undercurrent. — «Deep-Sea Res.», 1960, vol. 6, p. 318—327.
279. Veronic G. On the approximations involved in transforming the equations of motion from a spherical surface to the  $\beta$ -plane. I. Barotropic system. — «J. Mar. Res.», 1963, vol. 21, p. 110—124 (c. 221).
280. Veronic G. On the approximations involved in transforming the equation of motion from a spherical surface to the  $\beta$ -plane. II. Baroclinic systems. — «J. Mar. Res.», 1963, vol. 21, p. 199—204 (c. 221).
281. Veronis G. Wind-driven ocean circulation. Part 1. Linear theory and perturbation analysis. — «Deep-Sea Res.», 1966, vol. 13, p. 17—29 (c. 239).
282. Veronic G. Wind-driven ocean circulation. Part 2. Numerical solutions of the non-linear problem. — «Deep-Sea Res.», 1966, vol. 13, p. 31—55 (c. 224).
283. Veronis G. Generation of mean ocean circulation by fluctuating winds. — «Tellus», 1966, vol. 18, p. 67—76 (c. 234).
284. Veronis G. Rossby waves with bottom topography. — «J. Mar. Res.», 1966, vol. 24, p. 338—349.
285. Veronis G. and Morgan G. W. A study of the time-dependent wind-driven circulation in a homogeneous, rectangular ocean. — «Tellus», 1955, vol. 7, p. 232—242 (c. 234).
286. Von Arx W. S. A laboratory of the wind-driven ocean circulation. — «Tellus», 1952, vol. 4, p. 311—318 (c. 222).
287. Von Arx W. S. An experimental approach to problems in physical oceanography. — «Prog. Phys. and Chem. of the Earth», 1957, vol. 2, p. 1—29 (c. 222).
288. Walton J. Note on a source in a rotating fluid. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1958, vol. 11, p. 208—211.
289. Warren B. A. Topographic influences on the Gulf stream. — «Tellus», 1963, vol. 15, p. 167—183 (c. 222).
290. Wedemeyer E. H. The unsteady flow within a spinning cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 20, p. 383—399 (c. 156).
291. Weske J. R. and Ranken T. M. Generation of secondary motions in the field of a vortex. — «Phys. Fluids», 1963, vol. 6, p. 1397—1403 (c. 273).
292. Witham G. B. A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 22, p. 273—284.
293. Witham G. B. Non-linear dispersive waves. — «Proc. Roy. Soc.», 1965, A 283, p. 238—261.
294. Wood W. W. The asymptotic expansions at large Reynolds numbers for steady motion between non-coaxial rotating cylinders. — «J. Fluid Mech.», 1957, vol. 3, p. 159—175.
295. Wood W. W. An oscillatory disturbance of rigidly rotating fluid. — «Proc. Roy. Soc.», 1966, A 293, p. 181—212 (c. 76).
296. Yih C. S. Dynamics of non-homogeneous fluids. Macmillan Company, New York, 1965.
297. Zeipel H. V. The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses. — «Monthly notices of Roy. Ast. Soc.», 1924, vol. 84, p. 665, 684, 702.

#### НОВЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

298. Acheson D. J. and Hide R. Hydromagnetics of rotating fluids. — «Rep. Prog. Phys.», 1973, vol. 36, p. 159—221.
299. Allen J. S. The effect of weak stratification and geometry on the steady motion of a contained rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 43 p. 129—144.
300. Allen J. S. Some aspects of the initial value problem for the inviscid

- motion of a contained rotating weakly stratified fluid. — «J. Fluid Mech.» 1971, vol. 46, p. 1—23.
301. Allen J. S. Up-welling of a stratified fluid in a rotating annulus. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 52, p. 429—445.
  302. Baines P. G. Forced oscillations of an enclosed rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 30, p. 533—546.
  303. Baines P. G., The reflexion of internal/inertial waves from bumpy surfaces. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 46, p. 273—291.
  304. Baines P. G. The generation of internal tides by flatbump topography. — «Deep-Sea Res.», 1973, vol. 20, r. 179—206.
  305. Baker D. J. Shear layers in a rotating fluid. — «I. Fluid Mech.», 1967, vol. 29, p. 165—176.
  306. Baker D. J. A demonstration of magnification of dynamic topography at the thermocline. — «J. Mar. Res.», 1968, vol. 26, p. 283—285.
  307. Baker D. J. Demonstrations of fluid flow in a rotating system II; the «spin-up» problem. — «J. Physics», 1968, vol. 36, p. 980—986.
  308. Baker D. J. A source-sink laboratory model of ocean circulation. — «Geophys. Fluid Dyn.», 1971, vol. 2, p. 17—30.
  309. Baker D. J. and Robinson A. R. A laboratory model for the general ocean circulation. — «Math. and Phys. Sci.», 1969, vol. 265, p. 533—566.
  310. Barcilon A. I. Vortex decay above a stationary boundary. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 27, p. 155—175.
  311. Barcilon V. Axi-symmetric inertial oscillations of a rotating ring of fluid. — «Mathematika», 1968, vol. 15, p. 93—102.
  312. Barcilon V. Stewartson layers in transient rotating fluid flows. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 33, p. 815—825.
  313. Barcilon V. Some inertial modifications of the linear viscous theory of a steady rotating fluid. — «Phys. Fluids», 1970, vol. 13, p. 537—544.
  314. Barcilon V. and Berg H. C. Forced axial flow between rotating concentric cylinders. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 47, p. 469—479.
  315. Barcilon V. and Pedlosky J. A unified linear theory of homogeneous and stratified rotating fluids. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 29, p. 609—621.
  316. Barcilon V. and Pedlosky J. On the steady motions produced by a stable stratification in a rapidly rotating fluid. — «J. Fluid Mech.» 1967, vol. 29, p. 673—690.
  317. Barrett K. E. On the impulsively started rotating sphere. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 27, p. 779—788.
  318. Beardsley R. C. A laboratory model of the wind-driven ocean circulation. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 38, p. 255—271.
  319. Beardsley R. C. An experimental study of inertial waves in a closed cone. — «Studies in Appl. Math.», 1970, vol. 49, p. 187—196.
  320. Beardsley R. C. Integration of the planetary vorticity equation on a parabolic circular grid. — «J. Comp. Physics», 1971, vol. 7, p. 273—288.
  321. Beardsley R. C. A numerical model of the wind-driven ocean circulation in a circular basin. — «Geophys. Fluid Dyn.», 1973, vol. 4, p. 211—242.
  322. Belcher R. J., Burggraf O. R. and Stewartson K. On generalized vortex boundary layers. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 52, p. 573—580.
  323. Benjamin T. B. Upstream influence. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, p. 49—79.
  324. Benton E. R. On the flow due to a rotating disk. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 24, p. 781—800.
  325. Benton E. R. A composite Ekman boundary layer problem. — «Tellus», 1968, vol. 20, p. 667—672.
  326. Benton E. R. and Loper D. E. On the spin-up of an electrically conducting fluid. Part I: the unsteady hydromagnetic Ekman — Hartmann boundary layer problem. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 39, p. 561—586.
  327. Benton E. R. Non-linear hydrodynamic and hydromagnetic spin-up driven by Ekman — Hartmann boundary layers. — «J. Fluid Mech.», 1973, vol. 57, p. 337—360.

328. Bien F. and Penner S. S. Spin-up and spin-down of rotating flows in a finite cylindrical container. — «Phys. Fluids», 1971, vol. 14, p. 1305—1307.
329. Blumen W. and Washington W. M. The effect of horizontal shear flow on geostrophic adjustment in a barotropic fluid. — «Tellus», 1969, vol. 21, p. 167—176.
330. Blumsack S. and Barcilon A. Thermally-driven linear vortex. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 48, p. 801—814.
331. Bowden M. and Eden H. F. Effect of a radial barrier on the convective flow in a rotating fluid annulus. — «J. Geophys. Res.», 1968, vol. 73, p. 6887—6895.
332. Boyer D. L. Rotating flow over long shallow ridges. — «Geophys. Fluid Dyn.», 1971, vol. 2, p. 164—184.
333. Bryan K. and Cox M. D. A numerical investigation of the oceanic general circulation. — «Tellus», 1967, vol. 19, p. 54—81.
334. Burggraf O. R., Stewartson K. and Belcher R. Boundary layer induced by a potential vortex. — «Phys. Fluids», 1971, vol. 14, p. 1821—1833.
335. Busse F. H. Thermal instabilities in rapidly rotating systems. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 44, p. 441—460.
336. Buzyna G. and Veronis G. Spin-up of a stratified fluid: theory and experiment. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 50, p. 579—608.
337. Caldwell D. R. and Van Atta C. W. Characteristics of Ekman boundary layer instabilities. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 44, p. 79—95.
338. Caldwell D. R., Van Atta C. W. and Helland K. N. A laboratory study of turbulent Ekman layer. — «Geophys. Fluid Dyn.», 1972, vol. 3, p. 125—160.
339. Carrier G. F. Swirling flow boundary layers. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 49, p. 133—144.
340. Carrier G. F. The intensification of hurricanes. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 49, p. 145—158.
341. Carrier G. F., Hammond A. L. and George O. D. A model of the nature hurricane. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 47, p. 145—170.
342. Chawla S. S. On hydromagnetic spin-up. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 53, p. 545—555.
343. Chi S. W., Ying S. J. and Chang C. C. The ground turbulent boundary layer of a stationary tornado-like vortex. — «Tellus», 1969, vol. 21, p. 693—700.
344. Chin D. T. and Litt M. An electrochemical study of flow instability on a rotating disk. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, p. 613—625.
345. Davies P. A. Experiments on Taylor columns in rotating stratified fluids. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, p. 691—717.
346. Dowdin J. V. An equatorial boundary layer. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 56, p. 193—200.
347. Dudis J. J. and Davis S. H. Energy stability of the Ekman boundary layer. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 47, p. 405—413.
348. Evans D. J. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disc with uniform suction. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1969, vol. 22, p. 467—485.
349. Foster M. R. The flow caused by the differential rotation of a right circular cylindrical depression in one of two rapidly rotating parallel planes. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 53, p. 647—655.
350. Fultz D. and Murty T. S. Effects of the radial law of depth on the instability of inertial oscillations in rotating fluids. — «J. Atm. Sci.», 1968, vol. 25, p. 779—788.
351. Gadgil S. Structure of jets in rotating systems. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 47, p. 417—436.
352. Gans R. F. On hydromagnetic precession in a cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 45, p. 111—130.
353. Gans R. F. On the precession of a resonant cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 41, p. 865—872.

354. Gates W. L. A numerical study of transient Rossby waves in a wind-driven homogeneous ocean. — «J. Atm. Sci.», 1968, vol. 25, p. 3—22.
355. Gates W. L. The Ekman vertical velocity in an enclosed  $\beta$ -plane ocean. — «J. Mar. Res.», 1969, vol. 27, p. 99—120.
356. Gill A. W. The equatorial current in a homogeneous ocean. — «Deep-Sea Res.», 1971, vol. 18, p. 421—432.
357. Gill A. E. and Bryan K. Effects of geometry on the circulation of a three dimensional southern-hemisphere ocean model. — «Deep-Sea Res.», 1971, vol. 18, p. 685—722.
358. Gilman P. A. and Benton E. R. Influence of an axial magnetic field on the steady linear Ekman boundary layer. — «Phys. Fluids», 1968, vol. 11, p. 2397—2401.
359. Goller H. and Ranov T. Unsteady rotating flow in a cylinder with a free surface. — «J. Basic Eng.», 1968, vol. 90, p. 445—454.
360. Graebel W. P. On the slow motion of bodies in stratified and rotating fluids. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1969, vol. 22, p. 39—54.
361. Greenspan H. P. A note on the laboratory simulation of planetary flows. — «Studies in Appl. Math.», 1969, vol. 48, p. 147—152.
362. Greenspan H. P. On the inviscid theory of rotating fluids. — «Studies in Appl. Math.», 1969, vol. 48, p. 19—28.
363. Greenspan H. P. On the non-linear interaction of inertial modes. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 36, p. 257—264.
364. Hadlock R. K. and Hess S. L. A laboratory hurricane model incorporating an analog to release of latent heat. — «J. Atm. Sci.», 1968, vol. 25, p. 161—177.
365. Hamst G. M. and Hudson J. L. Centrifugal convection and its effect on the asymptotic stability for a bounded rotating fluid heated from below. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 48, p. 605—624.
366. Hide R. Theory of axisymmetric thermal convection in a rotating fluid annulus. — «Phys. Fluids», 1967, vol. 10, p. 56—68.
367. Hide R. On geostrophic motion of a non-homogeneous fluid. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 49, p. 745—751.
368. Hide R. and Titman C. W. On slow transverse flow past obstacles in a rapidly rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 32, p. 251—272.
369. Hocking L. M. Radial filling of a rotating container. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1970, vol. 23, p. 101—117.
370. Hogg N. G. On the stratified Taylor column. — «J. Fluid Mech.», 1973, vol. 58, p. 517—537.
371. Homsey G. M. and Hudson J. L. Transient flow near a rotating disk. — «Appl. Sci. Res.», 1968, vol. 18, p. 384—397.
372. Howard L. N. and Siegmann W. L. On the initial value problem for rotating stratified flow. — «Studies in Appl. Math.», 1969, vol. 48, p. 153—169.
373. Israeli M. On trapped modes of rotating fluids in spherical shells. — «Studies in Appl. Math.», 1972, vol. 51, p. 219—237.
374. Jacobs C. Transient motions produced by disks oscillating torsionally about a state of rigid rotation. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1971, vol. 24, p. 221—236.
375. Johnson J. A., Fandry C. B. and Leslie L. M. On the variation of ocean circulation produced by bottom topography. — «Tellus», 1971, vol. 23, p. 113—121.
376. Kaiser J. Rotating deep annulus convection; thermal properties of the upper symmetric regime. — «Tellus», 1969, vol. 21, p. 789—805.
377. Kастure D. Y. Motion of an asymmetric body in a rotating liquid. — «J. Math. Phys. Sci.», 1970, vol. 4, p. 278—285.
378. Knoll J. and Veronis G. The spin-up of a homogeneous fluid bounded below by a permeable medium. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, p. 225—239.
379. Kuikin H. K. The effect of normal blowing on the flow near a rotating disk of infinite extent. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 47, p. 789—798.

380. Kuo H. H. and Veronis G. The source-sink flow in oceanic analogy. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 45, pt 3, p. 441—464.
381. Leibovich S. Weakly non-linear waves in rotating fluids. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 42, p. 803—822.
382. Leslie L. M. The development of concentrated vortices: a numerical study. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 48, p. 1—21.
383. Leslie L. M. and Smith R. K. The surface boundary layer of a hurricane. — «Tellus», 1970, vol. 22, p. 288—297.
384. Lighthill M. J. On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 27, p. 725—752.
385. Lighthill M. J. The theory of trailing Taylor columns. — «Proc. Cam. Phil. Soc.», 1970, vol. 68, p. 485—491.
386. Logan S. E. An approach to the dust devil vortex. — «AIAA», 1971, vol. 9, p. 660—665.
387. Long R. R. Sources and sinks on a  $\beta$ -earth. — «Tellus», 1968, vol. 20, p. 524—532.
388. Long R. R. Blocking effects in flow over obstacles. — «Tellus», 1970, vol. 22, p. 471—480.
389. Longuet-Higgins M. S. On the trapping of waves along a discontinuity of depth in a rotating ocean. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 31, p. 417—434.
390. Longuet-Higgins M. S. Topographic Rossby waves. — «Memoires Soc. Roy. Sci. De Liege», 1972, vol. 2, p. 11—16.
391. Loper D. On viscous flow within a rotating spheroidal container. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1970, vol. 23, p. 119—125.
392. Loper D. and Benton E. R. On the spin-up of an electrically conducting fluid. Part 2: Hydromagnetic spin-up between infinite flat insulating plates. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 43, p. 785—799.
393. Manohar R. The boundary layer on a rotating sphere. — «Z. angew. Math. Phys.», 1967, Bd. 18, S. 320—330.
394. McDonald B. E. and Dicke R. H. Solar oblateness and fluid 'spin-down'. — «Science», 1967, vol. 158, p. 1562—1564.
395. McEwan A. D. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, p. 603—640.
396. McIntyre M. E. The axi-symmetric convective regime for a rigidly bounded rotating annulus. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 32, p. 625—655.
397. McIntyre M. E. The flow created by a sphere moving along the axis of a rotating, slightly viscous fluid. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, p. 453—479.
398. McIntyre M. E. On Long's hypothesis of no upstream influence in uniformly stratified or rotating flow. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 52, p. 209—243.
399. Macey J. P. and Wellman E. J. Instability phenomenon associated with an enclosed rotating disk. — «Phys. Fluids», 1969, vol. 12, p. 720—722.
400. Malkus W. V. R. Precession of the earth as the cause of geomagnetism. — «Science», 1968, vol. 169, p. 259—264.
401. Matsuda T. and Sakurai T. Dynamics of the azimuthally dependent solar wind. — «Cosmic Electrodynamics», 1972, vol. 3, p. 97—115.
402. Matsuda T. and Sakurai T. Heat-up of rotating stratified fluid. — «J. Phys. Soc. Japan», 1973, vol. 34, p. 1659—1666.
403. Maxworthy T. The observed motion of a sphere through a short, rotating cylinder of fluid. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 31, p. 643—655.
404. Maxworthy T. The flow created by a sphere moving along the axis of a rotating slightly viscous fluid. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, p. 453—479.
405. Meilor G. L., Chapple P. J. and Stokes V. K. On the flow between a rotating and a stationary disk. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 31, p. 95—112.

406. Miles J. W. The oseenlet as a model for separated flow in a rotating viscous liquid. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 42, p. 207—217.
407. Miles J. W. Boundary layer separation on a sphere in a rotating flow. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 45, p. 513—526.
408. Miles J. W. Upstream influence of a dipole in rotating flow. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, p. 369—383.
409. Miles J. M. Transient motion of a dipole in a rotating flow. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 39, p. 433—442.
410. Miles J. W. Upstream influence of a dipole in a rotating flow. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 54, p. 369—383.
411. Miles J. W. Axi-symmetric rotating flow past a circular disk. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 52, p. 689—700.
412. Moore D. W. and Saffman P. G. The rise of a body through a rotating fluid in a container of finite length. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 31, p. 635—642.
413. Moore D. W. and Saffman P. G. The flow induced by the transverse motion of a thin disk in its own plane. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 39, p. 831—847.
414. Moore D. W. and Saffman P. G. The structure of free vertical shear layers in a rotating fluid and the motion produced by a slowly rising body. — «Math. Phys. Sci.», 1969, vol. 264, p. 597—634.
415. Newall A. C. Rossby wave packet interactions. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 35, p. 255—271.
416. Pandolfo J. P. and Brown P. S. Inertial oscillations in an Ekman layer containing a horizontal discontinuity surface. — «J. Mar. Res.», 1967, vol. 25, p. 10—28.
417. Pao H. P. and Kao T. W. Sources and sinks at the axis of a viscous rotating fluid. — «Phys. Fluids», 1969, vol. 12, p. 1536—1546.
418. Pedley T. J. The viscous vortex induced by a sink on the axis of a circulating fluid in the presence of a plane free surface. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 36, p. 219—238.
419. Pedlosky J. Axially symmetric motion of a stratified, rotating fluid in a spherical annulus of narrow gap. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 36, p. 401—415.
420. Pedlosky J. Linear theory of the circulation of a stratified ocean. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 35, p. 185—205.
421. Pedlosky J. A note on the role of the buoyancy layer in a rotating stratified fluid. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 48, p. 181—182.
422. Philander S. G. A. On the flow properties of a fluid between concentric spheres. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 47, p. 799—809.
423. Pollard R. T. On the generation by winds of inertial waves in the ocean. — «Deep-Sea Res.», 1970, vol. 17, p. 795—812.
424. Pritchard W. G. The motion generated by a body moving along the axis of a uniformly rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 39, p. 443—464.
425. Pritchard W. G. Solitary waves in rotating fluids. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 42, p. 64—83.
426. Rao D. B. and Simons T. J. Stability of a sloping interface in a rotating two-fluid system. — «Tellus», 1970, vol. 22, p. 493—503.
427. Rasmussen H. Numerical solutions for steady viscous linearized flow between two finite rotating disks. — «Z. angew. Math. Phys.», 1970, Bd. 21, S. 611—619.
428. Redekopp L. G. The boundary layer on a flat plate moving transversely in a rotating stratified fluid. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 46, p. 769—786.
429. Redekopp L. G. Side-wall boundary layers in rotating axial flow. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 55, p. 565—576.
430. Rhines P. G. Slow oscillations in an ocean of varying depth. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 37, pt 1, p. 161—206.
431. Rhines P. Edge, bottom and Rossby waves in a rotating stratified fluid. — «Geophys. Fluid Dyn.», 1970, vol. 1, p. 273—302.

432. Robinson A. R. Boundary layers in ocean circulation models. — «Annual Review of Fluid Mechanics», 1970, vol. 2, p. 293—312.
433. Rumiantsev V. V. On the theory of motion of rigid bodies with fluid-filled cavities. — «Appl. Math. Mech.», 1966, vol. 30, p. 57—77.
434. Sakurai T. Spin-down of Boussinesq fluid in a circular cylinder. — «J. Phys. Soc. Japan», 1969, vol. 26, p. 840—848.
435. Sakurai T. Spin-down problem of rotating stratified fluid in thermally insulated circular cylinders. — «J. Fluid Mech.», 1969, vpl. 37, p. 689—699.
436. Sakurai T., Clark A. and Clark P. A. Spin-down of a Boussinesq fluid of small Prandtl number in a circular cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 49, p. 753—773.
437. Snih H. H. and Pao H. P. Selective withdrawal in rotating fluids. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 49, pt. 3, p. 509—527.
438. Siegmann W. L. The spin-down of rotating stratified fluids. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 47, p. 689—711.
439. Smith R. The ray paths of topographic Rossby waves. — «Deep-Sea Res.», 1971, vol. 18, p. 477—484.
440. Smith R. K. The surface boundary layer of a hurricane. — «Tellus», 1968, vol. 20, p. 473—484.
441. Souzou C. Boundary layer growth on a spinning sphere. — «J. Inst. Math. Appl.», 1971, vol. 1, p. 251—259.
442. Soward A. M. Nearly symmetric kinematic and hydromagnetic dynamos. — «J. Math. Phys.», 1971, vol. 12, p. 1900—1906.
443. Stephenson C. J. Magnetohydrodynamic flow between rotating coaxial disks. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 38, p. 335—352.
444. Stewartson K. Slow oscillations of fluid in a rotating cavity in the presence of a toroidal magnetic field. — «Proc. Roy. Soc.», 1967, A 299, p. 173—187.
445. Stewartson K. On slow transverse motion of a sphere through a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 30, p. 357—370.
446. Stewartson K. On inviscid flow of a rotating fluid past an axially symmetric body using Oseen equations. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1968, vol. 21, p. 353—373.
447. Stewartson K. A note on the forward wake in a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 42, p. 219—223.
448. Stewartson K. On trapped oscillation of a rotating fluid in a thin spherical shell. — «Tellus», 1971, vol. 23, p. 506—510.
449. Stewartson K. A spectrum, continuous in discrete intervals for trapped oscillations. — «Tellus», 1972, vol. 24, p. 283—287.
450. Stewartson K. On trapped oscillations in a slightly viscous rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, p. 749—761.
451. Stewartson K. and Rickard J. A. Pathological oscillations of a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 38, p. 759—773.
452. Stone P. H. and Baker D. J. Concerning the existence of Taylor columns in atmospheres. — «Quart. J. Roy. Met. Soc.», 1968, vol. 94, p. 576—580.
453. Suess S. T. Viscous flow in a deformable rotating container. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 45, p. 189—201.
454. Tam K. K. A note on the asymptotic solution of the flow between two oppositely rotating, infinite plane disks. — «Siam J. Appl. Math.», 1969, vol. 7, p. 1305—1310.
455. Thompson R. Diurnal tides and shear instabilities in a rotating fluid. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, p. 537—552.
456. Thornley C. On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1968, vol. 21, p. 451—461.
457. Vaziri A. and Boyer D. L. Rotating flow over shallow topographies. — «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 50, p. 79—95.
458. Veronis G. Analogous behaviour of homogeneous rotating fluids and stratified, non-rotating fluids. — «Tellus», 1967, vol. 19, p. 326—335.
459. Veronis G. Effect of fluctuating winds on ocean circulation. — «Deep-Sea Res.», 1970, vol. 17, p. 421—434.

460. Veronis G. and Yang C. C. Non-linear source-sink flow in a rotating pie shaped basin. — «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 51, p. 513—527.
461. Walin G. Some aspects of time-dependent motion of a stratified fluid. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 36, p. 289—307.
462. Wang C. Y. Cylindrical tank of fluid oscillating about a state of steady rotation. — «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 41, p. 581—592.
463. Welander P. Wind-driven circulation in one- and two-layer oceans of variable depth. — «Tellus», 1968, vol. 20, p. 1—16.
464. Williams G. Thermal convection in a rotating fluid annulus. Part 1: The basic axisymmetric flow; Part 2: Classes of axisymmetric flow. — «J. Atmos. Sci.», 1967, vol. 24, p. 144—174.
465. Zung L. B. Flow induced in fluid particle suspension by an infinite rotating disk. — «Phys. Fluids», 1969, vol. 12, p. 18—23.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

Каждый из перечисленных ниже символов имеет единственное определение или интерпретацию, которая служит неизменно на протяжении всей книги. Остальные символы явно определены в каждом разделе, где они появляются, но их смысл в разных разделах различный.

### *Латинские*

- $a$  — безразмерный радиус контейнера
- $a$  — безразмерная частота возбуждений
- $A$  — потенциал силы
- $B$  — как нижний индекс обозначает оценку функции на поверхности дна
- $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении
- $C$  — кривизна
- $c_g$  — групповая скорость
- $c_p$  — фазовая скорость
- $C$  — геострофический контур
- $D$  — коэффициент диффузии
- $D$  — дифференциальный оператор
- $d$  — изменение глубины
- $e$  — эксцентриситет
- $E$  — число Экмана
- $f_R$  — «внутреннее» число Фруда
- $f(x, y)$  — уравнение верхней поверхности контейнера
- $F_R$  — число Фруда
- $F$  — преобразование Фурье
- $f$  — параметр Кориолиса
- $F$  — массовая сила
- $g$  — гравитационное ускорение
- $g(x, y)$  — уравнение поверхности дна контейнера
- $G$  — дифференциальный оператор
- $h_i$  — метрический множитель
- $h(x, y)$  — полная высота
- $H$  — истинная глубина
- $i$  —  $\sqrt{-1}$
- $i$  — индекс суммирования
- $\hat{i}$  — единичный вектор по оси OX
- $Im$  — мнимая часть
- $j$  — индекс суммирования
- $\hat{j}$  — единичный вектор по оси OY
- $k$  — индекс суммирования
- $\hat{k}$  — единичный вектор по оси OZ
- $L$  — масштаб длины
- $L$  — преобразование Лапласа
- $m$  — индекс суммирования
- $M$  — поток массы
- $n$  — индекс суммирования
- $\hat{n}$  — вектор единичной нормали
- $N$  — вынуждающая функция
- $O$  — символ порядка величины
- $p$  — редуцированное давление, давление
- $P$  — давление
- $P_n^m$  — присоединенный полином Лежандра
- $q$  — во всех формулах скорость частицы жидкости
- $q_0$  — геострофическая скорость

- $q_1$  — «внутренняя» скорость  
 $\bar{q}$  — скорость в пограничном слое  
 $Q$  — функция амплитуд скорости  
 $q, Q$  — осредненная по глубине горизонтальная скорость  
 $(r, \theta, z)$  — цилиндрические координаты  
 $\hat{r}$  — единичный радиальный вектор  
 $r$  — радиус-вектор точки  
 $Re$  — действительная часть  
 $R_E$  — число Рейнольдса  
 $R_E$  — число «Рейнольдса»  
 $s, ds$  — длина дуги и элемент длины дуги  
 $s$  — параметр преобразования Лапласа  
 $s_n$  — частотный множитель  
 $s_{n, 1}$  — фактор затухания  
 $S(x)$  — единичная шаговая функция  
 $S$  — соленость  
 $G$  — распределение источников  
 $t$  — время  
 $T$  — как нижний индекс обозначает оценку функций на верхней поверхности контейнера  
 $T$  — температура  
 $T$  — возмущение температуры  
 $\tilde{T}$  — температура стенки  
 $T$  — вихрь касательного напряжения ветра  
 $(u, v, w)$  — компоненты скорости в цилиндрических координатах  
 $u$  — отклонение скорости  
 $U$  — тангенциальная скорость на стенке  
 $U$  — однородная свободная скорость потока  
 $v$  — азимутальная компонента скорости  
 $V, dV$  — объем и элемент объема  
 $v$  — во всех формулах завихренность  
 $v$  — относительная завихренность  
 $v_a$  — абсолютная завихренность  
 $w$  — вертикальная компонента скорости  
 $w$  — осредненная по глубине вертикальная компонента  
 $W$  — скорости  
 $(x, [y, z)$  — декартовы координаты  
 $x^*$  — безразмерные координаты в пограничном слое  
 $X(y)$  — произвольная функция

#### Греческие

- $\alpha$  — угол наклона  
 $\alpha_*$  — коэффициент теплообмена  
 $\beta_*$  — объемная вязкость  
 $\beta$  — постоянная, аппроксимирующая производную параметра Кориолиса  
 $\Gamma$  — циркуляция или вихрь  
 $\delta$  — толщина пограничного слоя  
 $\delta_*(t)$  — масштабированное отклонение угловой скорости  
 $\Delta$  — малое приращение величины  
 $\varepsilon$  — число Россби  
 $\xi$  — во всех формулах координата в пограничном слое  
 $\theta$  — азимутальная угловая координата  
 $\hat{\theta}$  — единичный касательный к окружности вектор  
 $\Theta$  — сферический полярный угол  
 $\lambda$  — масштабированная частота или собственное значение  
 $\mu_*$  — динамическая вязкость  
 $\nu$  — кинематическая вязкость  
 $\xi_i$  — ортогональные криволинейные координаты

- $\rho$  — плотность жидкости
- $\rho'$  — изменение плотности
- $\sigma$  — число Прандтля
- $S$  — площадь поверхности
- $\Sigma$  — символ суммирования
- $\tau$  — долговременная переменная
- $\gamma$  — геометрический множитель
- $\varphi$  — во всех формулах функция давления
- $\varphi_0$  — геострофическое давление
- $\Phi$  — амплитуда давления
- $\chi$  — функция «тока»
- $\Psi$  — функция тока
- $\omega$  — частота возбуждения или прецессии
- $\Omega$  — частота вращения
- $\bar{\Omega}$  — однородная угловая скорость
- $\Omega(t)$  — угловая скорость, зависящая от времени

#### Русские

- $\mu$  — отношение плотностей
- $\kappa$  — теплопроводность, во все число
- $k$  — волновой вектор
- $\lambda$  — компонента напряжения
- $\bar{\lambda}$  — поверхностное напряжение

#### Особые символы

- $\bar{z}$  — комплексное сопряжение;
- $\sim$  — обозначает функции в пограничном слое
- $\sim$  — асимптотическое равенство
- $\hat{\phantom{x}}$  — означает единичный вектор
- $||$  — абсолютное значение, длина вектора
- $\bar{\phantom{x}}$  — масштабные коэффициенты
- $\langle \phantom{x} \rangle$  — осреднение по глубине
- $\approx$  — приближенное равенство
- $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$  — якобиан
- $\int_{\gamma}$  — контур интегрирования
- $\nabla$  — градиент
- $\nabla$  — поверхностный градиент

*Харвей П. Гринспен*

Теория  
вращающихся  
жидкостей

Редактор *З. И. Мироненко*  
Художник *В. С. Итальянцев*  
Художеств. редактор *В. В. Костырев*  
Технич. редактор *М. С. Костакова*  
Корректор *В. И. Гинцбург*

Сдано в набор 15/V 1975 г. Подписано к печати 21/XI 1975 г. Формат 60 × 90<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 1. Печ. л. 19. Уч.-изд. л. 21,08. Тираж 1500 экз. Индекс О.И-226. Заказ № 79. Цена 2 р. 31 к.

Гидрометеиздат, 199053, Ленинград, 2-я линия, 23.

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 196006, г. Ленинград, Московский пр., д. 91.