

Ю.И. Гагарин, К.Ю. Гагарин, В.И. Соколов

**БЫСТРЫЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ОБОБЩЁННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ**

*Yu.I. Gagarin, K.Yu. Gagarin, V.I. Sokolov*

**FAST WAVELET TRANSFORMS  
IN GENERALIZED ORTHOGONAL BASES**

*Данная статья посвящена исследованию мезомасштабных вихрей – циклонических образований в умеренных и высоких широтах с горизонтальными размерами менее 1000 км, которые зарождаются и продолжают существовать вне прямой связи с фронтальными системами синоптического масштаба. Представлена новая классификация мезомасштабных циклонов, основанная на совместном анализе синоптических карт и космических снимков облачности. Кроме того, исследуются некоторые количественные характеристики «взрывного» циклогенеза, который свойственен именно полярным циклонам.*

*Ключевые слова: мезомасштабные вихри, классификация, синоптические карты, спутниковые изображения, облачность.*

*This paper is devoted to studying such mesoscale eddies as cyclonic forms developing in the moderate and high latitudes with the horizontal extent up to 1000 km, which are born and exist independently of the synoptic scale frontal systems. In this article, a new classification of mesoscale cyclones is presented, which is based on the joint analysis of synoptic maps and satellite images of cloud systems. Besides, some quantitative characteristics of the explosive cyclogenesis, which is typical for polar cyclones, are studied.*

*Key words: mesoscale eddies, classification, synoptic maps, satellite images, cloudiness.*

В статье представлены математические модели и алгоритмы вейвлет-преобразований в ортонормированных базисах, обобщённых с быстрыми преобразованиями по функциям Уолша.

Большинство публикаций по вейвлет-преобразованиям (ВП) посвящено их описанию на уровне непрерывных функций (см., например [1, 4, 5]). Но в практических приложениях, связанных с компьютерными технологиями, используются дискретные ортонормированные ВП, из которых наиболее известными являются дискретные ВП Хаара, представленные в виде ортонормированных блочно-диагональных матриц с элементами  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

В настоящей работе предлагаются обобщённые векторно-матричные модели и алгоритмы ВП с базисами в виде дискретных функций Уолша. Для которых можно использовать быстрые алгоритмы умножения вектора на матрицу при вычислениях коэффициентов преобразования [2]. Обобщённые базисы ВП

с быстрыми алгоритмами позволяют создавать новые технологии применения ВП для целей многоитерационного сжатия и распознавания цифровых сигналов в гидрометеорологических системах наблюдения и прогноза, для которых требуются высокопроизводительные вычислительные средства.

**1. Общие матрично-блоковые формы задания дискретных вейвлет-преобразований в ортонормированных базисах**

Первоначально матрицу прямого дискретного ВП будем задавать общепринятой двух блоковой формой

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \Psi_{N/2,N}^{(1)} \\ \Psi_{N/2,N}^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где  $\Psi_{N/2,n}^{(1)}$  – блок-матрица, соответствующая низкочастотной части коэффициентов ВП;  $\Psi_{N/2,n}^{(2)}$  – блок-матрица, соответствующая высокочастотной части коэффициентов ВП.

Будем полагать, что строки  $\bar{h}^{(i)}$  матрицы  $\Psi_N$  образуют ортонормированное векторное пространство, т.е. выполняется условие

$$\left( \bar{h}^{(i)}, \bar{h}^{(j)} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В поле R вещественных чисел матрицу обратного ВП можно записать

$$\Psi_N^{-1} = \Psi_N' = \left( \left( \Psi^{(1)} \right)' \mid \left( \Psi^{(2)} \right)' \right),$$

а в поле C комплексных чисел имеем

$$\Psi_N^{-1} = \left( \Psi_N^* \right)' = \left[ \left( \Psi^{(1)*} \right)' \mid \left( \Psi^{(2)*} \right)' \right].$$

Исходя из блочной формы (1) задания матрицы, коэффициенты одномерного ВП определяются в блочно-векторном виде

$$X_N = \begin{pmatrix} X_{N/2}^{(1)} \\ X_{N/2}^{(2)} \end{pmatrix} = \Psi_N \bar{x}_N,$$

где  $\bar{x}_N$  – вектор, соответствующий последовательности отсчетов  $\{x_{(n)}\}_{n=0}^{N-1}$  цифрового сигнала. Будем полагать, что отсчеты  $\{x_{(n)}\}$  могут быть как вещественными, так и комплексными числами.

Коэффициенты двумерного ВП можно определить двумя способами, используемыми в теории синтеза быстрых ортогональных преобразований [2].

Первый способ, называемый построчно-столбцовым, записывается векторно-матричным выражением

$$[X_N] = \Psi_N [x_N] \Psi'_N, \quad (2)$$

где  $[X]$  и  $[x_N]$  – матрицы соответственно коэффициентов двумерного ВП и отсчетов сигнала.

Второй способ вычисления коэффициентов двумерных, а в общем случае многомерных преобразований, сводится к построению матрицы одномерного преобразования, представленной в виде кронекеровского произведения исходных матриц

Для двумерных ВП имеем кронекеровскую форму представления матрицы преобразования

$$\widehat{\Psi}_{N^2} = \Psi_N \otimes \Psi_N. \quad (3)$$

Тогда коэффициенты ВП определяются векторно-матричным выражением

$$X_{N^2} = (\Psi_N \otimes \Psi_N) \bar{x}_{N^2},$$

где  $X_{N^2}$  – блокочный вектор-столбец, образованный транспонированными строками матрицы  $[X_N]$  коэффициентов двумерного преобразования ВП,  $\bar{x}_{N^2}$  – блокочный вектор-столбец, образованный транспонированными строками матрицы двумерного сигнала  $[x_N]$ .

## 2. Обобщённые ортонормированные блочно-диагональные матрицы хаароподобных ВП

В соответствии с блокочной формой (1) матрицу ВП Хаара представим в виде

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \Psi_{N/2}^{(1)} \\ \Psi_{N/2}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{diag}(h_0^{(1)}, h_1^{(1)}) \\ \text{diag}(h_0^{(2)}, h_1^{(2)}) \end{pmatrix},$$

где оператор  $\text{diag}(q)$  соответствует оператору прямой суммы матриц  $q$ .

Для длины  $l = 2$  можно построить практически неограниченное количество ортонормированных базисов хаароподобных ВП.

Преобразуем матрицу  $\Psi_N$  к виду

$$\Psi_N = K_N \begin{pmatrix} \widehat{\Psi}_{N/2,n}^{(1)} \\ \widehat{\Psi}_{N/2,n}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\widehat{\Psi}^{(1)}, \widehat{\Psi}^{(2)}$  – матрицы, полученные из матриц  $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$  посредством введе-

ния нормирующего коэффициента  $K_N$ . Тогда матрица ВП Хаара примет вид

$$\Psi_N^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{diag}(1 \ 1) \\ \text{-----} \\ \text{diag}(1 \ -1) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Форма (4) позволяет сократить количество умножений при вычислении коэффициентов ВП, если ещё учесть, что нормирующий коэффициент, определяемый, например, в виде

$$K_N = \frac{1}{|\bar{h}|},$$

где  $|\bar{h}|$  – эвклидова норма базисного вектора, может быть использован только с матрицей обратного ВП

$$\Psi_N^{-1} = K_N^2 \cdot \hat{\Psi}_N^{-1}.$$

Матричную форму (4) обобщим на произвольную  $l$ -длину базового вейвлета (длину анализирующей части ВП) и количество  $l$ -матриц-блоков

$$\Psi_N = K \begin{pmatrix} \text{diag}(\bar{h}_l^{(1)}) \\ \text{-----} \\ \text{diag}(\bar{h}_l^{(2)}) \\ \text{.....} \\ \text{diag}(\bar{h}_l^{(l)}) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\bar{h}_l^{(i)} = h_0^{(i)}, h_1^{(i)}, \dots, h_{l-1}^{(i)}$  –  $l$ -компонентные векторы.

Для практических применений хаароподобных ВП из-за отсутствия циклических сдвигов базисных вейвлетов целесообразно использовать короткие ортонормированные базисные анализирующие функции. Одним из вариантов выбора ортонормированного базиса является использование прямоугольных дискретных функций Уолша, преобразования по которым, как известно, могут быть выполнены через быстрые алгоритмы, позволяющие сократить количество арифметических операций-сложений, осреднённое на один отсчёт цифрового сигнала.

Для использования быстрых алгоритмов вычисления коэффициентов таких ВП матрично-блоковую форму (6) следует привести к виду

$$\Psi_N^{(\phi)} = J_N \text{diag}(W_l^{(\phi)}), \quad i = \overline{0, (N/l) - 1}, \quad (7)$$

где  $J_N$  – матрица перестановки,  $W_N^{(\phi)}$  – факторизованная форма матрицы преобразования по функциям Уолша (ПФУ), которые могут быть упорядочены различными способами. Для ВП наиболее подходят ПФУ с упорядочением по Уолшу, т.е. по частоте. Быстрый алгоритм ПФУ может быть задан матрично-факторизованной формой [3]

$$W_l^{(\phi)} = \left( \tilde{I}_{l,l/2}^{(1)} : \tilde{I}_{l,l/2}^{(2)} \right) \times \dots \times \text{diag} \left( \tilde{I}_{4,2}^{(1)} : \tilde{I}_{4,2}^{(2)} \right) \times \text{diag} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\tilde{I}_{l,l/2}^{(1)} = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\tilde{I}_{l,l/2}^{(2)} = \text{diag} \left( (-1)^j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)_{j=0}^{(l/2)-1}$  – блочно-диагональные

слабо заполненные прямоугольные матрицы. Примечательным свойством данных алгоритмов является возможность рекурсивного обновления коэффициентов преобразования при переходе от меньших фрагментов анализируемого сигнала к большим.

Для быстрых двумерных ВП можно воспользоваться матричными формами (2), либо (3) с подстановкой вместо матриц  $\psi_N$  факторизованной формы (7).

Для базисных функций ВП Хаара форма (7) приобретает вид

$$\psi_N^{(\phi)} = J_N \text{diag} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Откуда несложно заметить, что, изменяя матрицы перестановки и базисы ВП можно построить принципиально различные методы распределения спектральных коэффициентов ВП в зависимости от специфики задач, включая сжатие и распознавание цифровой сигналов.

Результаты компьютерного моделирования приведены на рис. 1–6 для ВП на основе 4-точечного ПФУ и Добеши-4 при использовании их для сжатия неподвижных чернобелых изображений по двухитерационной технологии.



T1

Рис. 1



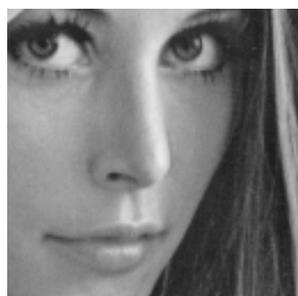
Y

Рис. 2



Y31

Рис. 3



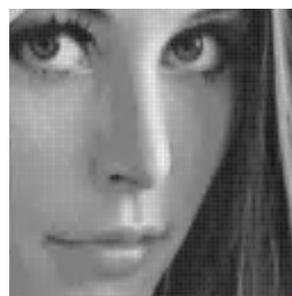
(T20 + 128)

Рис. 4



Y3

Рис. 5



(T40 + 128)

Рис. 6

Рис. 1 – исходное 128×128 изображение, рис. 2 – изображение в области ВП с базисом ПФУ4, рис. 3 – изображение в области ВП с базисом D4, рис. 4 – изображение в области ВП ПФУ4 после второй итерации сжатия, рис. 5 – изображение в области ВП D4 после второй итерации сжатия, рис. 6 – восстановленное изображение после двухитерационного сжатия.

В таблице приведены сравнительные количественные оценки показателей качества нисходящей технологии одноитерационного и двухитерационного сжатия: Ксж – коэффициента сжатия, количества арифметических операций/пиксел (А – сложений и М – умножений), Δ – средней ошибки восстановленного изображения.

Таблица

Тип и размер изображения	БазисВП	Коэффициент сжатия Ксж	Кол-во арифм. операций/пкс		Средняя ошибка восстан. изображ. Δ
			А слож.	М умн.	
ВМРфайл «Lena», N=128	Хаара	1ит. 3,6	1 1 сдв		2,4
		2ит. 5,6	1 1сдв		3,7
----«--	ПФУ4	1ит. 7,8	2 1 сдв		2,6
		2ит 8,7	2 1 сдв		3,7
---«---	D4	1ит. 4	3 4		2,6
		2ит 8	3 4		3,8

**Выводы**

1. Использование блочно-диагональных матриц для представления ортонормированных вейвлет-преобразований Хаара позволило их обобщить с базами преобразования по функциям Уолша.

2. Результаты компьютерного моделирования указывают, что с помощью ВП на основе ПФУ при сжатия изображений позволяет повысить коэффициент сжатия по сравнению с ВП Хаара и ВП Добеши при примерно одинаковом качестве восстановленных изображений и при вычислительных затратах, значительно меньших затрат ВП Добеши, но примерно одинаковых с затратами ВП Хаара.

***Литература***

1. *Блаттер Ю.* Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004
2. *Гагарин Ю.И.* Математические модели и алгоритмы быстрых ортогональных преобразований. – СПб.: изд. СПбГТУ, 1999.
3. *Гагарин Ю.И., Гагарин К.Ю.* Обобщённые блочно-рекурсивные и факторизованные формы матриц преобразований прямоугольными функциями Уолша // Тр. СПбГТУ, 1997, сер. «ВТ, автоматика, РЭА», № 469, с. 115–119.
4. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
5. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – М.: Триумф, 2003.